Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. I, II

Kurt Mahler

Summary. In Part I, Mahler introduces his classification of complex numbers and the following two results are proved. Let $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$ be N algebraic numbers that are linearly independent over the rationals and let λ be a Liouville number. Then, the numbers $e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \ldots, e^{\vartheta_N}, \lambda$ are algebraically independent over the field of algebraic numbers. Let z be the real logarithm of a positive rational number not equal to one and let λ be a Liouville number. Then, z and λ are algebraically independent over the field of algebraic numbers.

Part II continues the study of the same title by giving various bounds on polynomials evaluated at logarithms and exponentials. A new proof of the transcendence of π is given as an application.

Acknowledgement. The articles

K. Mahler. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I. *J. Reine Angew. Math.*, 166:118–136, 1932.

K. Mahler. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil II. *J. Reine Angew. Math.*, 166:137–150, 1932.

are reproduced here with kind permission of de Gruyter.

118

Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I.

Von *Kurt Mahler* in Göttingen.

In einer früheren Note (5) zeigte ich, daß die Zahl e und eine beliebige Liouville-Zahl stets algebraisch unabhängig sind. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen weitergeführt und folgende zwei Sätze bewiesen:

Sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$ irgend N algebraische Zahlen, die linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen, bedeutet ferner λ eine beliebige Liouville-Zahl, so sind die Zahlen

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \ldots, e^{\vartheta_N}, \lambda$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen.

Bedeutet z den reellen Logarithmus einer positiven rationalen und von Eins verschiedenen Zahl oder ist $z = \pi$, bedeutet ferner λ eine beliebige Liouville-Zahl, so sind die beiden Zahlen

$$z, \lambda$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen.

Der Beweis dieser Sätze beruht auf einer Einteilung aller transzendenten Zahlen in drei Klassen nach ihrer Fähigkeit, sich durch algebraische Zahlen mehr oder weniger gut annähern zu lassen. Zwei Zahlen, die algebraisch von einander abhängen, gehören immer zur gleichen Klasse; also sind zwei Zahlen in verschiedenen Klassen gewiß algebraisch unabhängig. Diese Klasseneinteilung ist kurz in Kapitel Eins dargestellt.

Um dieselbe aber anwenden zu können, müssen schärfere Sätze abgeleitet werden über die Approximation der Werte der Exponentialfunktion und des Logarithmus in algebraischen Punkten durch algebraische Zahlen. Dazu wird von den entsprechenden algebraischen Fragen ausgegangen. Sind $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_m$ voneinander verschiedene beliebige Zahlen, $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ beliebige natürliche Zahlen, so gibt es ein und nur ein System von Polynomen

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

bzw. vom Grad $\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \ldots, \varrho_m - 1$, so daß die Potenzreihe

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$$

genau mit dem Anfangsglied

$$\frac{z^{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m - 1}}{(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m - 1)!}$$

beginnt. Die Funktionen $A_k(z)$ und $R(z)$ lassen sich explizit durch Differentialausdrücke, vielfache reelle Integrale und einfache Cauchysche Integrale darstellen; es handelt sich bei ihnen um Ausartungen verallgemeinerter hypergeometrischer Funktionen. Wie ich neuerdings fand, finden sie sich bereits in einem Brief von Hermite an Pincherle (2) vor, jedoch ohne arithmetische Anwendungen. Diese Funktionen haben eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften; wird z. B. gesetzt

$$A_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\dots\omega_m\\ \varrho_1\dots\varrho_m\end{matrix}\right)=A_k\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\dots & \omega_h & \dots\omega_m\\ \varrho_1\dots & \varrho_h+1 & \dots\varrho_m\end{matrix}\right)\qquad (h,k=1,2,\dots,m),$$

so ist die Determinante

$$\left|A_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\dots\omega_m\\ \varrho_1\dots\varrho_m\end{matrix}\right)\right|=c\,z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}\qquad\left(\frac{dc}{dz}=0,\ c\neq 0\right),$$

also nur im Nullpunkt gleich Null. Dieselben Funktionen stehen ferner, wie gezeigt wird, in einer merkwürdigen Beziehung zu den Polynomen, die Hermite bei seinem klassischen Transzendenzbeweis für e in der Arbeit (1) benutzt.

