Quelques coups de projecteurs sur les travaux de Jacques Tits
(à l'occasion de la remise du prix Wolf)

Alain Valette

21 mars 1994

Préambule du 1$^{\text{er}}$ septembre 2008

Début 1994, Etienne Ghys me demandait, pour la Société Mathématique de France, un article sur les travaux de Jacques Tits, qui venait de se voir décerner le prix Wolf. L'article en question est paru dans le numéro 61 de la Gazette des Mathématiciens *(1994), pages 61-79.*

A l'époque, je tapais encore mes articles en Word, et surtout Internet n'existait pas ; joignons-y le caractère éphémère d'une publication comme la Gazette, *plusieurs raisons ont concouru à rendre mon article rapidement indisponible. Je l'ai exhumé et relu en avril 2008, après que le prix Abel ait été attribué à Jacques Tits, conjointement avec John Thompson. J'ai eu la faiblesse de croire que mon article n'avait pas trop mal vieilli, et j'ai décidé de le faire re-taper en LaTeX, pour qu'il puisse servir de modeste introduction aux travaux de ce grand Monsieur. Merci à Cécile Cheikhchoukh (IHÉS) qui a assuré la dactylographie avec son efficacité coutumière.*

1 Introduction

Un article sur les travaux de Jacques Tits par quelqu'un qui se considère comme analyste ? Oui, cela peut se concevoir, dans la mesure où, de nos jours, il est impossible de travailler en analyse harmonique ou en représentations de groupes sans rencontrer Tits tôt ou tard. Que l'on s'intéresse aux groupes de Lie réels, aux groupes algébriques sur un corps quelconque, ou aux groupes simples finis, les contributions de Tits jouent un rôle central.

Au vu de ces premières lignes, un lecteur qui ne connaîtrait pas Tits pourrait penser que celui-ci est algébriste ; or, s'il fallait absolument coller à Tits une étiquette autre que celle de mathématicien, ce serait plutôt celle de géomètre qui lui conviendrait. En effet, pour lui, les groupes apparaissent moins comme groupes abstraits que comme groupes d'automorphismes de structures géométriques ou combinatoires. Il assume d'ailleurs la paternité de certaines structures géométrico-combinatoires fort riches – les immeubles – qui ont permis la compréhension de la structure fine des groupes algébriques simples (spécialement sur les corps locaux) et qui, même sur des sujets plus classiques comme les groupes de Lie simples réels et les groupes simples finis, ont imposé un nouveau point de vue, à la fois fécond et unificateur.

Par l'importance et l'esprit de ses travaux, Jacques Tits apparaît pour moi comme le successeur naturel d'Elie Cartan ; les deux maîtres se rejoignent d'ailleurs par leur exploitation systématique de l'homogénéité des structures géométriques, ainsi que par leur souci constant de classification.

Né en 1930, Jacques Tits est l'auteur d'environ 170 articles. Il serait donc fastidieux de se lancer dans un compte-rendu analytique de son œuvre. Je choisirai donc de donner une description hautement impressionniste de ses travaux, inspirée avant tout par mes goûts personnels.

2 Le théorème de l'Alternative

"Tout est bon chez elle, y a rien à jeter ;
Sur l'île déserte il faut tout emporter."
(Georges Brassens)

Si malgré tout j'étais obligé d'isoler dans l'œuvre de Tits un unique résultat avant de partir pour l'île déserte, je choisirais le Théorème de l'Alternative, que Tits a démontré en 1972 [5]. En effet, ce théorème remplit pour moi tous les critères des belles mathématiques : un résultat profond, un énoncé simple (qu'on peut présenter même au niveau Maîtrise), une preuve qui utilise toute une variété de techniques, une liste impressionnante de corollaires.

Théorème de l'Alternative. *Soit Γ un groupe linéaire (c'est-à-dire un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$, pour un certain $n \geq 1$ et un certain corps commutatif $\mathbb{K}$). On suppose soit que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est nulle, soit que Γ est finiment engendré. On a alors l'alternative suivante : ou bien Γ est virtuellement résoluble, ou bien Γ contient le groupe libre sur deux générateurs.*

On rappelle qu'un groupe Γ est *virtuellement résoluble* (resp. *virtuellement nilpotent*) si Γ possède un sous-groupe d'indice fini qui est résoluble (resp. nilpotent). Il est facile de vérifier qu'un groupe libre sur au moins deux générateurs n'est pas résoluble et, en utilisant le fait que tout sous-groupe d'indice fini d'un groupe libre non abélien est encore libre non abélien, qu'un tel groupe libre n'est pas non plus virtuellement résoluble. Ceci pour dire que, dans le théorème ci-dessus, on est bien en présence d'une alternative. Intuitivement, le théorème signifie qu'un groupe linéaire, ou bien est obtenu par des extensions successives de groupes abéliens ou finis, ou bien contient un sous-groupe qui est "le moins commutatif possible", c'est-à-dire libre. Notons que la restriction soit à la caractéristique 0, soit au cas de génération finie, ne peut être levée : si $\mathbb{K}$ est la clôture algébrique d'un corps fini alors, pour $n \geq 2$, le groupe $\Gamma = SL_n(\mathbb{K})$ n'est pas virtuellement résoluble (car il est presque simple), et ne peut contenir le groupe libre $\mathbb{L}_2$ sur 2 générateurs (car c'est un groupe de torsion)[1].

La preuve de l'Alternative repose – entre autre – sur un lemme très simple qui assure qu'un groupe est libre ; ce lemme remonte à F. Klein (qui l'appelait "der Process der Ineinanderschiebung" [42]), et a été retrouvé par Tits ; depuis, ce lemme a été popularisé (voir par exemple [40]) sous le nom de

Lemme "du ping-pong". *Si a, b sont 2 permutations d'un ensemble X, et s'il existe deux parties disjointes non vides A, B de X telles que $a^m(B) \subseteq A$, $B^n(A) \subseteq B$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, alors le sous-groupe du groupe symétrique de X engendré par a et b est libre sur a et b.*

Joint à la classification des isométries du plan hyperbolique, ce lemme suffit essentiellement à démontrer l'Alternative pour les sous-groupes de $PSL_2(\mathbb{R})$ (voir [40]), en utilisant la dynamique des isométries sur le cercle X à l'infini du plan hyperbolique réel ; ainsi, si a et b sont des isométries paraboliques ou hyperboliques sans point fixe commun sur X, on applique le lemme ping-pong à des voisinages A et B disjoints des points fixes de a et b, pour conclure que, pour m, n assez grands, a^m et b^n engendrent une copie de $\mathbb{L}_2$. Bien sûr, la situation est simplifiée en dimension 2 par le fait que le stabilisateur dans $PSL_2(\mathbb{R})$ d'un point du plan hyperbolique réel est isomorphe à $PSO(2)$, donc est abélien ; les sous-groupes formés d'isométries elliptiques ne font donc pas problème.

