Résumé des travaux antérieurs à 1972 (réf. [1] à [92])*

Jacques Tits

Introduction

La théorie des groupes peut être sommairement définie comme une théorie de la symétrie, de l'indiscernabilité et de l'homogénéité ; le lien entre ces notions est clair : un objet possède une certaine symétrie si des angles de vue différents en donnent des images indiscernables, un milieu est homogène si ses points sont indiscernables.

L'idée apparaît déjà dans la mathématique grecque, où les figures à haut degré de symétrie jouent un rôle essentiel. Elle est aussi sous-jacente dans le principe d'inertie de Galilée : l'indiscernabilité des divers états de mouvement rectiligne et uniforme n'est autre que l'invariance de la dynamique pour un certain groupe. Cependant, la notion même de groupe n'a été dégagée qu'au XIXe siècle, dans les travaux d'Evariste Galois sur les équations algébriques. Galois observe que la complexité d'une telle équation est liée à l'indiscernabilité de ses solutions ; celle-ci est mesurée par un «groupe de substitutions» mais c'est le groupe «abstrait» correspondant qui résume les propriétés essentielles de l'équation. C'est encore à l'occasion de recherches sur les équations, différentielles cette fois, qu'ont été introduits les groupes «continus» (Lie) et les groupes algébriques (Picard-Vessiot, Maurer). Mentionnons aussi le point de vue de F. Klein qui, cherchant un classement systématique des géométries étudiées de son temps, en arrivait à identifier, de façon un peu abusive, les concepts de géométrie et de groupe continu de transformations.

Suivant un processus bien connu en mathématique, et sans doute dans les sciences en général, il arrive souvent qu'une notion ou propriété qui joue d'abord un rôle auxiliaire devienne un objet d'étude en soi et finisse par dépasser en importance le problème particulier dont elle est issue. Née de la théorie des équations, la théorie des groupes s'est vite érigée en branche autonome. Elle ne s'est pas développée en vase clos mais a pénétré au contraire plusieurs domaines des mathématiques, de la physique et de la chimie théorique, soit qu'elle y ait trouvé des applications (groupe fondamental, représentations unitaires, spectroscopie moléculaire, classification des particules élémentaires, …), soit que des problèmes posés par elles y aient acquis une grande importance (groupes de transformations en topologie différentielle, groupes arithmétiques et représentations unitaires des groupes p-adiques et arithmétiques en théorie des nombres, …).

La partie pour ainsi dire la plus pure de la théorie des groupes est la théorie des groupes *finis*. Ses problèmes et ses méthodes lui sont spécifiques et, jusqu'à ces dernières années, elle a été relativement isolée du reste des mathématiques. Cette situation est d'ailleurs en train de changer : les aspects arithmétiques des questions que pose par

*Les références entre crochets renvoient à la liste des publications en fin de volume.

exemple la classification des groupes finis simples deviennent de plus en plus apparents. Dans l'étude des groupes *infinis*, les questions les plus intéressantes concernent généralement des groupes munis de structures additionnelles ou bien telle ou telle classe de groupes importants pour d'autres parties des mathématiques ; ainsi, la théorie se ramifie en plusieurs branches, d'ailleurs liées : groupes classiques, groupes topologiques, groupes de Lie, groupes algébriques, groupes arithmétiques, etc.

Une autre division se présente lorsque l'on considère la plus ou moins grande richesse des groupes en sous-groupes distingués. Aux deux pôles de la théorie, on trouve d'une part les groupes *commutatifs* et plus généralement les groupes *résolubles*, et de l'autre ceux qu'on appelle *simples*, de façon un peu paradoxale car l'impossibilité de «décomposer» ces groupes, parfois très enchevêtrés, ajouterait plutôt à leur complexité. La théorie des groupes résolubles fait souvent figure de science auxiliaire, dont les résultats sont intéressants dans la mesure où ils sont utilisés pour la théorie des groupes simples. Quant à celle-ci, un mathématicien connu, féru de structures déformables, l'a un jour qualifiée par boutade de «supercristallographie». Dépouillée de sa nuance péjorative, la comparaison est bonne : les groupes simples ont une rigidité et une individualité qui rappellent celles des systèmes cristallins et, pour revenir à la mathématique grecque, des polyèdres réguliers. Il est d'ailleurs significatif que des groupes apparentés à ceux des réseaux cristallins ou des polyèdres réguliers, les *groupes de Coxeter*, jouent un rôle essentiel dans la théorie des groupes algébriques simples. Cette individualité des groupes simples explique l'importance qu'ont pour eux les problèmes de classification et donne son aspect «concret» à leur étude : paraphrasant G. H. Hardy, on peut dire que pour pratiquer la théorie des groupes simples, il est nécessaire d'avoir chacun d'eux pour ami personnel.

Mes travaux se rapportent, pour la plupart, à la théorie des groupes et de leurs espaces homogènes. Les groupes simples, plus spécialement les groupes de Lie et les groupes algébriques simples, y occupent une place importante. Le point de vue adopté est souvent géométrique ou combinatoire, plutôt que purement algébrique.

I. Transitivité et espaces homogènes

Une bonne partie de mes premières recherches et quelques travaux ultérieurs concernent la caractérisation axiomatique et l'étude de diverses classes d'espaces à l'aide de concepts liés à l'homogénéité et l'isotropie. Les résultats qui font l'objet des §§1 à 3 ci-dessous ont un trait commun : on pose au départ des conditions combinatoires, géométriques ou topologiques simples, d'apparence générale, et on ne trouve en fin de compte que quelques espaces, fortement structurés et liés à des notions ou propriétés algébriques connues (corps, formes quadratiques, principe de trialité, etc.).

1. *Groupes multiplement transitifs*

Un groupe de permutations G d'un ensemble E est dit *n fois transitif* si, étant donnés arbitrairement deux n-uples ordonnés de points distincts de E, il existe un élément de

G appliquant le premier de ces n-uples sur l'autre. Lorsque cet élément est unique, on dit que G est *strictement* n fois transitif. Le problème, non résolu, de déterminer tous les groupes finis n fois transitifs pour $n \geqslant 2$ a occupé les théoriciens des groupes depuis longtemps, surtout après la découverte par E. Mathieu de deux groupes cinq fois transitifs aux propriétés étonnantes.

Si k est un corps commutatif, on sait que le groupe des transformations homographiques $x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}$ de la droite projective $k \cup \{\infty\}$ est strictement trois fois transitif. Dans le but, proposé par P. Libois, d'axiomatiser la géométrie projective à une dimension, j'ai donné [1], [2], [10] diverses conditions pour qu'un groupe strictement trois fois transitif soit isomorphe, comme groupe de permutations, au groupe homographique d'un corps commutatif ; il suffit par exemple que le stabilisateur d'un couple soit commutatif, ou encore que tout élément du groupe qui permute deux points soit d'ordre 2. Les travaux cités contiennent aussi une étude des groupes strictement trois fois transitifs en général et montrent l'équivalence entre cette étude et celle de certaines structures algébriques généralisant les corps commutatifs. Ces résultats, appliqués au cas d'un ensemble E fini, redonnent [3] la classification des groupes strictement trois fois transitifs finis due à H. Zassenhaus. L'article [9] concerne le cas où E est une variété connexe : les groupes homographiques réels et complexes s'avèrent être les seuls groupes strictement trois fois transitifs «continus», ce qui répond à une question posée par B. de Kerékjártó et résolue par lui en dimensions 1 et 2. Les groupes strictement deux fois transitifs «continus» sont déterminés par des méthodes analogues dans [11] et [26] ; ce sont les groupes de transformations affines $x \mapsto ax+b$ des presque-corps localement compacts connexes, qui sont déterminés par la même occasion : corps des nombres réels, corps des nombres complexes, corps des quaternions et variantes «tordues» de ce dernier. Par la suite, utilisant des moyens plus puissants (structure des groupes localement compacts et classification des groupes de Lie simples), j'ai généralisé ces résultats en donnant la liste de tous les espaces homogènes G/H, où G est localement compact non totalement discontinu et H un sous-groupe fermé de G, tels que G opère effectivement et deux fois transitivement sur G/H (cf. [27], IV. F, et [22]) ; le résultat est particulièrement simple pour les groupes trois fois transitifs : les seuls groupes ayant cette propriété sont les groupes conformes et leurs composantes neutres (groupes conformes directs).

Pour $n \geqslant 4$, le problème de la détermination des groupes strictement n fois transitifs est résolu au chapitre IV de [10] : si G n'est pas un groupe symétrique ou alterné, on a $n = 4$ et $|E| = 11$ ou bien $n = 5$ et $|E| = 12$, et les groupes correspondants sont les deux «petits» groupes de Mathieu. Ce résultat avait été obtenu par C. Jordan sous l'hypothèse supplémentaire que E est fini.

Les groupes projectifs à n dimensions sur un corps commutatif ne sont pas strictement $n+2$ fois transitifs mais il s'en faut de peu. Le mémoire [10] donne aussi diverses caractérisations de ces groupes basées sur une notion de groupes «à peu près (strictement) n fois transitifs» ; la recherche d'autres exemples de tels groupes m'a conduit à redécouvrir le groupe de Mathieu M_{22} ([10], p. 99). Plus tard, des considérations du même ordre m'ont permis [57] de donner la caractérisation commune simple suivante des trois «grands» groupes de Mathieu. Soient n un entier et E un ensemble fini dont on distingue certaines parties, appelées *blocs*, telles que n points quelconques de E appartiennent à un et un seul bloc. Disons qu'une partie de E est *libre* si elle ne contient pas $n+1$ points appartenant à un même bloc, et supposons que le groupe des automorphismes du système soit transitif sur les parties libres ordonnées à $n+1$ et à $n+2$ éléments. Alors, à des cas triviaux près, E est un plan projectif arguésien ou l'un des trois systèmes de Steiner associés aux «grands» groupes de Mathieu.