Die rein algebraischen Näherungen für die Exponentialfunktion

$$R\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\dots\omega_m\\ \varrho_1\dots\varrho_m\end{matrix}\right)=\sum_{k=1}^{m}A_k\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\dots\omega_m\\ \varrho_1\dots\varrho_m\end{matrix}\right)e^{\omega_k z}$$

gehen in arithmetische über, wenn die Parameter gleich Zahlwerten gesetzt werden.

Zunächst sei m fest, während die Zahlen ϱ_k bis um eine Einheit den gleichen über alle Grenzen wachsenden Wert haben und $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ je gleich verschiedenen algebraischen Zahlen sind und $z = 1$. Nach einem Verfahren von Siegel (7) läßt sich aus den dann entstehenden numerischen Näherungen folgender Satz folgern:

Sind die N algebraischen Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen und gemeinsam in einem Zahlkörper vom Grad n gelegen, so gibt es eine positive Konstante $T_{N,n}$, die nur von N und n abhängt, so daß der Wert des Ausdruckes

$$\mathfrak{r}=\sum_{\lambda_1=0}^{M_1}\cdots\sum_{\lambda_N=0}^{M_N}\mathfrak{a}_{\lambda_1\dots\lambda_N}e^{\lambda_1\vartheta_1+\cdots+\lambda_N\vartheta_N},\qquad a=\max_{\substack{\lambda_1=0,1,\dots,M_1\\ \vdots\\ \lambda_N=0,1,\dots,M_N}}(|\mathfrak{a}_{\lambda_1\dots\lambda_N}|)>0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten für genügend großes a der Ungleichung

$$|\mathfrak{r}|\geqq a^{-T_{N,n}M_1\cdots M_N}$$

genügt.

Hieraus läßt sich speziell die Aussage über Beziehungen zu Liouville-Zahlen herleiten. Im Fall $N = n = 1$ kann man noch genauere untere Schranken erhalten. Man kommt zu dem weiteren Ergebnis:

Die Koeffizienten der linearen Form in $1, e, \dots, e^m$,

$$r=\sum_{k=0}^{m}a_k e^k,\qquad a=\max_{k=0,1,\dots,m}(|a_k|)>0$$

seien ganz rational. Dann gibt es eine positive Zahl c, die weder von m, noch von den Koeffizienten a_k abhängt, so daß für genügend großes a die folgende Ungleichung besteht:

$$|r|\geqq a^{-m-\frac{cm^2\log(m+1)}{\log\log a}}.$$

Dies Ergebnis ist eine geringe Verschärfung der bisher schärfsten Resultate von Siegel (7) und Popken (5) über die Annäherung an e.

Auf ähnliche Art kommt man zu Aussagen über die Annäherung an Logarithmen und insbesondere an die Zahl $2\pi i = \log 1$. Dazu wird in

$$R\left(z \,\Big|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k \left(z \,\Big|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z}$$

$\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ festgehalten und m über alle Grenzen wachsen gelassen, während $\omega_k = k - 1$ ist und z gleich dem betreffenden Logarithmus. Dann ergibt sich die Existenz von unendlichvielen Annäherungen an z durch angebbare algebraische Zahlen vom Grad $\varrho - 1$, aus der die Angabe über Beziehungen zu Liouvilleschen Zahlen hergeleitet werden kann. Es läßt sich noch folgender Satz beweisen:

Es gibt eine absolute Konstante $c > 1$, so daß für eine beliebige natürliche Zahl m und $m+1$ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_m$ mit

$$a = \max_{k=0,1,\dots,m} (|a_k|) \geqq a(m)$$

die Ungleichung

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k \pi^k\right| \geqq a^{-c^m}$$

besteht.

