Jber. d. Dt. Math.-Verein. © 2001 B. G. Teubner Wiesbaden · Stuttgart · Leipzig
**103** (2001) 7–18
Mathematics Subject Classification: 20 E 42, 01 A 70, 20 F 55, 20 G 15, 20 D 05, 20 E 08, 51 E 24
Keywords and Phrases: Tits, Tits-System, Coxeter-Gruppe, Coxeter-Komplex, Bruhat-Zerlegung, Zwillingsgebäude, Tits-Alternative, halbeinfache algebraische Gruppe, einfache Gruppe

# Cantor-Medaille für Jacques Tits

H. Abels, Bielefeld

Jacques Tits wurde am 12.8.1930 in Uccle in Belgien geboren. Er studierte (1945–1948), promovierte 1950 und habilitierte sich 1955, alles an der Universität Brüssel. Dazwischen war er 1951/1952 Gast am Institute for Advanced Studies in Princeton. An der Universität Brüssel wurde er zuerst Assistent (1956/57), dann außerordentlicher (bis 1962) und schließlich ordentlicher Professor. Von 1964 bis 1975 war er ordentlicher Professor an der Universität Bonn und seit 1975 ist er Professor am Collège de France in Paris.

Er erhielt Einladungen als Gastprofessor an viele Universitäten und Forschungseinrichtungen auf der ganzen Welt. Er ist Mitherausgeber zahlreicher Zeitschriften und war von 1980 bis 1999 Chefredakteur der Publications Mathématiques des IHES.

Für seine wissenschaftlichen Leistungen erhielt Tits zahlreiche Ehrungen und Preise. 1965 wurde er mit dem Preis der belgischen Regierung für Reine Mathematik ausgezeichnet, einem Preis, der nur alle zehn Jahre vergeben wird. 1976 verlieh ihm die Académie des Sciences in Paris den Grand Prix des Sciences Mathématiques et Physiques. 1977 wurde er Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina in Halle. 1979 wurde er zum Mitglied der Académie des Sciences in Paris gewählt, nachdem er schon 1977 korrespondierendes Mitglied dieser Akademie geworden war. 1988 war er Gründungsmitglied der Academia Europaea. Ebenfalls seit 1988 ist er ausländisches Mitglied der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschapen, seit 1991 Mitglied der Académie Royale de Belgique, seit 1992 Honorary Member der American Academy of Arts and Sciences, ebenfalls seit 1992 ausländisches Mitglied der National Academy of Arts and Sciences, seit 1993 Ehrenmitglied der London Mathematical Society. Ihm wurden die Ehrendoktorwürden einer Reihe von Universitäten verliehen (Utrecht 1970, Gent 1979, Bonn 1986, Löwen 1992). Im Jahre 1993 wurde er mit dem Wolf Preis ausgezeichnet und im Jahre 1995 wurde ihm der Orden Pour le Mérite für Wissenschaft und Künste verliehen.

Im Jahre 1996 erhielt er die Cantor-Medaille der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Das war der Anlaß für die vorliegende Würdigung des Werks von Jacques Tits. Ich fand diese ehrenvolle Aufgabe nicht leicht: Es ist sehr schwer, dem Werk von Jacques Tits gerecht zu werden. Ich habe mich deshalb entschlossen, das Hauptaugenmerk auf die Themenbereiche Gebäude und Tits-Systeme zu richten und einen möglichst elementaren Einblick in diese Theorie zu geben. Andere, ebenfalls wichtige Resultate von Jacques Tits, werden dagegen nur kurz behandelt.

In der Verleihungsurkunde der Georg Cantor-Medaille heißt es: „Die [Deutsche Mathematiker-]Vereinigung ehrt einen herausragenden Wissenschaftler, der die Mathematik durch fundamentale Beiträge gefördert und geprägt hat. Er entwickelte die Axiomatik der BN-Paare und die Theorie der Gebäude, die unverzichtbare Hilfsmittel für die Behandlung von algebraischen und einfachen Gruppen geworden sind. Seine Klassifikation von halbeinfachen algebraischen Gruppen über beliebigen Körpern und die Bruhat-Tits-Theorie über lokalen Körpern sind bleibende Ergebnisse mathematischer Forschung und gleichzeitig die Basis neuer Entwicklungen in Geometrie, Algebra und Arithmetik".

# 1 Tits-Systeme

Was ist ein Tits-System? Um diese Frage zu beantworten, beginne ich mit einem Beispiel. Es sei $G = GL(n,k)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus dem Körper $k$. Betrachten wir die Untergruppe $B$ von $G$ der oberen Dreiecksmatrizen. Der Buchstabe $B$ rührt daher, daß $B$ eine sogenannte *Borel-Untergruppe* von $G$ ist. Geometrisch gesprochen ist $B$ die Untergruppe von $G$ derjenigen linearen Automorphismen von $k^n$, die die Standardfahne $0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_n = k^n$ invariant lassen. Dabei ist $V_i$ der Aufspann der ersten $i$ Vektoren der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von $k^n$. Es sei $W$ die symmetrische Gruppe $S_n$ auf $n$ Symbolen. Wir können $W$ als Untergruppe von $G$ ansehen, indem wir der Permutation $w \in W$ diejenige lineare Abbildung zuordnen, die die Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ entsprechend permutiert, d. h. $w(e_i) = e_{w(i)}$. Die Gruppe $W$ heißt die *Weyl-Gruppe* von $G$. Eine grundlegende Tatsache ist nun, daß sich jedes Element $g$ aus $G$ in der Form $b\,w\,b'$ mit $b, b' \in B$ und eindeutig bestimmtem $w \in W$ schreiben läßt. Anders gesagt, $G$ ist die disjunkte Vereinigung der Doppelnebenklassen $B\,w\,B$,

$w \in W$. Diese Tatsache beweist man mit einem Verfahren ähnlich dem Gaußschen Algorithmus für das Lösen linearer Gleichungssysteme – ein Algorithmus, der sich übrigens schon in einem chinesischen mathematischen Text aus der Zeit der Han-Dynastie (ca. $-200$ bis $+200$) findet.