La situation change dès qu'on remplace $PSL_2(\mathbb{R})$ par $PSL_2(\mathbb{C})$, le groupe des isométries préservant l'orientation de l'espace hyperbolique réel de dimension 3. Ici les stabilisateurs des points sont isomorphes à $PSU(2)$, et une des difficultés consiste à démontrer l'Alternative pour un sous-groupe Γ de $PSU(2)$: les éléments de Γ sont des isométries elliptiques (c'est-à-dire conjuguées à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, avec $|\lambda| = 1$), et on ne peut plus faire appel à un argument de ping-pong basé sur la dynamique des isométries sur la sphère à l'infini. Partant de la constatation que la distinction entre isométries elliptiques et hyperboliques n'est pas une notion purement algébrique (puisqu'elle fait appel au module d'un nombre complexe), Tits introduit une idée (d)étonnante, qui consiste à faire "exploser" le groupe Γ au moyen d'un automorphisme sauvage de $\mathbb{C}$; par exemple, si $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ est un élément de $\Gamma \subseteq PSU(2)$, et si λ est transcendant, on trouve un automorphisme α de $\mathbb{C}$ tel que $|\alpha(\lambda)| \neq 1$. Donc, on peut remplacer Γ par $\alpha(\Gamma)$, qui contient l'élément *hyperbolique* $\alpha(g)$. Ce procédé a bien sûr ses limites : si λ est un nombre algébrique dont tous les conjugués sont de module 1 (par exemple $\lambda = \frac{3+4i}{5}$), on ne peut transformer l'élément

[1] On sait aussi [43] que l'Alternative est fausse pour les sous-groupes de $GL_n(\mathbb{D})$, où $\mathbb{D}$ est une algèbre à division non commutative.

elliptique g en un hyperbolique. Pour passer outre, Tits introduit un lemme remarquable (lemme 4.1 de [5]) qui permet de changer de corps en plongeant $\mathbb{K}$ dans un corps local non nécessairement archimédien (même si $\mathbb{K}$ est donné comme sous-corps de $\mathbb{C}$) :

Lemme. *Soit $\mathbb{K}$ un corps finiment engendré. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ n'est pas une racine de l'unité dans $\mathbb{K}$, il existe une extension $\mathbb{F}$ de $\mathbb{K}$ munie d'une valeur absolue $|\cdot|$ telle que $|\lambda| \neq 1$.*

On voit donc que, pour démontrer l'Alternative pour les sous-groupes de $SL_2(\mathbb{K})$, on se ramène à la démontrer pour les sous-groupes de $SL_2(\mathbb{F})$ où $\mathbb{F}$ est un corps valué ; dans ce contexte, on peut utiliser la dynamique de l'action de $SL_2(\mathbb{F})$ sur la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$, où on sera susceptible d'utiliser le lemme du ping-pong.

Pour démontrer l'Alternative pour les sous-groupes Γ de $GL_n(\mathbb{F})$, l'idée est aussi d'étudier la dynamique de l'action sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F})$ à $n-1$ dimensions. Si $g \in \Gamma$ est un élément diagonalisable sur $\mathbb{F}$ tel que, pour g et g^{-1}, la multiplicité de la valeur propre de plus grande valeur absolue soit 1, alors la dynamique de g est très semblable à celle d'une isométrie hyperbolique du plan hyperbolique réel : g a exactement un point fixe attracteur et un point fixe répulseur sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F})$. Sinon, il faut être prêt à modifier la représentation qui définit Γ ; ainsi, si la somme des multiplicités des valeur propres de plus grande valeur absolue de g vaut k alors, dans la puissance extérieure k-ième de la représentation définissante, g aura un unique point fixe attracteur sur $\mathbb{P}^{N-1}(\mathbb{F})$, avec $N = \binom{n}{k}$.

Parlons maintenant des corollaires de l'Alternative. Rappelons qu'un groupe Γ est *moyennable* si toute action affine de Γ sur un convexe compact non vide d'un espace vectoriel topologique séparé possède un point fixe. Les groupes finis sont trivialement moyennables, et les groupes abéliens le sont par le théorème de Markoff-Kakutani. Il est facile de vérifier que la moyennabilité est préservée par suites exactes courtes ; donc les groupes virtuellement résolubles sont moyennables. Dans son article fondamental [50] de 1929, von Neumann montre que la moyennabilité est préservée par passage aux sous-groupes, et que $\mathbb{L}_2$ n'est pas moyennable ; donc un groupe qui contient une copie de $\mathbb{L}_2$ n'est pas moyennable ; von Neumann demande si un groupe finiment engendré et non moyennable contient nécessairement une copie de $\mathbb{L}_2$. Le théorème de Tits montre que la réponse est affirmative pour les groupes linéaires. Par la suite, Ol'shanskii [51] a montré que la réponse est négative en général, et Gromov [39] a montré que $\mathbb{L}_2$ possède une infinité non dénombrable de quotients non moyennables qui sont des groupes de torsion, donc qui ne peuvent contenir $\mathbb{L}_2$. La question de von Neumann est toujours ouverte pour les groupes de présentation finie[2].

[2](Note de septemblre 2008) : Une réponse négative a été donnée en 2002 par A.Yu Ol'shanskii et M.V. Sapir (Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* **96** (2002), 43-169).

Si Γ est un groupe finiment engendré où l'on a fait choix d'une partie génératrice finie S, la *longueur* $\ell(g)$ d'un élément g de Γ est le nombre minimal de lettres de $(S \cup S^{-1}) - \{1\}$ nécessaires pour épeler g. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $b(n)$ le nombre d'éléments g de Γ tels que $\ell(g) \leq n$; la fonction $n \to b(n)$ s'appelle la *fonction de croissance*[3] de Γ. Pour le groupe libre $\mathbb{L}_N$ sur N générateurs $a_1, \ldots, a_N$, avec $S = \{a_1, \ldots, a_N\}$, on a

$$b(n) = \frac{N(2N-1)^n - 1}{N-1} \, .$$

La notion de croissance d'un groupe Γ est due indépendamment à Svarc [57] et Milnor [45]. On dit que Γ est *à croissance polynomiale* s'il existe deux constantes C, $d > 0$ telles que $b(n) \leq C \cdot n^d$ pour tout n, et que Γ est *à croissance exponentielle* s'il existe deux constantes C, $\alpha > 0$ telles que $b(n) \geq C \cdot e^{\alpha n}$ pour tout n. Wolf avait montré [61] qu'un groupe presque nilpotent est à croissance polynomiale[4], et avait demandé si un groupe qui n'est pas à croissance exponentielle est nécessairement à croissance polynomiale. L'Alternative montre que la réponse est affirmative pour les groupes linéaires : en effet, un groupe linéaire qui n'est pas à croissance exponentielle ne peut contenir $\mathbb{L}_2$, donc est nécessairement virtuellement résoluble ; or un groupe virtuellement résoluble qui n'est pas virtuellement nilpotent est à croissance exponentielle [46], [61], [13]. Ce résultat de Tits a ouvert la route au fameux théorème de Gromov [38] qui affirme qu'un groupe à croissance polynomiale est nécessairement virtuellement nilpotent ; l'Alternative joue d'ailleurs un rôle crucial dans la preuve de Gromov. Des groupes à croissance intermédiaire (ni polynomiale, ni exponentielle) ont été construits par la suite par Grigorchuk [37].