Die Untersuchungen dieser Arbeit können auf die Binomialreihe übertragen werden; man erhält so für den Spezialfall der Wurzeln reiner Gleichungen einen neuen Beweis des Thue-Siegelschen Satzes.*) —

Herrn Prof. Siegel möchte ich an dieser Stelle danken für eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen; er hatte die Güte, mich auf einige Irrtümer aufmerksam zu machen. Mein besonderer Dank gilt ferner der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft für ihre Unterstützung.

Literaturverzeichnis.

(1) Ch. Hermite, Sur la fonction exponentielle, Œuvres III, S. 150.
(2) Ch. Hermite, Sur la généralisation des fractions continues algébriques, Œuvres IV, S. 357.
(3) Laplace, Théorie analytique des probabilités, Œuvres VII, S. 111.
(4) Liouville, Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, C. R. **18** (1844), S. 883 u. 910.
(5) K. Mahler, Über Beziehungen zwischen der Zahl e und den Liouvilleschen Zahlen, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 729.
(6) J. Popken, Zur Transzendenz von e, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 525.
Zur Transzendenz von π, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 542.
(7) C. Siegel, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1929, Nr. 1.
Außerdem sind die Arbeiten von Morduchai-Boltowskoj zu nennen, die mir aber ihrer Sprache wegen nicht zugängig waren.

I.

1. Bei Untersuchungen über transzendente Zahlen kann man oft von einer Klasseneinteilung der Zahlen nach ihrer Annäherungsschärfe Gebrauch machen, die hier kurz dargestellt ist.

Es bedeute z eine reelle oder nichtreelle Zahl, m und a zwei natürliche Zahlen. Die arithmetische Funktion

$$\omega_m(a \mid z) = \omega_m(a) = \min_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_m = 0, \mp 1, \dots, \mp a \\ \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \neq 0}} \left(\left|\sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right|\right)$$

*) Dieser Beweis ist inzwischen erschienen in der Arbeit: „Ein Beweis des Thue-Siegelschen Satzes für binomische Gleichungen", Math. Annalen **105** (1931), S. 267.

ist höchstens gleich Eins und nimmt nicht zu, wenn m und a wachsen. Jeder der oberen Grenzwerte

$$\omega_m(z) = \omega_m = \overline{\lim_{a\to+\infty}} \frac{\log \frac{1}{\omega_m(a)}}{\log a}, \quad \omega(z) = \omega = \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{\omega_m}{m}$$

ist entweder positiv unendlich groß oder eine endliche nichtnegative Zahl. Mit ω_m ist für $m' \geqq m$ auch $\omega_{m'}$ unendlichgroß; demnach gibt es einen Index $\mu(z) = \mu$, so daß ω_m für $m < \mu$ endlich, für $m \geqq \mu$ unendlich ist. Die beiden Zahlen ω und μ sind nie gleichzeitig endlich.

Definition: Eine Zahl z heißt

A-Zahl, wenn $\omega = 0$, $\mu = +\infty$,
S-Zahl, wenn $0 < \omega < +\infty$, $\mu = +\infty$,
T-Zahl, wenn $\omega = +\infty$, $\mu = +\infty$,
U-Zahl, wenn $\omega = +\infty$, $\mu < +\infty$

ist. Jede Zahl gehört einer und nur einer von diesen vier Klassen an.

