

ARITHMETISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN EINER
KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN

KURT MAHLER

SUMMARY. In this paper, Mahler introduces a method of transcendence now known as Mahler's method. He applies his method to show that the numbers

$$\sum_{n \geq 0} t(n)\alpha^n \quad \text{and} \quad \sum_{n \geq 0} \lfloor n\omega \rfloor \alpha^n$$

are transcendental for any algebraic number α with $0 < |\alpha| < 1$ and any positive quadratic irrational number ω , where $\{t(n)\}_{n \geq 0}$ is the Thue–Morse sequence with values in $\{-1, 1\}$ and $\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of x .

This article is the first in a series of three papers that develops Mahler's method.

ACKNOWLEDGEMENT. The article

K. Mahler. Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen. *Math. Ann.*, 101:342–366, 1929.

is reproduced here with permission of Springer Nature Customer Service Center (SNCSC). This material is excluded from reuse and has not been licensed under the CCBY licence of the full work, no reproduction of any kind for this material is permitted without permission from Springer Nature.

Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

Das Ziel dieser Arbeit ist der Nachweis einer allgemeinen Funktionenklasse, bei der aus der funktionentheoretischen Transzendenz folgt, daß die Funktion an algebraischen Stellen gleich transzendenten Zahlen ist, wenn von gewissen „singulären“ Punkten abgesehen wird.

Das Hauptergebnis lautet:

Die Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

mit den Potenzen

$$\Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

habe nichtnegative ganze rationale Elemente. Die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv |\Omega - \varrho E| = 0 \quad (E = \text{Einheitsmatrix})$$

sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel; sie habe eine positive Wurzel ϱ_1 , die größer als Eins und der absolute Betrag der anderen Wurzeln ist. Mit $A_{1\beta}^{(1)}$ seien die Unterdeterminanten der obersten Horizontalreihe der Matrix $\Omega - \varrho_1 E$ bezeichnet; dieselben haben alle das gleiche Vorzeichen.

$(z) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ sei ein System von n komplexen Veränderlichen; es bedeute $z' = \Omega^k z$ die Transformation

$$z'_\alpha = \prod_{\beta=1}^n z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Die in der Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \dots h_n} z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

besitze Koeffizienten $A_{h_1 \dots h_n}$ aus einem endlichen algebraischen Zahlkörper; sie stelle *keine* algebraische Funktion dar. $F(z)$ genüge einer Funktionalgleichung

K. Mahler. Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 343

$$F(\Omega z) = \frac{\sum_{l=0}^m a_l(z) F(z)^l}{\sum_{l=0}^m b_l(z) F(z)^l} \quad (1 \leq m < \varrho_1),$$

wo die $a_l(z), b_l(z)$ Polynome in den z_α mit algebraischen Koeffizienten sind. Die beiden Polynome in den z_α und in u

$$\sum_{l=0}^m a_l(z) u^l, \quad \sum_{l=0}^m b_l(z) u^l$$

seien teilerfremd; mindestens eines besitze den genauen Grad m in u . Ihre Resultante in bezug auf u sei gleich $\Delta(z)$.

Sind dann die z_α gleich n algebraischen Zahlen und befriedigen sie die Ungleichungen

$$\Re \left\{ \sum_{\beta=1}^n |A_{1\beta}^{(1)}| \log z_\beta \right\} < 0, \quad z_1 z_2 \dots z_n \neq 0, \quad \Delta(\Omega^k z) \neq 0 \text{ f\u00fcr } k = 0, 1, 2, \dots,$$

so stellt $F(z)$ eine transzendente Zahl dar.

Der Sinn dieses Satzes liegt in der Verkn\u00fcpfung zwischen der funktionentheoretischen und der zahlentheoretischen Transzendenz. Es gibt ganz einfache Funktionen, die Gleichungen der betrachteten Art gen\u00fcgen, und von denen trotz ihrer \u00c4hnlichkeit die eine algebraische, die andere eine transzendente Funktion ist, z. B.

$$f_1(z) = \prod_0^\infty (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}; \quad f_1(z^2) = (1+z)^{-1} f_1(z);$$

$$f_2(z) = \prod_0^\infty (1 - z^{2^n}), \quad f_2(z^2) = (1-z)^{-1} f_2(z).$$

Ferner kann von zwei L\u00f6sungen derselben Funktionalgleichung die eine algebraisch, die andere transzendent sein, z. B.

$$f_3(z) = 1, \quad f_4(z) = 1 + f_2(z); \quad f_{3,4}(z^2) = (1-z)^{-1} f_{3,4}(z) - \frac{z}{1-z}.$$

In derartigen F\u00e4llen gibt es neben dem Unterschied des Funktionencharakters also auch einen entsprechenden Unterschied im Charakter der Funktionswerte.

Die einschr\u00e4nkenden Voraussetzungen des Satzes sind teilweise nat\u00fcrlicher Art:

Die Ungleichung

$$\Re \left\{ \sum_{\beta=1}^n |A_{1\beta}^{(1)}| \log z_\beta \right\} < 0$$

gibt das gr\u00f6\u00dfte Gebiet an, in dem alle Komponenten z'_1, z'_2, \dots, z'_n von

$$z' = \Omega^k z$$

344

K. Mahler.

mit wachsendem k gegen Null streben. Schon in ganz einfachen Fällen von Funktionen $F(z)$ ist der Rand dieses Gebietes natürliche Grenze. Vielleicht läßt sich sogar zeigen, daß keine transzendente Lösung einer Gleichung der betrachteten Art sich über jenes Gebiet hinaus fortsetzen läßt.

Die beiden weiteren Einschränkungen

$$z_1 z_2 \dots z_n \neq 0, \quad \Delta(\Omega^k z) \neq 0 \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

sind dadurch bedingt, daß ohne sie $F(z)$ tatsächlich gar nicht transzendent sein braucht. Wenn eine der Komponenten z_1, z_2, \dots, z_n verschwindet, so ist in der Tat $F(z)$ für algebraische z_α algebraisch. Es lassen sich ferner allgemeine Fälle angeben, wo $F(z)$ für algebraische z_α algebraisch wird, sobald eine der Gleichungen

$$\Delta(\Omega^k z) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

besteht.

Es bleiben die Annahmen über die Matrix Ω . Diese sind durch die Beweismethode bedingt; in einer weiteren Arbeit hoffe ich Fälle anderer Matrizen Ω zu behandeln.

Der Beweis des Satzes verläuft folgendermaßen:

Gegen den Satz sei $F(z)$ algebraisch, ferner endlich. Dann existiert ein endlicher algebraischer Zahlkörper $K(s)$, in dem liegen:

- a) die Zahlen z_α ,
- b) die Zahl $F(z)$,
- c) die Koeffizienten der Polynome $a_l(z)$, $b_l(z)$,
- d) die Koeffizienten der Potenzreihe $F(z)$.

