Über Beziehungen zwischen der Zahl e und Liouvilleschen Zahlen

Kurt Mahler

Summary. In this paper, for any Liouville number u, it is shown that e and u are algebraically independent, where e is Euler's number—the base of the natural logarithm.

Acknowledgement. The article

> K. Mahler. Über Beziehungen zwischen der Zahl e und Liouvilleschen Zahlen. *Math. Z.*, 31:729–732, 1930.

is reproduced here with permission of Springer Nature Customer Service Center (SNCSC).

Über Beziehungen zwischen der Zahl e und Liouvilleschen Zahlen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

§ 1.

Bekanntlich ist die Zahl e keine Liouvillesche Zahl; dabei sind unter Liouvilleschen Zahlen solche Zahlen u zu verstehen, die zu jeder noch so großen positiven Zahl ω rationale Annäherungen $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$, mit

$$0 < \left| u - \frac{x}{y} \right| < y^{-\omega}$$

besitzen. In der vorliegenden Note soll folgendes allgemeinere Ergebnis gezeigt werden:

Das Polynom $F(v, w) \not\equiv 0$ habe rationale Koeffizienten. Ist dann $e = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}$ und u eine beliebige Liouvillesche Zahl, so verschwindet die Zahl $F(e, u)$ nicht.

§ 2.

Definition. Eine Zahl s heiße S-Zahl, wenn es eine positive Zahl γ und zu jeder natürlichen Zahl m eine positive Zahl $\Gamma(m)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

Sind $a_0, a_1, \ldots, a_m$ $m+1$ ganze rationale Zahlen und ist

$$a = \max(|a_0|, \ldots, |a_m|),$$

so ist entweder

$$\sum_{h=0}^{m} a_h s^h = 0$$

oder

$$\left| \sum_{h=0}^{m} a_h s^h \right| \geqq \Gamma a^{-\gamma m}.$$

Hilfssatz 1. Sei t eine S-Zahl, s eine Wurzel der Gleichung

$$C(s\,|\,t) \equiv \sum_{i=0}^{f} C_i(t)\, s^i = 0; \qquad C_i(t) = \sum_{j=0}^{g} C_{ij}\, t^j, \qquad C_f(t) \neq 0,$$

wo die Koeffizienten C_{ij} ganze rationale Zahlen sind. Dann ist auch s eine S-Zahl.

Zunächst wurde gezeigt, daß algebraische Zahlen stets S-Zahlen sind. Sei etwa s algebraisch vom Grad f, seien ferner

$$s_0 = s,\, s_1, \ldots, s_{f-1}$$

die zu s konjugierten Zahlen und bedeute S den gemeinsamen Nenner. Dann sind die Zahlen

$$\sum_{h=0}^{m} a_h\, s_\nu^h \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, f-1),$$

wobei

$$a_0, a_1, \ldots, a_m$$

$m+1$ ganze rationale Zahlen mit

$$a = \max\,(|\,a_0\,|, \ldots, |\,a_m\,|)$$

bedeuten, alle zur selben Zeit gleich Null oder ungleich Null. Im letzteren Fall ist das Produkt

$$S^{fm} \prod_{\nu=0}^{f-1} \Big(\sum_{h=0}^{m} a_h\, s_\nu^h \Big)$$

von Null verschieden und als symmetrische Funktion der s_ν ganz rational, also mindestens vom Absolutbetrag Eins. Folglich ist

$$\Big|\sum_{h=0}^{m} a_h\, s^h \Big| \geqq S^{-fm} \Big(\prod_{\nu=1}^{f-1} \Big\{ \sum_{h=0}^{m} |\, s_\nu\,|^h \Big\} \Big)^{-1} a^{-(f-1)} \geqq \Gamma(m)\, a^{-\gamma m}; \quad \gamma = f-1.$$

Jetzt werde zum Beweis des Hilfssatzes übergegangen. In der Gleichung

$$C(s\,|\,t) \equiv \sum_{i=0}^{f} C_i(t)\, s^i = 0$$

kann die linke Seite in s und t irreduzibel in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen angenommen werden; ferner seien ohne Einschränkung die beiden Zahlen s und t transzendent. Die vermöge der Gleichung

$$C(s\,|\,t) = 0$$

zu s konjugierten Zahlen

$$s_0 = s,\, s_1, \ldots, s_{f-1}$$

sind dann gleichfalls alle transzendent. Denn genüge etwa s_1 einer irreduziblen Gleichung

$$\mathfrak{C}(s_1) \equiv \sum_{i=0}^{\varphi} \mathfrak{C}_i\, s_1^i = 0, \qquad \mathfrak{C}_\varphi \neq 0,$$

vom Grad φ mit ganzen rationalen Koeffizienten. Aus der Transzendenz von t folgt, daß das Polynom

$$C(x \mid t)$$

durch das Polynom

$$\mathfrak{C}(x)$$

teilbar ist; ferner ergibt sich $\varphi < f$ aus der Transzendenz von s; das widerspricht der angenommenen Irreduzibilität von $C(s \mid t)$.