2. Der Sinn der Klasseneinteilung ergibt sich aus einigen einfachen und altbekannten Hilfssätzen, deren Beweis auf Liouville und Dirichlet zurückgeht. Man hat mit der Abkürzung $\sigma(z) = \sigma = \begin{Bmatrix} 1 \text{ für reelles } z \\ 2 \text{ für nichtreelles } z \end{Bmatrix}$:

a) *Für eine algebraische Zahl z vom Grad n ist*

$$\frac{m+1}{\sigma} - 1 \leqq \omega_m \leqq \frac{n}{\sigma} - 1 \text{ für } m < n-1, \quad \omega_m = \frac{n}{\sigma} - 1 \text{ für } m \geqq n-1;$$
$$\omega = 0, \quad \mu = +\infty;$$

b) *Für eine transzendente Zahl ist*

$$\omega_m \geqq \frac{m+1}{\sigma} - 1 \text{ für } m = 1, 2, 3, \ldots; \quad \omega \geqq \frac{1}{\sigma}.$$

Die Menge der A-Zahlen ist also identisch mit der Menge der algebraischen Zahlen, und man hat das Transzendenzkriterium:

Eine Zahl z ist dann und nur dann transzendent, wenn es zu jeder noch so großen Zahl $\Omega > 0$ eine natürliche Zahl m und unendlichviele Lösungen der Ungleichung

$$0 < \left| \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \right| < a^{-\Omega}, \qquad a = \max_{k=0,1,\ldots,m} (|a_k|)$$

in ganzen rationalen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_m$ gibt.

Weiter gilt folgender Satz [1]):

c) *Wenn zwischen den beiden transzendenten Zahlen z_1 und z_2 eine algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die nicht alle verschwinden, von der Form*

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\mathfrak{a}_1} \sum_{\alpha_2=0}^{\mathfrak{a}_2} A_{\alpha_1\alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} = 0$$

besteht, so ist

$$\omega_m(z_1) \leqq \mathfrak{a}_1 - 1 + \mathfrak{a}_1 \omega_{m\mathfrak{a}_2}\mathfrak{a}_2(z_2), \quad \omega_m(z_2) \leqq \mathfrak{a}_2 - 1 + \mathfrak{a}_2 \omega_{m\mathfrak{a}_1}(z_1)$$
$$\omega(z_1) \leqq \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \omega(z_2), \quad \omega(z_2) \leqq \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \, \omega(z_1)$$
$$\mu(z_1) \leqq \mathfrak{a}_1 \, \mu(z_2), \quad \mu(z_2) \leqq \mathfrak{a}_2 \mu(z_1).$$

Die Klasseneinteilung in A-Zahlen, S-Zahlen, T-Zahlen, U-Zahlen ist somit invariant bei dem Übergang von einer Zahl zu einer algebraisch abhängigen Zahl; zwei Zahlen in verschiedenen Klassen sind immer algebraisch unabhängig.

[1]) Siehe meine Note (5).

Offenbar sind die speziellen U-Zahlen mit $\mu = 1$ identisch mit den sogenannten Liouvilleschen Zahlen (4).

II.

3. Zu m natürlichen Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ und m voneinander verschiedenen komplexen Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ existieren nach bekannten Sätzen über homogene lineare Gleichungen m Polynome

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m \\ \varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

höchstens der Grade $\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \ldots, \varrho_m - 1$, die nicht alle gleichzeitig identisch verschwinden, so daß der Index h_0 des ersten nichtverschwindenden Koeffizienten a_{h_0} in der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h$$

der Ungleichung

$$M = h_0 - \sum_{k=1}^{m} \varrho_k + 1 \geqq 0$$

genügt. Irgendeine der so bestimmten Summen werde bezeichnet mit

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z}$$

und m ihre Ordnung, M ihr Überschuß genannt.

Bedeuten D, D^{-1}, J die Operatoren

$$D = \frac{d}{dz},\ D^{-1} = \int \ldots dz,\ J = \int_0^z \ldots dz,$$

so gelten folgende Rechenregeln:

$$D^{\mp\varrho} e^{\omega z} A(z) = e^{\omega z} A_{\mp\varrho}(z), \quad A_{\mp\varrho}(z) = (\omega + D)^{\mp\varrho} A(z) \quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist $A(z) \not\equiv 0$ ein Polynom und $\omega \neq 0$, so sind die Polynome $A_{+\varrho}(z)$ und $A_{-\varrho}(z)$ auch nicht identisch Null und von genau gleichem Grad wie $A(z)$.