On sait que les groupes de Mathieu peuvent s'obtenir par extensions transitives successives à partir de deux groupes classiques : un sous-groupe d'indice deux M_{10} de $P\Gamma L_2(\mathbf{F}_9)$, opérant sur la droite projective, et $PSL_3(\mathbf{F}_4)$, opérant sur le plan projectif. (On appelle *extension transitive* d'un groupe G de permutations d'un ensemble E, un groupe G' de permutations de $E \cup \{*\}$ tel que le stabilisateur de $*$ dans G' soit G.) H. Zassenhaus a montré que si k est un corps fini et si un sous-groupe G de $P\Gamma L_n(k)$ contenant $PSL_n(k)$ possède une extension transitive, alors $n = 2$ et $|k| \leqslant 4$ ou $G = M_{10}$, ou bien $n = 3$, $|k| = 4$ et $[G : PSL_3(\mathbf{F}_4)] = 1$ ou 2. Par la suite, de nombreux travaux ont été consacrés à la non-existence d'extensions transitives pour divers groupes classiques finis. Dans cet ordre d'idées, j'ai démontré un lemme géométrique dont se déduit facilement la non-existence d'extensions transitives pour de nombreux groupes de permutations non nécessairement finis. En particulier, la plupart des résultats connus dans ce domaine sont retrouvés plus simplement et sous des hypothèses plus générales ; ainsi, le théorème de Zassenhaus reste vrai sans que l'on doive supposer k fini ou même commutatif (le cas $n = 2$, qui requiert d'ailleurs des méthodes assez différentes, est traité dans [90]).

Une partie E d'un espace projectif P sur un corps commutatif est appelée un *ovoïde* si toute droite la rencontre en deux points au plus et si, pour $p \in E$, les droites D telles que $D \cap E$ soit réduite à p forment un hyperplan, dit *tangent* à E en p. L'intérêt de cette notion provient notamment de l'existence, en caractéristique 2, d'ovoïdes «exotiques» qui ont pour groupes d'automorphismes les groupes de Suzuki (cf. [41], [46] et le §22 ci-dessous). Des caractérisations géométriques des «ovoïdes de Suzuki» font l'objet de [63] ; dans le cas fini, ce sont, avec les quadriques ovales, les seuls ovoïdes doublement homogènes, c'est-à-dire possédant un groupe d'automorphismes deux fois transitifs. L'étude des ovoïdes doublement homogènes infinis fait apparaître une «monstruosité» liée aux corps non parfaits de caractéristique 2 : l'existence sur de tels corps d'ovoïdes de toutes dimensions dont les hyperplans tangents sont tous parallèles pour un choix convenable de l'hyperplan à l'infini dans P [45].

2. *Problème de Helmholtz–Lie*
Espaces homogènes et isotropes
Le principe de relativité en relativité générale

On appelle problème de Helmholtz–Lie le problème de la caractérisation commune des géométries euclidiennes et «non-euclidiennes» par des propriétés de «libre mobilité» de leurs groupes de mouvements. Précisant des idées de Helmholtz, Lie avait étudié ce problème à l'aide de sa théorie des groupes continus de transformations. Les résultats de Lie étaient locaux et analytiques. Les reprenant d'un point de vue global et topologique, A. Kolmogorov proposait en 1930 l'axiomatique suivante. Soient E un espace topologique localement compact, connexe, métrisable et G un groupe transitif d'homéomorphismes de E tel que E possède une structure uniforme invariante par G. Si $p_1, \ldots, p_m$ sont des points de E, $G(p_1, \ldots, p_m)$ désigne l'intersection de leurs stabilisateurs dans G. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, énonçons l'axiome

(M_n) Quels que soient les points $p_1, \ldots, p_n \in E$, de deux orbites distinctes de $G(p_1, \ldots, p_n)$ dans $F = G(p_1, \ldots, p_{n-1}) \cdot p_n$, l'une sépare l'autre de p_n sur F.

A. Kolmogorov affirme que si (M_n) est satisfait pour tout n, l'espace E possède une métrique euclidienne ou non-euclidienne telle que G soit le groupe $\operatorname{Isom} E$ de toutes les isométries. Les paires (E, G) telles que G soit complet, en un sens évident, et satisfasse au seul axiome (M_1) sont déterminées dans [27], IV. E. L'examen de la liste montre que (M_1) et (M_2) suffisent à entraîner la conclusion de Kolmogorov, à ceci près que G peut n'être qu'un sous-groupe d'Isom E (en fait, à une exception près qui ne satisfait déjà pas à (M_3), le complété de G est toujours soit Isom E soit sa composante neutre). Connaissant les paires (E, G) qui satisfont à (M_1), on en déduit aussitôt les espaces métriques localement compacts connexes tels que Isom E soit transitif sur les ensembles de couples de points à distance donnée : ce sont les espaces euclidiens, les sphères et les espaces elliptiques et hyperboliques réels, complexes, quaternioniens et «octaviens», munis d'une distance fonction de la distance usuelle. Des résultats partiels dans cette direction avaient été obtenus par H. C. Wang.

Lorsqu'on suppose que E est une variété différentiable et que G est un groupe de Lie opérant différentiablement sur E (cas auquel on se ramène en fin de compte en utilisant la structure des groupes localement compacts), le problème dont il vient d'être question est un cas particulier du suivant, également résolu dans [27], IV. D : déterminer les paires (E, G) telles que G soit transitif sur l'ensemble des éléments de contact (point et direction) de E, c'est-à-dire sur le fibré en espaces projectifs «quotient» du fibré tangent.

Les méthodes utilisées pour résoudre ces questions, méthodes basées sur la classification des groupes de Lie simples, sont susceptibles de nombreuses autres applications. Il m'a paru intéressant d'étudier en détail le problème suivant. Soit E un univers de la relativité générale, c'est-à-dire une variété connexe de dimension 4 munie d'une forme différentielle quadratique ds^2 de signature $+---$. L'ensemble D des éléments de contact de E se décompose en trois parties D_+, D_0, D_- formées respectivement des éléments de temps ($ds^2 > 0$), de lumière ($ds^2 = 0$) et d'espace ($ds^2 < 0$). Disons que E est t-isotrope (resp. l-isotrope ; e-isotrope) si le groupe de ses isométries est transitif sur D_+ (resp. D_0 ; D_-). Les univers l-isotropes et e-isotropes sont énumérés dans [35] et le problème analogue pour les univers conformes, c'est-à-dire munis non plus d'une métrique mais seulement d'un champ de cônes de lumière y est aussi résolu. Le cas de la t-isotropie est le plus intéressant, car celle-ci est en quelque sorte un principe de relativité restreinte «ponctuel» ; il s'agit donc de déterminer tous les univers de la relativité générale qui satisfont ponctuellement au principe de relativité restreinte. Mais ce cas est aussi plus difficile parce que, contrairement à la l-isotropie et à la e-isotropie, la t-isotropie n'implique pas la semi-simplicité du stabilisateur d'un point ; cela m'a conduit à étendre à certains groupes non semi-simples la technique des systèmes de racines de W. Killing et E. Cartan. J'ai ainsi pu montrer que tout univers t-isotrope est à courbure constante. La liste des solutions globales, trop longue pour être reproduite ici, fait apparaître des formes d'univers intéressantes au point de vue cosmogonique. D'autre part, la méthode s'applique encore lorsqu'on munit l'univers de structures additionnelles, ce qui met en évidence par exemple le fait que, dans un univers à courbure constante négative, il existe des faisceaux lumineux (systèmes de rayons lumineux fibrant l'espace) tels qu'en distinguant l'un d'eux, on ne détruit pas la t-isotropie.

3. *Variétés complexes compactes homogènes*

Toute variété complexe compacte homogène E possède une et une seule fibration à fibre F parallélisable et dont la base est une variété projective rationnelle homogène. C'est le résultat principal de [47] qui donne aussi une construction effective des variétés E pour lesquelles F est un tore. Deux applications immédiates sont la classification des variétés complexes compactes homogènes simplement connexes, que H. C. Wang avait obtenu par d'autres méthodes, et celle des variétés complexes compactes homogènes non parallélisables de dimension inférieure à 3 : si elle n'est pas produit de deux variétés homogènes de dimensions plus petites, une telle variété est un espace projectif, une quadrique de dimension 3, la variété des drapeaux d'un plan projectif, une variété de Hopf, une variété de Calabi–Eckmann ou une variété fibrée en tores à deux dimensions au-dessus d'une droite projective.

4. *Etude d'espaces homogènes*

Des principes généraux pour l'analyse géométrique d'un groupe de transformations (G, E) «plus que transitif» sont esquissés au chapitre VI de [10] et au chapitre III de [C1]. Retenons-en deux notions : un *axe* de (G, E) est l'ensemble des points fixes d'un sous-groupe de G ; les *orbites* de (G, E) sont les orbites des fixateurs (centralisateurs) des axes. Même si G possède une infinité de sous-groupes non conjugués, il arrive souvent qu'il n'ait qu'un petit nombre de classes de conjugaison d'axes et que la structure formée par les axes et les orbites résume bien les propriétés géométriques essentielles de E. A titre d'exemples, [C1] donne la description du système des axes et orbites des espaces intervenant dans les théorèmes de classification de [27], IV (voir les §§1 et 2 ci-dessus).

