

ÜBER DAS VERSCHWINDEN VON POTENZREIHEN MEHRERER
VERÄNDERLICHEN IN SPEZIELLEN PUNKTFOLGEN

KURT MAHLER

SUMMARY. This article is the second in a series of three papers that develops the theory of transcendence now known as Mahler's method.

ACKNOWLEDGEMENT. The article

K. Mahler. Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen. *Math. Ann.*, 103:573–587, 1930.

is reproduced here with permission of Springer Nature Customer Service Center (SNCSC). This material is excluded from reuse and has not been licensed under the CCBY licence of the full work, no reproduction of any kind for this material is permitted without permission from Springer Nature.

Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

Die Elemente der gegebenen Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

seien nichtnegative ganze rationale Zahlen; es bedeute

$$\Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

die k -te Potenz von Ω . Wenn

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

n komplexe Veränderliche sind, so werde mit

$$z' = \Omega^k z$$

die Transformation

$$z'_\alpha = \prod_{\beta=1}^n z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \quad (\beta = 1, 2, \dots, n)$$

bezeichnet.

Von arithmetischen Untersuchungen her gelangt man zu folgendem Problem:

„Die Koordinaten des Punktes z seien genügend klein, so daß die Werte

$$E(\Omega^k z)$$

der Potenzreihe

$$E(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \dots h_n} z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}$$

für genügend großes k konvergieren. Man bestimme die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden dieser Werte:

$$E(\Omega^k z).“$$

Für gewisse Klassen von Matrizen Ω läßt sich diese Frage vollständig beantworten. In meiner Arbeit: „Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionsgleichungen“, Math. Annalen 101, zeigte ich:

„Die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) = |\Omega - \varrho E|, \quad E = \text{Einheitsmatrix},$$

sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel; sie besitze eine Wurzel ϱ größer als Eins und als der absolute Betrag der anderen Wurzeln. Wenn dann keine der Koordinaten von z verschwindet, wenn ferner

$$\Re\left(\sum_{\alpha=1}^n Z_\alpha \log z_\alpha\right) < 0$$

ist, wo die positiven Konstanten Z_1, Z_2, \dots, Z_n allein von der Matrix Ω abhängen, so folgt aus dem Verschwinden aller Werte:

$$E(\Omega^k z)$$

mit großem k das identische Verschwinden von $E(z)$.“

Der Beweis dieses Satzes ist rein algebraisch und nicht schwer. Bedeutend weniger einfach ist eine Untersuchung im Fall

$$\begin{pmatrix} \varrho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varrho & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varrho \end{pmatrix} = \varrho E,$$

wenn $\varrho \geq 2$ eine natürliche Zahl bedeutet. Dieser Fall soll in der vorliegenden Arbeit behandelt werden; es wird gezeigt:

„Die Zahlen z_1, z_2, \dots, z_n seien algebraisch, absolut kleiner als Eins und von Null verschieden. Es bestehe keine Gleichung

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \dots z_n^{e_n} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden. Dann folgt aus dem Verschwinden der Werte

$$E(\Omega^k z)$$

mit großem k das identische Verschwinden von $E(z)$.“

Der Beweis benutzt als Hauptmittel den Thue-Siegelschen Satz; aus ihm wird folgender Hilfssatz hergeleitet:

„Die n algebraischen Zahlen z_1, z_2, \dots, z_n seien vom Absolutbetrag Eins. Es bedeute $\varrho \geq 2$ eine natürliche Zahl. Existiert ein Polynom

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten und eine positive Konstante $\alpha > 0$, so daß für großes natürliches k die Ungleichung

$$F(z_1^{\varrho^k}, z_2^{\varrho^k}, \dots, z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha \varrho^k})$$

Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen.

575

besteht, so gibt es n ganze rationale Zahlen e_1, e_2, \dots, e_n , die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so daß

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \dots z_n^{e_n} = 1$$

ist.“

Mittels dieses Hilfssatzes ist das angegebene Ergebnis sofort zu beweisen. Aus ihm wird im letzten Abschnitt dann noch eine arithmetische Folgerung gezogen.

I.

1. Es sei $\varrho \geq 2$ eine natürliche Zahl, ξ eine algebraische Zahl vom Absolutbetrag Eins und Grad h . Zwischen den Basiselementen

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_h$$

des durch ξ erzeugten Zahlkörpers $K(\xi)$ bestehen Gleichungen

$$\omega_\alpha \omega_\beta = \sum_{\gamma=1}^h A_\gamma^{(\alpha\beta)} \omega_\gamma \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, h)$$

mit ganzen rationalen Zahlen $A_\gamma^{(\alpha\beta)}$; ihr absoluter Betrag habe das Maximum

$$A = \max_{\alpha, \beta, \gamma=1, 2, \dots, h} (|A_\gamma^{(\alpha\beta)}|).$$

Die Zahl ξ gestattet die Darstellung

$$\xi = \frac{a_1 \omega_1 + \dots + a_h \omega_h}{a_0} \quad (a_0 \neq 0)$$

mit ganzen rationalen Zahlen a_α . Ebenso ist für jedes natürliche k

$$\xi^k = \frac{a_1^{(k)} \omega_1 + \dots + a_h^{(k)} \omega_h}{a_0^{(k)}} \quad (a_0^{(k)} = a_0^k \neq 0)$$

mit ganzen rationalen Zahlen $a_\alpha^{(k)}$.