3 Le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple, vu comme groupe abstrait

La structure des groupes classiques ($SL_n(\mathbb{K})$, $Sp_{2n}(\mathbb{K})$, groupes d'isométries de formes quadratiques, de formes hermitiennes,...) est détaillée dans les traités d'Artin [19] et de Dieudonné [33]. Les problèmes de simplicité, ainsi que de classification des isomorphismes et des automorphismes y sont étudiés au coup par coup. Dans [2] et [7] (ce dernier article en collaboration avec Armand Borel), Tits obtient des résultats qui fournissent quasiment tous les résultats "classiques" comme cas particuliers.

Si G est un groupe algébrique (absolument presque) simple défini sur un corps $\mathbb{K}$, on note $G(\mathbb{K})$ le groupe des points rationnels sur $\mathbb{K}$. Le théorème principal de [2] affirme qu'en général $G(\mathbb{K})$ contient un "gros"[5] sous-groupe G^+

[3] Il y a là un abus évident de terminologie, puisque $b(\cdot)$ dépend du choix de la partie génératrice S. Néanmoins, on montre facilement que les fonctions de croissance b_1, b_2 associées à deux parties génératrices finies S_1, S_2 de Γ sont liées par une double inégalité $b_1(n/c) \leq b_2(n) \leq b_1(cn)$ pour un certain $c > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

[4] Dans ce cas, la formule donnant le degré exact de croissance de $b(\cdot)$ est due à Bass [21].

[5] "Gros" doit se comprendre comme suit : si $\mathbb{K}$ est infini, G^+ est Zariski-dense dans $G(\mathbb{K})$.

qui est simple modulo son centre, sauf dans quelques cas entièrement classés, à corps $\mathbb{K}$ petit. Plus précisément, on a le

Théorème. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ayant au moins 4 éléments. Le sous-groupe G^+ de $G(\mathbb{K})$ engendré par les $\mathbb{K}$-sous-groupes unipotents déployés de G est simple modulo son centre.*

Ce théorème de simplicité est lié à l'existence dans $G(\mathbb{K})$ de ce que Tits appelle une BN-paire, et que tout le monde appelle dorénavant *système de Tits*, suivant Bourbaki [24] ; nous y reviendrons au §5.

Le point de vue adopté dans [7] est de considérer les homomorphismes entre groupes algébriques, et pas seulement les isomorphismes ou automorphismes.

Théorème. *Si G' est un groupe algébrique simple de type adjoint défini sur un corps $\mathbb{K}'$, et $\alpha : G(\mathbb{K}) \to G'(\mathbb{K}')$ un homomorphisme de groupes abstraits à image Zariski-dense, alors il existe un plongement $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ tel que α est obtenu comme composé de l'homomorphisme $G(\mathbb{K}) \to \phi G(\mathbb{K}')$ (où ϕG est le groupe algébrique sur $\mathbb{K}'$ obtenu via le changement de base ϕ), et d'une isogénie $\phi G \to G'$ définie sur $\mathbb{K}'$* [6].

Ce résultat est à rapprocher de la super-rigidité de Margulis, complétée par Corlette-Gromov-Schoen (voir [10], [44], [62], ou [52] pour un exposé récent). En effet, soient $\mathbb{K}$ le corps des réels et $\mathbb{K}'$ un corps localement compact ; on suppose que $G(\mathbb{R})$ est non compact et n'est localement isomorphe ni à $SO(n,1)$ ni à $SU(n,1)$; soit Γ un réseau dans $G(\mathbb{K})$; alors un homomorphisme $\alpha : \Gamma \to G'(\mathbb{K}')$ dont l'image est Zariski-dense mais non relativement compacte pour la topologie localement compacte de $G'(\mathbb{K}')$, se prolonge à $G(\mathbb{R})$. Un tel α est donc décrit par le résultat de Borel-Tits (en particulier, si $\mathbb{K}'$ est non archimédien, il n'y a pas de plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}'$, par [7], donc un homomorphisme $\Gamma \to G'(\mathbb{K}')$ est nécessairement à image relativement compacte).

A propos de la super-rigidité de Margulis, rappelons qu'un des corollaires célèbres de la super-rigidité est l'arithméticité des réseaux : si Γ est un réseau dans un groupe $G(\mathbb{R})$ comme ci-dessus, il existe un groupe algébrique semi-simple H défini sur $\mathbb{Q}$ et un homomorphisme $\psi : H(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R})$, propre, continu et surjectif, tels que Γ est commensurable à $\psi(H(\mathbb{Z}))$, où $H(\mathbb{Z})$ est le groupe des points entiers de H. Or les groupes algébriques semi-simples définis sur $\mathbb{Q}$ sont classés [3]. Par ce biais, le théorème d'arithméticité de Margulis peut être vu comme un résultat de classification, à commensurabilité près, des réseaux dans les groupes de Lie simples réels non compacts et distincts de $SO(n,1)$, $SU(n,1)$.

[6] Rappelons qu'il est permis de penser à une isogénie comme à un analogue algébrique d'un revêtement fini.

4 Arbres et arbres réels

"Auprès de mon arbre, je vivais heureux..."
(Georges Brassens)

Un *arbre* est un complexe simplicial de dimension 1, connexe et simplement connexe. L'intérêt de Tits pour ces graphes vient du fait que les arbres où tout sommet est de degré 2 au moins sont exactement les immeubles affines de dimension 1 (voir §5) ; on sait aussi que, si $\mathbb{K}$ est un corps à valuation discrète, le groupe $SL_2(\mathbb{K})$ agit proprement sur l'arbre homogène de degré $q+1$, où q est l'ordre du corps résiduel de $\mathbb{K}$; cette action est transitive sur les arêtes géométriques, et a deux orbites sur les sommets (voir [56]).

Tits fut le premier à étudier systématiquement le groupe des automorphismes d'un arbre, dans les deux articles [4] et [11]. Dans [4], il démontre que les automorphismes d'un arbre X se répartissent en trois types très simples :

- les *rotations*, ou *automorphismes elliptiques* : ce sont les automorphismes de X qui fixent au moins un sommet de X ;
- les *inversions* : ce sont les automorphismes de X qui permutent deux sommets voisins de X (si nécessaire, on peut les ramener à des automorphismes elliptiques, en remplaçant X par son premier subdivisé barycentrique) ;
- les *translations*, ou *automorphismes hyperboliques* : ce sont les automorphismes de X qui ne fixent ni sommet ni arête de X ; on montre qu'un tel automorphisme g stabilise un unique sous-arbre de X isomorphe à la chaîne doublement infinie, le long duquel g agit par translation.