Les plans projectifs sur les algèbres d'octaves et certains espaces dérivés de ceux-là font l'objet de [15], [16], [28] et de plusieurs sections de [82] ; d'autres descriptions d'espaces homogènes se trouvent dans divers articles, notamment dans ceux déjà cités aux §§1 et 2 ci-dessus. Outre l'étude des groupes d'automorphismes, des involutions, éventuellement des polarités, etc., une méthode souvent mise en œuvre est la considération de structures induites sur certains sous-espaces et l'expression intrinsèque des relations entre deux sous-espaces. Un exemple fera mieux comprendre ce que cela signifie : les droites du plan projectif P sur une algèbre d'octaves à division sont des espaces conformes orientés à 8 dimensions ; par dualité, il en est de même du pinceau des droites contenant un point p, et la bijection d'intersection de ce pinceau sur une droite ne contenant pas p est une application conforme renversant l'orientation ; si D et D' sont deux droites distinctes, considérées comme espaces conformes, leur inclusion à P induit une relation de *trialité* entre leurs espaces tangents au point $D \cap D'$, qui sont des espaces euclidiens à 8 dimensions (cf. [82], 9.11).

Les isomorphismes exceptionnels entre groupes de Lie simples de petits rangs, y compris un isomorphisme entre deux formes réelles de D_4 qui ne semble pas avoir été remarqué par E. Cartan (cf. [27], p. 249), ont pour conséquences de nombreux isomorphismes entre espaces homogènes, énumérés dans [27], tableau VII. D'autres aspects du principe de trialité font l'objet des articles [32] et [33] : le premier montre comment les identités de Moufang dans les algèbres d'octaves sont liées à des propriétés géométriques des quadriques à 6 dimensions ; le second est consacré à l'étude des «trialités», transformations d'ordre 3 qui sont au principe de trialité ce que les polarités (d'ordre 2) sont à la dualité.

5. *Le plan de Cremona*

Reprenant des idées de P. Libois et P. Defrise, j'ai étudié la géométrie birationnelle du plan sur un corps algébriquement clos, dans le but de lui donner des fondements géométriques «purs», invariants par le groupe de Cremona. L'axiomatique que j'ai donnée part d'un groupe ordonné F, dont les éléments positifs sont appelés *figures*, et d'une partie P de l'ensemble F^+ des figures, dont les éléments sont les *points*. Ce sont là les seuls éléments primitifs de l'axiomatique : le groupe des automorphismes de F conservant F^+ et P est le groupe de Cremona étendu par le groupe des automorphismes du corps de base. La relation d'ordre dans F est la *contenance*, et l'*intersection* de deux figures, c'est-à-dire leur borne inférieure, est supposée exister toujours. Un point p peut être contenu dans un autre q : c'est la notion de «point infiniment voisin». Il peut aussi y être contenu plusieurs fois ; cela correspond à la théorie des «points proches» d'Enriques, qui fournit une partie du système d'axiomes. Deux points p, q sont dits *transversaux* si leur intersection est un point infiniment voisin du premier ordre (c'est-à-dire maximal parmi les points proprement contenus) de chacun d'eux ; alors $p + q$ est appelé une *demi-droite*. Ces demi-droites, qui correspondent aux génératrices des modèles quadriques du plan (courbes exceptionnelles c telles que $c \cdot c = 0$) ont des propriétés remarquables dont la mise en évidence est sans doute l'un des résultats intéressants de cette étude. Par exemple, le groupe des transformations de Cremona qui conservent une demi-droite d, un groupe «de dimension infinie» lié au groupe des transformations de Jonquières, est transitif sur les points simples de d, c'est-à-dire les points p tels que d contienne p mais non $2p$. En particulier, $d - p$ est alors un point transversal à p ; cette propriété est prise comme axiome. Il y a aussi l'*axiome d'Euclide* : si $p \in P$ et si d est une demi-droite telle que $p \cap d = \varnothing$, alors il existe une et une seule demi-droite d' contenant p et telle que $d \cap d' = \varnothing$. Enfin, le théorème de Noether sur la décomposition des transformations de Cremona en produit de transformations quadratiques prend ici la forme d'un axiome de minimalité du modèle.

Ces recherches m'ont conduit à étudier aussi d'autres espaces liés au plan crémonien : les modèles homogènes du plan (surfaces rationelles normales), l'espace des points infiniment voisins d'ordre donné d'un point, l'espace des points simples d'une demi-droite, etc.

II. Groupes topologiques ; groupes et algèbres de Lie

La théorie générale des groupes topologiques et la théorie de Lie, souvent utilisées dans les recherches résumées en I, n'ont été pour moi qu'un sujet d'étude marginal, sauf lorsqu'elles s'intégraient dans la théorie des groupes algébriques (cf. IV). Les contributions que j'y ai apportées à l'occasion de cours ou en réponse à des questions qui m'ont été posées sont passées en revue ci-après.

6. *Revêtements*

En théorie des groupes topologiques, on utilise habituellement les notions de connexité, de simple connexité, etc. héritées des espaces topologiques sous-jacents. On obtient cependant un exposé plus général et souvent plus simple en utilisant des notions adaptées à la catégorie où on travaille. Ainsi, un groupe topologique se comporte comme un groupe connexe, disons qu'il est GT-*connexe*, dès qu'il est engendré par tout voisinage de l'élément neutre ; de même, il est GT-*simplement connexe* si tout revêtement (au sens des groupes topologiques) est trivial, etc. C'est le point de vue adopté dans [A1], où est aussi défini, pour tout groupe topologique G, un *homomorphisme universel* $\widetilde{G} \to G$ qui coïncide avec le GT-revêtement universel lorsque celui-ci existe.

7. *Application exponentielle*
Intégration de représentations linéaires

Soit G un groupe différentiel banachique dont le centre est simplement connexe et supposons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G munie d'une norme $|\ |$ telle que $|[x, y]| \leqslant |x| \cdot |y|$; alors l'application exponentielle est injective sur la boule de rayon π de $\mathfrak{g}$ (résultat obtenu en collaboration avec M. Lazard : cf. [64]).

Soit ϱ une représentation linéaire d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie dans une b-algèbre (algèbre «à bornés») ; alors, l'ensemble des éléments h de $\mathfrak{g}$ tels que $\varrho(h)$ soit intégrable est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ (résultat obtenu en collaboration avec L. Waelbroeck : cf. [77]).

8. *Automorphismes à déplacements bornés des groupes de Lie*

Soit G un groupe de Lie connexe. L'article [55] décrit tous les automorphismes α de G tels que l'ensemble $\{\alpha(g)g^{-1} \mid g \in G\}$ soit relativement compact ; cela détermine en particulier le sous-groupe $B(G)$ des éléments de G dont la classe de conjugaison est relativement compacte. On constate par exemple que si G est simple non compact, α est nécessairement l'identité (et $B(G) = \{e\}$). Il s'ensuit qu'une isométrie φ d'un espace symétrique irréductible non compact et non euclidien telle que la distance d'un point x et de son transformé $\varphi(x)$ soit bornée est l'identité. Ces résultats ont pour corollaires plusieurs théorèmes connus sur les groupes de Lie et les espaces symétriques.

9. *Constantes de structure des algèbres de Lie semi-simples*

La structure des algèbres de Lie semi-simples complexes a été élucidée par W. Killing et E. Cartan. Leurs travaux ne fournissent cependant pas de présentation explicite de ces algèbres : si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, Φ le système de racines correspondant, et e_a un vecteur propre de $\mathfrak{h}$ correspondant à la racine a, on a, pour $a, b, a + b \in \Phi$,

$$[e_a, e_b] = c_{ab}e_{a+b} \quad \text{avec } c_{ab} \in \mathbf{C}^*,$$

mais la théorie de Killing et Cartan ne dit rien sur la valeur des constantes c_{ab}. Un pas décisif vers la solution de ce problème a été fait par C. Chevalley qui a montré que, pour un choix convenable des e_a, la valeur absolue de c_{ab} est le plus grand entier n tel que $a+b-nb$ soit une racine. Reste la question du signe des c_{ab}. Celle-ci est ramenée dans [67] à l'étude d'un certain groupe fini N, extension du groupe de Weyl de Φ par un 2-groupe abélien élémentaire. A toute racine a est associée canoniquement une paire M_a d'éléments de N ; le choix d'une base de Chevalley revient au choix d'un élément dans chaque M_a et les signes des c_{ab} sont alors donnés par des formules dans N. Ce résultat permet de donner une démonstration élémentaire de l'existence de l'algèbre de Lie ayant un système de racines donné : les relations de commutation étant connues explicitement, il suffit en effet de vérifier l'identité de Jacobi.

10. *Tables*

Le syllabus [74] a été écrit à l'occasion d'un séminaire réunissant des mathématiciens et des physiciens, et est conçu en vue des applications. Son but est de permettre la détermination aisée de tous les groupes de Lie simples ou toutes les représentations linéaires de tels groupes satisfaisant à telle ou telle condition concernant la dimension, les formes invariantes, l'ordre du centre, etc.

