Quelques Résultats d'Indépendance Algébrique

François Gramain

Abstract. We describe a theorem of Yu. Nesterenko [Nes1] on algebraic independence of values of Eisenstein series, together with some corollaries. The most impressive of these is the algebraic independence of π, e^{π} and $\Gamma(1/4)$. Finally we give some indications on new methods of proving algebraic independence.

1991 Mathematics Subject Classification: 11J85, 11J89, 11J91, 11F11
Keywords and Phrases: Algebraic Independence, Modular Functions

La théorie des nombres transcendants a donné lieu ces dernières années à de nombreux résultats importants. Cependant, nous nous limiterons ici à la description du théorème de Yu. Nesterenko sur l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions modulaires et à quelques corollaires. Un dernier paragraphe sera consacré aux méthodes apparues récemment dans les preuves d'indépendance algébrique. Bien que beaucoup des résultats cités aient des analogues p−adiques, nous parlerons surtout du cas complexe.

1. Fonctions elliptiques et modulaires : notations

Les résultats classiques rappelés dans ce paragraphe sont traités en détail dans [Cha], [Ser], [Lan1] et [Lan2].

Soit $L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ le réseau de $\mathbf{C}$ engendré par les nombres complexes ω_1 et ω_2 linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$. Dans toute la suite on supposera que $\tau = \omega_2/\omega_1$ est dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbf{C}\,;\, \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$. Le groupe quotient $\mathbf{C}/L$ est la courbe elliptique paramétrée par $(1 : \wp(z) : \wp'(z))$ dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$, où $\wp(z) = z^{-2} + \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \left((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\right)$ est la fonction de Weierstrass associée au réseau L. Son équation affine est

$$y^2 = 4\,x^3 - g_2(L)\,x - g_3(L),$$

où les invariants $g_2(L)$ et $g_3(L)$ sont donnés par

$$g_2(L) = 60 \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \omega^{-4} \quad \text{et} \quad g_3(L) = 140 \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \omega^{-6}\,.$$

L'ensemble des périodes de la fonction $\wp$ est le réseau L et, à toute période $\omega \in L$ est associée une quasi-période $\eta = \eta(\omega)$ par $\eta = \zeta(z+\omega) - \zeta(z)$, où la fonction ζ est une primitive de $-\wp$.

À chaque réseau L est associé son invariant $j(L) = 1728\,\dfrac{g_2^3(L)}{g_2^3(L) - 27\,g_3^2(L)}$, et deux courbes elliptiques $\mathbf{C}/L$ et $\mathbf{C}/M$ sont (analytiquement) isomorphes si et seulement si $j(L) = j(M)$.

Par homogénéité, l'invariant j est en fait une fonction de $\tau \in \mathcal{H}$ qui satisfait

$$j(\tau+1) = j(\tau) \quad \text{et} \quad j(-1/\tau) = j(\tau)\,,\ \text{donc}$$
$$j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = j(\tau) \text{ pour tout } \tau\in\mathcal{H} \text{ et tout } \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}).$$

Plus généralement, une fonction f holomorphe sur le demi-plan supérieur $\mathcal{H} = \{\tau\in\mathbf{C}\,;\,\mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ est modulaire de poids $2k$ ($k\in\mathbf{N}$) si

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} f(\tau) \text{ pour tout } \tau\in\mathcal{H} \text{ et tout } \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}).$$

En particulier on a $f(\tau+1) = f(\tau)$, de sorte que f possède un développement de Fourier à l'infini $f(\tau) = F(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\, z^n$, où $z = e^{2i\pi\tau}$.
Si la série F a seulement un pôle en 0, on dit que f est une fonction modulaire. Ainsi l'invariant modulaire j est une fonction modulaire de poids 0 et

$$j(\tau) = J(z) = z^{-1} + 744 + 196\,884\, z + 21\,493\,760\, z^2 + \textstyle\sum_{n\geq 3} c(n) z^n,$$

où la série J est convergente dans le disque unité pointé $\mathcal{D} = \{z\in\mathbf{C}\,;\, 0<|z|<1\}$.

Une forme modulaire est une fonction modulaire qui est holomorphe sur $\mathcal{H}$ et à l'infini de sorte que la série F est entière. L'algèbre graduée des formes modulaires est engendrée par les séries d'Eisenstein Q et R (notations de Ramanujan) :
Si, pour $n\in\mathbf{N}$, on pose $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, alors, en notant $z = e^{2i\pi\tau}$ où $\tau\in\mathcal{H}$, $Q(z) = E_4(z) = 1 + 240\sum_{n\geq1} \sigma_3(n)\, z^n = 12\,(2\pi)^{-4}\, g_2(\tau)$ est une forme modulaire de poids 4 et $R(z) = E_6(z) = 1 - 504\sum_{n\geq1}\sigma_5(n)\, z^n = 216\,(2\pi)^{-6}\, g_3(\tau)$ est une forme modulaire de poids 6. On a noté $g_i(\tau) = g_i(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$, de sorte que la formule donnant j en fonction de g_2 et g_3 s'écrit $J = 1728\, Q^3 / (Q^3 - R^2)$.