Zu jeder festen, genügend großen natürlichen Zahl p gibt es $p+1$ Polynome

$$\mathfrak{A}_0(z), \mathfrak{A}_1(z), \dots, \mathfrak{A}_p(z)$$

vom Höchstgrad p in den z_α mit ganzen Koeffizienten aus $K(s)$, so daß alle Koeffizienten $B_{h_1 \dots h_n}$ mit

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n \leq \frac{1}{2} p^{1 + \frac{1}{n}}$$

in

$$E_p(z) = \sum_{l=0}^p \mathfrak{A}_l(z) F(z)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \dots h_n} z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

verschwinden, ohne daß $E_p(z)$ identisch verschwindet. Vermöge der Funktionalgleichung wird

$$F(\Omega^k z) = \frac{\sum_{l=0}^{m^k} a_l^{(k)}(z) F(z)^l}{\sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l}$$

Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 345

mit einfachen Majoranten in s und den z_α für die Polynome $a_l^{(k)}(z)$, $b_l^{(k)}(z)$ vermöge der Annahmen über Ω . Das gleiche gilt also auch für die Polynome $\mathfrak{B}_l^{(k)}(z)$ in der Gleichung

$$\mathfrak{G}_p^{(k)}(z) = \left(\sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l \right)^p E_p(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{pm^k} \mathfrak{B}_l^{(k)}(z) F(z)^l.$$

Es wird für großes k , nach Potenzen einer geeigneten erzeugenden Zahl s von $K(s)$ entwickelt (die c sind positive Konstante, die von p und k nicht abhängen):

$$\mathfrak{G}_p^{(k)}(z) = \sum_{\tau=0}^{\lfloor c_3 p e_1^k \rfloor} q_\tau s^\tau; \quad |q_\tau| \leq (2^{c_3} e^{c_3})^p e_1^k.$$

Die q_τ bedeuten dabei ganze rationale Zahlen. Weiter ist aber für genügend großes k

$$\mathfrak{G}_p^{(k)}(z) \neq 0,$$

denn einerseits folgt dann

$$\sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l \neq 0$$

vermöge der Annahme

$$\Delta(\Omega^k z) \neq 0 \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

und andererseits

$$E_p(\Omega^k z) \neq 0$$

vermöge

$$z_1 z_2 \dots z_n \neq 0.$$

Die vorige Majorante liefert daher auf elementare Art eine *untere Schranke*

$$|\mathfrak{G}_p^{(k)}(z)| \geq e^{-c_3 p e_1^k}.$$

Schließlich ergibt sich aus der Potenzreihe für $E_p(z)$, wenn p und als Funktion hiervon k genügend groß ist, unmittelbar eine *obere Schranke*

$$|\mathfrak{G}_p^{(k)}(z)| \leq e^{-c_6 p^{1+\frac{1}{n}} e_1^k}.$$

Diese beiden Abschätzungen widersprechen einander aber, sobald p genügend groß ist. Also kann $F(z)$ keine endliche algebraische Zahl sein. Daß aber $F(z)$ auch nicht unendlich groß ist, läßt sich dann leicht aus der Funktionalgleichung folgern.

Das letzte Kapitel bringt eine Anwendung. ω sei eine positive quadratische Irrationalität. Dann wird gezeigt, daß die transzendente Funktion

$$\sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{\lfloor \omega h_1 \rfloor} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

346

K. Mahler.

einer Funktionalgleichung gerade von der betrachteten Art genügt, so daß sich der Satz also auf sie anwenden läßt. Speziell ergibt sich so die Transzendenz von

$$\sum_{h=1}^{\infty} [h\omega] z^h,$$

wenn $0 < |z| < 1$ und z algebraisch ist: Dies ist ein Analogon zu einem Satz von Böhmer¹⁾.

I.

1. Die Elemente der Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

seien nichtnegative ganze rationale Zahlen. Die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv |\Omega - \varrho E| \equiv \varrho^n - s_1 \varrho^{n-1} + s_2 \varrho^{n-2} - + \dots \mp s_n = 0,$$

wo

$$E = (\delta_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

die Einheitsmatrix bedeutet, sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel. Ihre n Wurzeln

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$$

sind alle verschieden und algebraisch genau vom Grad n .

Die Potenzen von Ω lassen sich nach den Grundlagen der Differenzenrechnung in der Form

$$\Omega^k = \sum_{i=1}^n \varrho_i^k \Gamma_i$$

darstellen; die Matrizen Γ_i hängen dabei von k nicht ab. Aus dieser Darstellung folgt die bekannte Hamilton-Cayleysche Identität²⁾

$$\Omega^n - s_1 \Omega^{n-1} + s_2 \Omega^{n-2} - + \dots \mp s_n E = 0,$$

und da die Potenzen von Ω miteinander vertauschbar sind, so ist

$$\prod_{i=1}^n (\Omega - \varrho_i E) = 0.$$

2. Die Faktoren

$$\Omega - \varrho_i E$$

der vorigen Gleichung besitzen alle den genauen Rang $n - 1$.

Daß der Rang nicht größer ist, ist klar. Er ist auch nicht kleiner, denn die Hauptunterdeterminanten $(n - 1)$ -ten Grades von $\Omega - \varrho_i E$ sind

¹⁾ P. E. Böhmer, „Über die Transzendenz gewisser dyadischer Brüche“. *Math. Annalen* 96.

²⁾ Siehe z. B. hierzu Cayley, *Coll. math. papers* II, p. 482.

Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 347

gewiß ungleich Null, weil ϱ_l einer Gleichung vom Grad $n - 1$ nicht genügen kann.

3. Es besteht keine Identität

$$c_0 E + c_1 \Omega + \dots + c_{n-1} \Omega^{n-1} = 0,$$

wo die Konstanten c nicht alle verschwinden³⁾.

Nach der vorigen Gleichung ist

$$c_0 \Omega^k + c_1 \Omega^{k+1} + \dots + c_{n-1} \Omega^{k+n-1} = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

und also auch

$$\sum_{l=1}^n (c_0 + c_1 \varrho_l + \dots + c_{n-1} \varrho_l^{n-1}) \varrho_l^k \Gamma_l = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Da die Determinante

$$|\varrho_l^k|$$

nicht verschwindet, so muß entweder

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_n = 0$$

sein; das ist wegen

$$E = \sum_{l=1}^n \Gamma_l$$

unmöglich; oder es ist

$$c_0 + c_1 \varrho_l + \dots + c_{n-1} \varrho_l^{n-1} = 0 \quad (l=1, 2, \dots, n)$$

und daher

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0.$$

Insbesondere ist

$$A_l = \prod_{h \neq l} (\Omega - \varrho_h E) \neq 0.$$

4. Die Matrizen A_l lassen sich durch die Gleichungen

$$(\Omega - \varrho_l E) A_l = A_l (\Omega - \varrho_l E) = 0$$

bestimmen. Sei zur Abkürzung

$$\Omega - \varrho_l E = (a_{\alpha\beta}^{(l)}) = (o_{\alpha\beta} - \varrho_l \delta_{\alpha\beta}); \quad A_l = (\zeta_{\alpha\beta}^{(l)}) \quad (\alpha, \beta, l = 1, 2, \dots, n)$$

und $A_{\beta\alpha}^{(l)}$ die zu $a_{\alpha\beta}^{(l)}$ gehörige Unterdeterminante $(n-1)$ -ten Grades in $\Omega - \varrho_l E$. Nach oben bestehen die linearen Gleichungen

$$\sum_{\gamma=1}^n a_{\alpha\gamma}^{(l)} \zeta_{\gamma\beta}^{(l)} = \sum_{\gamma=1}^n a_{\gamma\alpha}^{(l)} \zeta_{\beta\gamma}^{(l)} = 0 \quad (\alpha, \beta, l = 1, 2, \dots, n),$$

³⁾ Dieser Satz folgt bereits daraus, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle verschieden sind. Siehe Frobenius, Journ. f. Math. 84, S. 11.

348

K. Mahler.

die durch

$$\zeta_{1\beta}^{(l)} : \zeta_{2\beta}^{(l)} : \dots : \zeta_{n\beta}^{(l)} = A_{11}^{(l)} : A_{21}^{(l)} : \dots : A_{n1}^{(l)} \quad (\beta, l = 1, 2, \dots, n),$$

$$\zeta_{\alpha 1}^{(l)} : \zeta_{\alpha 2}^{(l)} : \dots : \zeta_{\alpha n}^{(l)} = A_{11}^{(l)} : A_{12}^{(l)} : \dots : A_{1n}^{(l)} \quad (\alpha, l = 1, 2, \dots, n)$$

befriedigt werden. Also ist

$$\zeta_{\alpha\beta}^{(l)} = A^{(l)} A_{1\alpha}^{(l)} A_{\beta 1}^{(l)} \quad (\alpha, \beta, l = 1, 2, \dots, n).$$

Die Zahl $A^{(l)}$ hängt von den Indizes α und β nicht ab; sie ist gewiß von Null verschieden.