III. Immeubles et BN-paires

Les *immeubles* (la terminologie est de N. Bourbaki), sorte de répliques combinatoires des groupes algébriques semi-simples isotropes, sont nés de la recherche d'un procédé systématique pour l'interprétation géométrique des groupes semi-simples et, plus particulièrement, des groupes exceptionnels. Ils se sont ensuite révélés un instrument utile pour l'étude des groupes algébriques (cf. §§12 à 14). D'autre part, la mise en évidence, par R. V. Moody et K. Teo, de BN-paires (donc, indirectement, d'immeubles : cf. §13) dont le groupe de Weyl n'est pas fini ou de type affine laisse entrevoir des perspectives de développement qui vont au-delà de ces applications.

11. *Géométrie des sous-groupes paraboliques*

Les géométries étudiées dans [27], III, premiers exemples d'immeubles, sont des généralisations naturelles de la géométrie projective complexe à n dimensions. Celle-ci peut être construite à partir du groupe $G = PSL_{n+1}(\mathbf{C})$ de la façon suivante : soient B le groupe des matrices triangulaires et $P_1, \ldots, P_n$ les sous-groupes maximaux de G contenant B. Alors, les variétés linéaires de l'espace projectif à n dimensions sont les points des espaces G/P_i et deux variétés sont *incidentes*, c'est-à-dire que l'une d'elles contient l'autre, si les classes latérales qui les représentent ont une intersection non vide.

Pour décrire les généralisations en question, fixons d'abord une terminologie de base suggérée par l'exemple précédent. On considère des *géométries* Γ, constituées par une famille $(V_i)_{i\in I}$ d'ensembles et, pour toute paire d'indices $i, j \in I$, une relation entre V_i et V_j, la *relation d'incidence*. Le *rang* de Γ est par définition le cardinal de I. Si J est une partie de I, une famille $(p_j)_{j\in J}$ de points $p_j \in V_j$ incidents deux à deux est appelée un *drapeau* de type J. Deux drapeaux, de types J et J', sont dits *incidents* s'ils forment ensemble un drapeau de type $J \cup J'$, et on appelle *ombre* d'un drapeau D sur un ensemble de drapeaux, l'ensemble des éléments de celui-ci qui sont incidents à D ; ainsi, les variétés linéaires de l'espace projectif sont les ombres des drapeaux sur l'ensemble des points de l'espace. Une géométrie Γ peut aussi être vue comme un complexe simplicial dont les sommets sont les points des V_i et dont les simplexes sont les drapeaux. Etant donnés un groupe G et une famille $(P_i)_{i\in I}$ de sous-groupes, on en déduit une géométrie $\Gamma(G; P_i)$ formée des ensembles $V_i = G/P_i$ et des relations d'incidence $gP_i \cap g'P_j \neq \varnothing$.

Prenons maintenant pour G un groupe de Lie complexe semi-simple et pour P_i les sous-groupes maximaux de G contenant un sous-groupe résoluble connexe maximal (sous-groupe de Borel) B de G. Comme les sous-groupes de Borel sont tous conjugués, nous associons ainsi à tout groupe G du type considéré une géométrie $\Gamma = \Gamma(G)$. L'étude de ces géométries fait l'objet de [27], III, et [23], [28], [29]. Elles ont beaucoup de points communs avec les géométries projectives : pour ne donner qu'un exemple, l'ensemble des ombres de drapeaux sur la variété des drapeaux d'un type donné est fermé pour l'intersection. Mais l'observation essentielle de [27], qui rend les $\Gamma(G)$

utiles pour l'interprétation géométrique des groupes semi-simples, est le fait que les $\Gamma(G)$ correspondant aux divers groupes G sont liées entre elles et que la nature de ces liens se lit commodément sur les graphes de Dynkin des groupes. Plus précisément, les P_i, donc les V_i, sont canoniquement indexés par les sommets du graphe de Dynkin Δ de G ; cela étant :

(R) si $p \in V_i$, la sous-géométrie de Γ formée par les ombres de p sur les V_j $(j \neq i)$ est la géométrie $\Gamma(H)$ d'un groupe H dont le graphe de Dynkin s'obtient en retirant de Δ le sommet i et les traits qui y aboutissent.

Dans le cas des groupes classiques, cela met en relation des propriétés géométriques connues (par exemple, des propriétés des variétés linéaires d'hyperquadriques) avec les graphes de Dynkin de ces groupes. Mais la propriété (R) est surtout, comme on le verra plus loin, un outil de récurrence efficace pour l'étude des $\Gamma(G)$; des applications aux groupes de type E sont données dans [28], [29].

Un résultat de [27], apparenté au «théorème de Borel-Weil» met aussi en relation la géométrie $\Gamma(G)$ avec les représentations projectives de G : pour toute représentation projective irréductible, il existe une et une seule partie J de I et un seul plongement G-covariant de la variété des drapeaux de type J de $\Gamma(G)$ dans l'espace de la représentation. Dans cet ordre d'idées, notons que l'importance des $\Gamma(G)$ s'est trouvée confirmée par un résultat de H. C. Wang caractérisant leurs variétés de drapeaux comme les seules variétés Kählériennes compactes simplement connexes homogènes, et surtout par les travaux de A. Borel et C. Chevalley qui font jouer à ces variétés un rôle primordial dans la généralisation de la théorie de Killing et Cartan à un corps algébriquement clos quelconque.

Dans [30], [39], [40], la théorie des $\Gamma(G)$ est généralisée d'abord aux groupes de Chevalley puis aux groupes algébriques semi-simples isotropes sur un corps k quelconque : G est à présent le groupe des points rationnels sur k d'un tel groupe algébrique et les P_i sont les groupes de points rationnels des k-sous-groupes paraboliques maximaux contenant un k-sous-groupe parabolique minimal donné. Ajoutons que la géométrie $\Gamma(G)$ peut aussi être définie pour un groupe classique G sur un corps gauche quelconque ; si par exemple G est le groupe unitaire d'une forme hermitienne non-dégénérée, dont il faut seulement supposer que son indice de Witt n est fini, on prend pour P_i les sous-groupes maximaux contenant le stabilisateur d'un drapeau formé d'espaces totalement isotropes de dimensions 1, 2, …, n (cf. par ex. [82]).

12. *Géométries polyédriques*
Immeubles

Les articles [30] et [40], déjà cités, contiennent l'esquisse d'une théorie axiomatique des $\Gamma(G)$ basée sur les considérations suivantes.

Soit $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $m \geqslant 2$. Une géométrie de rang 2 (V_1, V_2) est appelée un *m-gone généralisé* ([33], appendice) si, étant donnés deux éléments x, y de $V_1 \cup V_2$, il existe au moins une suite $x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ de longueur $k \leqslant 2m$ telle que deux éléments consécutifs quelconques de la suite soient incidents, et au plus une suite de longueur $k \leqslant 2m - 1$ avec cette propriété. Une *matrice de Coxeter* est une matrice carrée $M = (m_{ij})_{i,j\in I}$ telle que $m_{ij} \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} \geqslant 2$ si $i \neq j$; on la représente par un *graphe* $\Delta = \Delta(M)$ dont les sommets sont les éléments de I, les sommets i et j étant reliés par un trait de multiplicité $m_{ij} - 2$. Il s'avère que toutes les géométries $\Gamma(G)$ de rang 2 sont des m-gones généralisés, et que si G est un groupe de Chevalley de type $A_1 \times A_1$, A_2, B_2 ou G_2, on a $m = 2, 3, 4$ ou 6 respectivement. Cela suggère d'associer à tout graphe $\Delta = \Delta(M)$ une classe $\mathcal{G}(\Delta)$ de géométries, les *géométries polyédriques de type* Δ, dont les ensembles constitutifs V_i sont indexés par I et qui sont définies comme suit : si $I = \{1, 2\}$ et $m_{12} = m$, la classe $\mathcal{G}(\Delta)$ est constituée par les m-gones généralisés ; les autres classes $\mathcal{G}(\Delta)$ s'en déduisent par un axiome d'induction sur le rang, calqué sur la propriété (R) du n° 11, et une condition de «simple connexité», plus technique et qui n'a qu'un rôle secondaire. L'intérêt de cette définition réside dans le fait que, malgré la généralité apparente des axiomes, les géométries d'une même classe $\mathcal{G}(\Delta)$ sont très semblables entre elles d'un point de vue combinatoire. Ainsi, pour $\Delta = A_n$, $\mathcal{G}(\Delta)$ est la classe des géométries projectives à n dimensions. Plus généralement, disons qu'un élément d'une géométrie est *déterminé* par deux drapeaux a, b s'il peut être caractérisé au moyen d'assertions où n'interviennent que a, b, la relation d'incidence et les types des éléments variables quantifiés (ex. : deux points déterminent la droite qui les joint) ; alors, dans les géométries polyédriques, l'ensemble des éléments déterminés par deux drapeaux est toujours fini, et les configurations possibles de ces ensembles sont les mêmes pour toutes les géométries appartenant à une même classe $\mathcal{G}(\Delta)$. L'exemple $\Delta = F_4$, important pour les groupes exceptionnels, est traité dans [40] et, avec plus de détails, au §73 de H. Freudenthal, Linear Lie groups.