L'opérateur différentiel $\Theta = z\,\dfrac{d}{dz} = \dfrac{1}{2i\pi}\,\dfrac{d}{d\tau}$ a une grande importance dans la théorie des formes modulaires bien qu'il fasse intervenir une série d'Eisenstein qui n'est pas une forme modulaire : $P(z) = E_2(z) = 1 - 24\sum_{n\geq1}\sigma_1(n)\, z^n$ ne définit pas une forme modulaire de poids 2, mais presque, comme le montre la formule $P(e^{-2i\pi/\tau}) = \tau^2\, P(e^{2i\pi\tau}) + 6\,\tau/(i\,\pi)$.

Les séries d'Eisenstein sont liées par le système différentiel

$$12\,\Theta P = P^2 - Q\,, \qquad 3\,\Theta Q = PQ - R\,, \qquad 2\,\Theta R = PR - Q^2.$$

Comme conséquence immédiate de ces relations on obtient

$$\frac{\Theta J}{J} = -\frac{R}{Q} \qquad\qquad 6\,\frac{\Theta^2 J}{\Theta J} = P - \frac{4R}{Q} - \frac{3Q^2}{R}$$

et les relations réciproques

$$P = 6\,\frac{\Theta^2 J}{\Theta J} - 4\,\frac{\Theta J}{J} - 3\,\frac{\Theta J}{J-1728}\,, \quad Q = \frac{(\Theta J)^2}{J\,(J-1728)}\,, \quad R = \frac{-(\Theta J)^3}{J^2\,(J-1728)}\,,$$

de sorte que, en notant $f(z)$ la fonction $z\mapsto f(z)$, on a l'identité des corps
$\mathbf{Q}(z,\, P(z),\, Q(z),\, R(z)) = \mathbf{Q}(z,\, J(z),\, \Theta J(z),\, \Theta^2 J(z)) = \mathbf{Q}(z,\, J(z),\, J'(z),\, J''(z))$.
Quand on passe des fonctions aux valeurs qu'elles prennent en un point, les facteurs J et $J-1728$ en dénominateur obligent à exclure quelques points : pour $\tau\not\equiv i$ et $\tau\not\equiv\rho = e^{2i\pi/3} \bmod SL_2(\mathbf{Z})$, les corps engendrés sur $\mathbf{Q}$ par les nombres $q = e^{2i\pi\tau}$, $P(q)$, $Q(q)$ et $R(q)$ ou par $e^{2i\pi\tau}$, $j(\tau)$, $j'(\tau)/\pi$ et $j''(\tau)/\pi^2$ ont le même degré de transcendance sur $\mathbf{Q}$.

Enfin, les valeurs des fonctions P, Q et R sont liées aux périodes et quasi-périodes des fonctions de Weierstrass : Soient $\wp$ la fonction elliptique de Weierstrass associée au réseau $L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$, où $\tau = \omega_2/\omega_1$ est dans $\mathcal{H}$, et η_1 la quasi-période associée à ω_1, alors on a :

$$P(q) = 3\,(\omega_1/\pi)\,(\eta_1/\pi)\,, \;\; 4\,Q(q) = 3\,(\omega_1/\pi)^4\,g_2(L)\,, \;\; 8\,R(q) = 27\,(\omega_1/\pi)^6\,g_3(L)\,.$$

2. Le théorème de Yu. Nesterenko

Le premier résultat de transcendance concernant l'invariant modulaire j (ou J) obtenu par des méthodes modulaires est le

Théorème stéphanois ([BDGP] 1995). *Si $q \in \mathcal{D}$ est algébrique, alors $J(q)$ est transcendant.*

Ce résultat avait été conjecturé par K. Mahler ([Mah1] 1969) et sa preuve s'adapte sans difficulté au cas $p-$adique conjecturé en 1971 par Yu. V. Manin [Man]. Il est contenu dans le théorème de Yu. Nesterenko obtenu moins d'un an plus tard :

Théorème 1 (Yu. Nesterenko 1996). *Pour $q \in \mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C}\,;\, 0 < |z| < 1\}$ on a* $\mathrm{degtr}_{\mathbf{Q}}\, \mathbf{Q}\,(q,\, P(q),\, Q(q),\, R(q)) \geq 3$.

D'après le paragraphe précédent, cet énoncé est équivalent au suivant :

Théorème 1'. *Pour tout réseau $L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ on a*

$$\mathrm{degtr}_{\mathbf{Q}}\, \mathbf{Q}\left(g_2(L),\, g_3(L),\, \omega_1/\pi,\, \eta_1/\pi,\, e^{2i\pi\omega_2/\omega_1}\right) \geq 3\,.$$

Comme pour le théorème stéphanois, la preuve du Théorème 1 n'utilise que les fonctions modulaires (et pas du tout les fonctions elliptiques), alors que les autres résultats antérieurs qu'il contient ont été démontrés par des procédés elliptiques. En voici deux exemples : le résultat suivant (dû à Th. Schneider, 1937, voir [Sch])

Si $\omega \neq 0$ est une période d'une fonction $\wp$ de Weierstrass d'invariants algébriques g_2 et g_3, alors ω/π est un nombre transcendant

est équivalent à ce corollaire du théorème de Nesterenko :

Pour $q \in \mathcal{D}$ les nombres $Q(q)$ et $R(q)$ ne sont pas tous deux algébriques

et il implique le suivant :

Pour $q \in \mathcal{D}$ et $J(q) \notin \{0,\, 1728\}$ les nombres $J(q)$ et $qJ'(q)$ ne sont pas simultanément algébriques.