Tits s'intéresse à la structure du groupe $G = \mathrm{Aut}\, X$ des automorphismes de X, et montre qu'elle présente des similitudes avec celle des groupes algébriques simples définis sur un corps. Avant d'énoncer le résultat principal, rappelons qu'une *demi-droite* d'un arbre X est une chaîne simplement infinie dans X ; deux demi-droites de X sont *équivalentes* si leur intersection contient une demi-droite ; un *bout* de X est une classe d'équivalence de demi-droites.

Théorème. *Notons G^+ le sous-groupe de G engendré par les stabilisateurs des sommets de X. Le groupe quotient G/G^+ est un produit libre de groupes cycliques infinis et de groupes à deux éléments. Si G ne conserve aucun sous-arbre propre de X et aucun bout de X, alors G^+ est un groupe simple.*

L'étude des groupes d'automorphismes d'arbres et de leurs sous-groupes a reçu de nombreux prolongements, voir par exemple [22]. D'autre part, les résultats de Tits sont aussi à l'origine de *l'analyse harmonique sur les arbres*, inaugurée par les travaux de Cartier [28], et qui a connu depuis d'importants développements (comme en témoignent les volumineux textes [31] et [34]).

Dans l'article [11], Tits introduit une classe remarquable d'espaces métriques : les *arbres réels*. Un arbre réel est un espace métrique entre deux points duquel passe un arc unique, qui de plus est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$. Un arbre est canoniquement un arbre réel, si on remplace chaque arête par une copie de $[0, 1]$ et si on prolonge de manière naturelle la métrique combinatoire de l'arbre. Mais il y a bien d'autres exemples, comme le plan euclidien muni de la métrique des chemins de fer français[7] : cet exemple montre déjà qu'en général, un arbre réel n'est pas localement compact ; pour un autre exemple, beaucoup plus homogène celui-là, le lecteur pourra essayer de se représenter $\mathbb{R} * \mathbb{R}$, produit libre de 2 copies de la droite réelle : ce dernier exemple montre que les notions de sommets et d'arêtes perdent leur sens dans un arbre réel.

Tits montre que, si $\mathbb{K}$ est un corps muni d'une valuation non nécessairement discrète, il existe une action isométrique de $SL_2(\mathbb{K})$ sur un arbre réel ; dans le cas où la valuation est discrète, on retrouve l'action habituelle de $SL_2(\mathbb{K})$ sur son arbre.

Si X est un arbre réel, les isométries de X se répartissent en deux classes : les *isométries elliptiques*, qui possèdent un point fixe, et les *isométries hyperboliques*, qui n'en possèdent pas ; une isométrie hyperbolique laisse invariante l'image de $\mathbb{R}$ par un plongement isométrique, le long de laquelle elle agit par translation.

Tits démontre qu'un groupe virtuellement résoluble agissant par isométries sur un arbre réel complet X [8] fixe un point de X, ou un bout de X, ou une paire de bouts de X. Ce résultat a pu être précisé dans [32], [49], [54], sous forme d'une "Alternative de Tits" qui s'énonce comme suit. Soit Γ un groupe agissant par isométries sur un arbre réel X ; si Γ ne fixe ni point, ni bout, ni paire de bouts de X, alors Γ contient une copie de $\mathbb{L}_2$ qui agit librement et proprement discontinûment sur X.

Les arbres réels ont joué un grand rôle dans l'étude de l'espace $\mathcal{T}(M)$ des structures hyperboliques sur une variété riemannienne compacte M à courbure sectionnelle -1 : ils apparaissent comme points à l'infini dans la compactification à la Thurston de $\mathcal{T}(M)$; (travaux de Morgan-Shalen [47], Bestvina [23], Paulin [53]). Ceci a conduit aux travaux récents culminant avec les résultats de E. Rips sur les actions de groupes sur les arbres réels (voir [35]) : un groupe finiment engendré agit librement sur un arbre réel si et seulement si c'est un produit libre de groupes abéliens libres et de groupes de surface[9].

[7] Notons P pour Paris. Si d désigne la distance usuelle du plan, on définit *la métrique des chemins de fer français* par $d_{\mathrm{SNCF}}(x, y) = d(x, y)$ si x, y sont sur la même demi-droite issue de P, et $d_{\mathrm{SNCF}}(x, y) = d(x, P) + d(P, y)$ sinon. Noter que P n'a aucun voisinage compact.

[8] La complétion d'un arbre réel est encore un arbre réel [47] ; l'hypothèse de complétude n'est donc pas restrictive.

[9] Compléments : un théorème de simplicité pour le groupe des isométries d'un arbre réel, analogue à celui énoncé plus haut pour les arbres ordinaires, a été obtenu par Tignol [58] ; l'analyse harmonique sur un arbre réel semble ne pas avoir été développée : nous ne connaissons que [59] dans cette direction.

5 Immeubles et systèmes de Tits

"L'un veut son or, l'autre ses meubles,
Qui ses bijoux, qui ses bibelots,
Qui ses forêts, qui ses immeubles,
Qui ses tapis, qui ses tableaux."
(Brassens)

On ne peut présenter les travaux de Tits sans mentionner la théorie des immeubles, qui sous-tend la plupart de ses travaux depuis 1955. La difficulté, pour le présentateur, vient de ce qu'il s'agit de la partie la moins classique, c'est-à-dire la plus novatrice, de son œuvre. C'est une des raisons pour lesquelles j'ai gardé les spéculations immobilières pour la section finale de cet article ; une autre est que la définition-même d'un immeuble n'est pas simple (dans le livre de Tits [8] comme dans les traités de Brown [25] et Ronan [55], cette définition n'apparaît pas avant le 3ème Chapitre).

Néanmoins, une approche des immeubles aussi concise qu'efficace figure dans la remarquable contribution [9] de Tits aux Actes du Congrès International de Vancouver (1974) ; je m'en suis inspiré, peut-être outrageusement, pour tenter de donner au lecteur une idée de ce que sont ces objets.

Commençons par ce que nous appellerons la *construction de base*. Soient Σ un simplexe et G un groupe. A chaque facette σ de Σ, on associe un sous-groupe G_σ de G, en exigeant $G_{\sigma\vee\tau} = G_\sigma \cap G_\tau$ quelles que soient σ et τ (où $\sigma \vee \tau$ désigne l'enveloppe convexe de $\sigma \cup \tau$)[10]. Il existe alors un unique complexe simplicial C contenant Σ, muni d'une action de G telle que le stabilisateur d'une facette σ de Σ soit exactement G_σ et que deux facettes distinctes de Σ ne soient pas dans la même orbite de G, et minimal pour ces propriétés : on prend $C = (G \times \Sigma)/\sim$ où $(g, x) \sim (g', x')$ si $x = x'$ et $g^{-1}g' \in G_x$.