Somit besteht die Darstellung

$$A_l = A^{(l)} (A_{1\alpha}^{(l)} A_{\beta 1}^{(l)}) \quad (\alpha, \beta, l = 1, 2, \dots, n).$$

5. Wenn h_1, h_2, \dots, h_n n ganze rationale Zahlen sind, so ist nur dann

$$\sum_{\alpha=1}^n A_{1\alpha}^{(l)} h_\alpha = 0$$

oder

$$\sum_{\beta=1}^n A_{\beta 1}^{(l)} h_\beta = 0,$$

wenn alle h_α verschwinden.

Denn sei etwa

$$\sum_{\alpha=1}^n A_{1\alpha}^{(l)} h_\alpha = 0;$$

nach bekannten Regeln gelten die weiteren Gleichungen

$$\sum_{\alpha=1}^n A_{1\alpha}^{(l)} a_{\alpha\beta}^{(l)} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, n).$$

Der Rang der rechteckigen Matrix

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(l)} & \dots & a_{1n}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(l)} & a_{n2}^{(l)} & \dots & a_{nn}^{(l)} \end{pmatrix}$$

ist folglich höchstens gleich $n - 1$. Sei jetzt etwa $h_\alpha \neq 0$. Dann kommt in der Gleichung

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(l)} & \dots & a_{1n}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\alpha-1,1}^{(l)} & a_{\alpha-1,2}^{(l)} & \dots & a_{\alpha-1,n}^{(l)} \\ a_{\alpha+1,1}^{(l)} & a_{\alpha+1,2}^{(l)} & \dots & a_{\alpha+1,n}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(l)} & a_{n2}^{(l)} & \dots & a_{nn}^{(l)} \end{vmatrix} = 0,$$

Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 349

die infolge des niederen Ranges gilt, die Potenz ϱ_l^{n-1} wirklich vor, so daß ϱ_l einer Gleichung $(n - 1)$ -ten Grades genügt; das ist aber unmöglich.

Es folgt insbesondere, daß keine der Zahlen

$$A_{1\alpha}^{(l)}, A_{\beta 1}^{(l)}$$

verschwinden kann.

6. Die Matrizen A_l sind im wesentlichen gleich den Matrizen Γ_l .

Denn sei zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{\Phi(\varrho)}{\varrho - \varrho_l} = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \sigma_h^{(l)} \varrho^{n-1-h} \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Offenbar ist

$$\sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \sigma_h^{(l)} \varrho_l^{n-1-h} = \begin{cases} \Phi'(\varrho_l) & \lambda = l. \\ 0 & \lambda \neq l. \end{cases}$$

Die linearen Gleichungen für Γ_l

$$\Omega^k = \sum_{l=1}^n \varrho_l^k \Gamma_l \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1)$$

ergeben also

$$\Phi'(\varrho_l) \Gamma_l = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \sigma_h^{(l)} \Omega^{n-1-h} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n (\Omega - \varrho_i E)$$

oder

$$\Gamma_l = \frac{1}{\Phi'(\varrho_l)} A_l = A_l (A_{1\alpha}^{(l)} A_{\beta 1}^{(l)}) \quad (\alpha, \beta, l = 1, 2, \dots, n).$$

Die Zahl $A_l = \frac{A^{(n)}}{\Phi'(\varrho_l)}$ hängt von den Indizes α und β nicht mehr ab und ist von Null verschieden⁴⁾.

7. Sei von jetzt ab von den Wurzeln

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$$

eine, etwa ϱ_1 , positiv, größer als Eins und als der absolute Wert der anderen. Da keine der Zahlen

$$A_1, A_{1\alpha}^{(1)}, A_{\beta 1}^{(1)}$$

verschwindet, so sind die Elemente von Γ_1 von Null verschieden, so daß für großes k

$$\Omega^k \sim \varrho_1^k \Gamma_1$$

⁴⁾ Die hiermit explizit dargestellten Matrizen sind gleich den Frobeniusschen Kovarianten: „Über die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form“, Journ. f. Math. 86, S. 44. Die Darstellung von Ω^k durch dieselben entspricht der Darstellung quadratischer Formen durch Eigenwerte und Eigenfunktionen.

350

K. Mahler.

wird. Hieraus folgt weiter, da Ω^k nichtnegative Elemente hat, daß die Elemente von Γ_1 positiv sind; die reellen Zahlen

$$A_{11}^{(1)}, A_{12}^{(1)}, \dots, A_{1n}^{(1)}$$

haben also alle dasselbe Vorzeichen, ebenso die reellen Zahlen

$$A_{21}^{(1)}, A_{22}^{(1)}, \dots, A_{2n}^{(1)}.$$

8. z_1, z_2, \dots, z_n seien n komplexe Veränderliche im Gebiet \mathbb{U} :

$$\Re(A) < 0, \quad z_1 z_2 \dots z_n \neq 0; \quad A \equiv \sum_{\beta=1}^n |A_{\beta 1}^{(1)}| \log z_\beta.$$

Wenn die k -te Potenz von Ω gleich

$$\Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

ist, so bezeichne

$$z' = \Omega^k z$$

die Transformation

$$z'_\alpha = \prod_{\beta=1}^n z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Man hat

$$\Omega^{k_1+k_2} z = \Omega^{k_1} (\Omega^{k_2} z).$$

Falls in

$$z' = \Omega^k z$$

k ins Unendliche strebt, h_1, h_2, \dots, h_n n Exponenten sind, so ist

$$\log |z_1'^{h_1} z_2'^{h_2} \dots z_n'^{h_n}| = \Re(A) o_1^k |A_1| \sum_{\alpha=1}^n |A_{1\alpha}^{(1)}| h_\alpha + o(o_1^k).$$

Wenn speziell die h_α gleich ganzen rationalen Zahlen sind, so kann der Faktor $\sum_{\alpha=1}^n |A_{1\alpha}^{(1)}| h_\alpha$ nach 5. nicht verschwinden; folglich ist

$$\log |z_1'^{h_1} z_2'^{h_2} \dots z_n'^{h_n}| \sim \Re(A) |A_1| \sum_{\alpha=1}^n |A_{1\alpha}^{(1)}| h_\alpha \cdot o_1^k.$$

Man entnimmt hieraus, daß für $k \rightarrow \infty$ die Komponenten von z' gegen Null streben, wenn z irgendwo in \mathbb{U} liegt.