Die disjunkte Zerlegung $G = \bigcup_{w \in W} BwB$ heißt die *Bruhat-Zerlegung* von $G$. Bruhat entdeckte nämlich im Jahre 1954, daß die analoge Aussage für alle einfachen Lie-Gruppen $G$ gilt: Die Doppelnebenklassen von $G$ nach der Borel-Untergruppe $B$ werden auf natürliche Weise durch die Weyl-Gruppe $W$ indiziert. Diese Tatsache hat Chevalley kurz darauf auch für die nach ihm benannten Serien von einfachen Gruppen nachgewiesen und bei der Klassifikation der einfachen Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern verwendet.

Hier setzt nun Tits ein. Er axiomatisiert die Eigenschaften der Bruhat-Zerlegung und gelangt so zum Begriff des *BN-Paares* [1, 2]. Bourbaki [19] hat die BN-Paare nach ihrem Entdecker in Tits-Systeme umbenannt. Ich erläutere mit Blick auf unser Beispiel das wichtigste Axiom eines Tits-Systems. Zu einem Tits-System für eine Gruppe $G$ gehört außer den Gruppen $B$ und $W$ noch ein weiteres Bestimmungsstück, nämlich eine Menge $S$ von Erzeugenden von $W$. In unserem Beispiel $W = S_n$ ist $S$ die Menge der Transpositionen benachbarter Zahlen $s_i = (i, i+1)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Das wichtigste Axiom eines Tits-Systems besagt, daß das Produkt einer Doppelnebenklasse $BwB$ mit einer Doppelnebenklasse $BsB$ für ein Element $s$ des Erzeugendensystems $S$ in der Vereinigung von zwei ganz bestimmten Doppelnebenklassen enthalten ist, nämlich

$$BwB \cdot BsB \subset BwB \cup BwsB.$$

Die Doppelnebenklasse $BwsB$ tritt offensichtlich immer auf. Und nur in besonderen Fällen tritt nur diese Doppelnebenklasse auf. Aus den Axiomen eines Tits-Systems kann man folgern, daß die Gruppe $W$ zusammen mit dem Erzeugendensystem $S$ eine Coxeter-Gruppe bildet. Coxeter-Gruppen spielen sowohl für Tits-Systeme als auch für die Theorie der Gebäude eine wichtige Rolle. Deshalb werden wir in einem eigenen Abschnitt die grundlegenden Eigenschaften von Coxeter-Gruppen zusammenstellen.

Zurück zu Tits-Systemen. Es ist eine Tatsache von grundlegender Bedeutung, daß alle einfachen Gruppen, die von algebraischen Gruppen herrühren, auf kanonische Weise ein Tits-System besitzen. Der Beweis ist in der gemeinsamen Arbeit [4] von Borel und Tits enthalten. Das Wort einfach ist hier im Sinne der jeweils zuständigen Theorie gemeint: algebraische Gruppen, Lie-Gruppen, endliche Gruppen. Einschränkend muß man hinzufügen, daß man ein nicht-triviales Tits-System, d. h. $B \neq G$, nur dann erhält, wenn die Gruppe $G$ *isotrop* ist. Für einfache Gruppen über $\mathbb{R}$ ist „isotrop" äquivalent mit „nicht kompakt".

Blicken wir zurück zu unserem Beispiel $G = GL(n, k)$, so ist ein (nicht nur technischer) Punkt zu erwähnen. Die Gruppe $G$ ist nicht einfach, sie enthält ja den Normalteiler $SL(n, k)$ und sie hat ein Zentrum, bestehend aus den konstanten Diagonalmatrizen. Trotzdem fällt sie unter die Theorie: $G$ ist *reduktiv*, und die Theorie gilt auch für reduktive Gruppen.

In Umkehrung zu diesem Resultat hat Tits in [3] gezeigt, daß eine Gruppe einfach ist, wenn sie ein Tits-System besitzt und gewisse zusätzliche rein gruppentheoretische Annahmen erfüllt. Der Punkt ist natürlich, daß diese Annahmen wesentlich leichter nachzuprüfen sind, als die Einfachheit der vorgelegten Gruppe. Ein zusätzlicher Gewinn, den Tits aus diesem Kriterium ziehen konnte, war der Nachweis, daß die nach ihm benannte endliche Gruppe einfach ist. Es ist die Kommutatorgruppe der $^2F_4(2)$.