De même que le polygone ordinaire à n côtés est le plus simple des n-gones généralisés, de même chaque classe $\mathcal{G}(\Delta)$ contient une géométrie particulièrement simple, à savoir le «polyèdre régulier» $A(\Delta) = \Gamma(W; W_i)$, où $W = W(\Delta)$ est le groupe de Coxeter correspondant à la matrice M et W_i le sous-groupe engendré par les générateurs r_j de W avec $j \neq i$ (cf. [50] et le §16 ci-dessous). Notons en passant que cette observation, et le fait que la «droite projective» $A(A_1)$ est un ensemble à deux points, font voir le groupe de Weyl d'un graphe de Dynkin Δ comme le groupe de Chevalley de type Δ sur le «corps» à un élément [30]. Non seulement $A(\Delta)$ est un modèle pour la classe $\mathcal{G}(\Delta)$, mais chaque membre Γ de cette classe contient $A(\Delta)$ à de nombreux exemplaires, et c'est la raison pour laquelle Γ hérite des principales propriétés combinatoires de $A(\Delta)$. Cette constatation heuristique trouve son expression précise dans l'axiomatique des immeubles. Pour formuler celle-ci, nous passerons à présent du langage des géométries à celui, mieux adapté, des complexes de chambres (cf. [59], [82]).

Un *complexe de chambres de rang n* est un complexe simplicial de dimension $n - 1$, dont tous les simplexes maximaux, appelés *chambres*, sont de dimension $n - 1$, et tel que deux chambres quelconques peuvent être jointes par une *galerie*, c'est-à-dire une suite finie de chambres telles que deux éléments consécutifs de la suite aient une *cloison* (face de dimension $n-2$) commune. Les *morphismes* de tels complexes sont supposés appliquer les chambres sur des chambres. Soit A un complexe de chambres tel que toute cloison appartienne à deux chambres exactement. Un complexe Γ est appelé un *préimmeuble* (weak building) de type A s'il possède une famille $\mathcal{A}$ de sous-complexes isomorphes à A, appelés *appartements*, tels que deux simplexes quelconques a, b de Γ soient contenus dans un appartement et que si A_1 et A_2 sont deux appartements contenant a et b, il existe un isomorphisme de A_1 sur A_2 qui fixe chaque sommet de a et de b. Si de plus toute cloison appartient à trois chambres au moins, Γ est un *immeuble*. Dans ce cas, A est nécessairement le complexe $A(\Delta)$ d'un graphe [59]. Les préimmeubles de type $A(\Delta)$ ne sont autres que les géométries polyédriques de type Δ.

Un théorème facile mais fondamental est le *théorème de rétraction* : si A_0 est un appartement et $C \subset A_0$ une chambre du préimmeuble Γ, il existe une rétraction $\varrho\colon \Gamma \to A_0$ telle que $\varrho^{-1}(C) = C$ (cf. [50], [59], [82]). Des corollaires immédiats de ce théorème montrent que les propriétés combinatoires de A du type décrit plus haut (configurations des éléments déterminés par deux drapeaux) se retrouvent dans Γ.

Cela est d'ailleurs vrai aussi pour d'autres types de propriétés. Supposons par exemple que $A = A(\Delta)$ soit un complexe fini. Alors, A, ou plutôt le complexe géométrique qu'on en déduit en remplaçant les simplexes «abstraits» par des simplexes affines, possède une métrique naturelle qui en fait une sphère euclidienne. Cette métrique et la notion de points diamétralement opposés se transposent aussitôt à Γ, et il résulte du théorème de rétraction que deux points p, q qui ne sont pas diamétralement opposés sont joints par une géodésique unique contenue dans tout appartement contenant p et q. On en déduit que le complémentaire de l'ensemble des points diamétralement opposés à p est contractile, puis que Γ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères. L. Solomon a remarqué que ce résultat fournit une construction simple de la représentation de Steinberg d'un groupe fini G muni d'une BN-paire (cf. §13) ; il suffit de considérer l'opération naturelle de G sur $H_{n-1}(\Gamma[G])$, où $n-1$ est la dimension de $\Gamma(G)$. D'autres applications des immeubles aux groupes algébriques sont données par D. Mumford au chapitre 2 de sa «Geometric invariant theory».

Un théorème bien connu de géométrie projective met en correspondance bijective les espaces projectifs de dimension donnée $n \geqslant 3$ et les corps. Sa généralisation aux immeubles est l'un des objectifs de [82]. On considère seulement des graphes Δ qui sont graphes de Dynkin de systèmes de racines irréductibles de rang $\geqslant 3$. Alors, les seuls immeubles des types $A(\Delta)$ correspondants sont essentiellement les immeubles $\Gamma(G)$ associés aux groupes classiques et aux groupes algébriques simples de rang relatif $\geqslant$ 3. Ainsi la classification des immeubles redonne en particulier celle des groupes algébriques en question. Deux sous-produits du résultat, qui n'apparaissent pas dans l'énoncé précédent, méritent d'être mentionnés. D'une part, l'acception du terme «groupe classique» doit être étendue de façon à inclure les groupes orthogonaux correspondant à une notion nouvelle de forme quadratique sur les corps gauches à involution (voir aussi le §21) ; d'autre part, la classification des immeubles de type F_4 met en évidence des groupes simples nouveaux, liés à des phénomènes d'inséparabilité et à l'existence d'isogénies exceptionnelles. Quant aux immeubles de rang 2, qui ont pour cas particuliers les plans projectifs, ce sont des objets trop généraux pour qu'il y ait un sens à vouloir les classer ; tout au plus peut-on envisager la détermination de tous les immeubles finis, mais elle semble hors de portée à l'heure actuelle. On n'a donc ici que des exemples, et aussi un théorème négatif, dû à W. Feit et G. Higman : si A est un polygone à $2m$ côtés, il n'existe pas d'immeuble fini de type A pour $m \neq 2, 3, 4, 6, 8$.

Les notes [82] contiennent aussi la détermination de tous les automorphismes de l'immeuble $\Gamma(G)$ lorsque G est un groupe classique ou le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple de rang relatif $\geqslant 2$. En gros, un tel automorphisme est toujours semi-linéaire ou semi-algébrique, c'est-à-dire composé d'un automorphisme du corps de base et d'une transformation linéaire ou d'un morphisme. C'est la généralisation aux immeubles du «théorème fondamental de la géométrie projective» et aussi des résultats bien connus de W. L. Chow, J. Dieudonné et L. K. Hua sur les variétés d'espaces totalement isotropes. Si l'on prend pour G un groupe exceptionnel, cela montre aussi que la théorie des immeubles a atteint son but primitif : l'interprétation géométrique de ces groupes.

13. *BN-paires*

Nous avons vu qu'on peut associer un immeuble $\Gamma(G)$ à certains groupes G. L'axiomatisation de ces liens conduit à la notion de BN-paire (cf. [48], [56], [82]). Deux sous-groupes B, N d'un groupe G forment une BN-paire (ou, selon N. Bourbaki, un «système de Tits») s'il existe un immeuble Γ et une opération de G sur Γ transitive sur les couples (A, C) formés d'un appartement A et d'une chambre C de A, et telle que B soit le stabilisateur d'une chambre C_0 et N le stabilisateur d'un appartement contenant C_0. Cela se traduit, en termes de groupes, par les conditions suivantes : B et N engendrent G, $H = B \cap N$ est distingué dans N et le groupe $W = N/H$, appelé *groupe de Weyl*, possède un système générateur R tel que, pour tout $r \in R$, et tout $w \in W$, on ait $rBw \subset BwB \cap BrwB$ et $rBr \neq B$.

L'intérêt de cette définition est de résumer en peu d'axiomes plusieurs propriétés importantes des groupes algébriques simples. Ainsi, les assertions suivantes en sont des conséquences faciles (cf. [48], [59]) : on a $BWB = G$, et l'égalité $BwB = Bw'B$ avec w, $w' \in W$ entraîne $w = w'$ (décomposition de Bruhat) ; les sous-groupes de G contenant B sont en correspondance canonique bijective avec les parties de R, ils sont deux à deux non conjugués et chacun d'eux est son propre normalisateur ; W est un groupe de Coxeter (résultat obtenu indépendamment par H. Matsumoto). D'autre part, un groupe avec BN-paire a tendance à avoir peu de sous-groupes distingués ; c'est en gros ce qu'expriment les résultats du §2 de [56], établis en vue d'applications aux groupes algébriques et aux groupes finis (cf. §§19 et 22).

Grâce au résultat mentionné plus haut (§12) sur la classification des immeubles de rang $\geqslant 3$, on connaît tous les groupes finis avec BN-paires de type irréductible et de rang $\geqslant 3$ [82]. Des résultats partiels sur les BN-paires de rangs 1 et 2 ont été obtenus par P. Fong, C. Hering, W. Kantor et G. Seitz.

Dans les dernières années, la notion de BN-paire a joué un rôle important en théorie des groupes finis simples, notamment dans les travaux de C. Curtis et son école sur les représentations linéaires, et dans les recherches sur la caractérisation de groupes simples par des propriétés de centralisateurs d'involutions, de sous-groupes de Sylow, etc. : on peut parfois ramener des problèmes de ce type aux théorèmes de classification dont il vient d'être question en montrant que les hypothèses faites sur un groupe imposent à celui-ci de posséder une BN-paire.

