Ordonner le Groupe Symétrique: Pourquoi Utiliser l'Algèbre de Iwahori-Hecke ?

Alain Lascoux(*)

Abstract. The Bruhat order on the symmetric group is defined by means of subwords of reduced decompositions of permutations as products of simple transpositions. Ehresmann gave a different description by considering any permutation as a chain of sets and comparing componentwise the chains. A third method reduces the Bruhat order to the inclusion order on sets, by associating to any permutation a set of bigrassmannian permutations. This amounts to embed the symmetric group into a lattice which is distributive. The last manner to understand the Bruhat order is to use a distinguished linear basis of the Iwahori-Hecke algebra of the symmetric group, and this involves computing polynomials due to Kazhdan & Lusztig; we explicit these polynomials in the case of vexillary permutations.

1991 Mathematics Subject Classification: 05E10, 20C30
Keywords and Phrases: Symmetric group, Bruhat Order, Kazhdan-Lusztig Polynomials

1. Ordre par les sous-mots En tant que groupe de Coxeter, le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$ est engendré par les transpositions simples σ_i, $i = 1 \dots n-1$, qui vérifient les relations de tresse

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad \text{et} \quad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \ , \ |i-j| > 1 \tag{1.1}$$

ainsi que $\sigma_i^2 = 1$.

Une *décomposition réduite* d'une permutation μ est un mot $w^{ij\dots h} = \sigma_i\sigma_j\cdots\sigma_h$, dont le produit, de longueur minimale, est égal à μ (cette longueur est dite *longueur* $\ell(\mu)$ de μ). Par définition (cf. [Hu]), l'*ordre de Bruhat* est l'ordre induit par les sous-mots :

$$\nu \le \mu \ \Leftrightarrow \exists w^{ij\dots h} = \mu,\ w^{ij\dots h} \text{ réduit },\ \exists\, \epsilon, \dots, \epsilon'' \in \{0,1\}, \nu = \sigma_i^{\epsilon}\,\sigma_j^{\epsilon'}\cdots\sigma_h^{\epsilon''} \tag{1.2}$$

Soit σ une transposition simple telle que $\ell(\mu\sigma) > \ell(\mu)$. Alors on a la "propriété d'échange" :

$$[1,\, \mu] = A \cup B \text{ et } [1,\, \mu\sigma] = A \cup B \cup B\sigma \tag{1.3}$$

(*) C.N.R.S.

où $[1,\,\mu] := \{\nu \in \mathfrak{S}(n),\, \nu \leq \mu\}$, $A := \{\nu : \nu \leq \mu, \nu\sigma \leq \mu\}$ et $B := [1,\,\mu] \setminus A$.

On définit, sur l'algèbre du groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$, des opérateurs de réordonnement $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$, notés à droite

$$\mathfrak{S}(n) \ni \mu \xrightarrow{\pi_i} \begin{cases} \mu + \mu\sigma_i & \text{si } \mu_i < \mu_{i+1} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Il est aisé de voir que pour toute décomposition réduite de μ, l'image de 1 par un produit de π_i est la somme des éléments de l'intervalle $[1,\,\mu]$:

$$\mu = \sigma_i\sigma_j \cdots \sigma_h \text{ réduit } \Rightarrow 1\pi_i\pi_j \cdots \pi_h = \sum\nolimits_{\nu \leq \mu} \nu \tag{1.4}$$

Deux décompositions réduites de la même permutation vont donner en général des ensembles de sous-mots différents et donc ces ensembles ne sont pas des invariants de la permutation.

Une autre manière que (1.4) de corriger cette non-canonicité est de pondérer les sous-mots. Etant données n variables $x_1, \ldots, x_n$, on définit, à la suite de Yang [Ya],[Ch], une base linéaire Y_μ, $\mu \in \mathfrak{S}(n)$, de l'algèbre du groupe symétrique à coefficients rationnels en les x_i, par

$$\ell(\mu\sigma_i) > \ell(\mu) \Rightarrow Y_{\mu\sigma_i} = Y_\mu \left(\sigma_i + \frac{1}{x_{\mu_{i+1}} - x_{\mu_i}}\right) . \tag{1.5}$$

Toute décomposition réduite $w^{i\ldots h}$ de μ fournit une factorisation de Y_μ, dont le développement est une somme impliquant tous les sous-mots de $w^{i\ldots h}$. On vérifie de plus que le coefficient de ν dans Y_μ est non nul ssi $\nu \leq \mu$.

En fait, les coefficients sont des spécialisations de polynômes en deux ensembles de variables ([LLT2], [F-K]). On peut les obtenir en définissant des opérateurs sur l'anneau des polynômes vérifiant les relations de tresse [L-S4], [L-S5]. Ces opérateurs fournissent à leur tour des bases distinguées de l'anneau des polynômes en tant que module libre sur l'anneau des polynômes symétriques [BGG] et l'ordre de Bruhat joue un rôle essentiel [L-S3] (les programmes sont disponibles comme librairie Maple [Ve]). On trouvera dans [L-P] l'étude analogue de l'anneau des polynômes comme module libre sur l'anneau des polynômes symétriques en les carrés des variables, qui correspond aux groupes hyperoctahedraux.