D. Bertrand a été le premier à étudier systématiquement la correspondance entre énoncés elliptiques et énoncés modulaires. C'est l'équivalence précédente qui l'a inspiré en 1975 ([Ber1]) pour obtenir l'analogue $p-$adique du résultat de Th. Schneider en utilisant les fonctions elliptiques de Jacobi-Tate au lieu des fonctions de Weierstrass. Notons que K. Barré [Bar1] a obtenu en 1995 le dernier résultat cité dans les cas complexe et $p-$adique par une preuve purement modulaire.

De façon analogue, ce résultat de G. V. Chudnovsky (1977, voir [Chu])

Si η est la quasi-période associée à la période $\omega \neq 0$ de la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass d'invariants g_2 et g_3, alors $\mathrm{degtr}_{\mathbf{Q}}\, \mathbf{Q}\,(g_2,\, g_3,\, \omega/\pi,\, \eta/\omega) \geq 2$

est équivalent à

Pour $q \in \mathcal{D}$ on a $\mathrm{degtr}_{\mathbf{Q}}\, \mathbf{Q}\,(P(q),\, Q(q),\, R(q)) \geq 2$.

dont la version $p-$adique est due à D. Bertrand [Ber2]. Pour un exposé complet de la correspondance entre théorèmes (et conjectures) elliptiques et modulaires, on pourra consulter [Dia2], ainsi que [Dia1] pour des liens étonnants avec la fonction exponentielle.

Venons-en à quelques corollaires qui donnent des résultats nouveaux :

Corollaire 1. *Si $\tau \not\equiv i,\, \rho \bmod SL_2(\mathbf{Z})$, alors le degré de transcendance sur $\mathbf{Q}$ des corps $\mathbf{Q}(q,\, J(q),\, J'(q),\, J''(q))$ et $\mathbf{Q}\left(e^{2i\pi\tau},\, j(\tau),\, j'(\tau)/\pi,\, j''(\tau)/\pi^2\right)$ est au moins égal à 3.*

En particulier

Corollaire 2. *Si $q \in \mathcal{D}$ est algébrique (dans ce cas τ est transcendant d'après le théorème de Gel'fond-Schneider), alors les trois nombres $P(q)$, $Q(q)$ et $R(q)$ sont algébriquement indépendants sur* $\mathbf{Q}$*, de même que $J(q)$, $J'(q)$ et $J''(q)$.*

Corollaire 3. *Si $\wp$ est une fonction elliptique d'invariants g_2 et g_3 algébriques, alors les 3 nombres $e^{2i\pi\tau}$, ω_1/π et η_1/π sont algébriquement indépendants sur* $\mathbf{Q}$.

Dans le cas de la multiplication complexe (c'est-à-dire lorsque τ est un nombre algébrique quadratique), grâce aux relations de Legendre et de D. W. Masser ([Mas], lemme 3.1), on obtient le

Corollaire 4. *Si $\wp$ est une fonction elliptique d'invariants g_2 et g_3 algébriques et à multiplication complexe, pour toute période $\omega \neq 0$ de $\wp$, chacun des deux triplets $\left\{e^{2i\pi\tau}, \omega, \eta\right\}$ et $\left\{e^{2i\pi\tau}, \omega, \pi\right\}$ est constitué de nombres algébriquement indépendants sur* $\mathbf{Q}$.

En particulier, pour $\tau = i$ (resp. $\tau = \rho$) la courbe elliptique d'équation $y^2 = 4\,x^3 - 4\,x$ (resp. $y^2 = 4\,x^3 - 4$) est associée à un réseau dont une période est $\omega = \Gamma(1/4)^2 \,/\, \sqrt{8\pi}$ (resp. $\omega = \Gamma(1/3)^3 \,/\, (2^{4/3}\pi)$), de sorte que :

Corollaire 5. *Les trois nombres π, e^{π} et* $\Gamma(1/4)$ *sont algébriquement indépendants sur* $\mathbf{Q}$*, de même que π, $e^{\pi\sqrt{3}}$ et* $\Gamma(1/3)$.

C'est par ce biais un peu surprenant que l'on obtient

l'indépendance algébrique de π et e^{π}

grâce à une démonstration qui ne fait pas intervenir la fonction exponentielle !

L'usage de la fonction thêta de Weierstrass-Jacobi (voir [Ber3] et [Ber4])

$$\theta(\tau, w) = \textstyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{i\pi n^2\tau}\, e^{2i\pi n w}$$

donne d'autres corollaires. Par spécialisation de cette fonction thêta on obtient les classiques fonctions thêta de Jacobi

$$\theta_2(z) = 2\,z^{1/4} \textstyle\sum_{n\geq 0} z^{n(n+1)}, \quad \theta_3(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} z^{n^2} \text{ et } \quad \theta_4(z) = \theta_3(-z)$$

où, comme plus haut, $z = e^{2i\pi\tau}$ est dans le disque unité. Ces fonctions sont liées aux séries d'Eisenstein par des relations du type

$$2\,Q(z^2) = \theta_2(z)^8 + \theta_3(z)^8 + \theta_4(z)^8\,,$$

$$P(z^2) = 4\left(\frac{\Theta\theta_2}{\theta_2} + \frac{\Theta\theta_3}{\theta_3} + \frac{\Theta\theta_4}{\theta_4}\right)(z)\,,$$

qui font que tout résultat d'indépendance algébrique sur des valeurs des fonctions P, Q, R donne un résultat analogue concernant les valeurs des fonctions θ_i ou de leurs dérivées. Ainsi l'énoncé du théorème 1 est équivalent au suivant [Ber3] :