Gemäß der Definition von $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ sind die Polynome

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

nicht alle gleichzeitig identisch Null; es möge etwa $A_H\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \neq 0$ sein. Ist dann $h \neq H$, so wird

$$D^{\varrho_h} e^{-\omega_h z} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} A_k^*(z)\, e^{(\omega_k - \omega_h) z}$$

$$A_k^*(z) = (\omega_k - \omega_h + D)^{\varrho_h} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, m \\ k \neq h \end{pmatrix},$$

wobei die Polynome $A_k^*(z)$ höchstens vom Grad $\varrho_k - 1$ sind und dasjenige mit dem Index H nicht identisch verschwindet. Die Potenzreihe von $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ begann aber mit der $(M + \sum_{k=1}^{m} \varrho_k - 1)$-ten Potenz von z, so daß die Potenzreihe der Funktion

$$D^{\varrho_h} e^{-\omega_h z} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

mit der $(M + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{m} \varrho_k - 1)$-ten Potenz von z anfängt; letztere muß daher nach der obigen Definition gleich einer Funktion

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 - \omega_h \dots \omega_{h-1} - \omega_h & \omega_{h+1} - \omega_h \dots \omega_m - \omega_h \\ \varrho_1 \quad \dots \quad \varrho_{h-1} & \varrho_{h+1} \quad \dots \quad \varrho_m\end{matrix}\right)$$

der Ordnung $m - 1$ und des Überschusses M sein. Von einer Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ der Ordnung m und mit positivem Überschuß kann man daher stets zu einer Funktion der gleichen Art von der Ordnung $m - 1$ und von ebenfalls positivem Überschuß absteigen. Dieses Verfahren kann wiederholt werden, so daß aus der Existenz einer Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ beliebiger Ordnung und von positivem Überschuß die Existenz einer ebensolchen Funktion der Ordnung 1 mit positivem Überschuß folgt; eine solche existiert aber gewiß nicht.

Damit ist gezeigt:

Der Koeffizient der $(\sum_{k=1}^{m} \varrho_k - 1)$-ten *Potenz in der Potenzreihe jeder Funktion* $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ *ist ungleich Null.*

Hieraus lassen sich eine Reihe von Folgerungen ziehen. Offenbar besteht erstens der Satz:

Satz 1. *Seien* $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ *komplexe Zahlen, die in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind. Dann sind die Funktionen*

$$z, e^{\vartheta_1 z}, e^{\vartheta_2 z}, \dots, e^{\vartheta_N z}$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der komplexen Zahlen.

Zweitens folgt, daß die Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ *eindeutig* bestimmt ist, wenn verlangt wird, daß ihre Potenzreihe genau mit dem Gliede

$$\frac{z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1}}{(\varrho_1 + \dots + \varrho_m - 1)!}$$

beginnt; diese Annahme werde von jetzt ab gemacht. Alsdann sind auch die Polynome $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ eindeutig bestimmt, und zwar sind sie drittens alle nicht identisch Null, sondern vielmehr genau von den Graden $\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \dots, \varrho_m - 1$. Viertens folgt, daß die Funktion $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ in den Zahlpaaren

$$(\omega_1 \varrho_1), \quad (\omega_2 \varrho_2), \dots, (\omega_m \varrho_m)$$

symmetrisch ist.