Voici un premier exemple de cette construction. Un *groupe de Coxeter* est un couple (W, S) où S est un ensemble fini et W est un groupe donné par une présentation du type $W = \langle S : s^2 = 1 = (st)^{m_{st}}$ pour tous $s, t \in S$, $s \neq t\rangle$, où $m_{st} = m_{ts}$ appartient à $\{\infty, 2, 3, 4, \ldots\}$. Si (W, S) est un groupe de Coxeter, notons Σ le simplexe de dimension $|S| - 1$ d'ensemble de sommets S. A toute facette σ de Σ, on associe le sous-groupe $W_\sigma = \langle s : s \notin \sigma\rangle$. Le complexe obtenu par la construction ci-dessus est un *complexe de Coxeter*.

Voici quelques exemples de complexes de Coxeter. Si $S = \{1, 2\}$ et $m_{12} < \infty$, le complexe C est un $2m_{12}$-gone ; si $m_{12} = \infty$, alors C est la chaîne doublement infinie. Si $S = \{1, 2, 3\}$ et $m_{12} = 2$, $m_{23} = 3$, $m_{13} = 5$, le complexe C est isomorphe à la subdivision barycentrique de l'icosaèdre ; si $m_{12} = m_{23} = m_{13} = 3$, alors C est isomorphe au pavage du plan euclidien par des triangles equilatéraux.

Posons $|S| = n$. Si le groupe de Coxeter (W, S) est fini, le complexe C se réalise comme une triangulation de la sphère S^{n-1} sur laquelle W agit par

[10] Il est clair au vu de cette règle qu'il suffit de se donner les sous-groupes attachés aux sommets de S.

isométries ; on dit alors que C est *sphérique*. Si le complexe C se réalise comme triangulation de l'espace euclidien E^{n-1} sur lequel W agit par isométries affines, on dira que C est *euclidien*, ou encore *affine*[11].

Nous supposerons toujours dans ce qui suit que les groupes de Coxeter sont *irréductibles*, ce qui veut dire que la partie génératrice S ne peut être partagée en deux parties S_1, S_2 non vides qui commutent entre elles.

Définition. Un *immeuble* est un complexe simplicial Δ qui est la réunion de sous-complexes appelés *appartements*, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) tout appartement est un complexe de Coxeter ;

b) pour toute paire σ, τ de simplexes de Δ, il existe un appartement qui contient simultanément σ et τ ;

c) si A, A' sont deux appartements contenant les simplexes σ et τ, il existe un isomorphisme de A sur A' qui fixe σ et τ ponctuellement.

La condition c) nous permet de parler *du* complexe de Coxeter C associé à un immeuble ; si C est sphérique, l'immeuble est dit *sphérique*. Si C est affine, on parle d'immeuble *affine*, ou d'immeuble *euclidien*, ou encore d'immeuble *de Bruhat-Tits*, par référence au monumental article [6] de François Bruhat et Jacques Tits, où ces immeubles sont étudiés de manière exhaustive ; nous y reviendrons plus bas.

Un exemple important d'immeuble sphérique s'obtient comme suit : partons d'un corps $\mathbb{K}$, posons $G = SL_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 3)$, et considérons un simplexe Σ de dimension $n-2$, dont les sommets sont numérotés de 1 à $n-1$; au k-ième sommet nous attachons le groupe $G_k = \{(g_{ij}) \in G : g_{ij} = 0 \text{ pour } i > k \geq j\}$. Le complexe Δ obtenu par la construction de base est l'immeuble sphérique de G, qu'on peut voir aussi comme "complexe de drapeaux" de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$: les sommets sont les sous-espaces projectifs propres de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$, et les *chambres* (c'est-à-dire les simplexes de dimension maximale) sont les drapaux maximaux : point $\subset$ droite $\subset$ plan...[12]. Pour identifier les appartements de Δ, nous disposons déjà d'un groupe de Coxeter, à savoir le groupe de Weyl W_n de SL_n, qui n'est autre que le groupe symétrique sur n lettres ; regardons W_n comme le groupe d'automorphismes du graphe complet sur n sommets (dans la philosophie de Tits, ce graphe apparaît comme "l'espace projectif de dimension $n-1$ sur le corps à un élément", et W_n comme "SL_n du corps à un élément"). Le complexe de Coxeter associé à W_n n'est autre que la subdivision barycentrique de la surface du simplexe régulier de dimension n. Les appartements de l'immeuble Δ sont en bijection avec les systèmes de n points en position générale dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.

[11] Les groupes de Coxeter donnant lieu à des complexes sphériques ou affines sont classés, grâce aux travaux de Coxeter et Witt (voir [24]).

[12] Le lecteur est vivement invité à se faire un dessin, dans le cas le plus simple qui est $G = SL_3(\mathbb{F}_2)$. L'immeuble est alors un graphe biparti sur 14 sommets, dont les 28 cycles de longueur 6 correspondent aux appartements.

Définition. Soit G un groupe. Une *BN-paire*, ou un *système de Tits* dans G, est la donnée de deux sous-groupes B, N tels que

1) $B \cup N$ engendre G ;
2) $B \cap N$ est distingué dans N ;
3) le *groupe de Weyl* $W = N/B \cap N$ possède un système générateur S formé d'involutions ;
4) pour tous $s \in S$, $w \in W$, on a $sBw \subseteq BsB \cup BswB$;
5) pour tous $s \in S$: $sBs \neq B$.

Les conjugués de B dans G s'appellent *sous-groupes de Borel* ; les sous-groupes contenant un sous-groupe de Borel sont dits *paraboliques.*

Dans l'exemple $G = SL_n(\mathbb{K})$, on prendra pour B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, et pour N le normalisateur du sous-groupe des matrices diagonales.

Soit G un groupe muni d'un système de Tits ; pour $X \subseteq S$, on note W_X le sous-groupe de W engendré par X, et on pose $G_X = BW_XB$. On montre (voir [24]) que G_X est un sous-groupe de G, et que l'application $X \to G_X$ est une bijection préservant l'inclusion de l'ensemble des parties de S sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G qui contiennent B. Considérons le simplexe abstrait Σ dont les facettes sont exactement les parties de S ; la construction de base fournit *l'immeuble associé au système de Tits.* Dès 1959, Tits [1] a montré que, si G est un groupe algébrique simple défini sur un corps $\mathbb{K}$, alors $G(\mathbb{K})$ possède une BN-paire avec groupe de Weyl fini, ce qui permet de construire un immeuble sphérique $\Delta(G, \mathbb{K})$.

Disons qu'un immeuble Δ est *épais* si toute facette de codimension 1 de Δ est contenue dans au moins 3 chambres. Le livre [8] de Tits est essentiellement consacré à la preuve du résultat suivant, que nous formulons sous une forme volontairement imprécise.