## 2 Coxeter Gruppen

An dieser Stelle soll ein Exkurs über Coxeter-Gruppen eingeschaltet werden. Denn einerseits bildet die Theorie der Coxeter-Gruppen und der zugehörigen Coxeter-Komplexe eine Grundlage für die Theorie der Gebäude und auch der Tits-Systeme, und andrerseits hat Tits auch zu jener Theorie wichtige Erkenntnisse beigetragen.

Eine orthogonale Abbildung $s$ heißt *Spiegelung*, wenn die Menge ihrer Fixpunkte eine Hyperebene ist. Eine endliche Gruppe von orthogonalen Abbildungen heißt *endliche Spiegelungsgruppe*, wenn sie von Spiegelungen erzeugt wird. Zum Beispiel ist die symmetrische Gruppe $W = S_n$ – wie oben betrachtet als Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ – eine Spiegelungsgruppe, denn die Transposition $(i, j)$ ist ja die Spiegelung an der Hyperebene $\{(x_1, \dots, x_1) \in \mathbb{R}^n; x_i = x_j\}$.

Die Geometrie der endlichen Spiegelungsgruppen versteht man gut. Ich nenne die Hauptergebnisse. Sei $W$ eine Spiegelungsgruppe, die in der orthogonalen Gruppe des euklidischen Vektorraums $V$ enthalten ist. Sei $T$ die Menge der Spiegelungen in $W$. Zu jeder Spiegelung $t$ gehört die Hyperebene $H_t$ ihrer Fixpunkte. Die Hyperebenen $H_t$ zerlegen den Vektorraum $V$ in endlich viele *Kammern*. Genauer gesagt heißt eine Zusammenhangskomponente von $V \setminus \bigcup_{t \in T} H_t$ eine offene Kammer. Eine Kammer ist per definitionem der Abschluß einer offenen Kammer. Dann gilt: Die Gruppe $W$ wirkt einfach transitiv auf der Menge der Kammern. Jede Kammer $C$ ist eine Fundamentalmenge für die Wirkung von $W$ auf $V$ im striktesten Sinne des Wortes, nämlich jede Bahn $Wv$, $v \in V$, trifft $C$ in genau einem Punkt. Wenn $C$ eine Kammer ist, dann heißt eine Menge der Form $H_t \cap C$, $t \in T$, eine *Wand* der Kammer $C$, wenn $H_t \cap C$ in keinem echten Untervektorraum von $H_t$ enthalten ist. Unter gewissen Irreduziblilitätsvoraussetzungen an $W$ gilt weiter: Jede Kammer hat genau $\dim V$ Wände. Für eine gegebene Kammer $C$ sei $S$ die Menge der $s$ in $T$, für die $H_s \cap C$ eine Wand von $C$ ist. Dann ist $S$ ein Erzeugendensystem von $W$. Für zwei Elemente $s, t$ aus $S$ habe die Drehung $st$ in $W$ die Ordnung $m(s, t)$. Diese Zahl kann man aus den Winkeln zwischen den entsprechenden Wänden ablesen:

$$\measuredangle\, (H_s \cap C, H_t \cap C) = \pi / m(s, t)$$

falls $s \neq t$. Für $s = t$ setze man $m(s, s) = 1$. Weiter gilt, daß die Relationen

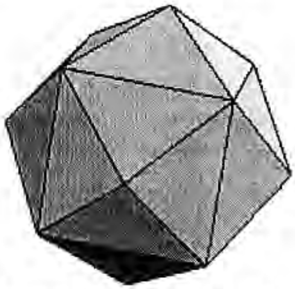
$$(st)^{m(s,t)} = e \text{ für } s, t \in S \qquad (*)$$

eine Präsentation der Gruppe $W$ bilden, d. h. jede Relation in $W$ zwischen den Elementen aus $S$ ist eine Folgerung aus den Relationen $(*)$.

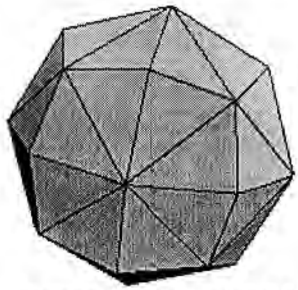
Ein *Coxeter-System* ist nun definiert als ein Paar $(W, S)$ bestehend aus einer Gruppe $W$ und einem Erzeugendensystem $S$, so daß die Relationen $(*)$ eine

Präsentation von $W$ bilden. Wir haben gesehen, daß man zu jeder irreduziblen endlichen Spiegelungsgruppe $W$ ein Erzeugendensystem $S$ finden kann, so daß $(W, S)$ ein Coxeter-System ist. In unserem Beispiel $W = S_n$ betrachtet als Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ ist $C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\}$ eine Kammer, deren Wände gerade die Mengen $H_s \cap C$ mit $s \in S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ sind. In diesem Fall ist $m(s_i, s_j) = 3$ falls $|i-j| = 1$ und $m(s_i, s_j) = 2$ falls $|i-j| \geq 2$. Die Darstellung von $W$ auf $\mathbb{R}^n$ ist nicht irreduzibel, aber ihre Einschränkung auf die Hyperebene $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \Sigma x_i = 0\}$ ist irreduzibel. Dann ist $\dim V = \#S = n - 1$ im Einklang mit der Theorie.