Théorème 1". *Pour i, j et $k \in \{2, 3, 4\}$ tels que $i \neq j$ et pour $q \in \mathcal{D}$ on a*

$$\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}\,(q,\, \theta_i(q),\, \theta_j(q),\, \Theta\theta_k(q)) \geq 3$$

$$\textit{resp.}\ \operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}\left(q,\, \theta_k(q),\, \Theta\theta_k(q),\, \Theta^2\theta_k(q)\right) \geq 3\,.$$

dont un cas particulier est le

Corollaire 6. *Si $\alpha \in \mathcal{D}$ est algébrique, les trois nombres $\sum_{n\geq 1} \alpha^{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} n^2\,\alpha^{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} n^4\,\alpha^{n^2}$ sont algébriquement indépendants sur* $\mathbf{Q}$.

L'utilisation de la fonction de 2 variables $\theta(\tau, w)$, où τ prend en compte l'aspect modulaire et w l'aspect elliptique des nombres étudiés est peut-être un moyen de ne pas dissocier ces deux aspects des problèmes d'indépendance algébrique. D. Bertrand [Ber4] propose plusieurs conjectures dans cette direction.

Enfin, grâce à un argument de spécialisation dû à A. Weil, D. Duverney,

K. et K. Nishioka et I. Shiokawa [DNNS] retrouvent la deuxième assertion du théorème 1" ; dans le même article, ils prouvent la transcendance d'un certain nombre de sommes de séries construites à partir de suites récurrentes en les liant à des valeurs de la fonction modulaire $\Delta = (Q^3 - R^2)/1728$, par exemple :

Corollaire 7. *Si $\{u_n\}$ est la suite de Fibonacci ($u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$), les nombres $\sum_{n\geq 1} u_n^{-2}$, $\sum_{n\geq 1}(-1)^n u_n^{-2}$, $\sum_{n\geq 1} u_{2n-1}^{-1}$ et $\sum_{n\geq 1} n\, u_{2n}^{-1}$ sont transcendants.*

3. La preuve de Yu. Nesterenko

Une preuve complète du théorème de Yuri Nesterenko se trouve, en dehors de l'article original ([Nes1] pour l'annonce et [Nes2] pour les démonstrations), dans les exposés de Michel Waldschmidt au Séminaire Bourbaki [Wal1] et à Carleton [Wal2]. Pour les résultats quantitatifs les plus récents, on pourra consulter [Nes3].

Pour appliquer un critère d'indépendance algébrique de Patrice Philippon [Phi1], on construit une suite de polynômes $A_N \in \mathbf{Z}[z, X_1, X_2, X_3]$ telle que $|A_N(q, P(q), Q(q), R(q))|$ soit petit, avec un contrôle des degrés et des hauteurs (*la hauteur $H(P)$ du polynôme P est le maximum des modules de ses coefficients*) des A_N :

Premier pas. Une fonction auxiliaire

Pour $N \in \mathbf{N}$ suffisamment grand, le principe des tiroirs (lemme de Siegel) fournit un polynôme non nul $A \in \mathbf{Z}[z, X_1, X_2, X_3]$ tel que:
les degrés partiels de A sont $\leq N$; $\log H(A) \leq 116\, N \log N$;
et la fonction F définie par $F(z) = A(z, P(z), Q(z), R(z))$ possède en 0 un zéro d'ordre $M \geq \frac{1}{2} N^4$.

La fonction F n'est pas identiquement nulle car les fonctions z, $P(z)$, $Q(z)$ et $R(z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{C}$ ([Mah2]), de sorte que M est correctement défini. On utilise alors le fait que les séries d'Eisenstein ont des coefficients entiers dont la croissance est polynomiale : la borne (grossière) $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k \leq (\sum_{d|n} d)^k \leq n^{2k}$ permet de majorer le module des coefficients de Taylor de $z^{k_0}\, P(z)^{k_1}\, Q(z)^{k_2}\, R(z)^{k_3}$ par les coefficients de Taylor (de même indice) de $c^N\,(1-z)^{-22N}$, où $N \geq k_i$ et où c est une constante absolue.

Si $A = \displaystyle\sum_{0\leq k_i\leq N} a(k_0, \underline{k})\, z^{k_0} \underline{X}^{\underline{k}}$ et $F(z) = A(z, P(z), Q(z), R(z)) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n\, z^n$, le système linéaire des $[(N+1)^4/2]$ équations $b_n = 0$ $(0 \leq n < [(N+1)^4/2])$ en les $(N+1)^4$ inconnues $a(k_0, \underline{k})$ a ses coefficients entiers et bornés par le calcul précédent, il possède donc une solution entière non nulle et assez petite.

On a ainsi construit une fonction auxiliaire $F(z) = b_M\, z^M + \sum_{n>M} b_n\, z^n$, où b_M est un entier rationnel non nul.