2. Es gibt eine natürliche Zahl C , so daß

$$\max_{\alpha=0, 1, \dots, h} (|a_\alpha^{(k)}|) \leq C^k$$

ist.

Denn sind

$$\eta = b_1 \omega_1 + \dots + b_h \omega_h, \quad b = \max_{\alpha=1, 2, \dots, h} (|b_\alpha|);$$

$$\zeta = c_1 \omega_1 + \dots + c_h \omega_h, \quad c = \max_{\alpha=1, 2, \dots, h} (|c_\alpha|)$$

zwei Zahlen in $K(\xi)$, so ist offenbar

$$\eta \zeta = d_1 \omega_1 + \dots + d_h \omega_h; \quad d_\gamma = \sum_{\alpha=1}^h \sum_{\beta=1}^h A_\gamma^{(\alpha\beta)} b_\alpha c_\beta;$$

$$\max_{\gamma=1, 2, \dots, h} (|d_\gamma|) \leq h^2 A b c.$$

576

.K. Mahler.

Durch wiederholte Anwendung der letzten Ungleichung ergibt sich somit die Behauptung, wenn

$$C = h^2 A \max_{\alpha=0,1,\dots,h} (|a_\alpha|)$$

gesetzt wird.

3. Die Zahl η aus $K(\xi)$ sei endlich; sie besitzt eine Darstellung

$$\eta = \frac{b_1 \omega_1 + \dots + b_h \omega_h}{b_0}, \quad b_0 \neq 0; \quad (b = \max_{\alpha=0,1,\dots,h} (|b_\alpha|))$$

mit ganzen rationalen Zahlen b_α . Dann gibt es eine positive Konstante c_0 , so daß entweder

$$\xi^{e^k} - \eta = 0$$

oder

$$|\xi^{e^k} - \eta| \geq c_1 C^{-h e^k}$$

ist, wenn k ins Unendliche wächst.

Denn sei die Zahl

$$\zeta = \xi^{e^k} - \eta = \frac{(a_1^{(k)} b_0 - a_0^{(k)} b_1) \omega_1 + \dots + (a_h^{(k)} b_0 - a_0^{(k)} b_h) \omega_h}{a_0^{(k)} b_0}$$

von Null verschieden; dann sind auch ihre in bezug auf $K(\xi)$ Konjugierten

$$\zeta, \zeta', \dots, \zeta^{(h-1)}$$

ungleich Null. Das Produkt

$$(a_0^{(k)} b_0)^h \zeta \zeta' \dots \zeta^{(h-1)}$$

ist also eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl, daher mindestens vom Absolutbetrag Eins. Da nach 2. für jedes k

$$|a_0^{(k)} b_0 \zeta^{(v)}| \leq 2b \sum_{\alpha=1}^h |\omega_\alpha| C^{e^k} \quad (v = 0, 1, \dots, h-1)$$

ist, folgt

$$|\zeta| \geq (b^h \{2 \sum_{\alpha=1}^h |\omega_\alpha|\}^{h-1} C^{h e^k})^{-1}$$

und die Behauptung, wenn c_1 mit

$$c_1 = (b^h (2 \sum_{\alpha=1}^h |\omega_\alpha|)^{h-1})^{-1}$$

gleichgesetzt wird.

4. Die Zahl η sei in bezug auf $K(\xi)$ vom genauen Grad $d \geq 2$. Dann gibt es eine positive Konstante c_2 , so daß für großes k

$$|\xi^{e^k} - \eta| \geq c_2 C^{-2h \sqrt{d} e^k}$$

ist.

Diese Behauptung ist die unmittelbare Folge eines Satzes von C. Siegel. Man vergleiche: Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschrift 10, S. 192.

5. Die Zahl η genüge der Gleichung

$$\eta^{e^k} = 1,$$

wo \varkappa eine natürliche Zahl bedeutet. Dann existiert eine positive Konstante c_3 , so daß entweder

$$\xi^{e^k} - \eta = 0$$

oder

$$|\xi^{e^k} - \eta| \geq c_3 C^{-2h} e^{k + \frac{\varkappa}{2}}$$

ist, wenn k ins Unendliche wächst.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt erstens η in $K(\xi)$, so besteht nach 3. eine der Relationen

$$\xi^{e^k} - \eta = 0 \quad \text{oder} \quad |\xi^{e^k} - \eta| \geq c_1 C^{-h} e^{k} \geq c_1 C^{-2h} e^{k + \frac{\varkappa}{2}}.$$

Liegt dagegen η nicht in $K(\xi)$, so ist nach 4.

$$|\xi^{e^k} - \eta| \geq c_2 C^{-2h} e^{k + \frac{\varkappa}{2}}.$$

In jedem Fall stimmt also die Behauptung.