14. *Immeubles et BN-paires de type affine*

Le champ d'application des BN-paires, introduites d'abord à l'occasion de l'étude des sous-groupes paraboliques de groupes algébriques, s'est étendu lorsque N. Iwahori et H. Matsumoto ont montré que les groupes de Chevalley simplement connexes sur un corps local possèdent une seconde BN-paire, dont le groupe de Weyl est cette fois un groupe affine engendré par des réflexions. Par descente galoisienne à partir de leur résultat, F. Bruhat et moi [70], [71], [72] avons montré l'existence d'une telle BN-paire dans tout groupe semi-simple simplement connexe sur un corps local à corps résiduel parfait (voir aussi le §18). Dans la première partie de [88], nous étudions les BN-paires *de type affine* (c'est-à-dire dont le groupe de Weyl est un groupe affine engendré par des réflexions) et leurs immeubles. Comme dans le cas d'un groupe de Weyl fini (cf. §13), un tel immeuble $\mathcal{I}$ possède une distance qui en fait un espace métrique complet. Un résultat important, utilisé notamment pour la descente galoisienne susmentionnée, est le *théorème de point fixe* : tout groupe borné d'isométries de $\mathcal{I}$ possède un point fixe. Ce théorème, et l'usage qu'on peut en faire pour la détermination des sous-groupes compacts maximaux des groupes $\mathfrak{p}$-adiques, suggèrent de voir l'immeuble d'un groupe simple $\mathfrak{p}$-adique comme l'analogue naturel de l'espace symétrique d'un groupe simple réel. Ce point de vue a trouvé confirmation dans les travaux de A. Borel, H. Garland et J.-P. Serre sur la cohomologie des groupes arithmétiques, et dans des recherches en cours concernant l'analyse harmonique sur les immeubles et, en particulier, sur les arbres (travaux de P. Cartier). Dans cet ordre d'idées, citons encore une application due à A. Borel : celui-ci définit la *représentation spéciale* d'un groupe simple $\mathfrak{p}$-adique en transposant à l'immeuble affine du groupe la construction de L. Solomon de la représentation de Steinberg (cf. §13).

Dans [88], nous associons aussi un «immeuble» $\mathcal{I}$ à toute donnée radicielle valuée (cf. §18). Si la valuation n'est pas discrète, $\mathcal{I}$ n'est plus un complexe simplicial. On peut s'en faire une idée en considérant le cas d'un groupe algébrique simple sur la clôture algébrique K de $\mathbf{Q}_p$. Le corps K étant limite inductive de corps locaux «de plus en plus ramifiés» l'immeuble du groupe est limite inductive d'immeubles ordinaires de plus en plus ramifiés, c'est-à-dire dont les chambres sont de plus en plus petites. Un tel immeuble possède encore des *chambres* et des *facettes*, qui ne sont plus des ensembles mais des filtres. Comme pour les immeubles ordinaires, deux facettes appartiennent toujours à un appartement, mais il s'agit cette fois d'un théorème difficile et non plus d'un axiome.

15. *Arbres*

Les arbres dont tout sommet est d'ordre 3 au moins sont les immeubles de type affine de rang 2, d'où leur place ici. Soient A un arbre quelconque, G le groupe de ses automorphismes et G^+ le sous-groupe engendré par les stabilisateurs des sommets d'ordre $\geqslant 3$. Alors G^+ est un groupe simple et G/G^+ est produit libre d'un certain nombre n_∞ de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}$ et d'un certain nombre n_2 de groupes d'ordre 2. C'est le théorème principal de [81], qui contient aussi un procédé de construction d'un arbre A à partir d'un ensemble I et d'une matrice irréductible $M = (m_{ij})_{i,j\in I}$ où les m_{ij} sont des cardinaux soumis à la seule condition que $m_{ij} = 0$ implique $m_{ji} = 0$. L'intérêt de cette construction réside dans le fait que certaines propriétés de G, et notamment les nombres n_∞ et n_2, se lisent facilement sur la matrice M. On montre ainsi que n_∞ et n_2 peuvent prendre n'importe quelle valeur. Lorsque les sommets de A sont d'ordre fini, G et G^+ sont des groupes localement compacts dénombrables à l'infini, et il résulte de la construction en question qu'on trouve, par application du théorème principal, une infinité non dénombrable de groupes localement compacts simples non isomorphes.

16. *Groupes de Coxeter*

Soient I, M et Δ comme au §12 et $W = W(M)$ le groupe défini par des générateurs r_i $(i \in I)$ et les relations $(r_i r_j)^{m_{ij}} = 1$ pour $m_{ij} \neq \infty$. H. S. M. Coxeter a déterminé toutes les matrices M telles que $W(M)$ soit fini et il a étudié ces groupes finis et leurs représentations comme groupes engendrés par des réflexions ; par la suite, ses résultats ont été simplifiés et précisés par E. Witt.

Le développement de la théorie des immeubles m'a amené à étudier les groupes $W(M)$, pour M quelconque, que j'ai appelés *groupes de Coxeter*. Il apparaît [43] qu'une bonne partie des résultats de Coxeter et de Witt restent valables pour tout groupe de Coxeter W. En particulier, W possède une représentation linéaire ϱ comme groupe engendré par des réflexions *affines* ; l'injectivité de cette représentation est le résultat principal de [43]. L'image $\varrho(W)$ a un domaine fondamental C qui est un cône simplicial, mais à la différence du cas fini, la réunion des «chambres», $\varrho(W)\cdot C$, n'est pas nécessairement l'espace tout entier mais seulement un cône convexe. Le complexe obtenu en coupant le système des chambres par une sphère n'est autre que le complexe $A(\Delta)$ du §12. Les méthodes de démonstration topologiques utilisées par Coxeter et Witt ne s'étendent pas au cas général ; elles doivent être remplacées par des méthodes combinatoires basées sur la considération des galeries (cf. §12) et d'une propriété de *pliage* qui caractérise d'ailleurs les groupes de Coxeter : soit A un complexe de chambres ; pour que A soit le complexe $A(\Delta)$ associé à un groupe de Coxeter, il faut et il suffit que pour toute chambre C et toute cloison D de C, il existe une et une seule autre chambre C' ayant aussi D comme cloison, et un endomorphisme idempotent π de A fixant les sommets de D, appliquant C sur C' et tel que toute chambre soit l'image par π de zéro ou deux chambres (cf. [82]).

Le normalisateur N d'un tore maximal T d'un groupe algébrique semi-simple est une extension du groupe de Weyl W par T. L'opération de W sur T est bien connue mais, pour en déduire N, il faut encore déterminer la classe de l'extension (élément de $H^2(W, T)$). Dans [66], l'étude de cette extension est ramenée à celle d'une autre extension X de W, définie «universellement» pour tout groupe de Coxeter. Pour M comme ci-dessus, soient $T(M)$ le groupe défini par des générateurs r_i ($i \in I$) et les relations $r_i r_j r_i \ldots = r_j r_i r_j \ldots$, où chaque membre a m_{ij} facteurs, H le noyau de l'homomorphisme évident $T(M) \to W(M)$ et H' le groupe dérivé de H. Alors le groupe abélien H/H' possède un système générateur libre en correspondance bijective canonique avec l'ensemble des réflexions de $W(M)$, et X est le groupe $T(M)/H'$, extension de $W(M)$ par le groupe abélien libre H/H'. Notons que le groupe fini intervenant dans l'étude des signes des c_{ab} (cf. §9) est un quotient de X. Les groupes $T(M)$, qui généralisent les groupes de tresses d'Artin, ont suscité beaucoup d'intérêt ces derniers temps en raison des applications qui en ont été faites à la géométrie algébrique et à la topologie (travaux de V. I. Arnol'd, E. Brieskorn et P. Deligne ; ce dernier étudie les $T(M)$ par des méthodes inspirées de la théorie des immeubles).

L'article [78] donne une solution du problème des mots pour les groupes de Coxeter et esquisse, en guise d'application, une nouvelle démonstration de la classification des groupes de Coxeter finis.

IV. Groupes algébriques

Comme on l'a vu, les immeubles ont leur origine et leurs principales applications dans la théorie des groupes algébriques. Mes recherches concernant ces groupes ont souvent été suggérées ou même nécessitées par les travaux géométriques résumés plus haut (III).

17. *Structure*
Représentations linéaires

Les théorèmes fondamentaux sur la structure des groupes algébriques linéaires connexes sur un corps algébriquement clos sont dus à A. Borel et C. Chevalley. Etudiant le cas d'un corps de base k quelconque, A. Borel et moi avons obtenu des analogues relatifs des principaux théorèmes absolus. Nous montrons par exemple que si G est un groupe algébrique linéaire sur k, les tores déployés sur k maximaux de G sont conjugués par des éléments de $G(k)$, que cela est aussi vrai pour les sous-groupes résolubles k-déployés maximaux et, si G est réductif, pour les k-sous-groupes paraboliques minimaux. Supposons que G soit connexe et ne possède pas de k-sous-groupe unipotent k-déployé distingué non trivial (par exemple, que G soit réductif), et soit T un tore déployé sur k maximal de G. Alors, l'ensemble Φ des poids non nuls de T dans G est un système de racines (non nécessairement réduit) dont le groupe de Weyl W est le quotient du normalisateur N de T par son centralisateur Z ; de plus, $N = N(k) \cdot Z$, donc $W = N(k)/Z(k)$. A chaque racine a est associé un sous-groupe unipotent $U_{(a)}$ normalisé par T et si B désigne le groupe engendré par Z et par les $U_{(a)}$ correspondant aux racines a positives (sous-groupe k-parabolique minimal lorsque G est réductif), alors $B(k)$ et $N(k)$ forment une BN-paire dans $G(k)$, avec les conséquences que cela comporte (cf. §13). Ces résultats, et d'autres, du même ordre, qu'il serait trop long de passer en revue ici, sont établis dans [61], [84], [89] pour un groupe G réductif ou résoluble. Le cas général ne se ramène pas à ceux-là par un simple «dévissage » parce que le radical unipotent de G n'est pas nécessairement défini sur k.