Deuxième pas. Majoration de $|F(z)|$

Soit $q \in \mathcal{D}$. La majoration des $|a(k_0, \underline{k})|$ permet de borner les $|b_n|$ et d'obtenir :
Pour N assez grand et $|z| \leq r = \min(\frac{1+|q|}{2}, 2|q|)$, on a $|F(z)| \leq |z|^M\, M^{187N}$.
La condition sur $|z|$ est purement technique ; le fait important est que $|z| \leq r$ avec $|q| < r < 1$ et Yu. Nesterenko choisit un tel r.

Troisième pas. Minoration d'un $|F^{(T)}(q)|$

Il existe un entier naturel $T \leq c_1(q)\, N \log M$ tel que $|F^{(T)}(q)| > (|q|/2)^{2M}$.

Il suffit d'appliquer la formule des résidus à

$$G(z) \,=\, z^{-M-1}\, F(z)\, \left(\frac{r^2 - q\bar{z}}{r\,(z-q)}\right)^T .$$

En effet, le module de F est borné par le deuxième pas et, par construction, le résidu en 0 de G est $b_M\,(-r/q)^T$, où $|b_M| \,\geq\, 1$ car c'est un nombre entier non nul.

Quatrième pas. Lemme de zéros

Lemme de zéros (Nesterenko). *Soient L_0 et L des nombres entiers ≥ 1. Si $A \in \mathbf{C}[z,\, X_1,\, X_2,\, X_3]$ est un polynôme non nul de degrés $\leq\, L_0$ en z et $\leq\, L$ en chacun des X_i, alors* $\operatorname{ord}_0 A(z,\, P(z),\, Q(z),\, R(z)) \,\leq\, 2.10^{45}\, L_0\, L^3$.

Le point crucial qui permet d'obtenir un tel lemme de zéros est le système différentiel satisfait par P, Q et R :

$$12\,\Theta P = \,P^2 - Q\,, \qquad 3\,\Theta Q = \,PQ - R\,, \qquad 2\,\Theta R = \,PR - Q^2,$$

mais le z dans $\Theta \,= \overset{\downarrow}{z}\, \dfrac{d}{dz}$ est cause d'une (la ?) sérieuse difficulté : il interdit l'usage des lemmes antérieurs de Yu. Nesterenko et oblige à démontrer un résultat qui est loin d'être trivial :

Tout idéal premier non nul de $\mathbf{C}[z,\, X_1,\, X_2,\, X_3]$ ayant un zéro au point $(0,1,1,1)$ et stable par l'opérateur

$$D \,=\, z\frac{d}{dz} + \frac{1}{12}(X_1^2 - X_2)\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{1}{3}(X_1X_2 - X_3)\frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{1}{2}(X_1X_3 - X_2^2)\frac{\partial}{\partial X_3}$$

contient le polynôme $z\,(X_2^3 - X_3^2)$.

La conclusion de ce quatrième pas est que *le paramètre M est majoré par $M \,\leq\, c\,N^4$, où c est une constante absolue.*

Cinquième pas. Qui est A_N ?

L'opérateur différentiel D ci-dessus a été étudié pour que, compte tenu du système différentiel satisfait par P, Q et R, pour tout $B \in \mathbf{C}[z,\, X_1,\, X_2,\, X_3]$, on ait $\dfrac{d}{dz}\, B(z,\, P(z),\, Q(z),\, R(z)) \,=\, \dfrac{1}{z}\,(DB)(z,\, P(z),\, Q(z),\, R(z))$.

En particulier, pour $F(z) \,=\, A(z,\, P(z),\, Q(z),\, R(z))$, par récurrence sur $t \in \mathbf{N}$, on obtient $z^t\, F^{(t)}(z) \,=\, D_t A(z,\, P(z),\, Q(z),\, R(z))$, où l'opérateur différentiel D_t est défini par $D_t \,=\, \prod_{0\leq k<t} (D-k)$.

De plus, il est clair que $12^t\, D_t A$ est, comme A, un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Ainsi, avec les notations du troisième pas, il existe $A_N \in \mathbf{Z}[z,\, X_1,\, X_2,\, X_3]$ tel que $(12\,z)^T\, F^{(T)}(z) \,=\, A_N(z,\, P(z),\, Q(z),\, R(z))$.

Enfin, la formule $A_N \,=\, 12^T\, D_T A$ permet de majorer le degré $\deg A_N$ et la hauteur $H(A_N)$ de A_N :

Pour tout entier N suffisamment grand, il existe $A_N \in \mathbf{Z}[z,\, X_1,\, X_2,\, X_3]$ tel que

$$\deg A_N \,\leq\, c_2(q)\, N\, \log N,\ \log H(A_N) \,\leq\, c_2(q)\, N\, (\log N)^2 \ \text{ et}$$

$$\exp(-\kappa_2(q)\, N^4) \,\leq\, |A_N(q,\, P(q),\, Q(q),\, R(q))| \,\leq\, \exp(-\kappa_1(q)\, N^4),$$

où les constantes c_2 et κ_i ne dépendent que de q.