Seien ferner $B_{\bar{h}_1 \dots \bar{h}_n} z_1^{\bar{h}_1} \dots z_n^{\bar{h}_n}$, $B_{\bar{h}_1 \dots \bar{h}_n} z_1^{\bar{h}_1} \dots z_n^{\bar{h}_n}$ irgend zwei verschiedene nichtverschwindende Potenzausdrücke mit ganzen rationalen Exponenten. Für $k \rightarrow \infty$ konvergiert dann der absolute Betrag des Quotienten

$$Q(z') = \frac{B_{\bar{h}_1 \dots \bar{h}_n} z_1^{\bar{h}_1} \dots z_n^{\bar{h}_n}}{B_{\bar{h}_1 \dots \bar{h}_n} z_1^{\bar{h}_1} \dots z_n^{\bar{h}_n}}$$

entweder gegen Null oder gegen Unendlich, denn es ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |Q(z')|^k}{o_1^k} = \Re(A) |A_1| \sum_{\alpha=1}^n |A_{1\alpha}^{(1)}| (\bar{h}_\alpha - \bar{h}_\alpha) \leq 0.$$

Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 351

9. Die Potenzreihe

$$E(z') = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \dots h_n} z_1'^{h_1} \dots z_n'^{h_n}; \quad z' = \Omega^k z$$

sei nicht identisch Null und konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes; z sei ein beliebiger fester Punkt in \mathfrak{U} . Sobald k hinreichend groß ist, liegt z' im Konvergenzgebiet der Reihe, so daß dieselbe einen Sinn hat. Nach 8. hat sie genau einen Summanden

$$B_{h_1 \dots h_n} z_1'^{h_1} \dots z_n'^{h_n}$$

von höchster Größenordnung für $k \rightarrow \infty$; mit ihm besteht die Gleichung

$$E(z') \sim B_{h_1 \dots h_n} z_1'^{h_1} \dots z_n'^{h_n}.$$

Also folgt

Satz 1. z sei ein fester Punkt in \mathfrak{U} ; die Potenzreihe

$$E(z') = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \dots h_n} z_1'^{h_1} \dots z_n'^{h_n}, \quad z' = \Omega^k z$$

konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes $z' = 0$ und sei nicht identisch gleich Null. Dann gibt es zwei positive Konstanten c und γ , so daß für $k \rightarrow \infty$

$$|E(z')| \sim \gamma e^{-c e^k}.$$

II.

1. Für das Folgende bezeichnet s eine feste komplexe Zahl, über deren Eigenschaften später verfügt wird. Der Körper der rationalen Funktionen von s mit rationalen Koeffizienten werde $K(s)$, der Ring der Polynome in s mit ganzen rationalen Koeffizienten werde $I(s)$ genannt.

Satz 2. Die Potenzreihe mit endlichen Koeffizienten aus $K(s)$

$$F(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \dots h_n} z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

besitze ein Konvergenzgebiet und stelle keine algebraische Funktion dar. Zu jeder genügend großen natürlichen Zahl p gibt es $p + 1$ Polynome

$$\mathfrak{A}_0(z), \mathfrak{A}_1(z), \dots, \mathfrak{A}_p(z)$$

vom Höchstgrad p mit Koeffizienten aus $I(s)$, so daß in der Entwicklung der Funktion

$$E_p(z) = \sum_{l=0}^p \mathfrak{A}_l(z) F(z)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \dots h_n} z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

alle Koeffizienten $B_{h_1 \dots h_n}$ mit

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n \leq \frac{1}{2} p^{1+\frac{1}{n}}$$

verschwinden, $E_p(z)$ selbst aber nicht identisch Null ist⁵⁾.

Denn die Polynome $\mathfrak{A}_l(z)$ besitzen zusammen $(p+1)^{n+1}$ Koeffizienten. Nach bekannten Sätzen über lineare Gleichungen lassen sich dieselben so in $I(s)$ wählen, daß von den Zahlen $B_{h_1 \dots h_n}$ irgendwelche bis zur Höchstzahl $(p+1)^{n+1} - 1$ verschwinden, ohne daß alle Polynome $\mathfrak{A}_h(z)$ und damit $E_p(z)$ selbst identisch verschwinden. Insbesondere lassen sich daher alle $B_{h_1 \dots h_n}$ mit

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n \leq \frac{1}{2} p^{1+\frac{1}{n}}$$

zum Verschwinden bringen, denn ihre Anzahl ist für großes p

$$\leq \left(\frac{1}{2} p^{1+\frac{1}{n}} + 1 \right)^n \leq (p+1)^{n+1} - 1.$$

2. Für das Folgende bedeuten c_0, c_1, \dots konstante positive Zahlen, die von p und k nicht abhängen; $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ und k_0, k_1, \dots konstante positive Zahlen, die von k unabhängig sind, aber noch Funktionen von p sein können.

Satz 3. $F(z)$ und $E_p(z)$ seien die Funktionen des vorigen Satzes. z bedeute einen festen Punkt in \mathfrak{U} . Dann gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \gamma_0 e^{-p^{1+\frac{1}{n}} \gamma_1 e_1^k} \leq |E_p(z')| \leq \gamma_0 e^{-p^{1+\frac{1}{n}} \gamma_1 e_1^k};$$

$$z' = \Omega^k z, \quad \gamma_1 \geq c_1 \quad \text{für } p \geq c_0, \quad k \geq k_0.$$

Denn, da $E_p(z) \not\equiv 0$, so besteht nach Satz 1 eine asymptotische Gleichung

$$|E_p(z')| \sim \frac{3}{4} \gamma_0 e^{-p^{1+\frac{1}{n}} \gamma_1 e_1^k}.$$

Nach Satz 2 ist offenbar $\gamma_1 \geq c_1$ für $p \geq c_0$; somit folgt die verlangte Ungleichung.

3. Die Funktion $F(z)$ genüge von nun ab einer Funktionalgleichung der Form

⁵⁾ Th. Skolem in der Arbeit: „Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen“, Math. Annalen 95, S. 1 benutzt ähnliche Hilfssätze bei der Untersuchung diophantischer Gleichungen. — Es sei bemerkt, daß Satz 2 für algebraische Funktionen seine Gültigkeit einbüßt.

Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 353

$$F(\Omega z) = \frac{\sum_{l=0}^m a_l(z) F(z)^l}{\sum_{l=0}^m b_l(z) F(z)^l},$$

wo die Funktionen

$$a_l(z), \quad b_l(z)$$

Polynome in den z mit endlichen Koeffizienten aus $I(s)$ sind und

$$1 \leq m < \rho_1$$

angenommen wird. Ohne Einschränkung werden ferner die beiden Polynome in den z und in $F(z)$:

$$\sum_{l=0}^m a_l(z) F(z)^l, \quad \sum_{l=0}^m b_l(z) F(z)^l$$

als teilerfremd hierin angenommen. Beide seien nicht identisch Null und mindestens eines vom genauen Grad m in der Funktion $F(z)$.

Aus der Funktionalgleichung ergibt sich die Fortsetzbarkeit von $F(z)$ in das Innere von Ω . Aus ihr lassen sich ferner die folgenden Approximationen herleiten.

4. Um diese Entwicklungen möglichst einfach zu gestalten, benutzen wir an Stelle der einen Funktion $F(z)$ zwei hypothetische Funktionen

$$f(z), \quad g(z),$$

die den Funktionalgleichungen

$$f(\Omega z) = \sum_{l=0}^m a_l(z) f(z)^l g(z)^{m-l},$$

$$g(\Omega z) = \sum_{l=0}^m b_l(z) f(z)^l g(z)^{m-l}$$

in homogener Gestalt genügen. Ob es zwei solche Funktionen analytischen Charakters gibt, sei dahingestellt und ist auch für die folgenden algebraischen Betrachtungen unwesentlich. Es sei $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ angenommen.