2. Ordre par projection Il existe un ordre naturel sur les sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$:

$$u, v \subseteq \{1, \ldots, n\},\ u \leq v \Leftrightarrow \exists \text{ une injection croissante de } u \text{ dans } v$$

Cet ordre permet de définir les *tableaux de Young* comme étant les chaînes croissantes d'ensembles d'entiers.

Ehresmann [Eh] induit à partir de cet ordre sur les ensembles, un ordre sur les cellules de Schubert de la variété de drapeaux pour le groupe linéaire (lesquelles sont en bijection avec les permutations) :

$$\nu, \mu \in \mathfrak{S}(n),\, \nu \leq \mu \;\Leftrightarrow\; \forall i : 1 \leq i \leq n,\, \{\nu_1, \ldots, \nu_i\} \leq \{\mu_1, \ldots, \mu_i\} \tag{2.1}$$

On peut disposer les ensembles $\{\mu_1, \dots, \mu_i\}$ dans un tableau, dit *clef* de la permutation, dont ils sont les colonnes (décroissantes). Alors deux permutations sont comparables ssi leurs clefs le sont, composante à composante. De fait, on vérifie aisément par récurrence sur la longueur que l'ordre d'Ehresmann coincïde avec l'ordre de Bruhat.

La restriction $\mu \to \{\mu_1, \dots, \mu_i\}$ peut s'interpréter comme la projection de $\mathfrak{S}(n)$ sur $\mathfrak{S}(n)/\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i)$, où $\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i)$ est le sous-groupe de Young engendré par $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{n-1}$. On peut identifier les éléments de $\mathfrak{S}(n)/\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i)$ aux permutations γ (dites *grassmanniennes*) : $\gamma_1 < \dots < \gamma_i$; $\gamma_{i+1} < \dots < \gamma_n$, ayant une *descente* en i. La restriction de l'ordre de Bruhat à ces dernières est

$$\gamma \leq \gamma' \;\Leftrightarrow\; \gamma_1 \leq \gamma'_1, \dots, \gamma_i \leq \gamma'_i$$

Deodhar [De] a étendu à tous les groupes de Coxeter W la définition de l'ordre de Bruhat par relèvement de l'ordre sur les W/P, P parabolique. Proctor [Pr] a généralisé aux types B, C, D la construction des clefs.

3. Ordre par sous-ensembles Au lieu de considérer toutes les projections $\mathfrak{S}(n) \mapsto \mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i)$, $i = 1, \dots, n-1$, on peut associer à toute permutation μ l'ensemble $\mathcal{G}(\mu)$ des permutations grassmanniennes γ telles que $\gamma \leq \mu$. Le critère (2.1) se formule alors

$$\nu \leq \mu \;\Leftrightarrow\; \mathcal{G}(\nu) \subseteq \mathcal{G}(\mu) \tag{3.1}$$

Cette définition n'est pas invariante par l'involution $\mu \mapsto \mu^{-1}$, contrairement à l'ordre de Bruhat. Pour corriger cette disymétrie, on définit les permutations *bigrassmanniennes* comme étant les permutations qui sont grassmanniennes, ainsi que leurs inverses. En d'autres termes

$$\beta \;\text{ bigrassmannienne } \;\Leftrightarrow\; \exists! i,\, \exists! j\, : \ell(\sigma_i \mu) < \ell(\mu),\, \ell(\mu\sigma_j) < \ell(\mu)$$

(i est dit *recul* de β, et j *descente*).

Soit $\mathcal{B}(\mu)$ l'ensemble des permutations bigrassmanniennes β telles que $\beta \leq \mu$. Le critère (3.1) est équivalent à

$$\nu \leq \mu \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B}(\nu) \subseteq \mathcal{B}(\mu) \tag{3.2}$$

En fait, on peut montrer que l'ensemble des bigrassmanniennes est optimal pour obtenir l'ordre de Bruhat par inclusion. Plus précisément, soit $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{S}(n)$. Pour que le morphisme $\mathfrak{S}(n) \to 2^{\mathcal{C}} : \mu \to \mathcal{C} \cap [1, \mu]$ soit un morphisme d'ordre injectif, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ contienne l'ensemble des bigrassmanniennes (cf. [L-S6]).

Pour les groupes de Coxeter finis, on trouvera dans [G-K] la détermination du sous-ensemble optimal codant l'ordre. Les élements de la "base de l'ordre" sont caractérisés par la propriété :

β appartient à la base ssi il existe un élément μ du groupe tel que β soit minimum dans le complémentaire de l'intervalle $[1, \mu]$.

La même construction peut être étendue aux groupes de Coxeter affines (pour une description plus classique, voir [B-B] dans le cas du type A et [Er] plus généralement).