Für eine irreduzible endliche Spiegelungsgruppe $W$ in dem euklidischen Vektorraum $V$ kann man jetzt den *Coxeter-Komplex* $|X(W, S)|$ leicht beschreiben. Es ist die Einheitssphäre in $V$ zusammen mit der Triangulierung dieser Sphäre, die durch die Durchschnitte von Kammern mit der Sphäre gegeben ist. Die Bezeichnung $|X(W, S)|$ ist dadurch gerechtfertigt, daß dieser Komplex die geometrische



Coxeterkomplex der A3



Coxeterkomplex der C3

Realisierung eines Simplizialkomplexes $X(W, S)$ ist, der nur von dem Coxeter-System $(W, S)$ abhängt. Dazu eine Bezeichnung: Eine Untergruppe von $W$ heißt *Standard-parabolisch*, wenn sie von einer Teilmenge von $S$ erzeugt wird. Sie heißt *parabolisch*, wenn sie in $W$ konjugiert zu einer Standard-parabolischen Untergruppe ist. Zurück zur Beschreibung von $X(W, S)$ alleine mit Hilfe des Coxeter-Systems $(W, S)$: Die Gruppe $W$ wirkt auf $X(W, S)$. Dabei ist jeder maximale Simplex eine Fundamentalmenge für diese Wirkung im striktesten Sinne dieses Wortes. Und eine Untergruppe von $W$ ist genau dann Stabilisator eines Simplex von $X(W, S)$, wenn sie parabolisch und $\neq W$ ist.

Einige Bemerkungen sollen das Bild abrunden und Beiträge von Tits zur Theorie erwähnen. Die gesamte hier vorgestellte Theorie für endliche Spiegelungsgruppen $W$ mit zugehörigen ausgezeichnetem Erzeugendensystem $S$ kann rein algebraisch nachgebildet werden für beliebige Coxeter-Systeme $(W, S)$. Die Gruppenelemente von $W$ entsprechen dabei den Kammern, die Spiegelungsebenen $H_t$, $t \in T$, zerlegen $W$ (entsprechend der Menge der Kammern) in zwei Teilmengen, etc. Als Folgerung aus dieser Theorie hat Tits das Wortproblem für Coxeter-Systeme gelöst [6].

Für jedes Coxeter-System $(W, S)$ hat Tits eine Darstellung von $W$ definiert in einem Vektorraum $V$ der Dimension $\#S$. Er hat eine quadratische Form definiert, die von $W$ invariant gelassen wird. Diese Form ist positiv definit genau dann, wenn $W$ endlich ist. Jedes $s \in S$ wird durch eine Spiegelung dargestellt. Insbesondere erhält man also, daß jede endliche Coxetergruppe $W$ als endliche Spiegelungsgruppe dargestellt werden kann. Eine *Coxetergruppe* ist dabei natürlich eine Gruppe $W$, in der es eine Teilmenge $S$ gibt, so daß $(W, S)$ ein Coxeter-System ist. Die Kardinalität von $S$ heißt der *Rang* des Coxeter-Systems. Der zugehörige Coxeter-Komplex $X(W, S)$ hat dann die Dimension $\dim X(W, S) = \text{Rang} - 1$

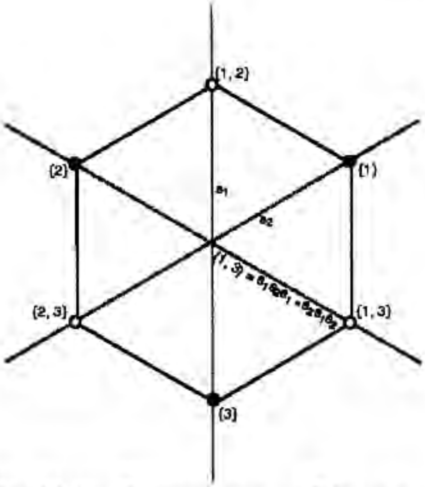
Die Standardreferenz für das in diesem Abschnitt Gesagte ist Bourbaki [19], ein Buch, an dessen Entstehung Tits stark mitgewirkt hat.

## 3 Gebäude

Eine bahnbrechende Leistung von Tits ist die Theorie der Gebäude. Ein *Gebäude* im Sinne von Tits ist ein geometrisches Objekt mit einer sehr reichen Struktur, die wir im nächsten Absatz näher beschreiben werden. Die Bedeutung für die Theorie der algebraischen, der Lieschen und der einfachen endlichen Gruppen besteht darin, daß Tits zu jeder Gruppe mit Tits-System ein Gebäude definiert. Und wir hatten im Abschnitt über Tits-Systeme herausgestellt, daß Borel und Tits zu jeder isotropen reduktiven, insbesondere jeder isotropen einfachen algebraischen Gruppe ein Tits-System konstruiert haben. Die Gruppe wirkt dann auf natürliche Weise auf dem zugehörigen Gebäude. Diese Wirkung der Gruppe auf dem Gebäude gibt ein geometrisches Verständnis der Gruppe. Auf diese Art sind Gebäude zu einem unverzichtbaren Hilfsmittel für die Behandlung von algebraischen, arithmetischen und einfachen Gruppen geworden. In unserem Beispiel der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, k)$ ist das zugehörige Gebäude die Menge der Fahnen von Untervektorräumen von $k^n$.