6. Satz 1. Die algebraische Zahl ξ sei vom Absolutbetrag Eins. Es bedeute $\varrho \geq 2$ eine natürliche Zahl. Wenn die natürliche Zahl k ins Unendliche wächst, so gibt es zu jeder noch so kleinen positiven Konstanten ε eine natürliche Zahl $k_0(\varepsilon)$, so daß für $k \geq k_0$ entweder

$$\xi^{e^k} = 1$$

oder

$$|\xi^{e^k} - 1| \geq e^{-\varepsilon e^k}$$

ist.

Es besteht die Zerlegung

$$\xi^{e^k} - 1 = \prod_{q=0}^{e^k-1} \left(\xi^{e^{k-q}} - e^{\frac{2q\pi i}{e^k}} \right),$$

wo \varkappa eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Da ξ vom Absolutbetrag Eins ist, so sind alle Faktoren in dieser Zerlegung beschränkt. Es gibt eine allein von \varkappa abhängige positive Konstante c_4 , so daß für jedes k von den Faktoren

$$\xi^{e^{k-q}} - e^{\frac{2q\pi i}{e^k}}$$

höchstens einer absolut kleiner als c_4 sein kann. Nach dem vorigen Abschnitt besteht für ihn eine der Relationen

$$\xi^{e^{k-q}} - e^{\frac{2q\pi i}{e^k}} = 0 \quad \text{oder} \quad \left| \xi^{e^{k-q}} - e^{\frac{2q\pi i}{e^k}} \right| \geq c_3 C^{-2h} e^{k - \frac{\varkappa}{2}}.$$

Somit ist mit einer positiven Konstanten c_5 , die allein von ξ, ϱ, \varkappa abhängt:

$$|\xi^{e^k} - 1| = 0 \quad \text{oder} \quad \geq c_5 C^{-2h} e^{k - \frac{\varkappa}{2}}.$$

578

K. Mahler.

Sei jetzt ε eine beliebig kleine positive Konstante. Es werde die natürliche Zahl κ so groß gewählt, daß

$$2k\varrho^{-\frac{\kappa}{2}} \log C \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Für genügend großes k gilt dann entweder

$$\xi^{e^k} - 1 = 0$$

oder

$$|\xi^{e^k} - 1| \geq c_3 e^{-\frac{\varepsilon}{2}e^k} \geq e^{-\varepsilon e^k},$$

was zu beweisen war.

II.

7. Es sei $r \geq 2$ eine natürliche Zahl und x_1, x_2, \dots, x_n n komplexe Veränderliche.

Die allgemeinste rationale Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = F(x_1^r x_2^r \dots x_n^r)$$

ist eine Konstante.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ nicht von x_1 abhängt. Sei

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1^i \frac{\sum_{\alpha=0}^{\mu} A_{\alpha}(x_2 \dots x_n) x_1^{\alpha}}{\sum_{\beta=0}^{\nu} B_{\beta}(x_2 \dots x_n) x_1^{\beta}},$$

wo

$$A_{\alpha}(x_2 \dots x_n), \quad \alpha = 0, 1, \dots, \mu; \quad B_{\beta}(x_2 \dots x_n), \quad \beta = 0, 1, \dots, \nu$$

Polynome in x_2, x_3, \dots, x_n sind. Ohne Einschränkung sei

$$A_0(x_2 \dots x_n) \not\equiv 0, \quad B_0(x_2 \dots x_n) \not\equiv 0$$

angenommen. Wegen der Funktionalgleichung ist alsdann

$$x_1^i \frac{\sum_{\alpha=0}^{\mu} A_{\alpha}(x_2 \dots x_n) x_1^{\alpha}}{\sum_{\beta=0}^{\nu} B_{\beta}(x_2 \dots x_n) x_1^{\beta}} \equiv x_1^{r\lambda} \frac{\sum_{\alpha=0}^{\mu} A_{\alpha}(x_2^r \dots x_n^r) x_1^{\alpha r}}{\sum_{\beta=0}^{\nu} B_{\beta}(x_2^r \dots x_n^r) x_1^{\beta r}}.$$

Das ist aber nur dann möglich, wenn

$$\lambda = r\lambda, \quad \lambda = 0$$

ist und alle Polynome

$$A_{\alpha}(x_2 \dots x_n), \quad \alpha \geq 1; \quad B_{\beta}(x_2 \dots x_n), \quad \beta \geq 1$$

identisch verschwinden. Somit nimmt $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ die Form an:

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{A_0(x_2 \dots x_n)}{B_0(x_2 \dots x_n)}$$

und ist in der Tat von x_1 unabhängig.

Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen.

579

8. Die allgemeinste algebraische Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = F(x_1^r x_2^r \dots x_n^r)$$

ist eine Konstante.

Die Funktion $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ genügt einer Gleichung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n)^l + A_1(x_1 x_2 \dots x_n) F(x_1 x_2 \dots x_n)^{l-1} + \dots + A_l(x_1 x_2 \dots x_n) = 0;$$

die Koeffizienten

$$A_1(x_1 x_2 \dots x_n), \dots, A_n(x_1 x_2 \dots x_n)$$

seien dabei rationale Funktionen von x_1, x_2, \dots, x_n und die vorige Gleichung werde im Körper der rationalen Funktionen dieser Veränderlichen als irreduzibel angenommen. Aus der Funktionalgleichung ergibt sich die weitere algebraische Gleichung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n)^l + A_1(x_1^r x_2^r \dots x_n^r) F(x_1 x_2 \dots x_n)^{l-1} + \dots + A_l(x_1^r x_2^r \dots x_n^r) = 0$$

und diese muß wegen der Irreduzibilität mit der ersten identisch sein. Also genügen ihre Koeffizienten der Gleichung

$$A_\lambda(x_1^r x_2^r \dots x_n^r) = A_\lambda(x_1 x_2 \dots x_n) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l)$$

und sind daher Konstante, ebenso auch die Funktion $F(x_1 x_2 \dots x_n)$.

9. Die allgemeinste von Null verschiedene algebraische Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n)^r = F(x_1^r x_2^r \dots x_n^r)$$

ist von der Form

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \eta x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}.$$

Dabei bedeutet η eine $(r-1)$ -te Einheitswurzel und

$$e_1, e_2 \dots e_n$$

n rationale Zahlen.

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$F_l(x_1 x_2 \dots x_n) = x_l \frac{\partial F(x_1 x_2 \dots x_n)}{\partial x_l} \frac{1}{F(x_1 x_2 \dots x_n)} \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Durch Differentiation der Funktionalgleichung ergeben sich die Beziehungen

$$F_l(x_1 x_2 \dots x_n) = F_l(x_1^r x_2^r \dots x_n^r).$$

Aus ihnen folgt nach 8., daß die algebraischen Funktionen

$$F_l(x_1 x_2 \dots x_n) \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

konstant sind, etwa

$$F_l(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv e_l \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Dieses System von n Differentialgleichungen für $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ besitzt als allgemeinste Lösung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \eta x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$$

580

K. Mahler.

mit einer weiteren Konstanten η , die ungleich Null sei. Aus der Funktionalgleichung ergibt sich, daß

$$\eta^{\nu-1} = 1$$

ist, und weil ferner $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ algebraisch ist, so müssen die Exponenten

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

rationale Zahlen sein.

10. Satz 2: Die n algebraischen Zahlen z_1, z_2, \dots, z_n seien vom Absolutbetrag Eins. Es bedeute $\rho \geq 2$ eine natürliche Zahl und α eine positive Konstante. Wenn dann ein Polynom

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) \not\equiv 0$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten existiert, so daß für großes natürliches k die Ungleichung

$$F(z_1^{e^k} z_2^{e^k} \dots z_n^{e^k}) = O(e^{-\alpha e^k})$$

besteht, so gibt es n ganze rationale Zahlen, e_1, e_2, \dots, e_n , die nicht alle zugleich verschwinden, so daß

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \dots z_n^{e_n} = 1$$

ist.

Das Polynom $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ ist offenbar nicht von allen Veränderlichen frei, denn eine nichtverschwindende Konstante kann den Voraussetzungen nicht genügen.

Aus der Menge aller Polynome $F(x_1 x_2 \dots x_n) \not\equiv 0$, die einer Beziehung

$$F(z_1^{e^k} z_2^{e^k} \dots z_n^{e^k}) = O(e^{-\alpha_F e^k})$$

mit einer positiven Konstanten α_F , die von dem betreffenden Polynom noch abhängen kann, genügen, werde die Polynom-Teilmenge herausgegriffen, für die der größte Index, für den die Veränderliche x_i noch wirklich, also mindestens zur ersten Potenz in $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ vorkommt, gleich einer möglichst kleinen Zahl, etwa gleich g , ist. Diese Teilmenge ist gewiß nicht leer, wenn es überhaupt Polynome gibt, die den Voraussetzungen genügen.

Aus der vorigen Teilmenge werde alsdann ein Polynom $F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ herausgegriffen, das die Veränderliche x_g zur niedrigsten, etwa f -ten Potenz enthält: $f \geq 1$. Auch ein solches Polynom gibt es.