Nach den vorigen Funktionalgleichungen lassen sich $f(\Omega^k z)$ und $g(\Omega^k z)$ durch $f(z)$ und $g(z)$ ausdrücken. Offenbar erhält man

$$f(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{m^k} a_l^{(k)}(z) f(z)^l g(z)^{m^k-l},$$

$$g(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z) f(z)^l g(z)^{m^k-l},$$

354

K. Mahler.

wobei $a_l^{(k)}(z)$ und $b_l^{(k)}(z)$ wieder Polynome mit Koeffizienten aus $I(s)$ sind. Um für diese Polynome Majoranten anzugeben, sei zur Abkürzung

$$\mathfrak{F}(z) = \prod_{a=1}^n (1 + z_a)$$

gesetzt. Wenn die eckige Klammer das größte Ganze bedeutet, ist

$$\mathfrak{F}(\Omega^k z) \ll \mathfrak{F}(z)^{[c_2 \rho_1^k]} \quad \text{für } k \geq 0.$$

Es existieren drei natürliche Zahlen M_1, M_2, M_3 , so daß

$$a_l(z), b_l(z) \ll \frac{M_1}{2} (1+s)^{M_2} \mathfrak{F}(z)^{M_3}$$

und daher in leichtverständlicher Bezeichnung

$$f(\Omega z), g(\Omega z) \ll \frac{M_1}{2} (1+s)^{M_2} \mathfrak{F}(z)^{M_3} \{f(z) + g(z)\}^m$$

ist. Allgemeiner gelten die Formeln

$$\begin{aligned} & f(\Omega^k z), g(\Omega^k z) \\ & \ll \frac{1}{2} M_1^{m_k} (1+s)^{M_2 m_k} \{ \mathfrak{F}(\Omega^{k-1} z) \mathfrak{F}(\Omega^{k-2} z)^m \dots \mathfrak{F}(z)^{m^{k-1}} \}^{M_3} \{f(z) + g(z)\}^{m^k}, \end{aligned}$$

wie man durch Schluß von k auf $k+1$ zeigt. Dabei bedeutet

$$m_k = 1 + m + \dots + m^{k-1}.$$

Jetzt ist

$$\mathfrak{F}(\Omega^{k-1} z) \mathfrak{F}(\Omega^{k-2} z)^m \dots \mathfrak{F}(z)^{m^{k-1}} \ll \mathfrak{F}(z)^{[c_2 (\rho_1^{k-1} + m \rho_1^{k-2} + \dots + m^{k-1})]}.$$

Ferner besteht wegen der Annahme $m < \rho_1$ die Ungleichung

$$M_3 [c_2 (\rho_1^{k-1} + m \rho_1^{k-2} + \dots + m^{k-1})] \leq [c_3 \rho_1^k].$$

Man gelangt also zu folgenden Majoranten:

$$f(\Omega^k z), g(\Omega^k z) \ll \frac{1}{2} M_1^{m_k} (1+s)^{M_2 m_k} \mathfrak{F}(z)^{[c_3 \rho_1^k]} \{f(z) + g(z)\}^{m^k}.$$

Wegen

$$F(\Omega^k z) = \frac{\sum_{l=0}^{m^k} a_l^{(k)}(z) F(z)^l}{\sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l} = \frac{f(\Omega^k z)}{g(\Omega^k z)}$$

sind damit auch für Zähler und Nenner von $F(\Omega^k z)$ Majoranten bestimmt.

5. Auch für $E_p(\Omega^k z)$ als Funktion von $F(z)$ lassen sich Majoranten angeben. Sei zur Abkürzung

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) = \left(\sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l \right)^p E_p(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{p m^k} \mathfrak{B}_l^{(k)}(z) F(z)^l.$$

Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 355

Die Funktionen $\mathfrak{B}_i^{(k)}(z)$ sind Polynome in den z mit Koeffizienten aus $I(s)$. Mit zwei allein von p abhängigen natürlichen Zahlen M_1, M_2 ist

$$\mathfrak{A}_n(z) \ll M_1(1+s)^{M_2} \mathfrak{F}(z)^p, \quad \mathfrak{A}_n(\Omega^k z) \ll M_1(1+s)^{M_2} \mathfrak{F}(z)^{p[c_2 e_1^k]}.$$

Folglich wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_p^{(k)}(z) &\ll M_1(1+s)^{M_2} \mathfrak{F}(z)^{p[c_2 e_1^k]} \\ &\times \left(\frac{1}{2}\right)^p M_1^{p m_k} (1+s)^{p M_2 m_k} \mathfrak{F}(z)^{p[c_2 e_1^k]} \{1+F(z)\}^{p m_k} \end{aligned}$$

oder endlich

$$\mathfrak{G}_p^{(k)}(z) \ll \frac{M_1}{2^p} M_1^{p m_k} (1+s)^{M_2+p M_2 m_k} \mathfrak{F}(z)^{p[c_2 e_1^k]} \{1+F(z)\}^{p m_k}.$$

6. Da nach früher die beiden Formen in u und v

$$\begin{aligned} P(uv|z) &= \sum_0^m a_l(z) u^l v^{m-l}, \\ Q(uv|z) &= \sum_0^m b_l(z) u^l v^{m-l} \end{aligned}$$

keinen gemeinsamen Teiler besitzen, der u oder v enthält, so ist ihre Resultante in bezug auf diese Veränderliche gewiß nicht identisch Null und also gleich einem Polynom in den z :

$$A(z).$$

In jedem Punkt, wo $A(z)$ verschwindet, haben die beiden Formen

$$P(uv|z), \quad Q(uv|z)$$

einen Linearfaktor $Uu + Vv$ mit zwei von z abhängigen Konstanten U und V gemein.

Die Punkte, in denen eine der Gleichungen

$$A(\Omega^k z) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

erfüllt ist, seien singular, alle anderen regulär genannt; \mathfrak{u} bedeute die Menge der regulären Punkte in \mathfrak{U} .

7. Die zwei Transformationen

$$\begin{aligned} u' &= \sum_0^r A_l u^l v^{r-l}, \\ v' &= \sum_0^r B_l u^l v^{r-l} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u'' &= \sum_0^s \mathfrak{A}_l u'^l v'^{s-l}, \\ v'' &= \sum_0^s \mathfrak{B}_l u'^l v'^{s-l} \end{aligned}$$

356

K. Mahler.

mögen, nacheinander angewandt, die Transformation

$$u'' = \sum_0^{rs} A_l u^l v^{rs-l},$$

$$v'' = \sum_0^{rs} B_l u^l v^{rs-l}$$

ergeben.

Bei der ersten Transformation gehören zu den Werten

$$u' = v' = 0$$

in jedem Fall die trivialen Lösungen

$$u = v = 0,$$

andere nur dann, wenn die Resultante der Formen

$$\sum_0^r A_l u^l v^{r-l}, \quad \sum_0^r B_l u^l v^{r-l}$$

gleich Null ist.

Ebenso gehören bei der zweiten Transformation zu

$$u'' = v'' = 0$$

in jedem Fall die Lösungen

$$u' = v' = 0,$$

andere nur dann, wenn die Resultante der Formen

$$\sum_0^s \mathfrak{A}_l u'^l v'^{s-l}, \quad \sum_0^s \mathfrak{B}_l u'^l v'^{s-l}$$

verschwindet.

Somit besitzen in der zusammengesetzten Transformation die Werte

$$u'' = v'' = 0$$

außer der trivialen Lösung

$$u = v = 0$$

eine weitere Lösung dann und nur dann, wenn entweder die Resultante der ersten oder die der zweiten Transformation oder beide verschwinden.

Dies Ergebnis werde auf die Resultante der beiden Formen

$$P^{(k)}(uv|z) = \sum_0^{m^k} a_l^{(k)}(z) u^l v^{m^k-l},$$

$$Q^{(k)}(uv|z) = \sum_0^{m^k} b_l^{(k)}(z) u^l v^{m^k-l}$$

angewandt. Nach 4. entsteht die Transformation

$$u'' = P^{(k)}(uv|z),$$

$$v'' = Q^{(k)}(uv|z)$$

durch Zusammensetzung der beiden Transformationen

$$\begin{aligned} u'' &= P^{(k-1)}(u' v' | \Omega z), \\ v'' &= Q^{(k-1)}(u' v' | \Omega z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u' &= P^{(1)}(u v | z), \\ v' &= Q^{(1)}(u v | z). \end{aligned}$$

Also folgt durch Schluß von k auf $k + 1$, daß die Resultante der beiden Formen

$$P^{(k)}(u, v | z), \quad Q^{(k)}(u, v | z)$$

allein die Faktoren

$$\Delta(z), \Delta(\Omega z), \dots, \Delta(\Omega^{k-1} z)$$

zuläßt, und daraus weiter:

Satz 4. *In mindest einem (tatsächlich in unendlich vielen) der Brüche*

$$F(\Omega^k z) = \frac{\sum_0^{m^k} a_l^{(k)}(z) F(z)^l}{\sum_0^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l}$$

verschwinden nur dann gleichzeitig Zähler und Nenner für einen geeigneten Wert von $F(z)$ oder tritt nur dann gleichzeitig Graderniedrigung in $F(z)$ ein, wenn z ein singulärer Punkt ist. Ist z ein regulärer Punkt, so ist für jedes natürliche k mindestens eines der Polynome

$$\sum_0^{m^k} a_l^{(k)}(z) U^l, \quad \sum_0^{m^k} b_l^{(k)}(z) U^l$$

immer von Null verschieden und auch mindestens eines genau vom Grad m in U .