La théorie des représentations linéaires des groupes semi-simples complexes, due à E. Cartan et H. Weyl, a été étendue partiellement à un corps algébriquement clos quelconque par C. Chevalley ; celui-ci montre qu'une représentation linéaire rationnelle irréductible d'un groupe semi-simple G est caractérisée par son poids dominant et que l'ensemble Λ des poids dominants possibles est «le même» que sur les complexes. Le §12 de [61] et l'article [85] sont consacrés à la «relativisation» de ces résultats. Considérons par exemple le cas d'un groupe G de type intérieur sur un corps k. Il s'avère que pour tout $\lambda \in \Lambda$, la représentation de poids dominant λ peut être réalisée sur k comme représentation dans un groupe linéaire $GL_m(D)$ où $D = \beta(\lambda)$ est une algèbre à division bien déterminée. De plus, l'application β de Λ dans le groupe de Brauer de k est un homomorphisme de monoïdes s'annulant sur les poids qui sont combinaisons linéaires entières de racines, et est lié à un invariant cohomologique bien connu de G. Lorsque $k = \mathbf{R}$, on retrouve, sous une forme rendue plus compréhensible par la généralité du point de vue, les résultats de E. Cartan sur les représentations linéaires réelles des groupes de Lie simples réels.

Les notes de cours [B1] contiennent quelques résultats nouveaux sur la structure des groupes commutatifs et résolubles. Citons par exemple : une démonstration élémentaire du fait que, sur un corps algébriquement clos, un groupe linéaire de dimension un est isomorphe au groupe additif ou au groupe multiplicatif ; l'existence dans tout k-tore d'un point rationnel engendrant un sous-groupe dense, à condition que k ne soit pas extension algébrique d'un corps fini ; diverses caractérisations des groupes unipotents «antidéployés» (wound).

La théorie des éléments unipotents réguliers des groupes semi-simples a été faite par R. Steinberg. E. Brieskorn, R. Steinberg et moi avons étudié en collaboration les éléments unipotents *sous-réguliers* d'un groupe simple G, c'est-à-dire les éléments dont le centralisateur a la dimension rg $G+2$ (pour les éléments réguliers, cette dimension est rg G). Ces éléments sont tous conjugués et la variété des points fixes d'un tel élément dans G/B (B un sous-groupe de Borel) est formée de courbes rationnelles dont le «schéma d'intersections» se déduit immédiatement du graphe de Dynkin de G et est ce graphe lui-même lorsque toutes les racines de G ont même longueur (cf. la conférence de E. Brieskorn au Congrès International de Nice, 1970).

18. *Groupes réductifs sur les corps locaux*

Les groupes réductifs sur les corps valués complets font l'objet de recherches en cours depuis plusieurs années, en collaboration avec F. Bruhat. Notre point de départ a été le résultat d'Iwahori et Matsumoto déjà cité (§14). En gros, notre but est de faire la théorie de ces groupes vus comme des êtres (de dimension infinie) définis sur le corps résiduel. Sous cet angle, les résultats présentent une analogie frappante avec la théorie des groupes réductifs évoquée au §17. Bornons-nous ici au cas d'un groupe simplement connexe sur un corps de base local à corps résiduel k parfait. Aux sous-groupes de Borel, sous-groupes résolubles connexes maximaux, correspondent ici les *sous-groupes d'Iwahori* qui sont prorésolubles connexes (pour une topologie à définir) maximaux ; ils n'existent éventuellement qu'après extension de k, c'est-à-dire après extension non ramifiée du corps local, mais ils existent toujours sur k lui-même lorsque ce dernier est fini. Par analogie avec les sous-groupes paraboliques, définis comme contenant un sous-groupe de Borel, nous appelons *parahoriques* les sous-groupes contenant un sous-groupe d'Iwahori ; ce sont aussi des groupes proalgébriques sur k, et les sous-groupes k-parahoriques minimaux sont tous conjugués. De plus, un tel sous-groupe forme avec le normalisateur d'un tore déployé maximal une BN-paire dont le groupe de Weyl n'est plus fini, mais est un groupe affine engendré par des réflexions : c'est la BN-paire dont il a été question au §14. Aux tores, au système de racines (absolu ou relatif), au graphe de Dynkin, … correspondent ici les *minitores*, un système de racines affines (infini), un graphe de Dynkin affine, …

Les sous-groupes parahoriques sont le pivot de cette théorie. En premier lieu, les sous-groupes parahoriques maximaux s'avèrent être les sous-groupes bornés maximaux ; ainsi est résolu, en particulier, le problème de la détermination des sous-groupes compacts maximaux des groupes semi-simples sur un corps localement compact non discret. En outre, les sous-groupes parahoriques qui sont, d'une part, proalgébriques sur k et, de l'autre, liés au groupe G par la BN-structure, sont le joint qui permet de relier la théorie des groupes algébriques sur k à la structure de G. C'est ainsi que, dans le cas d'un corps k fini, nous pouvons déduire le théorème de M. Kneser sur la nullité de H^1 du théorème analogue (théorème de Lang) pour les groupes algébriques sur un corps fini, et que la classification des groupes semi-simples sur les corps locaux localement compacts se ramène, comme dans le cas d'un corps fini, à la simple détermination des automorphismes des graphes de Dynkin.

Ces résultats sont annoncés dans les notes [70] à [73] (cf. aussi [75]). Les fondements «abstraits» de la théorie sont établis dans [88]. Nous y étudions les BN-paires de type affine (cf. §14) et les données radicielles valuées. Si Φ est un système de racines, une *donnée radicielle* de type Φ dans un groupe est un système (U_a) de sous-groupes indexés par Φ, soumis à des axiomes calqués sur les principales propriétés de $U_{(a)}(k)$ d'un groupe algébrique réductif (cf. §17). Une *valuation* d'une telle donnée est un système de filtrations $\varphi_a\colon U_a \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ satisfaisant à certaines conditions. Toute valuation discrète donne lieu à une BN-paire de type affine. Une partie des résultats mentionnés plus haut peut déjà s'établir sur cette base axiomatique. Par exemple, un groupe G avec BN-paire (B, N) de type affine irréductible possède une et une seule bornologie compatible avec la loi de groupe, telle que B soit borné et que G ne le soit pas ; pour cette bornologie, tout sous-groupe borné maximal contient un conjugué de B. Dans le cas des valuations denses, on a un résultat analogue qui ne s'exprime d'ailleurs bien qu'en termes d'immeubles. Une partie importante de [88] est consacrée à l'étude d'une classe de sous-groupes, les groupes P_f, qui généralisent les sous-groupes parahoriques ; dans le cas d'un groupe réductif défini sur un corps valué d'anneau d'entiers $\mathcal{O}$ et qui se déploie sur une extension non ramifiée de ce corps, les P_f sont les groupes de points entiers pour certaines $\mathcal{O}$-structures qui peuvent être caractérisées par des propriétés de lisseté et de «bonne réduction».

19. *Le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple comme groupe «abstrait»*

La théorie des groupes classiques, telle qu'elle est exposée par exemple dans le livre de J. Dieudonné, s'intéresse principalement à deux types de questions : structure (suites de composition et, en particulier, simplicité) ; automorphismes et isomorphismes. Dans les articles [56] et [92] (ce dernier écrit en collaboration avec A. Borel), les problèmes de simplicité et la recherche des automorphismes et des isomorphismes sont portés sur le plan des groupes algébriques ; les théorèmes établis ont pour cas particuliers la plupart des résultats connus dans ces domaines, pour autant que les groupes considérés soient algébriques et *isotropes*, les groupes anisotropes nécessitant des méthodes différentes.

Soit G un groupe algébrique absolument presque simple défini sur un corps k. On note G^+ le sous-groupe de $G(k)$ engendré par les points rationnels des k-sous-groupes unipotents déployés de G. Le théorème principal de [56], conséquence de résultats généraux sur les BN-paires (cf. §13), affirme que, sauf dans un petit nombre de cas dont la liste est connue, tout sous-groupe non central de $G(k)$ normalisé par G^+ contient G^+. En particulier, le quotient de G^+ par son centre est simple.

Dans [92], nous considérons non seulement les automorphismes et isomorphismes mais, plus généralement, les homomorphismes à image dense : soient G' un groupe absolument simple adjoint défini sur un corps k', H un sous-groupe de $G(k)$ contenant G^+ et $\alpha\colon H \to G'(k')$ un homomorphisme tel que $\alpha(G^+)$ soit dense ; alors, il existe un unique homomorphisme de corps $\varphi\colon k \to k'$ et une unique k'-isogénie $\beta\colon {}^{\varphi}G \to G'$, où ${}^{\varphi}G$ est le k'-groupe déduit de G par le changement de base φ, tels que α soit la restriction à H du composé de l'homomorphisme canonique $G(k) \to {}^{\varphi}G(k')$ et de β.

Il est naturel de chercher à se débarrasser de l'hypothèse de densité de l'image. J'ai obtenu quelques résultats dans cette direction, notamment lorsque G est déployé, ou encore pour $k = k' = \mathbf{R}$. La méthode utilisée dans ce dernier cas donne un résultat plus général : la description de tous les homomorphismes d'un groupe de Lie réel connexe presque simple G quelconque (le cas compact n'est plus exclu) dans un groupe de Lie G'. Supposons, pour simplifier, que G «est algébrique», et soit $\alpha\colon G \to G'$ un homomorphisme ; alors, il existe une $\mathbf{R}$-algèbre K, un homomorphisme d'anneaux $\varphi\colon \mathbf{R} \to K$ et un homomorphisme continu β de ${}^{\varphi}G$, considéré par restriction des scalaires comme un groupe de Lie, dans G', tels que α soit composé de l'homomorphisme $G \to {}^{\varphi}G$ induit par φ et de β.