Das Polynom $F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ befriedigt für großes k die Ungleichung

$$F^*(x_1 x_2 \dots x_n) = O(e^{-\alpha^* e^k})$$

mit einer positiven Konstanten α^* . Es lassen sich zu $F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ zwei Polynome $F_1^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ und $F_2^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ mit endlichen Koeffizienten konstruieren, die folgende Eigenschaften haben:

- a) Beide Polynome verschwinden nicht identisch.
- b) Das Polynom $F_1^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ enthält keine der Veränderlichen x_g, x_{g+1}, \dots, x_n ; das Polynom $F_2^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ dagegen ist von den Veränderlichen x_{g+1}, \dots, x_n frei und enthält x_g zur $(\varrho - 1)$ -ten Potenz.
- c) Das Polynom

$F^{**}(x_1 x_2 \dots x_n) = F_1^*(x_1 x_2 \dots x_n) F^*(x_1^{\varrho} x_2^{\varrho} \dots x_n^{\varrho}) + F_2^*(x_1 x_2 \dots x_n) F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$
 ist von x_{g+1}, \dots, x_n frei und enthält x_g höchstens zur $(f-1)$ -ten Potenz.

Die Zahl k wachse jetzt über alle Grenzen. Alsdann ist

$$F^*(z_1^{e^k} \dots z_n^{e^k}) = O(e^{-\alpha^* e^k}); \quad F^*(z_1^{\varrho e^k} \dots z_n^{\varrho e^k}) = O(e^{-\alpha^* e^k});$$

$$F_1^*(z_1^{e^k} \dots z_n^{e^k}) = O(1), \quad F_2^*(z_1^{e^k} \dots z_n^{e^k}) = O(1)$$

und also auch

$$F^{**}(z_1^{e^k} z_2^{e^k} \dots z_n^{e^k}) = O(e^{-\alpha^* e^k}).$$

Diese Beziehung kann aber nur dann gelten, wenn $F^{**}(x_1 x_2 \dots x_n)$ identisch verschwindet. Daher besteht die identische Gleichung:

$$F_1^*(x_1 x_2 \dots x_n) F^*(x_1^{\varrho} x_2^{\varrho} \dots x_n^{\varrho}) + F_2^*(x_1 x_2 \dots x_n) F^*(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv 0.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt das Polynom $F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ in die Faktoren

$$F^*(x_1 x_2 \dots x_n) = \varphi_0(x_1 \dots x_{g-1}) \prod_{i=1}^f (x_g - \varphi_i(x_1 \dots x_{g-1})),$$

wo $\varphi_0(x_1 \dots x_{g-1})$ ein Polynom, die Ausdrücke

$$\varphi_1(x_1 \dots x_{g-1}), \dots, \varphi_f(x_1 \dots x_{g-1})$$

algebraische Funktionen der Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_{g-1} sind. Analog besteht die Zerlegung

$$F^*(x_1^{\varrho} x_2^{\varrho} \dots x_n^{\varrho}) = \varphi_0(x_1^{\varrho} \dots x_{g-1}^{\varrho}) \prod_{i=0}^{\varrho f} (x_g - \psi_i(x_1 \dots x_{g-1})),$$

wo die Ausdrücke

$$\psi_1(x_1 \dots x_{g-1}), \dots, \psi_{\varrho f}(x_1 \dots x_{g-1})$$

algebraische Funktionen in denselben Veränderlichen sind. Bei geeigneter Wahl der Indizes sind die beiden Reihen algebraischer Funktionen durch folgende Relationen verbunden:

$$\psi_{\varrho(\lambda-1)+\mu}(x_1 \dots x_{g-1}) = e^{\frac{2\mu x_i}{e}} [\varphi_e(x_1^{\varrho} \dots x_{g-1}^{\varrho})]^{\frac{1}{e}} \quad \left(\begin{matrix} \lambda = 1, 2, \dots, f \\ \mu = 1, 2, \dots, \varrho \end{matrix} \right).$$

Die obige Identität besagt aber, daß $F^*(x_1^{\varrho} x_2^{\varrho} \dots x_n^{\varrho})$ durch $F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ teilbar ist, wenn beide nur als Polynome in x_g aufgefaßt werden; das ist nur dann möglich, wenn jede der Funktionen

$$\varphi_1(x_1 \dots x_{g-1}), \dots, \varphi_f(x_1 \dots x_{g-1})$$

mit einer der Funktionen

$$\psi_1(x_1 \dots x_{g-1}), \dots, \psi_{\ell f}(x_1 \dots x_{g-1})$$

identisch ist. Also ist auch jede der Funktionen

$$\varphi_1(x_1 \dots x_{g-1})^e, \dots, \varphi_f(x_1 \dots x_{g-1})^e$$

mit einer der Funktionen

$$\varphi_1(x_1^e \dots x_{g-1}^e), \dots, \varphi_f(x_1^e \dots x_{g-1}^e)$$

identisch. Das besagt, daß jede der Funktionen

$$\varphi_l(x_1 \dots x_{g-1}) \quad (l = 1, 2, \dots, f)$$

einer Funktionalgleichung

$$\varphi_l(x_1 x_2 \dots x_{g-1})^r = \varphi_l(x_1^r x_2^r \dots x_{g-1}^r) \quad (l = 1, 2, \dots, f)$$