8. Der Punkt z liege von jetzt ab in u . Ferner sei der Funktionswert $F(z)$ endlich. Da die Komponenten von $z' = \Omega^k z$ gegen Null streben, so ist von einem k ab gewiß $F(\Omega^k z)$ beschränkt. In der Gleichung

$$F(\Omega^k z) = \frac{\sum_0^{m^k} a_l^{(k)}(z) F(z)^l}{\sum_0^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l}$$

ist aber Zähler und Nenner der rechten Seite nicht gleichzeitig Null, folglich der Nenner

$$G^{(k)}(z) = \sum_0^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l$$

358

K. Mahler.

endlich und von Null verschieden. Da $z_\alpha, F(z), s$ endliche Konstante sind, so ist nach den Majoranten in 4.:

$$0 < |G^{(k)}(z)| \leq e^{c_5 e_1^k} \quad \text{für } k \geq k_1$$

und nach der Ungleichung in 3.:

$$0 < |\mathfrak{G}_p^{(k)}(z)| \leq \gamma_0 e^{(c_4 p - \gamma_1 p^{1+\frac{1}{n}}) e_1^k} \quad \text{für } k \geq k_2$$

oder für $p > \left(\frac{2c_5}{c_1}\right)^n$

$$0 < |\mathfrak{G}_p^{(k)}(z)| \leq e^{-\frac{\gamma_1}{2} p^{1+\frac{1}{n}} e_1^k} \quad \text{für } k \geq k_3.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 5. Die Funktion

$$\mathfrak{G}_p^{(k)}(z) = (G^{(k)}(z))^p E_p(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{pm^k} \mathfrak{B}_l^{(k)}(z) F(z)^l$$

mit der Majorante

$$\mathfrak{G}_p^{(k)}(z) \ll \frac{M_1}{2^p} M_1^{pm^k} (1+s)^{M_2+pm_2 m_k} \mathfrak{F}(z)^{p[c_1 e_1^k]} \{1+F(z)\}^{pm^k}, \quad m_k = \sum_0^{k-1} m^k$$

befriedigt in dem festen Punkt z in u die Ungleichung

$$0 < |\mathfrak{G}_p^{(k)}(z)| \leq e^{\gamma_2 p^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \gamma_2 \geq c_6 \quad \text{für } p \geq c_7, k \geq k_4.$$

III.

1. Folgende Annahmen seien gemacht:

a) Die Koeffizienten $A_{h_1 \dots h_n}$ liegen im gleichen endlichen algebraischen Zahlkörper.

b) Die Koeffizienten der Polynome $a_i(z), b_i(z)$ sind algebraisch.

c) Die Komponenten des Punktes z in u sind algebraisch.

d) Der Funktionswert $F(z)$ ist algebraisch und endlich.

Indem man zu einem geeigneten Oberkörper übergeht, läßt sich eine gebrochene algebraische Zahl s vom Grad ν bestimmen, so daß die $A_{h_1 \dots h_n}$ in $K(s)$, die Koeffizienten der Polynome $a_i(z), b_i(z)$ in $I(s)$ liegen, ferner

$$z_\alpha = \sum_{\tau=1}^{\nu} d_{\alpha\tau} s^\tau, \quad F(z) = \sum_{\tau=1}^{\nu} d_\tau s^\tau$$

wird, wo die $d_{\alpha\tau}, d_\tau$ ganze rationale Zahlen absolut höchstens gleich der natürlichen Zahl d sind.

Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} z_a &\ll d(1+s)^v, & F(z) &\ll d(1+s)^v, \\ \mathfrak{F}(z) &\ll (2d)^n \cdot (1+s)^{vn}, \\ 1 + F(z) &\ll (2d) \cdot (1+s)^v, \\ \mathfrak{G}_p^{(k)}(z) &\ll \frac{M_1}{2^p} M_1^{pm_k} (2d)^{n p [c_4 e_1^k] + pm^k} (1+s)^{M_2 + p M_2 m_k + p v n [c_4 e_1^k] + p v m^k}. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet

$$Q \ll \sum_0^P q_\tau s^\tau,$$

daß sich Q in der Form

$$Q = \sum_0^P q_\tau s^\tau, \quad |q_\tau| \leq q,$$

darstellen läßt, wo die q_τ ganze rationale Zahlen sind.

Es ist folglich

$$\mathfrak{G}_p^{(k)}(z) \ll e^{c_3 p e_1^k} (1+s)^{[c_3 p e_1^k]} \quad \text{für } k \geq k_5$$

und erst recht

$$\mathfrak{G}_p^{(k)}(z) \ll e^{c_{10} p e_1^k} \sum_{\tau=0}^P s^\tau; \quad P = [c_{11} p e_1^k] \quad \text{für } k \geq k_6.$$

2. In dem Ausdruck

$$\mathfrak{E} = \sum_{\tau=0}^P C_\tau s^\tau \neq 0, \quad C = \max_{\tau=0, \dots, P} (|C_\tau|),$$

seien die C_τ ganze rationale Zahlen und es seien

$$s_0 = s, s_1, \dots, s_{v-1}$$

die zu s Konjugierten. Die Zahl

$$E = \mathfrak{E} \cdot \prod_{\sigma=1}^{v-1} \left\{ \sum_{\tau=0}^P C_\tau s_\sigma^\tau \right\}$$

ist offenbar rational und von Null verschieden. Bedeutet S den Nenner von s , so besteht die Ungleichung

$$|E| \geq S^{-Pv} \cdot C^{-(v-1)} \cdot \left\{ \prod_{\sigma=1}^{v-1} \left(\sum_{\tau=0}^P |s_\tau| \right) \right\} \geq e^{-c_{12} P} C^{-(v-1)}$$

mit einer Konstanten c_{12} , die allein von s abhängt⁶⁾.

⁶⁾ Diese Abschätzung ist eine triviale Verallgemeinerung der bekannten Ungleichung von Liouville für algebraische Zahlen: „Sur les classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques.“ Journ. de math. (1) 16, 133.

360

K. Mahler.

Die letzte Ungleichung auf

$$0 \neq \mathfrak{G}_p^{(k)}(z) \ll e^{c_{10} p e_1^k} \sum_{\nu}^P s^{\nu}; \quad P = [c_{11} p e_1^k]$$

angewandt, ergibt die Ungleichung

$$|\mathfrak{G}_p^{(k)}(z)| \geq e^{-c_{13} p e_1^k} \quad \text{für } k \geq k_7.$$

Andererseits ist aber

$$|\mathfrak{G}_p^{(k)}(z)| \leq e^{-c_6 p^{1+\frac{1}{n}} e_1^k} \quad \text{für } p \geq c_7, \quad k \geq k_4,$$

so daß man für

$$p \geq c_7, \quad p \geq \left(\frac{2c_{13}}{c_6}\right)^n, \quad k \geq k_4, \quad k \geq k_7$$

zu einem Widerspruch gelangt.