Sixième pas. Conclusion

Un cas particulier du critère d'indépendance algébrique de P. Philippon [Phi1] permet alors de conclure :

Critère. *Soit $\underline{x} \in \mathbf{C}^m$; s'il existe une suite de polynômes $A_N \in \mathbf{Z}[\underline{X}]$ telle que*

$$\deg A_N \,\leq\, \sigma(N),\ \log H(A_N) \,\leq\, \sigma(N) \ \text{ et}$$

$$\exp(-\kappa_2\, \lambda(N)) \,\leq\, |A_N(\underline{x})| \,\leq\, \exp(-\kappa_1\, \lambda(N)),$$

où les κ_i *sont des constantes positives,* σ *et* λ *sont des fonctions croissant vers l'infini et satisfaisant* $\sigma(N+1)\,/\,\sigma(N) \longrightarrow 1$ *et* $\lambda(N)\,/\,(\sigma(N))^k \longrightarrow \infty$ *quand* $N \longrightarrow \infty$*, alors* $\mathrm{degtr}_{\mathbf{Q}}\ \mathbf{Q}(\underline{x}) \geq k$*.*

Mesures. Si l'on choisit avec plus de soin les degrés partiels du polynôme A construit au premier pas de la démonstration, les estimations du cinquième pas sont assez précises pour que l'on puisse utiliser un critère fournissant des mesures. On obtient ainsi des mesures d'indépendance algébrique et des mesures d'approximation, par exemple :

Soit $q \in \mathcal{D}$*, si* $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ *est une base de transcendance du corps* $\mathbf{Q}(q, P(q), Q(q), R(q))$*, alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour* $B \in \mathbf{Z}[X, Y, Z] \setminus \{0\}$*, on ait*

$$\log |B(\underline{\theta})| > -C\,(t(B) + \deg B\ \log t(B))^4\,(\log t(B))^9,$$

où $t(B) = \max(e, \deg B + \log H(B))$.

Soient $q \in \mathcal{D}$ *et* $\underline{x} = (q, P(q), Q(q), R(q))$*, alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout point algébrique* $\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{1\leq i\leq 4}$*, on ait*

$$\log \sum_{1\leq i\leq 4} |x_i - \alpha_i| > -C\,(t(\underline{\alpha})\ \deg(\underline{\alpha}))^{4/3} \log(t(\underline{\alpha})\ \deg(\underline{\alpha})),$$

où $\deg(\underline{\alpha}) = [\mathbf{Q}(\underline{\alpha}) : \mathbf{Q}]$*,* $t(\underline{\alpha}) = h(\underline{\alpha}) + \log \deg(\underline{\alpha})$ *et* $h(\underline{\alpha})$ *est la hauteur logarithmique absolue de Weil de* $\underline{\alpha}$ *:* $h(\underline{\alpha}) = \dfrac{1}{\deg(\underline{\alpha})} \sum_v d_v \log^+ \max_{1\leq i\leq 4} |\alpha_i|_v$.

Variante. D'autre part, dans [Phi2] et [Phi3], P. Philippon propose une autre façon de conclure à partir de la construction transcendante pour obtenir un cas particulier (contenant l'indépendance algébrique de π, e^π et $\Gamma(1/4)$) du théorème 1 : le lemme de zéros et le critère sont remplacés par une mesure de transcendance, ce qui introduit d'ailleurs une composante elliptique dans la preuve ; la construction de transcendance est celle qui a été présentée ci-dessus, mais en un peu plus simple : au troisième pas, il suffit d'avoir $F^{(T)}(q) \neq 0$ et, sans utiliser le lemme de zéros, la conclusion du cinquième pas est

$$\deg A_N \leq c(q)\,N \log M,\ \log H(A_N) \leq c(q)\,N\,(\log M)^2 \ \textit{et}$$
$$0 < |A_N(q, P(q), Q(q), R(q))| \leq \exp(-\kappa(q)\,M).$$

La mesure d'indépendance qu'on utilise alors est une version quantitative [GPhi1] du théorème de G.V. Chudnovsky dont on a parlé plus haut :

Théorème 2. *Soit* $\omega \neq 0$ *une période d'une fonction elliptique* $\wp$ *de Weierstrass d'invariants algébriques* g_2 *et* g_3 *et soit* η *la quasi-période associée. Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $c(\varepsilon) > 0$ *telle que, pour tout* $B \in \mathbf{Z}[X, Y] \setminus \{0\}$ *on ait* $|B(\frac{\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})| > \exp\left(-c(\varepsilon)\,t(B)^{3+\varepsilon}\right)$.

La mesure annoncée par G.V. Chudnovsky était un peu meilleure que cela et P. Philippon [Phi4] vient d'en donner la première démonstration. Elle prouve, en particulier, que les nombres π/ω et η/ω, et donc $\Gamma(1/4)$, ne sont pas des nombres de Liouville.

Pour utiliser le théorème 2, on suppose que g_2 et g_3 sont algébriques et que $P(q)$, $Q(q)$ et $R(q)$ sont algébriques sur $\mathbf{Q}(\pi/\omega, \eta/\omega)$; alors, on élimine $P(q)$, $Q(q)$ et $R(q)$ entre A_N et leurs polynômes minimaux sur $\mathbf{Q}(\pi/\omega, \eta/\omega)$. On obtient ainsi un $B_N(\pi/\omega, \eta/\omega)$ qui, pour N suffisamment grand, contredit la mesure de G. Philibert. Cela prouve que

Si $J(q)$ est algébrique, alors $\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(q, P(q), Q(q), R(q)) \geq 3$.