genügt, wo r eine natürliche Potenz von ϱ ist. Die Lösung einer solchen Gleichung ist aber entweder Null, was im vorliegenden Fall durch die obigen Minimum-Annahmen ausscheidet; oder jede der algebraischen Funktionen $\varphi_l(x_1 \dots x_{g-1})$ ist von der Gestalt

$$\varphi_l(x_1 \dots x_{g-1}) = \eta_l x_1^{e_1^{(l)}} \dots x_{g-1}^{e_{g-1}^{(l)}} \quad (l = 1, 2, \dots, f)$$

mit rationalen Exponenten

$$e_1^{(l)}, e_2^{(l)} \dots e_{g-1}^{(l)} \quad (l = 1, 2, \dots, f),$$

während die Konstanten

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_f$$

gleich Einheitswurzeln sind. Ohne Einschränkung seien letztere etwa als d -te Einheitswurzeln vorausgesetzt.

Die Funktion $F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ nimmt somit die Form an:

$$F^*(x_1 x_2 \dots x_n) = \varphi_0(x_1 \dots x_{g-1}) \prod_{l=1}^f (x_g - \eta_l x_1^{e_1^{(l)}} \dots x_{g-1}^{e_{g-1}^{(l)}})$$

und hieraus ergibt sich die Ungleichung:

$$\varphi_0(z_1^{e^k} \dots z_{g-1}^{e^k}) \prod_{l=1}^f (\eta_l \xi_l^{e^k} - 1) = O(e^{-\alpha^* e^k}); \quad \xi_l = z_1^{e_1^{(l)}} \dots z_{g-1}^{e_{g-1}^{(l)}} z_g^{-1} \quad (l = 1, 2, \dots, f).$$

Sei ε eine positive Zahl, die der Ungleichung

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\alpha^*}{2f}$$

genügt. Ferner werde gegen Satz 2 vorausgesetzt, daß keine der Zahlen

$$\xi_1^{d e^k} - 1, \quad \xi_2^{d e^k} - 1, \quad \dots, \quad \xi_f^{d e^k} - 1$$

für genügend großes k verschwindet. Nach Satz 1 besitzt jede der Ungleichungen

$$0 < \left| \xi_l^{d e^k} - 1 \right| \leq e^{-\varepsilon e^k} \quad (l = 1, 2, \dots, f)$$

Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen.

583

nur endlich viele Lösungen; für genügend großes k ist folglich erst recht:

$$|\eta_l \xi_l^{e^k} - 1| \geq c_6 e^{-\varepsilon e^k} \quad (l = 1, 2, \dots, f)$$

und also auch

$$\left| \prod_{l=1}^f (\eta_l \xi_l^{e^k} - 1) \right| \geq c_6^f e^{-\frac{\alpha^*}{2} e^k},$$

wenn c_6 eine gewisse positive Konstante bedeutet. Infolgedessen ist auch:

$$\varphi_0(z_1^{e^k} \dots z_{g-1}^{e^k}) = O\left(e^{-\frac{\alpha^*}{2} e^k}\right).$$

Diese Ungleichung widerspricht aber den Minimum-Annahmen über das Polynom $F^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, so daß man zu einem Widerspruch gelangt. Also muß mindestens eine der Zahlen

$$\eta_l \xi_l^{e^k} - 1 \quad (l = 1, 2, \dots, f)$$

für genügend großes k gleich Null werden, wie Satz 2 aussagt.

III.

11. Satz 3. Die Potenzreihe

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1, \dots, h_n} x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$$

konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes. Die n algebraischen Zahlen

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

seien von Null verschieden und im Innern des Einheitskreises gelegen. Es gebe $m \leq n$ algebraische Zahlen

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m,$$

zwischen denen keine Gleichung

$$\delta_1^{e_1} \delta_2^{e_2} \dots \delta_m^{e_m} = 1$$

besteht, wo die Exponenten ganze rationale Zahlen sind, die nicht gleichzeitig verschwinden; es sei

$$z_l = \delta_1^{q_{1l}} \dots \delta_m^{q_{ml}} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

und die Matrix

$$(q_{\lambda l}) \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \dots, m \\ l = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

habe nur ganze rationale Elemente und den genauen Rang m . Weiter bedeute $\varrho \geq 2$ eine feste natürliche Zahl.