4. Wegen der Eindeutigkeit und nach der Annahme über den ersten nichtverschwindenden Koeffizienten in den zugehörigen Potenzreihen ist

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \\ \varrho_1\end{matrix}\right) = \frac{z^{\varrho_1 - 1}}{(\varrho_1 - 1)!} e^{\omega_1 z},$$

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \, \omega_2 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \, \varrho_2 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = e^{\omega_1 z} J^{\varrho_1} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_2 - \omega_1 \dots \omega_m - \omega_1 \\ \varrho_2 \quad \dots \quad \varrho_m\end{matrix}\right)$$

16*

und folglich

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \, \omega_2 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \, \varrho_2 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = (e^{\omega_1 z} J^{\varrho_1})\,(e^{(\omega_2-\omega_1)z} J^{\varrho_2}) \dots (e^{(\omega_{m-1}-\omega_{m-2})z} J^{\varrho_{m-1}})\, e^{(\omega_m-\omega_{m-1})z} \frac{z^{\varrho_m-1}}{(\varrho_m-1)!}$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \, \omega_2 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \, \varrho_2 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) =$$

$$= \int_0^z dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-2}} dt_{m-1} \left\{ \frac{(z-t_1)^{\varrho_1-1}\,(t_1-t_2)^{\varrho_2-1} \dots (t_{m-2}-t_{m-1})^{\varrho_{m-1}-1}\, t_{m-1}^{\varrho_m-1}}{(\varrho_1-1)!\,(\varrho_2-1)! \dots (\varrho_{m-1}-1)!\,(\varrho_m-1)!} \times \right.$$

$$\left. \times\, e^{\omega_1(z-t_1)+\omega_2(t_1-t_2)+\dots+\omega_{m-1}(t_{m-2}-t_{m-1})+\omega_m t_{m-1}} \right\}.$$

Damit sind die Funktionen $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \, \omega_2 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \, \varrho_2 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ explizit bestimmt.

5. Auch für die Polynome $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ kann eine explizite Formel angegeben werden, nämlich

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \, \omega_2 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \, \varrho_2 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_h + D)^{-\varrho_h} \frac{z^{\varrho_k-1}}{(\varrho_k-1)!} \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Denn für $m = 1$ stimmt diese Formel; sie sei bereits für alle Polynome

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_2 - \omega_1 \dots \omega_m - \omega_1 \\ \varrho_2 \quad \dots \quad \varrho_m\end{matrix}\right)$$

mit $m-1$ Paaren $(\omega_k - \omega_1, \varrho_k)$ bewiesen. Wegen

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = e^{\omega_1 z} J^{\varrho_1} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_2 - \omega_1 \dots \omega_m - \omega_1 \\ \varrho_2 \quad \dots \quad \varrho_m\end{matrix}\right),$$

$$D^{-\varrho} e^{\omega z} A(z) = e^{\omega z} \cdot (\omega + D)^{-\varrho} A(z)$$

gilt sie dann auch für die Polynome $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ mit von 1 verschiedenem Index k; das Polynom $A_1\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$, welches auf diese Art noch nicht bestimmt ist, muß dann nach der bewiesenen Symmetrie von $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ in den Zahlpaaren (ω_k, ϱ_k) gleichfalls die behauptete Form haben.

Der Differentialausdruck für $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ läßt sich in ein Cauchysches Integral überführen. Ist als Potenzreihe geschrieben

$$\prod_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_h + D)^{-\varrho_h} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l^{(k)} D^l,$$

so wird nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$c_l^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_h + \mathfrak{z})^{-\varrho_h} \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^{l+1}},$$

wobei über einen genügend kleinen Kreis C_0 um den Nullpunkt in positiver Richtung integriert wird. Wegen