Man gelangt also zu der Alternative, daß entweder $F(z)$ gleich einer transzendenten Zahl oder unendlich groß ist. Der zweite Teil dieser Alternative ist aber ausgeschlossen.

Denn offenbar genügt $\Omega^k z$ den gleichen Bedingungen wie z selbst. Für genügend großes k ist aber $F(\Omega^k z)$ endlich und folglich gleich einer transzendenten Zahl. Bedeutet \mathfrak{z} einen veränderlichen Punkt, so besteht die Identität

$$\sum_0^{m^k} \{a_i^{(k)}(\mathfrak{z}) - b_i^{(k)}(\mathfrak{z}) F(\Omega^k \mathfrak{z})\} F(\mathfrak{z})^i = 0.$$

Nach früher verschwinden die beiden Zahlen

$$a_{m^k}^{(k)}(z), \quad b_{m^k}^{(k)}(z)$$

nicht gleichzeitig; sie haben einen algebraischen Wert. Daher ist

$$a_{m^k}^{(k)}(z) - b_{m^k}^{(k)}(z) F(\Omega^k z) \neq 0$$

und die Funktion

$$a_{m^k}^{(k)}(\mathfrak{z}) - b_{m^k}^{(k)}(\mathfrak{z}) F(\Omega^k \mathfrak{z})$$

auch noch in einer genügend kleinen Umgebung von z von Null verschieden. Nach bekannten Sätzen über die Lösungen algebraischer Gleichungen ist daher die Funktion $F(\mathfrak{z})$ in dieser Umgebung beschränkt und speziell ist $F(z)$ endlich. Die besondere Annahme der Endlichkeit von $F(z)$ ist somit überflüssig.

Damit hat man folgenden Satz bewiesen:

Satz 6. *Wenn die Koeffizienten A_{h_1, \dots, h_n} in einem endlichen algebraischen Zahlkörper liegen, wenn die Koeffizienten der Polynome $a_i(z)$, $b_i(z)$ algebraisch sind und wenn z ein Punkt in \mathfrak{u} mit algebraischen Komponenten ist, so stellt $F(z)$ eine endliche und transzendente Zahl dar.*

Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 361

Im Falle $m = 1$ gelingt es leicht, genauere Eigenschaften dieser Zahl zu beweisen, z. B. daß sie nicht gleich einer Liouvilleschen Transzendenten ist.

3. Der vorige Transzendenzsatz betrifft nur die Punkte im Innern von \mathfrak{U} . Außerhalb dieser Punktmenge besteht auch kein allgemeiner Satz. Wenn erstens z außerhalb von

$$\Re(\Delta) < 0$$

liegt, so braucht die Funktion $F(z)$ nicht zu existieren, denn es gibt einfache Beispiele, die den Rand dieser Punktmenge zur natürlichen Grenze haben.

Wenn zweitens zwar

$$\Re(\Delta) < 0$$

ist, aber mindestens eine der Komponenten von z verschwindet, so hat $F(z)$ einen algebraischen Wert. Denn es existiert eine natürliche Zahl k , so daß alle Komponenten von $\Omega^k z$ gleich Null sind. Also ist

$$F(\Omega^k z) = A_{0\dots 0}$$

und folglich $F(z)$ als Wurzel einer algebraischen Gleichung mit algebraischen Koeffizienten selbst algebraisch.

Wenn endlich drittens z ein singulärer Punkt im Innern von \mathfrak{U} ist, so scheint es schwierig, eine allgemeine Aussage zu machen. In folgendem Fall gelingt dies aber:

Im Punkte z , der also in \mathfrak{U} und nicht in \mathfrak{u} liegt, sei mindestens eines der Polynome $a_i(z)$, $b_i(z)$ von Null verschieden. Ferner gelte die Identität

$$a_0(z) : a_1(z) : \dots : a_m(z) = b_0(z) : b_1(z) : \dots : b_m(z),$$

so daß die Polynome in u

$$\sum_{i=0}^m a_i(z) u^i, \quad \sum_{i=0}^m b_i(z) u^i$$

alle Wurzeln und nicht nur eine gemein haben. In diesem Fall ist $F(z)$ gleich einer algebraischen Zahl. Denn da $\Delta(z)$ nicht identisch verschwindet, so gibt es eine natürliche Zahl k , so daß

$$\Delta(\Omega^K z) \neq 0 \quad (K = k, k + 1, \dots)$$

ist; nach Satz 6 ist daher $F(\Omega^k z)$ transzendent. Wenn jetzt aber $F(z)$ nicht den Gleichungen

$$\sum_{i=0}^m a_i(z) F(z)^i = \sum_{i=0}^m b_i(z) F(z)^i = 0$$

genügte, so wäre der Quotient

$$F(\Omega z) = \frac{\sum_0^m a_l(z) F(z)^l}{\sum_0^m b_l(z) F(z)^l}$$

und damit auch $F(\Omega^k z)$ algebraisch, was falsch ist.

Der letzte Spezialfall tritt stets ein, wenn $m = 1$ ist und mindestens eines der Polynome

$$a_0(z), a_1(z), b_0(z), b_1(z)$$

im singulären Punkt z nicht verschwindet. Wenn endlich auch noch $n = 1$ ist, so wird auch die letzte Einschränkung überflüssig und also, falls $z \neq 0$ eine algebraische Zahl im Einheitskreis bedeutet,

$F(z)$ transzendent, wenn z regulär,

$F(z)$ algebraisch, wenn z singulär

ist.

IV.

1. Aus Satz 6 läßt sich für beliebig viele Funktionen die Transzendenz unmittelbar folgern. Sei z. B. jeder Koeffizient in der im Körper der rationalen Zahlen irreduziblen Gleichung

$$\varrho^n + c_1 \varrho^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

außer dem der Potenz ϱ^n nichtpositiv und ganz rational. Die positive Wurzel ϱ_1 der Gleichung sei größer als der absolute Betrag der anderen Wurzeln. Wenn dann durch

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1; \quad a_{n+h} + c_1 a_{n+h-1} + \dots + c_n a_h = 0$$

eine rekurrende Reihe definiert wird, so genügt die Funktion

$$F(z) = \sum_{h=1}^{\infty} z_1^{a_h} z_2^{a_{h+1}} \dots z_n^{a_{h+n-1}}$$

den Anforderungen des Satzes 6. Denn mit

$$\Omega = \begin{pmatrix} -c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besteht die Funktionalgleichung

$$F(\Omega z) = F(z) - z_1 z_2 \dots z_n.$$

Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 363

Ferner ist $F(z)$ gewiß transzendent, ja sogar nicht über den Rand des Gebietes

$$\Re(\log z_1 + \varrho_1 \log z_2 + \dots + \varrho_1^{n-1} \log z_n) < 0$$

fortsetzbar. Wenn also der Punkt z im Innern dieses Gebietes nicht verschwindende algebraische Komponenten besitzt, so stellt $F(z)$ eine transzendenten Zahl dar.

Als ein weiteres und noch einfacheres Beispiel sei das Produkt

$$F_1(z) = \prod_0^\infty (1 - z^{2^n})$$

erwähnt. Während diese Funktion transzendent ist, stellt die ganz ähnliche Formel

$$F_2(z) = \prod_0^\infty (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$$

eine algebraische Funktion dar. Wenn $z \neq 0$ eine algebraische Zahl im Innern des Einheitskreises ist, so stellt also die erste Reihe eine transzendenten, die zweite eine algebraische Zahl dar.

2. Es soll zum Schluß gezeigt werden, daß sich auch die Reihe

$$\sum_{h=1}^\infty [h\omega] z^h,$$

wo die eckige Klammer das größte Ganze bedeutet und ω eine quadratische Irrationalität ist, dem Satz 6 unterwirft.