Wenn dann

$$E^*(\xi_1, \dots, \xi_m) \equiv E(x_1, \dots, x_n), \quad x_l = \xi_1^{q_{1l}} \dots \xi_m^{q_{ml}} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

als Funktion der Veränderlichen

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$$

39*

584

K. Mahler.

nicht identisch verschwindet, so gibt es eine positive Konstante γ und eine Folge ins Unendliche wachsender natürlichen Zahlen k , so daß

$$|E(z_1^{e^k} \dots z_n^{e^k})| \geq e^{-\gamma e^k}$$

ist. —

Als Funktion der Veränderlichen

$$x_1 x_2 \dots x_m$$

wird

$$E(x_1 x_2 \dots x_m) = \sum_{b_1} \dots \sum_{b_m} \mathfrak{B}_{b_1 \dots b_m} x_1^{b_1} \dots x_m^{b_m}$$

oder

$$E(x_1 x_2 \dots x_m) = \sum_R E_R(x_1 \dots x_m);$$

$$E_R(x_1 \dots x_m) = \sum_{\substack{b_1 \dots b_m \\ |b_1 \dots b_m| = R}} \mathfrak{B}_{b_1 \dots b_m} x_1^{b_1} \dots x_m^{b_m}.$$

Offenbar entspricht nur den Gliedern

$$R_0, R_1, R_2, \dots \quad (1 > R_0 > R_1 > R_2 > \dots \geq 0)$$

einer gewissen abzählbaren Folge wirklich ein Summand $E_R(x_1 \dots x_m) \not\equiv 0$.

Jetzt werde angenommen, daß bei geeigneter Wahl der Indizes die Zahlen

$$\log |\delta_1|, \log |\delta_2|, \dots, \log |\delta_{m-h}|$$

in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind, daß dagegen die Zahlen

$$\log |\delta_{m-h+1}|, \dots, \log |\delta_m|$$

von ihnen linear abhängen. Dann gibt es h komplexe Zahlen

$$\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_h$$

vom Absolutbetrag Eins, die keiner Gleichung

$$\zeta_1^{e_1} \zeta_2^{e_2} \dots \zeta_h^{e_h} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht gleichzeitig verschwinden, genügen, so daß

$$\delta_{m-h+l} = \delta_1^{e_{1,l}} \dots \delta_{m-h}^{e_{m-h,l}} \zeta_l \quad (l = 1, 2, \dots, h)$$

mit rationalen Exponenten

$$e_{1,l} \dots e_{m-h,l} \quad (l = 1, 2, \dots, h)$$

ist. Mit ihrer Benutzung geht $E_R(\delta_1^{e^k} \dots \delta_m^{e^k})$ über in

$$E_R(\delta_1^{e^k} \dots \delta_m^{e^k}) = (\delta_1^{b_1^0} \dots \delta_{m-h}^{b_{m-h}^0})^{e^k} (\zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_h^{\alpha_h})^{-e^k} E_R(\zeta_1^{e^k} \dots \zeta_h^{e^k}).$$

Dabei ist

$$|\delta_1^{b_1^0} \dots \delta_{m-h}^{b_{m-h}^0}| = R;$$

Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen.

585

die Zahlen $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_h$ sind nichtnegativ und ganz rational, und der Ausdruck $E_R(\zeta_1^{\kappa_1} \dots \zeta_h^{\kappa_h})$ ist ein von k unabhängiges Polynom $E_R(Z_1 \dots Z_h)$ in den Werten

$$Z_i = \zeta_i^{e^k} \dots Z_h = \zeta_h^{e^k}.$$

Offenbar verschwindet dieses Polynom dann und nur dann identisch, wenn $E_R(\xi_1 \dots \xi_m)$ selbst identisch verschwindet.

Von jetzt ab sei angenommen, daß die Reihe

$$E(x_1 x_2 \dots x_n) = E^*(\xi_1 \dots \xi_m)$$

als Funktion der Veränderlichen

$$\xi_1 \dots \xi_m$$

nicht identisch verschwindet. Offenbar gibt es dann auch eine Funktion

$$E_{R_\nu}(\xi_1 \dots \xi_m)$$

vom kleinsten Index, also größtem R_ν , die nicht identisch verschwindet so daß auch

$$E_{R_\nu}(Z_1 \dots Z_h)$$

von Null verschieden ist. Nun ist

$$E_{R_\mu}(\delta_1^{e^k} \dots \delta_m^{e^k}) = O(R_\mu^{e^k})$$

und daher für großes k die Summe

$$\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} E_{R_\mu}(\delta_1^{e^k} \dots \delta_m^{e^k})$$

von der Größenordnung

$$O(R_{\nu+1}^{e^k}).$$

Andrerseits ist nach Satz 2 für eine Folge ins Unendliche wachsender natürlicher Zahlen k bei beliebig kleinem festen positiven ε :

$$|E_{R_\nu}(\zeta_1^{e^k} \dots \zeta_h^{e^k})| \geq e^{-\varepsilon e^k}$$

und somit auch

$$|E_{R_\nu}(\delta_1^{e^k} \dots \delta_m^{e^k})| \geq R_\nu^{e^k} e^{-\varepsilon e^k}.$$

Folglich ergibt sich, wenn noch $2\varepsilon = \log \frac{R_\nu}{R_{\nu+1}}$ gewählt wird, für die Folge k :

$$|E(z_1^{e^k} \dots z_n^{e^k})| = |E^*(\delta_1^{e^k} \dots \delta_m^{e^k})| \geq (R_\nu R_{\nu+1})^{\frac{1}{2} e^k} + O(R_{\nu+1}^{e^k}) \geq R_{\nu+1}^{e^k},$$

w. z. b. w.