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho_k-1} c_l^{(k)} \frac{z^{\varrho_k-l-1}}{(\varrho_k-l-1)!}$$

ist daher

$$A_k\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{e^{z\mathfrak{z}}-\sum\limits_{l=\varrho_k}^{\infty}\frac{(z\mathfrak{z})^l}{l!}}{\prod\limits_{\substack{h=1\\h\neq k}}^{m}(\omega_k-\omega_h+\mathfrak{z})^{+\varrho_h}\mathfrak{z}^{\varrho_k}}\,d\mathfrak{z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{e^{z\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=1}^{m}(\omega_k-\omega_h+\mathfrak{z})^{\varrho_h}},$$

da die Funktion

$$\prod_{h=1}^{m}(\omega_k-\omega_h+\mathfrak{z})^{-\varrho_h}\sum_{l=\varrho_k}^{\infty}\frac{(z\mathfrak{z})^l}{l!}$$

im Nullpunkt regulär ist. Bedeutet C_k einen genügend kleinen Kreis mit positivem Richtungssinn um den Punkt ω_k, C_∞ einen genügend großen um den Nullpunkt mit positivem Richtungssinn, so wird folglich [2]):

$$e^{\omega_k z}A_k\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{e^{z\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=1}^{m}(\mathfrak{z}-\omega_h)^{\varrho_h}},$$

$$R\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\infty}\frac{e^{z\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=1}^{m}(\mathfrak{z}-\omega_h)^{\varrho_h}}.$$

Dem letzten Integral entnimmt man die Differentialgleichung

$$\prod_{h=1}^{m}(D-\omega_h)^{\varrho_h}R\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)=0,$$

und zwar ist $R\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)$ die einzige Lösung dieser Differentialgleichung, die im Nullpunkt eine Potenzreihe mit dem Anfangsglied

$$\frac{z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m-1}}{(\varrho_1+\cdots+\varrho_m-1)!}$$

besitzt.

6. Wenn h und k Zahlen der Folge $1, 2, \ldots, m$ sind und wie üblich

$$\delta_{hk}=\begin{cases}1 & \text{für } h=k\\ 0 & \text{für } h\neq k\end{cases}$$

ist, so werde gesetzt:

$$R_h\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)=R\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1&\ldots&\omega_m\\ \varrho_1+\delta_{h1}&\ldots&\varrho_m+\delta_{hm}\end{matrix}\right),$$

$$A_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)=A_k\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1&\ldots&\omega_m\\ \varrho_1+\delta_{h1}&\ldots&\varrho_m+\delta_{hm}\end{matrix}\right).$$

Die quadratische Matrix

$$A\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)=\left(A_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right)\right)\qquad(h,k=1,2,\ldots,m)$$

besitze die Determinante

$$D\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\ldots\omega_m\\ \varrho_1\ldots\varrho_m\end{matrix}\right),$$

[2]) Diese Formeln stehen bereits bei Hermite (2).

und durch Fortfall der h-ten Zeile und k-ten Spalte entstehe aus ihr die Unterdeterminante

$$D_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right).$$

Offenbar ist $A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ein Polynom in z vom Grad $\varrho_k + \delta_{hk} - 1$; der Koeffizient der höchsten Potenz von z ergibt sich aus der Darstellung als Differentialausdruck zu

$$\frac{1}{(\varrho_k + \delta_{hk} - 1)!} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho_l - \delta_{hl}}.$$

Die Determinante $D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ist folglich ein Polynom in z vom Grad $\varrho_1 + \cdots + \varrho_m$ mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz gleich

$$\frac{1}{\varrho_1!\, \varrho_2! \cdots \varrho_m!} \prod_{k=1}^{m} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho_l}.$$

Aus den linearen Gleichungen in den Größen $e^{\omega_1 z}, e^{\omega_2 z}, \ldots, e^{\omega_m z}$

$$\sum_{k=1}^{m} A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

folgt andrerseits durch Auflösung nach $e^{\omega_k z}$ die Identität:

$$D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_k z} = \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h+k} D_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right) R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right).$$

Also ist $D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right)$ durch die Potenz $z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m}$ teilbar, daher

$$D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right) = \frac{z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m}}{\varrho_1!\, \varrho_2! \cdots \varrho_m!} \prod_{k=1}^{m} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho_k}.$$

Wenn z nicht verschwindet, so ist demnach $D\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right)$ nie gleich Null.