Théorème. 1) *Si Δ est un immeuble sphérique épais de dimension au moins 2, il existe un corps $\mathbb{K}$ et un groupe algébrique simple G défini sur $\mathbb{K}$ tels que $\Delta = \Delta(G, \mathbb{K})$;*

2) *Soient $\mathbb{K}, \mathbb{K}'$ des corps (de caractéristique ni 2, ni 3), et G, G' des groupes algébriques simples de type adjoint définis respectivement sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$. Supposons que $\Delta(G, \mathbb{K})$ et $\Delta(G', \mathbb{K}')$ soient de dimension au moins 1. Tout isomorphisme de $\Delta(G, \mathbb{K})$ sur $\Delta(G', \mathbb{K}')$ provient d'un isomorphisme de $G(\mathbb{K})$ sur $G'(\mathbb{K}')$ (et donc est décrit par le théorème de Borel-Tits du* §3*).*

Ce théorème est une généralisation profonde du "théorème fondamental de la géométrie projective" [19] : un espace projectif abstrait de dimension au moins 3 provient d'un corps (non nécessairement commutatif) ; de plus, une collinéation bijective entre deux espaces projectifs de dimension au moins 2 sur des corps provient nécessairement d'un isomorphisme de corps et d'une application linéaire relativement à cet isomorphisme. L'existence de plans projectifs non desarguésiens est responsable de la présence d'immeubles sphériques de dimension 1 qui ne sont pas de la forme $\Delta(G, \mathbb{K})$.

En 1965, Iwahori et Matsumoto [41] font une importante découverte : si $\mathbb{K}$ est un corps local non archimédien, et G un groupe algébrique simple défini sur $\mathbb{K}$, alors $G(\mathbb{K})$ possède une BN-paire avec groupe de Weyl *affine*, donc distincte de la BN-paire à groupe de Weyl fini mentionnée ci-dessus[13]. A partir de $G(\mathbb{K})$ on construit donc *deux* immeubles : un immeuble sphérique, comme précédemment, et un immeuble affine, de dimension supérieure de 1 à celle de l'immeuble sphérique.

Prenons comme exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$, le corps des p-adiques, et $G = SL_n$. Le système de Tits affine de $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ s'obtient en prenant pour N le normalisateur des matrices diagonales, et $B = \{(g_{ij}) \in SL_n(\mathbb{Z}_p) : g_{ij} \in p\mathbb{Z}_p \text{ pour } i > j\}$; le sous-groupe B est donc l'image inverse dans $SL_n(\mathbb{Z}_p)$ du sous-groupe de Borel standard de $SL_n(\mathbb{F}_p)$ via la réduction modulo p. La dimension de l'immeuble affine de $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ est $n-1$. Ainsi, l'immeuble affine associé à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ est l'arbre homogène où tout sommet est de degré $p+1$ (voir [56]), et les appartements sont les chaînes doublement infinies. Les appartements de l'immeuble affine associé à $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ sont isomorphes au pavage du plan euclidien par des triangles equilatéraux. Les appartements de l'immeuble de $SL_4(\mathbb{Q}_p)$ sont isomorphes au pavage de l'espace euclidien E^3 par des tétraèdres dont les faces sont des triangles isocèles de base 2 et de hauteur $\sqrt{2}$; l'immeuble lui-même apparaît comme un assemblage (compliqué !) de ces appartements, où tout triangle est contenu dans $p+1$ chambres.

Voici maintenant l'important théorème de classification des immeubles affines (Tits [16]) :

Théorème. *Les immeubles épais, localement finis, de type affine et de dimension au moins* 3 *proviennent des groupes algébriques simples de type adjoint sur les corps localement compacts non archimédiens. Tout isomorphisme entre deux tels immeubles est induit par un isomorphisme entre les groupes algébriques associés.*

Notons que les groupes algébriques simples sur les corps localement compacts non archimédiens ont été classés par – devinez qui ! – [12].

Un des points de la preuve du résultat ci-dessus consiste à construire, à partir d'un immeuble affine, un immeuble sphérique "à l'infini", de dimension moindre de 1 ; on dispose alors du théorème de classification des immeubles sphériques, qui fournit d'emblée un corps et un groupe algébrique simple sur ce corps.

Les immeubles affines de dimension 1 sont exactement les arbres sans sommets terminaux ; il est clair qu'ils ne peuvent être classés[14]. Le cas de la di-

[13]Pour éviter les confusions, on change la terminologie pour cette nouvelle BN-paire : les sous-groupes de Borel sont appelés *sous-groupes d'Iwahori*, et les sous-groupes paraboliques sont appelés *sous-groupes parahoriques*.

[14]Même pour les arbres qui proviennent d'un groupe agébrique simple, il se produit des phénomènes (dé)plaisants. Par exemple, $\mathbb{Q}_2$ possède deux extensions quadratiques non isomorphes $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ telles que $SL_2(\mathbb{K})$ et $SL_2(\mathbb{K}')$ donnent le même arbre.

mension 2 est très intéressant : d'une part, on dispose de "constructions libres" qui permettent de produire une infinité non dénombrable d'immeubles affines de dimension 2, non isomorphes deux à deux ; d'autre part, on peut construire des exemples d'immeubles affines de dimension 2 "exotiques", c'est-à-dire non isomorphes à l'immeuble d'un groupe algébrique, et admettant malgré tout des actions de groupes "très transitives" (par exemple transitives sur les chambres [17], ou transitives sur les sommets [29]). On distingue les immeubles "classiques" des immeubles exotiques au moyen d'une propriété des sphères de rayon 2, voir [18]. L'analyse harmonique sur les immeubles affines a connu un début de développement [36] ; dans le cas des immeubles exotiques de dimension 2, elle a donné récemment des résultats surprenants [30].

Une propriété importante des immeubles affines est qu'il ne s'agit pas seulement d'objets combinatoires, mais aussi d'espaces métriques. En effet, un appartement d'un immeuble affine est isomorphe à un espace euclidien ; il est donc muni naturellement d'une métrique. On vérifie que, si l'on définit la distance de deux points de l'immeuble comme leur distance dans n'importe quel appartement qui les contient, on obtient une métrique sur l'immeuble, invariante par tout automorphisme de l'immeuble. Cette métrique, ainsi que la topologie sous-jacente, jouissent de propriétés tout-à-fait remarquables [6], qui font apparaître un immeuble affine comme un analogue p-adique des espaces riemanniens symétriques : unicité de la géodésique par deux points, contractibilité, courbure négative ou nulle, propriété de point fixe pour les actions de groupes compacts, et inégalité de la médiane : si x, y, z sont trois points de l'immeuble, et si m désigne le milieu de l'intervalle $[x, y]$, on a

$$d(x,z)^2 + d(z,y)^2 \geq 2d(m,z)^2 + \frac{1}{2}\, d(x,y)^2 \, .$$

Les appartements sont maximaux parmi tous les sous-ensembles de l'immeuble qui sont isométriques à un espace euclidien[15].