Sei ω eine positive Irrationalzahl und

$$F_\omega(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^\infty \sum_{h_2=1}^{[h_1\omega]} z_1^{h_1} z_2^{h_2}.$$

Sind h_1, h_2 zwei natürliche Zahlen, so ist entweder

$$1 \leq h_2 < \omega h_1 \quad \text{oder} \quad 1 \leq h_1 < \frac{1}{\omega} h_2.$$

Daher besteht die Identität

$$F_\omega(z_1 z_2) + F_{\frac{1}{\omega}}(z_2 z_1) = \frac{z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)}.$$

Wenn ferner a eine natürliche Zahl bedeutet, so hat man

$$\begin{aligned} F_{a+\omega}(z_1 z_2) &= \sum_{h_1=1}^\infty \left\{ z_1^{h_1} \sum_{h_2=1}^{a h_1} z_2^{h_2} + (z_1 z_2)^{a h_1} \sum_{h_2=1}^{[h_1\omega]} z_2^{h_2} \right\} \\ &= \sum_{h_1=1}^\infty z_1^{h_1} \frac{z_2 - z_2^{a h_1 + 1}}{1 - z_2} + F_\omega(z_1 z_2^a, z_2) \end{aligned}$$

364

K. Mahler.

und also

$$F_{a+\omega}(z_1 z_2) = \frac{z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} - \frac{z_1 z_2^{a+1}}{(1-z_2)(1-z_1 z_2^a)} + F_\omega(z_1 z_2^a, z_2).$$

Beide Formeln zusammen ergeben die Funktionalgleichung

$$F_{\frac{1}{a+\omega}}(z_1 z_2) = \frac{z_1^{a+1} z_2}{(1-z_1)(1-z_1^a)} - F_\omega(z_1^a z_2, z_1).$$

Jetzt besitze ω den Kettenbruch

$$\omega = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots; \quad \omega = \frac{1}{a_1 + \omega_1}, \quad \omega_1 = \frac{1}{a_2 + \omega_2}, \quad \omega_2 = \frac{1}{a_3 + \omega_3}, \dots;$$

 ω sei also ein echter Bruch. Mit den Näherungsnennern und -zählern

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 0, & p_0 &= 1, & p_1 &= a_1, & p_{\mu+1} &= a_{\mu+1} p_\mu + p_{\mu-1}, \\ q_{-1} &= 1, & q_0 &= 0, & q_1 &= 1, & q_{\mu+1} &= a_{\mu+1} q_\mu + q_{\mu-1} \end{aligned}$$

besteht die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} F_\omega(z_1 z_2) &= \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (-1)^\mu \frac{z_1^{p_{\mu+1} + p_\mu} z_2^{q_{\mu+1} + q_\mu}}{(1-z_1^{p_{\mu+1}} z_2^{q_{\mu+1}})(1-z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu})} \\ &\quad + (-1)^\nu F_{\omega_\nu}(z_1^{p_\nu} z_2^{q_\nu}, z_1^{p_{\nu-1}} z_2^{q_{\nu-1}}). \end{aligned}$$

Für $\nu = \infty$ folgt hieraus

$$F_\omega(z_1 z_2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{z_1^{p_{\mu+1} + p_\mu} z_2^{q_{\mu+1} + q_\mu}}{(1-z_1^{p_{\mu+1}} z_2^{q_{\mu+1}})(1-z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu})}$$

und für $z_2 = 1$ ergibt sich die „Lambertsche“ Reihe^{?)}

$$F_\omega(z, 1) \equiv \sum_{h=1}^{\infty} [h\omega] z^h = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{z^{p_{\mu+1} + p_\mu}}{(1-z^{p_{\mu+1}})(1-z^{p_\mu})}.$$

Den letzten Formeln entnimmt man die Existenz von $F_\omega(z_1 z_2)$ im Innern der Punktmenge

$$\Re(\log z_1 + \omega \log z_2) < 0.$$

Offenbar ist $F_\omega(z_1 z_2)$ keine algebraische Funktion in den beiden Veränderlichen, denn bekanntlich ist sogar $F_\omega(z, 1)$ nicht über den Einheitskreis fortsetzbar. — Zur Abkürzung bedeute u die Punktmenge

$$\Re(\log z_1 + \omega \log z_2) < 0; \quad z_1 z_2 \neq 0; \quad z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu} \neq 1 \quad \text{für } \mu = 0, 1, 2, \dots$$

^{?)} Wegen dieser Entwicklungen vergleiche: Hardy-Littlewood, The analytic character of the sum of a Dirichlet's series considered by Hecke, Hamb. Abh. 3 57, sowie die später genannte Arbeit von Böhmer.

Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften. 365

3. Der Kettenbruch von ω werde nunmehr rein periodisch angenommen:

$$\omega = \omega_\nu,$$

so daß ω eine quadratische Irrationalzahl ist. Es besteht die Gleichung

$$\omega = \frac{q_\nu + q_{\nu-1} \omega}{p_\nu + p_{\nu-1} \omega}.$$

Zu der Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} p_\nu & q_\nu \\ p_{\nu-1} & q_{\nu-1} \end{pmatrix}$$

gehört die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv (p_\nu - \varrho)(q_{\nu-1} - \varrho) - p_{\nu-1}q_\nu = 0$$

mit den Wurzeln

$$\varrho_1 = p_\nu + p_{\nu-1}\omega, \quad \varrho_2 = q_{\nu-1} - p_{\nu-1}\omega; \quad \varrho_1 > |\varrho_2|.$$

Die Gleichung ist im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel und ihre Wurzeln genügen den früheren Forderungen. Wegen der Funktionalgleichung

$$F_\omega(z_1 z_2) = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (-1)^\mu \frac{z_1^{p_{\mu+1}+p_\mu} z_2^{q_{\mu+1}+q_\mu}}{(1 - z_1^{p_{\mu+1}} z_2^{q_{\mu+1}})(1 - z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu})} + (-1)^\nu F_\omega(z_1^{p_\nu} z_2^{q_\nu}, z_1^{p_{\nu-1}} z_2^{q_{\nu-1}})$$

folgt also nach Satz 6: „Wenn der Punkt (z_1, z_2) mit algebraischen Komponenten in u liegt, so ist die Zahl $F_\omega(z_1 z_2)$ transzendent.“

Bekanntlich besitzt aber jede reelle quadratische Irrationalzahl einen periodischen Kettenbruch; durch eine einfache Überlegung folgt daher:

„Bedeutet ω eine positive quadratische Irrationalität, so stellt die Funktion

$$F_\omega(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[\omega h_1]} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

in allen Punkten (z_1, z_2) mit algebraischen Komponenten in u eine transzendenten Zahl dar. Die Reihe

$$F_\omega(z, 1) = \sum_{h=1}^{\infty} [h\omega] z^h$$

ist somit für algebraisches z mit $0 < |z| < 1$ gleich einer transzendenten Zahl.“ (Es handelt sich sogar um nicht-Liouvillesche Zahlen.)

Mit einem abgeänderten Verfahren läßt sich die Transzendenz auch noch beweisen, wenn ω eine beliebige Irrationalzahl ist.

366 K. Mahler. Funktionalgleichungen und arithmetische Eigenschaften.

Man vergleiche zu diesem Abschnitt die Arbeit von P. E. Böhmer, „Über die Transzendenz gewisser dyadischer Brüche“. Math. Annalen 96. Dort wird gezeigt, daß die Zahlen

$$F_{\omega}\left(\frac{1}{g}, 1\right) \quad (g = 2, 3, 4, \dots)$$

Liouvillesch sind, wenn die Kettenbruchnenner a_{μ} nicht beschränkt sind.

Krefeld, 5. Mai 1928.

(Eingegangen am 25. 7. 1928.)