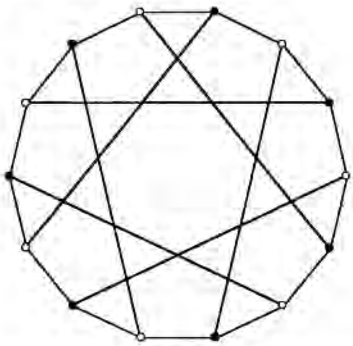
Was ist ein Gebäude? Ein Gebäude im Sinne von Tits setzt sich aus *Wohnungen* (*Apartments*) zusammen. Jede einzelne Wohnung ist ein Coxeter-Komplex, hat also eine wohlverstandene Struktur. Je zwei Wohnungen in einem Gebäude sind isomorph. Das Gebäude enthält sehr viele Wohnungen. Genauer gesagt, sind je zwei *Kammern* ( = Simplexe maximaler Dimension) in einer gemeinsamen Wohnung des Gebäudes enthalten.

Betrachten wir wieder das Beispiel der allgemeinen linearen Gruppe $G = GL(n, k)$. Das Gebäude $\Delta$ von $G$ ist ein Simplizialkomplex. Ein Vertex in $\Delta$ ist ein Untervektorraum von $k^n$. Dabei läßt man die beiden trivialen Unterräume $\{0\}$ und $k^n$ weg. Die Simplexe in $\Delta$ sind die Fahnen von nicht trivialen Untervektorräumen von $k^n$. Die Wohnungen in diesem Gebäude erhält man wie folgt: Fixieren wir eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von $k^n$. Dann sei $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ derjenige Unterkomplex von $\Delta$, dessen Vertices diejenigen nicht trivialen Untervektorräume von $k^n$ sind, die von einer Teilmenge unserer Basis $\mathcal{B}$ aufgespannt werden. Die Simplexe in $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ sind die Fahnen von solchen Unterräumen. Für jede Basis $\mathcal{B}$ von $V$ ist $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ eine Wohnung in $\Delta$ und jede Wohnung in $\Delta$ ist von dieser Form. Offensichtlich ist der Simplizialkomplex $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ isomorph zu demjenigen Simplizialkomplex, dessen Vertices die Teilmengen $\neq \emptyset$, $\{1, \ldots, n\}$ von $\{1, \ldots, n\}$ sind und dessen Simplexe die Fahnen von solchen Mengen sind. Dieser Komplex ist isomorph zu $X(W, S)$, denn $W = S_n$ wirkt auf natürliche Weise auf ihm, einfach transitiv auf den maximalen Simplexen, und die Stabilisatoren von Simplexen sind genau die parabolischen Untergruppen $\neq W$.




Für kleine Dimensionen $n$ (Ränge $n-1$) erhalten wir für $GL(n,k)$ die folgenden Gebäude $\Delta$. Für $n=1$ ist $\Delta$ leer. Für $n=2$ ist $\Delta$ die Menge der Geraden in $k^2$ ohne weitere Struktur. Für $n=3$ erhält man einen Graph. Die Vertices gehören zu zwei Typen, entsprechend den eindimensionalen und den zweidimensionalen Unterräumen. Man verbindet zwei Vertices durch eine Kante, wenn zwischen den entsprechenden Unterräumen eine Inklusion besteht.

Eine Wohnung ist also ein Sechseck mit zwei Typen von Eckpunkten. In der obigen Abbildung dieser Wohnung, also des Coxeter-Komplexes von $(S_3, \{s_1, s_2\})$ sind in der Beschriftung die beiden hier vorgestellten Beschreibungen dieses Komplexes berücksichtigt. Einerseits ist er der Komplex der Teilmengen $\neq \emptyset$, $\{1,2,3\}$ von $\{1,2,3\}$. Dazu sind bei den Vertices die zugehörigen Teilmengen von $\{1,2,3\}$ angegeben. Zum anderen ist er die (eckig gemachte) Sphäre im 2-dimensionalen Vektorraum $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ mit der natürlichen Darstellung der Spiegelungsgruppe $S_3$. Hierzu sind bei den Wänden der Kammern jeweils die nicht trivialen Elemente der zugehörigen parabolischen Untergruppe von $S_3$ angegeben.



Für den Körper $k = \mathbb{F}_2$ mit 2 Elementen hat das Gebäude der $GL(3, \mathbb{F}_2)$ je 7 Vertices vom Typ „Geraden" und vom Typ „Ebenen". Jeder Vertex ist mit genau 3 Vertices vom anderen Typ verbunden. Das vorausgehende Bild kann nicht die ganze Schönheit des Gebäudes $\Delta$ zeigen, weil man ihm nicht die vielen Symmetrien von $\Delta$ ansehen kann. Auch fallen die 28 Wohnungen nicht ins Auge. Die Gebäudeaxiome sind aus dem Bild auch nicht zu erkennen. Die Gruppe aller typerhaltenden Automorphismen von $\Delta$ gibt uns wieder $GL(3, \mathbb{F}_2)$ zurück. Das bringt uns zur allgemeinen Theorie zurück.