IV.

12. Der letzte Satz entspricht genau dem Satz 1 meiner Arbeit: Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen (Math. Annalen 101, S. 351). Auf analoge Art wie dort kann auch aus ihm ein Transzendenzsatz erschlossen werden, weshalb ich auf die Durchführung des Beweises verzichte. Das Ergebnis lautet:

Satz 4. *Es sei $\varrho \geq 2$ eine feste natürliche Zahl,*

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \dots h_n} x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$$

eine in der Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe in den n Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n mit algebraischen Koeffizienten aus einem endlichen Zahlkörper. Die Funktion $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ genüge einer Funktionalgleichung

$$F(x_1^{\varrho} x_2^{\varrho} \dots x_n^{\varrho}) = \frac{\sum_{l=0}^m a_l(x_1 x_2 \dots x_n) F(x_1 x_2 \dots x_n)^l}{\sum_{l=0}^m b_l(x_1 x_2 \dots x_n) F(x_1 x_2 \dots x_n)^l} \quad (1 \leq m < \varrho),$$

wo die $a_l(x_1 \dots x_n), b_l(x_1 \dots x_n)$ Polynome mit endlichen algebraischen Koeffizienten sind. Die beiden Polynome

$$\sum_{l=0}^m a_l(x_1 x_2 \dots x_n) u^l, \quad \sum_{l=0}^m b_l(x_1 x_2 \dots x_n) u^l$$

seien in allen Veränderlichen teilerfremd; mindestens eins besitze den genauen Grad m in u ; ihre Resultante in bezug auf u sei gleich $\Delta(x_1 x_2 \dots x_n)$.

Die m algebraischen Zahlen

$$z_1, z_2, \dots, z_n; \quad 0 < |z_l| < 1 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

seien von der Gestalt

$$z_l = \delta_1^{q_{1l}} \dots \delta_m^{q_{ml}} \quad (l = 1, 2, \dots, n),$$

dabei seien

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$$

m algebraische Zahlen, zwischen denen keine Beziehung

$$\delta_1^{\epsilon_1} \delta_2^{\epsilon_2} \dots \delta_m^{\epsilon_m} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht gleichzeitig verschwinden, besteht; die Matrix

$$(q_{li}) \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \dots, m \\ l = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

besitze ganze rationale Elemente und den genauen Rang m . Ferner sei angenommen, daß keine der Zahlen

$$\Delta(z_1^{e^k} z_2^{e^k} \dots z_n^{e^k}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

verschwindet. Wenn dann

$$F^*(\xi_1 \dots \xi_m) = F(x_1 x_2 \dots x_n), \quad x_l = \xi_1^{q_{1l}} \dots \xi_m^{q_{ml}} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

als Funktion der Veränderlichen

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$$

nicht algebraisch ist, so stellt $F(z_1 z_2 \dots z_n)$ eine transzendente Zahl dar.

Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen. 587

Im Falle $m = 1$ läßt sich sogar zeigen, daß es sich um Nicht-Liouvillesche Zahlen handelt.

13. Aus dem vorigen Satz lassen sich z. B. diese Folgerungen ziehen:

a) Die von Null verschiedenen algebraischen Zahlen z_1, z_2, \dots, z_n seien im Innern des Einheitskreises gelegen; keiner der Quotienten $\frac{\log z_\alpha}{\log z_\beta}$ sei gleich einer ganzen rationalen Potenz von ρ . Ferner seien Z_1, Z_2, \dots, Z_n n von Null verschiedene algebraische Zahlen. Dann stellt der Ausdruck

$$\sum_{l=1}^n Z_l \Phi(z_l); \quad \Phi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^{\rho^h}$$

eine transzendente Zahl dar.

b) $q(h)$ sei die Quersumme von h im ρ -adischen System; es sei

$$\Psi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} q(h) x^{\rho^h}.$$

Dann ist unter den gleichen Voraussetzungen wie in a) die Zahl

$$\sum_{l=1}^n Z_l \Psi(z_l)$$

transzendent.

Diese Beispiele lassen sich beliebig vermehren.

Krefeld, im Herbst 1928.

(Eingegangen am 8. 5. 1929.)