Si G est un groupe algébrique simple défini sur $\mathbb{R}$ ou sur un corps localement compact non archimédien $\mathbb{F}$, notons X l'espace riemannien symétrique de $G(\mathbb{R})$, ou l'immeuble affine associé à $G(\mathbb{F})$. Dans [9], Tits défends la philosophie suivante : le choix "le plus naturel" pour définir les points à l'infini de X est "souvent" fortement relié à l'imeuble sphérique $\Delta(G, \cdot)$. Nous avons déjà vu cette philosophie en action dans le théorème de classification des immeubles affines, où Tits "compactifie" l'immeuble affine au moyen d'un immeuble sphérique. Le bien-fondé de cette philosophie apparaît par exemple dans le livre [20] de Ballman-Gromov-Schroeder, où il est démontré que, si G est un groupe de Lie simple réel, et si X^∞ désigne le bord visuel de l'espace riemannien symétrique X associé à G, alors l'immeuble sphérique $\Delta(G, \mathbb{R})$ de G se réalise sur X^∞ ; la preuve n'utilise que les propriétés métriques de X. Cette compactification de X au moyen de $\Delta(G, \mathbb{R})$ a joué un rôle fondamental dans les applications, en particulier dans les calculs de cohomologie de sous-groupes arithmétiques de G (voir à ce sujet [25]).

[15] D'où le jeu de mots intraduisible des anglo-saxons : "An apartment is a flat".

Nous terminerons par ce qui est pour nous une des applications les plus impressionnantes de cette compactification, et par là de la théorie des immeubles, à savoir la preuve originale du théorème de rigidité de Mostow [48]. Ce résultat affirme que, si G, G' sont des groupes de Lie simples réels, non compacts, sans centre, et non isomorphes à $PSL_2(\mathbb{R})$, et si Γ, Γ' sont des réseaux de G, G' respectivement, alors tout isomorphisme de Γ sur Γ' est la restriction d'un isomorphisme analytique de G sur G'. Nous allons donner, d'après [9], l'idée de la preuve d'un cas particulier important de la rigidité de Mostow.

Théorème. *Soient G, G' deux groupes de Lie simples réels, sans centre, de rang réel au moins 2 (ce qui signifie que les immeubles sphériques $\Delta(G, \mathbb{R})$ et $\Delta(G', \mathbb{R})$ sont de dimension au moins 1). Soient Γ, Γ' deux réseaux co-compacts sans torsion dans G, G' respectivement. Tout isomorphisme $\alpha : \Gamma \to \Gamma'$ est la restriction d'un isomorphisme de G sur G'.*

Esquisse de preuve. On note X, Y les espaces riemanniens symétriques de G, G', qu'on compactifie comme ci-dessus par X^∞ et Y^∞ respectivement. Les variétés compactes X/Γ et Y/Γ' sont des espaces classifiants pour Γ, Γ' respectivement. L'isomorphisme α induit donc une équivalence d'homotopie $\beta : X/\Gamma \to Y/\Gamma'$, qui se relève en une application $\gamma : X \to Y$. Comme Γ et Γ' sont co-compacts, γ est une quasi-isométrie, qui induit un isomorphisme entre X^∞ et Y^∞, donc entre les immeubles sphériques $\Delta(G, \mathbb{R})$ et $\Delta(G', \mathbb{R})$. Par la généralisation du théorème fondamental de la géométrie projective, cet isomorphisme entre immeubles est induit par un isomorphisme de G sur G'.

6 En guise de conclusion

"Ce petit groupe n'est qu'un éclat,
N'est qu'un groupuscule qui est compris
Dans un groupe
Qui le contient et qui est plus grand..."
(Guy Béart)

Pour donner une idée plus complète des travaux de Tits, il faudrait parler encore de variétés riemanniennes doublement transitives, d'univers de la relativité générale, de variétés complexes compactes homogènes, de revêtements de groupes topologiques, de groupes et algèbres de Kac-Moody, et bien sûr de groupes simples finis[16]. Le manque d'espace et de compétence m'en dispense. Je voudrais pour conclure redire toute mon admiration devant ce grand Monsieur des mathématiques du 20ème siècle.

[16] Les habitués du Séminaire Bourbaki se souviennent sans doute qu'en novembre 1983, Tits présentait les travaux de R. Griess sur le "Monstre" [15], qui est le plus gros groupe simple fini sporadique. Il avait commencé par capter l'attention de l'auditoire en hurlant : "le Monstre !", ce qui avait provoqué l'hilarité générale. Une demi-heure plus tard, les applaudissements crépitaient DURANT l'exposé, tant la preuve de Tits de l'existence du Monstre représentait un allègement de la preuve originale.

Remerciements. Merci à Francis Buekenhout, qui m'a passé quelques notices sur les travaux de Tits qui m'ont été bien utiles. Par ailleurs, le lecteur intéressé par des éléments biographiques concernant Tits, et spécialement sa période bruxelloise[17], consultera avec profit les articles [26], [27] de Buekenhout.

Références

1) Articles de J. Tits (et co-auteurs)

[1] *Groupes algébriques semi-simples et géométries associées*, Proc. Coll. Algebraical et topological foundations of geometry, Utrecht, août 1959 ; Pergamon Press, Oxford, 1962, 175-192.

[2] *Algebraic et abstract simple groups*, Annals of Maths. 80 (1964), 313-329.

[3] *Classification of algebraic semisimple groups*, Proc. Symposia Pure Math., vol. 9 (Proc. Summer Inst. on Algebraic groups and discontinuous groups, Boulder, 1965), A.M.S., 1966, 33-62.

[4] *Sur le groupe des automorphismes d'un arbre*, Essays on topology, Mémoires dédiés à G. de Rham, Springer, 1970, 188-211.

[5] *Free subgroups in linear groups*, J. of Algebra, 20 (1972), 250-270.

[6] (avec F. Bruhat) *Groupes réductifs sur un corps local, I : Données radicielles valuées*, Publ. Math. IHES 41 (1972), 1-252.

[7] (avec A. Borel) *Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples*, Annals of Maths. 97 (1973), 499-571.

[8] *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lect. Notes in Maths. 386, Springer, 1974.

[9] *On buildings and their applications*, Proc. Int. Cong. Math. Vancouver 1974, Vol. 1 (1975), 209-220.

[10] *Travaux de Margulis sur les sous-groupes discrets de groupes de Lie*, Sém. Bourbaki 1975-76, exposé 482, Lect. Notes in Maths. 567, Springer, 1977, 174-190.

[11] *A "theorem of Lie-Kolchin" for trees*, Contribution to Algebra. A collection of papers dedicated to E. Kolchin, Acad. Press, 1977, 377-388.

[17] Qu'on me permette de terminer cet article par une anecdote personnelle – qui est aussi une histoire belge. Tits m'a dit quelques fois : "Vous savez, Valette, je vous ai connu quand vous étiez comme ça" (mains écartées d'une cinquantaine de centimètres). De fait, en 1959, mon père Guy Valette était thésard de Jacques Tits à l'Université Libre de Bruxelles. Faut-il croire aux bonnes fées qui se penchent sur les berceaux des bébés ? Toujours est-il que, 21 ans plus tard, le bébé était devenu un jeune mathématicien qui, avec en poche une bourse de recherches du FNRS belge, se cherchait un sujet et un patron de thèse. Réapparut alors la bonne fée – pardon : Tits ! – qui déclara : "Jeune homme, si vous vous intéressez aux algèbres d'opérateurs, vous devez allez travailler à Paris sous la direction d'Alain Connes !" Parmi tous les conseils que j'ai reçus durant ma carrière, celui-là fut de loin le meilleur, je tenais à le dire.