Wir hatten oben erklärt, daß zu jeder isotropen einfachen algebraischen Gruppe über einem Körper ein Gebäude gehört. Nicht alle Gebäude entstehen auf diese Art. Aber es gilt der folgende tiefliegende Klassifikationssatz, den Tits in seinem Buch [11] bewiesen hat. Alle dicken Gebäude vom Rang $\geq 3$ und von sphärischem, irreduziblem Typ kommen von solchen oder eng mit ihnen verwandten Gruppen her. Ein Gebäude heißt *sphärisch*, wenn seine Wohnungen endlich sind. Der Name sphärisch rührt daher, daß die Wohnungen dann triangulierte Sphären sind. Die Voraussetzungen „dick" und „irreduzibel" sind notwendig und sollen hier nicht weiter erläutert werden. Die wichtige Einschränkung ist die über den Rang. Eine Klassifikation der Gebäude vom Rang 2 ist nicht zu erwarten (es sei denn, man macht einschränkende Voraussetzungen, etwa daß das Gebäude die Moufang-Eigenschaft hat). Eine Klassifikation der Gebäude vom Rang 2 würde insbesondere eine Klassifikation aller projektiven Ebenen einschließen.

Eine weitere tiefliegende Aussage in Tits' Buch ist der Satz, daß man die Ausgangsgruppe aus dem Gebäude zurückerhält. Sie ist nämlich im wesentlichen die Automorphismengruppe des Gebäudes. Das gilt für alle Ränge $\geq 2$. Dieser Satz ist eine umfassende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der projektiven Geometrie.

Leser, die mehr über die Theorie der Gebäude erfahren wollen, können natürlich die erwähnten Quellen studieren. Ihnen kann man aber auch zur Einführung das Buch von K. Brown [20] und den Übersichtsartikel von R. Scharlau [24] empfehlen. Erwähnt seien auch noch die Bücher von M. Ronan [23] und R. Garrett [21] zum Thema.

## 4 Affine Gebäude

Die bisher besprochenen Gebäude sind sphärisch, das heißt ihre Wohnungen sind endlich. Aufbauend auf Beispielen von Iwahori und Matsumoto haben Bruhat und Tits [8, 13] für algebraische Gruppen über bewerteten Körpern eine ganz andere Klasse von Tits-Systemen und Gebäuden erhalten. Diese Gebäude sind *affin*, in dem Sinne, daß die Wohnungen triangulierte affine Räume sind. Diese *Bruhat-Tits-Gebäude* spielen für lineare Gruppen über nicht archimedischen lokalen Körpern, also z. B. $\mathbb{Q}_p$ oder $\mathbb{F}_q((t))$, eine ähnliche Rolle wie die symmetrischen Räume für reelle und komplexe Lie-Gruppen. Die Gruppe wirkt nämlich auf dem Bruhat-Tits-Gebäude auf natürliche Weise. Das Bruhat-Tits-Gebäude ist zusammenziehbar. Und Bruhat und Tits haben einen dem Cartanschen Fixpunktsatz analogen Fixpunktsatz bewiesen mit entsprechenden Folgerungen für kompakte Untergruppen.

Das Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G, k, v)$ einer algebraischen Gruppe $G$ über dem bewerteten Körper $k$ mit Bewertung $v$ ist eng verbunden mit dem gewöhnlichen Tits-Gebäude $\Delta(G, k)$ von $G$ über $k$ und mit dem gewöhnlichen Tits-Gebäude $\Delta(G, \mathfrak{o}/\mathfrak{m})$ von $G$ über dem Restekörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ von $k$. Das Gebäude $\Delta(G, k)$ kann als Menge der unendlich fernen Punkte im Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G,k,v)$ angesehen werden. Und das Tits-Gebäude $\Delta(G,\mathfrak{o}/\mathfrak{m})$ des Restekörpers tritt als Umgebungsrand (Link) im Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G,k,v)$ auf. Allgemeiner gilt, daß Links von Simplexen in Gebäuden selbst wieder Gebäude sind von genau angebbarem Typ.

Im einfachsten Fall $G = SL_2$ ist das Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G,k,v)$ ein Baum, falls $k$ ein Körper mit der Bewertung $v$ ist. Man beachte die Dimensionsverschiebung. Das gewöhnliche Tits-Gebäude $\Delta(G,k)$ ist in diesem Fall eine Menge von Punkten ohne weitere Struktur, also 0-dimensional. Das Bruhat-Tits-Gebäude $\Delta(G,k,v)$ ist dagegen 1-dimensional. Bereits für diesen einfachsten Fall hat die Wirkung von $SL(2,k)$ auf dem zugehörigen Baum weitreichende Konsequenzen für die Gruppe $SL(2,k)$ und ihre Untergruppen, wie Serre in seinem Buch über Bäume herausgearbeitet hat.

Auch für affine Gebäude hat Tits einen Klassifikationssatz [14] bewiesen, der wieder besagt, daß die affinen Gebäude vom Rang $\geq 4$ diejenigen sind, die von algebraischen Gruppen über lokalen Körpern herrühren. Beim Beweis konstruiert er das Gebäude im Unendlichen. Dieses Gebäude ist sphärisch und sein Rang ist um eins kleiner, vgl. die oben angesprochene Dimensionsverschiebung. Dann verwendet er die Klassifikation der sphärischen Gebäude von Rang $\geq 3$, um die gesuchte Gruppe und den gesuchten Körper zu finden. Es bleibt die Bewertung zu konstruieren.