Notons enfin que, grâce à un lemme de zéros [GPhi2] pour les fonctions polynomiales en z et $J(z)$, K. Barré obtient [Bar2] des mesures d'approximation simultanée $|q-\alpha| + |J(q)-\beta| > \ldots$ meilleures que celles que l'on déduit des travaux de Yu. Nesterenko, dans le sens qu'elles séparent les contributions de α et β.

4. Nouvelles approches pour l'indépendance algébrique

La plupart des résultats classiques d'indépendance algébrique se déduisent du critère d'indépendance algébrique de P. Philippon [Phi1] dont voici un cas particulier assez représentatif.

Critère. *Soit $n \geq 1$ un nombre entier. Il existe une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante : Soient $\underline{\theta} \in \mathbf{C}^n$ et $\eta > 0$; si, pour tout N entier suffisamment grand il existe un entier $m = m(N)$ et des polynômes $Q_{N_j} \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ $(1 \leq j \leq m)$ tels que*

$$\deg Q_{N_j} \leq N,\ H(Q_{N_j}) \leq e^N \text{ et } 0 < |Q_{N_j}(\underline{\theta})| \leq \exp(-C\,N^\eta),$$

et que, pour chaque N, le nombre des zéros communs aux Q_{N_j} $(1 \leq j \leq m)$ dans la boule $\{z \in \mathbf{C}^n \,;\, \max_{1\leq i\leq n} |z_i - \theta_i| \leq \exp(-3\,C\,N^\eta)\}$ soit fini, alors

$$\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\underline{\theta}) > \eta - 1.$$

Un tel résultat est obtenu par des méthodes d'élimination (algèbre commutative). Les travaux récents de M. Laurent, D. Roy et M. Waldschmidt ont introduit un autre point de vue, qui apparaît aussi dans [Phi2] sous une forme un peu différente. Il consiste à remplacer le critère par des propriétés d'approximation du type suivant :

Conjecture. *Soient a et b des nombres réels ≥ 1. Il existe un nombre réel c ayant la propriété suivante : soient $\underline{\theta} \in \mathbf{C}^n$ et $t = \operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\underline{\theta})$; soient $(D_N)_{N\in\mathbf{N}}$ et $(h_N)_{N\in\mathbf{N}}$ des suites de nombres réels positifs telles que $D_N + h_N$ n'est pas borné et que $c \leq h_N \leq h_{N+1} \leq a\,h_N$ et $c \leq D_N \leq D_{N+1} \leq b\,D_N$, alors pour une infinité de N il existe un point $\underline{\alpha} \in \mathbf{C}^n$ à coordonnées algébriques tel que $c^{-1} D_N \leq \deg(\underline{\alpha}) \leq D_N$, $h(\underline{\alpha}) \leq h_N$ et*

$$\max_{1\leq i\leq n} |\theta_i - \alpha_i| \leq \exp\left(-c^{-1}\,h_N\,D_N^{1+1/t}\right).$$

En fait, un tel énoncé permet de retrouver le critère : supposons les hypothèses du critère réalisées et le degré de transcendance de $\mathbf{Q}(\underline{\theta})$ petit. Alors la conjecture fournit de bonnes approximations algébriques de $\underline{\theta}$ par des nombres algébriques $\underline{\alpha}$, de sorte que les nombres algébriques $|Q_{N_j}(\underline{\alpha})|$, qui sont proches des $|Q_{N_j}(\underline{\theta})|$, sont petits. L'inégalité de Liouville montre alors que les $Q_{N_j}(\underline{\alpha})$ sont nuls. Cela contredit l'hypothèse de la version faible du critère où l'on suppose que les Q_{N_j} n'ont pas de zéro commun dans la boule considérée. La minoration de $\deg(\underline{\alpha})$ permet de traiter le cas général d'un nombre fini de zéros communs.

Actuellement la conjecture est démontrée pour $t = 1$, ce qui donne l'indépendance algébrique de deux nombres à partir de mesures d'approximation simultanée (voir en particulier [Roy-Wal1]). L'approche de P. Philippon (approximation par des cycles au lieu de points) permet d'atteindre, pour l'instant, le degré de transcendance 3.

Ces approches ont l'avantage de permettre l'utilisation de déterminants d'interpolation au lieu de fonctions auxiliaires pour obtenir des résultats d'indépendance algébrique. Il en est de même de la généralisation du critère (obtenue par M.

Laurent et D. Roy) faisant intervenir des multiplicités, c'est-à-dire tenant compte de petites valeurs des dérivées des polynômes Q_{N_j} au point $\underline{\theta}$. Gageons que le fruit de ces travaux en cours fera l'objet d'un exposé à ICM'02.

Bibliographie

[Bar1] K. Barré. – *Propriétés de transcendance des séries d'Eisenstein* ; Séminaire de Théorie des nombres de Paris 1994-1995 (à paraître).

[Bar2] K. Barré. – *Mesure d'approximation simultanée de q et $J(q)$* ; J. Number Theory 66 (1997), 102–128.

[BDGP] K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain et G. Philibert. – *Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin* ; Invent. Math. 124 (1996), 1–9.

[Ber1] D. Bertrand. – *Séries d'Eisenstein et transcendance* ; Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 309–321.

[Ber2] D. Bertrand. – *Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébrique* ; Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Paris, 19ème année (1977/78), exposé 36, 11p.