Mentionnons enfin, dans un ordre d'idées un peu différent, le théorème principal de [86] : tout groupe linéaire (abstrait) G de type fini qui ne possède pas de sous-groupe résoluble d'indice fini contient un groupe non-abélien libre ; si l'adhérence de Zariski de G est semi-simple, G possède même une partie libre dénombrable F telle que deux éléments quelconques de F engendrent un sous-groupe dense de G. Ce résultat a plusieurs conséquences intéressantes : il permet par exemple de prouver la conjecture de J. Milnor et J. Wolf sur la croissance d'un groupe de type fini dans le cas particulier des groupes linéaires.

20. *Classification*
Formes

Un théorème bien connu de E. Witt permet de caractériser une forme quadratique par son indice et sa partie anisotrope. On a un résultat analogue pour les groupes algébriques semi-simples : un groupe G défini sur un corps k est caractérisé à isogénie centrale près par un *indice* et un *noyau anisotrope* : l'indice est constitué par le graphe de Dynkin Δ de G, une opération du groupe de Galois de la clôture séparable de k sur Δ et un ensemble J de sommets de Δ ; le noyau anisotrope est un groupe semi-simple anisotrope dont le graphe de Dynkin s'obtient en retirant de Δ les sommets appartenant à J et les traits qui y aboutissent. Ce résultat fait l'objet de [36] et [68], où sont aussi énoncées des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un indice et un noyau anisotrope donnés caractérisent effectivement un groupe G, ainsi que la liste des indices possibles sur un corps «général» sur un corps localement compact non discret et sur un corps de nombres. Remarquons que dans le cas réel, un groupe simple est entièrement déterminé par son indice et que l'on retrouve ainsi la classification des groupes de Lie réels simples.

21. *Applications de la classification des groupes algébriques à l'algèbre*

Une remarque fondamentale de A. Weil ramène la classification des groupes algébriques des types classiques A, B, C, D à celle des algèbres simples à involution, sauf toutefois pour les groupes des types B et D sur un corps de caractéristique 2. Pour traiter ces cas, il faut faire appel à la notion de forme quadratique introduite dans [76] : soient E une algèbre simple munie d'une involution σ de première espèce et A l'ensemble des «formes alternées» $x-\sigma(x)$ $(x \in E)$; on appelle alors *forme quadratique* un élément de E/A. Lorsque E est une algèbre de matrices et σ la transposition, on retrouve les formes quadratiques usuelles. Dans [76] sont aussi définis l'indice de Witt, le discriminant ou l'invariant d'Arf et l'algèbre de Clifford paire, obtenue rationnellement comme un quotient de l'algèbre tensorielle de E, d'une forme quadratique ; une formule explicite, nouvelle même dans le cas classique, est donnée pour l'invariant d'Arf. Notons que les formes quadratiques utilisées dans [82] (cf. §12) sont la généralisation de celles-ci à des corps gauches à involution et des espaces vectoriels de dimension quelconque ; d'autre part, l'extension par C. T. C. Wall de cette notion au cas d'un anneau de base joue actuellement un rôle important en topologie différentielle.

Dans une série de travaux, C. Chevalley, R. D. Schafer, H. Freudenthal et N. Jacobson ont montré les liens existant entre l'algèbre exceptionnelle simple de Jordan, de dimension 27, et les algèbres de Lie exceptionnelles F_4, E_6, E_7, E_8, mais ils n'obtiennent que des constructions *ad hoc*, différentes pour ces quatre algèbres. La recherche de formules explicites pour certaines formes de E_6 m'a conduit à la découverte de deux procédés de construction d'algèbres de Lie à partir d'algèbres de Jordan. Le premier, décrit dans [49], part d'une algèbre de Jordan J quelconque et d'une algèbre de Lie simple Y de dimension 3 ; si D est l'algèbre des dérivations intérieures de J, l'espace $L = J \otimes Y + D$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie naturelle, donnée par des formules simples. La réciproque de ce résultat fournit une caractérisation des algèbres de Jordan qui explique le rôle joué par celles-ci dans l'étude des domaines bornés symétriques (travaux de M. Koecher). La seconde construction (cf. [54], [65] et R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, chap. IV) associe à tout couple formé d'une algèbre alternative A de degré $\leqslant 2$ et d'une algèbre de Jordan J de degré 3 une algèbre de Lie L, sorte de produit tensoriel de A et J. Les cas les plus intéressants sont ceux où A est le corps de base k, une extension quadratique (ou $k \oplus k$), une algèbre de quaternions ou une algèbre d'octaves, et où J est l'algèbre de Jordan des matrices hermitiennes d'ordre 3 à coefficients dans une algèbre de l'un de ces quatre types. Sur un corps algébriquement clos, on trouve ainsi un carré de 4×4 algèbres de Lie dont la dernière ligne et la dernière colonne sont (F_4, E_6, E_7, E_8). Ce «carré magique» (H. Freudenthal) était déjà connu pour ses propriétés numériques remarquables, observées expérimentalement par H. Freudenthal et moi (cf. [27], III) et qui trouvent ainsi leur explication. Sur un corps non algébriquement clos, la construction donne diverses formes des algèbres de Lie exceptionnelles, et en particulier toutes leurs formes sur $\mathbf{R}$, sur les corps $\mathfrak{p}$-adiques et sur les corps de nombres (à supposer que le principe de Hasse soit vrai pour E_8).

Partant de l'observation que le stabilisateur d'un point générique de l'algèbre de Jordan simple exceptionnelle J dans le groupe Aut J (de type F_4) est un groupe de type A_3, j'en ai déduit des constructions explicites de toutes les formes de J sur un corps quelconque k de caractéristique différente de 2, à partir d'algèbres simples de dimension 9 sur k et d'algèbres simples de dimension 9 à involution de seconde espèce sur une extension quadratique de k (cf. N. Jacobson, Structure and representations of Jordan algebras, IX, 12). On en déduit une démonstration simple d'un résultat de A. A. Albert : l'existence de formes à division de J.

22. *Groupes finis simples*

Dans son livre «Linear groups», publié en 1901, L. E. Dickson dressait la liste des groupes finis simples connus. Aucun changement n'y a été apporté jusqu'en 1955, date à laquelle un nouveau départ a été donné par C. Chevalley, après quoi les découvertes de nouveaux groupes simples se sont succédées à un rythme rapide. Sont apparues d'abord plusieurs séries infinies : groupes de Chevalley, formes *tordues* de ceux-ci (trouvées par D. Hertzig, R. Steinberg et moi), groupes de Suzuki et de Ree ; ont suivi des groupes isolés, les groupes *sporadiques*, actuellement au nombre de 20 (groupes de Mathieu compris). Mes travaux dans ce domaine sont les suivants.

Ayant associé des géométries aux groupes exceptionnels complexes (cf. §11), j'ai songé à prendre les principales propriétés combinatoires de celles-ci pour axiomes et de construire ainsi des géométries analogues, donc des groupes exceptionnels, sur un corps quelconque. Ce programme était réalisé pour E_6 (cf. [28]) au moment où les résultats généraux de Chevalley ont rendu inutile la poursuite de cette voie.

Les deux séries non classiques de «groupes de Chevalley tordus» (groupes ${}^2E_6$ et ${}^3D_4$) sont construits et étudiés dans [31] et [33] ; simultanément, R. Steinberg obtenait ces mêmes groupes par une méthode uniforme, proche de celle de Chevalley.

Dès après la découverte par Suzuki des groupes qui portent son nom, j'en ai donné une interprétation géométrique comme groupes d'automorphismes de certains ovoïdes [41], [46].

L'exposé [41], consacré aux groupes de Suzuki et de Ree, généralise les résultats de Ree (le corps de base n'y est pas supposé parfait) et contient des données nouvelles sur ces groupes, entre autres une description élémentaire des groupes ${}^2G_2$ comme groupes doublement transitifs.

En définissant les groupes ${}^2F_4$, R. Ree avait montré qu'ils sont simples lorsque le corps de base a plus de deux éléments, mais il restait à déterminer la structure de ${}^2F_4(\mathbf{F}_2)$; il est établi dans [56] que ce groupe possède un sous-groupe simple d'indice 2. D'autre part, les résultats généraux de [56] ont comme corollaires immédiats les théorèmes de simplicité des groupes des séries infinies.

Dans [79], le groupe de Janko d'ordre 604.800 est obtenu comme groupe d'automorphismes d'un graphe à 100 sommets et 1800 arêtes, construit à partir de l'hexagone généralisé associé au groupe $G_2(\mathbf{F}_2)$ (cf. §12). Jusqu'alors, l'existence de ce groupe de Janko n'était prouvée qu'à l'aide d'un ordinateur.

Enfin, [53] décrivait l'état de la théorie des groupes finis simples peu avant que Z. Janko ait trouvé le premier groupe sporadique (groupes de Mathieu mis à part) et l'exposé [83] fait le point après la découverte du 19e de la série ; j'essaye d'y mettre un semblant d'ordre dans un maquis dont le mystère ne semble pas près d'être éclairci.