Sind also

$$a_0, a_1, \ldots, a_m$$

$m+1$ ganze rationale Zahlen mit

$$a = \max(|a_0|, \ldots, |a_m|) > 0,$$

so haben die f Summen

$$\sum_{h=0}^{m} a_h s_\nu^h \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, f-1)$$

sämtlich einen von Null verschiedenen Wert, also auch das Produkt

$$L(t \mid a_0 \ldots a_m) = C_f(t)^{fm} \prod_{\nu=0}^{f-1} \left(\sum_{h=0}^{m} a_h s_\nu^h \right).$$

$L(t \mid a_0 \ldots a_m)$ ist in den konjugierten Zahlen s_ν symmetrisch, läßt sich folglich als rationale Funktion in t allein ausdrücken; da ferner durch den Faktor $C_f(t)^{fm}$ der Nenner fortgeschafft ist, so muß $L(t \mid a_0 \ldots a_m)$ ein Polynom in t und zwar mit ganzen rationalen Koeffizienten sein. Nach bekannten Sätzen über symmetrische Funktionen läßt sich $L(t \mid a_0 \ldots a_m)$ in der Form

$$L(t \mid a_0 \ldots a_m) = C_f(t)^{fm} \cdot \sum A_{e_0 e_1 \ldots e_{f-1}} \left(\frac{C_0(t)}{C_f(t)} \right)^{e_0} \cdots \left(\frac{C_{f-1}(t)}{C_f(t)} \right)^{e_{f-1}}$$

darstellen; dabei sind die $A_{e_0 e_1 \ldots e_{f-1}}$ Formen in den a_h der Dimension f, deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind; summiert wird über die Indizes $e_0, e_1, \ldots, e_{f-1}$ mit

$$f e_0 + (f-1) e_1 + \ldots + 2 e_{f-2} + e_{f-1} \leqq fm.$$

Somit nimmt $L(t \mid a_0 \ldots a_m)$ die Gestalt

$$L(t \mid a_0 \ldots a_m) = \sum_{l=0}^{fgm} A_l t^l$$

an; dabei sind die A_l ganze rationale Zahlen und es gibt eine positive Konstante α, so daß

$$|A_l| \leqq \alpha a^f \qquad (l = 0, 1, \ldots, fgm)$$

ist.

47*

Da nach Voraussetzung

$$L(t \mid a_0 \dots a_m) \neq 0,$$

da ferner t eine S-Zahl ist, etwa mit den Konstanten $\gamma > 0$ und $\Gamma(m) > 0$, so wird schließlich:

$$|L(t \mid a_0 \dots a_m)| \geqq \Gamma(fgm)(\alpha a^f)^{-\gamma f g m},$$

und nach der Definition von $L(t \mid a_0 \dots a_m)$:

$$\left|\sum_{h=0}^{m} a_h s^h\right| = \left|C_f(t)^{-fm} \prod_{\nu=1}^{f-1}\left(\sum_{h=0}^{m} a_h s_\nu^h\right)\right|^{-1} |L(t \mid a_0 \dots a_m)|$$

$$\geqq |C_f(t)|^{-fm} \prod_{\nu=1}^{f-1}\left(\sum_{h=0}^{m} |s_\nu|^h\right)^{-1} a^{-(f-1)}\,\Gamma(fgm)(\alpha a^f)^{-\gamma f g m}$$

und erst recht:

$$\left|\sum_{h=0}^{m} a_h s^h\right| \geqq \Delta(m)\, a^{-\delta m};$$

dabei ist

$$\delta = \gamma f^2 g + f - 1$$

eine von m unabhängige Konstante und $\Delta(m)$ eine positive Zahl, die noch von m abhängt. Das ist gerade die Behauptung.

§ 3.

Hilfssatz 2. Die Zahl e ist eine S-Zahl.

Wegen dieses Satzes sei auf die Arbeit: „Zur Transzendenz von e“ von J. Popken in der Math. Zeitschr. Bd. 29, S. 525, verwiesen. Dort wird unter anderem gezeigt, daß für die Konstante γ jede Zahl größer als Eins genommen werden darf.

§ 4.

Da e eine S-Zahl ist, ist dasselbe der Fall für jede Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten Polynome in e mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten sind. Daraus folgt unter anderem die Aussage über Beziehungen zu Liouvilleschen Zahlen, denn diese sind gewiß keine S-Zahlen. Allgemeiner ergibt dasselbe für alle Zahlen, die keine S-Zahlen sind oder die, roh gesprochen, sich durch algebraische Zahlen zu gut approximieren lassen.

Göttingen, 9. 5. 1929.

(Eingegangen am 18. Mai 1929.)