## 5 Kac-Moody-Gruppen, Zwillingsgebäude

Seit längerem hat Tits an der Entwicklung einer algebraischen Theorie von Kac-Moody-Gruppen gearbeitet. Vor den Kac-Moody-Gruppen sind die *Kac-Moody-Algebren* studiert worden. Das sind Lie-Algebren, die durch eine bestimmte Präsentation definiert werden. Diese Präsentation verallgemeinert die von Serre angegebene Präsentation der endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie-Algebren. Die Kac-Moody-Algebren sind unendlich-dimensional, bis auf die Ausnahme der endlich-dimensionalen halbeinfachen. In der Arbeit [15] hat Tits nun ganz allgemein für Kac-Moody-Algebren und beliebige Ringe $R$ Kac-Moody-Gruppen mit Koeffizienten in $R$ definiert, ähnlich wie Chevalley das für die endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie-Algebren getan hat.

Kac-Moody-Gruppen über Körpern haben nun *Zwillings-Tits-Systeme*, aus denen Ronan und Tits wiederum *Zwillingsgebäude* (*Doppelgebäude, twin buildings, immeubles jumelés*) konstruiert haben [16]. Ein Zwillingsgebäude besteht aus zwei Gebäuden, die durch eine zusätzliche Struktur (Kodistanz, Oppositionsrelation) mtieinander verbunden sind. Auch für Zwillingsgebäude hat Tits in [16] ein Klassifikationsprogramm entworfen und wichtige Beiträge dazu geliefert, insbesondere zur Eindeutigkeit. Das Programm ist in wesentlichen Teilen zum Abschluß gebracht worden durch die Habilitationsschrift von B. Mühlherr [22]. Auch hier stellt sich heraus, daß die Existenz der klassifizierten Zwillingsgebäude algebraisch erklärt werden kann, in dem Sinne, daß sie zu gewissen „Formen" von Kac-Moody-Gruppen gehören.

Am besten verstanden sind die sogenannten affinen Kac-Moody-Algebren und Gruppen. Dazu gehören z. B. im algebraischen Kontext die Chevalley-Gruppen über Laurent-Polynom-Ringen $k[t, t^{-1}]$, aber auch – im analytisch-topologischen Kontext – die Schleifengruppen. Eine Schleifengruppe ist die Gruppe derjenigen (z. B. analytischen) geschlossenen Wege in einer halbeinfachen Lie-Gruppe, die im Einselement beginnen und enden. Die Doppelgebäude ergeben natürliche Wirkräume für die Kac-Moody-Gruppen mit entsprechenden Folgerungen für diese Gruppen und ihre Untergruppen, z. B. arithmetische Gruppen.

Ronan und Tits haben gemeinsam einen ganz anderen Teil der Theorie der Zwillingsgebäude entwickelt, nämlich der *Zwillingsbäume* [17, 18]. Das ist der 1-dimensionale Fall. Aber dieser Fall ist weder ein Spezialfall noch ein Modell der allgemeinen Theorie der Zwillingsgebäude; er ist ganz anders.

## 6 Klassifikation der halbeinfachen algebraischen Gruppen

Die halbeinfachen komplexen Lie-Algebren wurden im 19. Jahrhundert von Killing und Cartan klassifiziert. Das Ergebnis schreibt man am übersichtlichsten in Form der zugehörigen Dynkin-Diagramme auf. Daraus folgt die Klassifikation der komplexen halbeinfachen Lie-Gruppen. Chevalley hat eine vollkommen analoge Klassifikation der halbeinfachen algebraischen Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern bewiesen. In der Arbeit [5] hat Tits eine Klassifikation der halbeinfachen algebraischen Gruppen über beliebigen Körpern vorgelegt. Die Bestimmungsstücke sind 1) der Typ über dem algebraisch abgeschlossenen Hüllkörper, 2) der Index, im wesentlichen ist das eine Wirkung der Galoisgruppe auf dem Dynkin-Diagramm und 3) der anisotrope (über $\mathbb{R}$ bedeutet das: kompakte) Kern. Durch diese Stücke ist die Gruppe eindeutig bestimmt, wie Tits zeigt. In wichtigen Fällen werde die möglichen Indizes zu 2) klassifiziert. Die Klassifikation der anisotropen Kerne ist ein schwieriges offenes Problem. Für den Fall des Körpers $\mathbb{R}$ kennt man natürlich die kompakten Lie-Gruppen.

## 7 Tits-Alternative

In der Arbeit [9] hat Tits bewiesen, daß für jeden Körper $K$ jede endlich erzeugte Untergruppe von $GL(n, K)$ entweder eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index enthält oder eine freie nicht-abelsche Untergruppe enthält. Für Körper der Charakteristik null gilt das sogar für beliebige, also nicht nur für endlich erzeugte Untergruppen von $GL(n, K)$. Abgesehen davon, daß das Resultat für sich sehr schön und wichtig ist, hat diese Arbeit Entwicklungen in zwei Richtungen ausgelöst: Sie hat erstens Anlaß gegeben zu fragen, ob ähnliche Tits-Alternativen für andere Klassen von Gruppen gelten. Und zweitens haben die Methoden der Arbeit, nämlich die Dynamik linearer Abbildungen zu studieren, sich als sehr fruchtbar erwiesen.