[12] *Reductive groups over local fields*, Summer Inst. on Group representations and automorphic forms, Corvallis 1977, Proc. Symp. Pure Math. 33, 1979, vol. 1, 29-69.

[13] Appendice à l'article de M. Gromov : *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. IHES 53 (1981), 74-78.

[14] *Groupes à croissance polynomiale (d'après M. Gromov et al.)*, Séminaire Bourbaki 1980-81, exposé 572, Lect. Notes in Maths. 901, Springer, 1981, 176-188.

[15] *Le Monstre (d'après R. Griess, B. Fischer et al.)*, Sém. Bourbaki 1983-84, exposé 620, Astérisque 121/122 (1985), 105-122.

[16] *Immeubles de type affine*, Buildings and the geometry of diagrams, Como 1984, Lect. Notes in Maths. 1181, Springer, 1986, 159-190.

[17] *Buildings and group amalgamations*, Proc. of Groups St. Andrews 1985, ed. Robertson & Campbell, London Math. Soc. Lect. Notes 121 (1986), 110-127.

[18] *Spheres of radius* 2 *in triangle buildings I*, Finite geometries, buildings, and related topics, ed. W.M. Kantor et al., Oxford (1990), 17-28.

2) Autres références

[19] E. Artin, *Algèbre géométrique*, Cahiers Scientifiques XXVII, Gauthier-Villars, 1972.

[20] W. Ballmann, M. Gromov et V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Maths. 61, Birkhäuser, 1985.

[21] H. Bass, *The degree of polynomial growth of finitely-generated nilpotent groups*, Proc. London Math. Soc. 25 (1972), 603-614.

[22] H. Bass et R. Kulkarni, *Uniform tree lattices*, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 843-902.

[23] M. Bestvina, *Degenerations of the hyperbolic spaces*, Duke Math. J. 56 (1988), 143-161.

[24] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4, 5 et 6*, Actualités Sci. Ind. 1337, Hermann, 1968.

[25] K. Brown, *Buildings*, Springer, 1989.

[26] F. Buekenhout, *Un mathématicien belge contemporain : Jacques Tits*, Math-Jeunes 49 (1990), 2-6.

[27] F. Buekenhout, *A belgian mathematician : Jacques Tits*, Bull. Soc. Math. Belge (Sér. A), XLII (1990), 463-465.

[28] P. Cartier, *Géométrie et analyse sur les arbres*, Sém. Bourbaki 1971/72, exposé 407, Lect. Notes in Maths. 407, Springer, 1973, 123-140.

[29] D.I. Cartwright, A.M. Mantero, T. Steger et A. Zappa, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\tilde{A}_2$, Part I*, Geom. Dedic. 47 (1993), 143-166 ; *Part II*, Geom. Dedic. 47 (1993), 167-226.

[30] D.I. Cartwright, W. Mlotkowski et T. Steger, *Property (T) and $\tilde{A}_2$-groups*, Annales Inst. Fourier (Grenoble) 44 (1994), 213-248.

[31] F. Choucroun, *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbre de Bruhat-Tits*, Mémoire de la Soc. Math. France, Supplément au n° 122, fascicule 3, 1994.

[32] M. Culler et J.W. Morgan, *Group actions on $\mathbb{R}$-trees*, Proc. London Math. Soc. 55 (1987), 571-604.

[33] J. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Ergebnisse der Math. 5, Springer, 1971.

[34] A. Figa-Talamanca et C. Nebbia, *Harmonic analysis and representation theory for groups acting on homogeneous trees*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[35] D. Gaboriau, G. Levitt et F. Paulin, *Pseudogroups of isometries of $\mathbb{R}$ and Rips' theorem of free actions on $\mathbb{R}$-trees*, Israel J. Math. 87 (1994), 403-428.

[36] P. Gerardin, *On harmonic functions on symmetric spaces and buildings*, Canadian Math. Soc. Conference Proc., vol. 1 (1981), 79-92.

[37] R.I. Grigorchuk, *On Milnor's problem of group growth*, Soviet Math. Dokl. 28 (1983), 23-26.

[38] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. IHES 53 (1981), 53-73.

[39] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory, ed. S.M. Gersten, MSRI Publ. 8, Springer, 1987, 75-263.

[40] P. de la Harpe, *Free groups in linear groups*, L'Enseignement Math. 29 (1983), 129-144.

[41] N. Iwahori et H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups*, Publ. IHES 25 (1965), 5-48.

[42] F. Klein, *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*, Math. Ann. 21 (1883), 141-218.

[43] A. Lichtman, *On subgroups of the multiplicative group of skew fields*, Proc. Amer. Math. Soc. 63 (1977), 15-16.

[44] G.A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Math., 3 Folge 17, Springer, 1991.

[45] J. Milnor, *A note on curvature and fundamental group*, J. Diff. Geom. 2 (1968), 1-7.

[46] J. Milnor, *Growth of finitely generated solvable groups*, J. Diff. Geom. 2 (1968), 447-449.

[47] J.W. Morgan et P.B. Shalen, *Valuations, trees, et degenerations of hyperbolic structures I*, Ann. of Math. 120 (1984), 401-476.

[48] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. of Math. Studies 78, Princeton Univ. Press, 1973.

[49] C. Nebbia, *Amenability and Kunze-Stein property for groups acting on a tree*, Pacific J. Math. 135 (1988), 371-380.

[50] J. von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, Fund. Math. 13 (1929), 73-116.

[51] A.J. Olshanskii, *On the problem of the existence of an invariant mean on a group*, Russian Math. Surveys 35 (1980), 180-181.

[52] P. Pansu, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, Sém. Bourbaki, exposé 778, Nov. 1993.

[53] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. 94 (1988), 53-80.

[54] I. Pays et A. Valette, *Sous-groupes libres dans les groupes d'automorphismes d'arbres*, L'Enseignement Math. 37 (1991), 151-174.

[55] M. Ronan, *Lectures on buildings*, Perspectives in Maths. 7, Academic Press, 1989.

[56] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque 46, Soc. Math. France, 1977.

[57] A.S. Svarc, *A volume invariant of coverings*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 105 (1955), 32-34.

[58] J.-P. Tignol, *Remarque sur le groupe des automorphismes d'un arbre*, Annales Soc. Sci. de Bruxelles 93 (1979), 196-202.

[59] A. Valette, *Les représentations uniformément bornées associées à un arbre réel*, Bull. Soc. Math. Belge XLII (1990), 747-760.

[60] H. Van Maldeghem, *Non-classical triangle buildings*, Geom. Dedic. 24 (1987), 123-206.

[61] J. Wolf, *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. 2 (1968), 421-446.

[62] R.J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Maths. 81, Birkhäuser, 1984.

Alain Valette
Institut de Mathématiques
11 rue Emile Argand – BP 158
CH-2009 Neuchâtel – SUISSE

alain.valette@unine.ch