[Ber3] D. Bertrand. – *Theta functions and transcendence* ; Madras Number Theory Symposium 1996, The Ramanujan J. Math. 1 (1997), 339–350.

[Ber4] D. Bertrand. – *$\theta(\tau, z)$ and transcendence* ; in *Introduction to algebraic independence theory*, Yu. Nesterenko et P. Philippon éd., en préparation.

[Cha] K. Chandrasekharan. – Elliptic functions ; Grund. der math. Wiss. 281, Springer-Verlag 1985.

[Chu] G.V. Chudnovsky. – Contributions to the theory of transcendental numbers ; Math. Surveys and Monographs 19, Amer. Math. Soc., 1984, 450p.

[Dia1] G. Diaz. – *La conjecture des quatre exponentielles et les conjectures de D. Bertrand sur la fonction modulaire* ; J. Théor. Nombres Bordeaux 9 (1997), 229–245.

[Dia2] G. Diaz. – *Transcendence and algebraic independence : elliptic and modular points of vue* ; en préparation.

[DNNS] D. Duverney, K. Nishioka, K. Nishioka and I. Shiokawa. – *Transcendence of Jacobi's theta series and related results* ; Proc. Conf. Number Theory Eger 1996, K. Györy, A. Pethö and V.T. Sós eds, de Gruyter, Berlin (1998).

[GPhi1] G. Philibert. – *Une mesure d'indépendance algébrique* ; Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 38 (1988), 85–103.

[GPhi2] G. Philibert. – *Un lemme de zéros modulaire* ; J. Number Theory 66 (1997), 306–313.

[Lan1] S. Lang. – Elliptic functions ; Addison-Wesley, Reading, MA, 1973 ; seconde édition, GTM 112, Springer-Verlag 1987.

[Lan2] S. Lang. – Introduction to Modular Forms ; Grund. der math. Wiss. 222, Springer-Verlag 1976.

[Lau-Roy] M. Laurent et D. Roy. – *Sur l'approximation algébrique en degré de transcendance un* ; à paraître.

[Mah1] K. Mahler. – *Remarks on a paper by Wolfgang Schwarz* ; J. Number Theory 1 (1969), 512–521.

[Mah2] K. Mahler. – *On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions* ; J. Austral. Math. Soc. 10 (1969), 445–450.

[Man] Yu.I. Manin. – *Cyclotomic fields and modular curves* ; Uspekhi Mat. Nauk 26 (1971), 7–71 [en russe] ; trad. angl. : Russian Math. Surveys 26 (1971), 7–78.

[Mas] D.W. Masser. – Elliptic Functions and Transcendence ; L. N. in Math. 437, Springer-Verlag 1975.

[Nes1] Yu.V. Nesterenko. – *Modular functions and transcendence problems – Un théorème de transcendance sur les fonctions modulaires* ; C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 322 (1996), 909–914.

[Nes2] Yu.V. Nesterenko. – *Modular functions and transcendence questions* ; Math. Sb. 187 N° 9 (1996), 65–96 [en russe] ; trad. angl. : Math. USSR Sb. 187 (1996) 1319–1348.

[Nes3] Yu.V. Nesterenko. – *On a measure of algebraic independence of values of Ramanujan's functions* ; Trudy Math. Inst. Steklov, 218, 1997, 299–334 ; trad. angl. : Proc. Steklov Inst. Math., 218, 1997, 294–331.

[Phi1] P. Philippon. – *Critères pour l'indépendance algébrique* ; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 64 (1987), 5–52.

[Phi2] P. Philippon. – *Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques* ; J. Number Theory 64 (1997), 291–338.

[Phi3] P. Philippon. – *Indépendance algébrique et K-fonctions* ; J. reine angew. Math., 497 (1998), 1–15.

[Phi4] P. Philippon. – *Mesures d'approximation de valeurs de fonctions analytiques* ; soumis.

[Roy-Wal1] D. Roy et M. Waldschmidt. – *Approximation diophantienne et indépendance algébrique de logarithmes* ; Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 30 (1997), n° 6, 753–796.

[Roy-Wal2] D. Roy and M. Waldschmidt. – *Simultaneous approximation and algebraic independence* ; The Ramanujan Journal 1 (1997), n° 4, 379–430.

[Sch] Th. Schneider. – Einführung in die transzendenten Zahlen ; Springer-Verlag 1957 ; trad. franç. : Introduction aux nombres transcendants, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[Ser] J.-P. Serre. – Cours d'arithmétique ; Presses Univ. France, Paris, 1970 ; trad. angl. : A course in arithmetic, GTM 7, Springer-Verlag 1973.

[Wal1] M. Waldschmidt. – *Sur la nature arithmétique des valeurs de fonctions modulaires* ; Sém. Bourbaki, 49ème année, 1996/97, n∘ 824 ; Soc. Math. France, Astérisque 245 (1997), 105–140.

[Wal2] M. Waldschmidt. – *Transcendance et indépendance algébrique de valeurs de fonctions modulaires* ; CNTA5, Carleton 1996 ; Proceedings of the fifth Conference of the Canadian Number Theory Association, éd. : R. Gupta et K. Williams, (à paraître).

François Gramain
Faculté des Sciences
23, rue du Docteur Paul Michelon
F-42023 St Etienne CEDEX 2
Mél. : gramain@univ-st-etienne.fr