## 8 Endliche einfache Gruppen

Die Theorie der Gebäude und der Tits-Systeme hat wichtige Anwendungen auf die Theorie der endlichen einfachen Gruppen. Alle Gruppen vom Lie Typ tragen ja solche Strukturen. Damit hat man geometrische Interpretationen für alle endlichen einfachen Gruppen bis auf die alternierenden und die 26 (bekannten) sporadischen. Das sehr allgemeine Einfachheitskriterium, das Tits aus der Theorie der Tits-Systeme ableitet, wurde schon am Ende des Abschnitts über Tits-Systeme erwähnt. Ebenso die Anwendung auf die Tits-Gruppe, die trotz ihrer eigenartigen Eigenschaften nicht zu den sporadischen Gruppen gehört. Hervorzuheben sind noch Tits' Existenzbeweis des Monsters in drei schönen Preprints und sein Einfluß auf die Entwicklung der Theorie von Geometrien, die allgemeiner sind als Gebäude und die für die meisten sporadischen Gruppen geometrische Interpretationen liefern.

## 9 Weitere Arbeiten

An weiteren wichtigen Arbeiten möchte ich noch folgende erwähnen. Tits hat grundlegende Ergebnisse erhalten zum Thema Wirkungen von Gruppen auf Bäumen [7, 12], einem Forschungsgebiet, das sich letzter Zeit sehr entwickelt hat. Auf den Zusammenhang mit Gebäuden und Zwillingsgebäuden habe ich schon hingewiesen: eindimensionale affine Gebäude sind Bäume, und Zwillingsbäume sind eindimensionale Zwillingsgebäude.

Weiter möchte ich die gemeinsame Arbeit [10] von Tits mit Borel erwähnen, in der die Struktur von einfachen algebraischen Gruppen qua abstrakte Gruppen untersucht wird. Sie zeigen, daß für isotrope einfache algebraische Gruppen $G$ und $G'$ und unendliche Körper $k$ und $k'$ außer den erwarteten Homomorphismen keine weiteren abstrakten Homomorphismen $G(k) \to G'(k')$ mit Zariski-dichtem Bild existieren. Insbesondere sind alle solchen Homomorphismen für $k = k' = \mathbb{R}$ stetig. Die Beweise basieren auf dem monumentalen Werk [4] der beiden Autoren über reduktive Gruppen.

Leider gibt es keine Ausgabe der gesammelten Werke von Tits. Ich halte das für einen entschiedenen Mangel. Bei der Herausgabe einer solchen Sammlung sollte man auch seine „Résumés de cours" am Collège de France mitaufnehmen. Sie sind eine Fundgrube für weitere Ideen, Resultate, Anregungen und Probleme.

## Literatur

### Ausgewählte Arbeiten von J. Tits und Koautoren

[1] *Groupes simples et geómétries associées*, Proc. Int. Congress Math., Stockholm (1962), 197–221.
[2] *Theórème de Bruhat et sous-groupes paraboliques*, C.R. Acad. Sci. **254** (1962), 2910–2912.
[3] *Algebraic and abstract simple groups*, Ann. of Math. (2) **80** (1964), 313–329.
[4] mit A. Borel, *Groupes réductifs*, Publ. Math. IHES **27** (1965), 55–150.
[5] *Classification of algebraic semisimple groups*, Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), 33–62.

[6] *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*, Ist. Naz. Alta Mat. Symp. Math. **1** (1968), 175–185.
[7] *Sur les groupes des automorphismes d'un arbre*, Essays on topology and related topics: Mémoires dédiés à George de Rham (A. Haefliger and R. Narasimhan, eds.) Springer-Verlag (1970), 188–211.
[8] mit F. Bruhat, *Groupes réductifs sur un corps local*, Publ. Math. IHES **41** (1972), 5–251.
[9] *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra (1972), 250–270.
[10] mit A. Borel, *Homomorphismes „abstraits" de groupes algébriques simples*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), 499–571.
[11] *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math. **386**, Springer (1974).
[12] *A „theorem of Lie-Kolchin" for trees*, Contrib. to Algebra. Collect. Pap. dedic. E. Kolchin (1977), 377–388.
[13] mit F. Bruhat, *Groupes réductifs sur un corps local, II, Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publ. Math. IHES **60** (1984), 1–194.
[14] *Immeubles de type affine*, CIME Conf. Como, Lecture Notes in Math. **1181** (1986), 159–190.
[15] *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields*, J. Algebra **105** (1987), 542–573.
[16] *Twin buildings and groups of Kac-Moody type*, in W.M. Liebeck and J. Saxl (eds.): Groups, combinatorics and geometry (Durham 1990), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **165**, Cambridge Univ. Press, 249–286.
[17] mit M.A. Ronan, *Twin trees, I*, Invent. Math. **116** (1994), 463–479.
[18] mit M.A. Ronan, *Twin trees, II, Local structure and a universal construction,* Israel J. Math. **109** (1999), 349–377.

## Arbeiten anderer Autoren

[19] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre IV–VI. Gemäß der Danksagung am Ende der Einleitung „de nombreuses conversations avec J. Tits nous ont apporté une aide précieuse".
[20] Brown, K.S., *Buildings*, Springer-Verlag (1989).
[21] Garrett, P., *Buildings and classical groups*, Chapman and Hall (1997)
[22] Mühlherr, B., *On the existence of 2-spherical twin buildings*, Habilitationsschrift Dortmund 1999.
[23] Ronan, M., *Lectures on buildings*, Academic Press (1989).
[24] Scharlau, R., *Buildings*, Handbook of Incidence geometry, Chapter 11, Elsevier (1995).

Herbert Abels
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 10 01 31
D-33501 Bielefeld
abels@mathematik.uni-bielefeld.de

(*Eingegangen 15.09.2000*)