7. Die Matrix $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right)$ besitzt als Funktion ihrer Argumente eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften. Werden z. B. die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ gleichzeitig um Eins vermehrt, so multipliziert sie sich nur mit einer Matrix, deren Elemente rationale Funktionen in z von beschränktem Grade sind. Mittels einiger Formeln von Hermite gelingt es, wie wir zeigen wollen, auch die zu $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \cdots \omega_m \\ \varrho_1 \cdots \varrho_m\end{matrix}\right)$ reziproke Matrix zu bestimmen.

Es sei

$$F_h(\mathfrak{z}) = \prod_{l=1}^{m} (\mathfrak{z} - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$\mathfrak{F}_h(z \,|\, \mathfrak{z}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^{-\lambda-1} \frac{d^\lambda F_h(\mathfrak{z})}{d\mathfrak{z}^\lambda} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

so daß identisch

$$\int F_h(\mathfrak{z})\, e^{-z\mathfrak{z}} d\mathfrak{z} = -\mathfrak{F}_h(z \,|\, \mathfrak{z})\, e^{-z\mathfrak{z}}$$

ist. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}\mathfrak{F}_h(z\,|\,\omega_k) = \mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right),$$
$$z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}e^{(\omega_k+\omega_l)z}\int_{\omega_k}^{\omega_l}F_h(\mathfrak{z})\,e^{-z\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z} = R_{h,kl}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right). \qquad (h,k,l=1,2,\ldots,m)$$

Dann besteht die Identität

$$\mathfrak{A}_{hl}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)e^{\omega_k z} - \mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)e^{\omega_l z} = R_{h,kl}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right) \quad (h,k,l=1,2,\ldots,m).$$

Die Funktion $R_{h,kl}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$ besitzt in der Umgebung des Nullpunktes eine Potenzreihe, die erst mit der $(\varrho_1+\cdots+\varrho_m)$-ten Potenz von z beginnt. Die Funktionen $\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$ sind Polynome in z genau vom Grad $(\varrho_1+\cdots+\varrho_m)+\delta_{hk}-\varrho_k-1$. Der Koeffizient der höchsten Potenz von z in $\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$ ergibt sich leicht aus der Definition zu

$$(\varrho_k-\delta_{hk})!\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}(\omega_k-\omega_l)^{\varrho_l-\delta_{hl}}.$$

Mit $\mathfrak{A}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$ werde weiter die quadratische Matrix

$$\mathfrak{A}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right) = \left(\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)\right),$$

mit $\mathfrak{D}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$ ihre Determinante bezeichnet.

8. Offenbar ist $\mathfrak{D}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$ ein Polynom in z genau vom Grad

$$(m-1)(\varrho_1+\cdots+\varrho_m).$$

Da die Glieder in der Diagonale dieser Determinante jeweils von höherem Grade als die anderen Glieder in der gleichen Spalte sind, so ist folglich der Koeffizient der höchsten Potenz von z gleich

$$(\varrho_1-1)!\,(\varrho_2-1)!\ldots(\varrho_m-1)!\prod_{k=1}^{m}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}(\omega_k-\omega_l)^{\varrho_l},$$

d. h. gleich dem Produkt der entsprechenden Koeffizienten für die Diagonalglieder.

In der Determinante $\mathfrak{D}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$ werde jetzt für $\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$ der Wert

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right) = e^{(\omega_k-\omega_1)z}\,\mathfrak{A}_{h1}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right) + e^{-\omega_1 z}R_{h,1k}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$$

eingesetzt und alsdann für $k=2,3,\ldots m$ von der k-ten Spalte die erste multipliziert mit $e^{(\omega_k-\omega_1)z}$ subtrahiert. Die Glieder in diesen ~~Zeilen~~ gehen dann alle über in Potenzreihen, die erst mit der Potenz $z^{\varrho_1+\cdots+\varrho_m}$ beginnen. Also ist $\mathfrak{D}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\cdots\omega_m\\ \varrho_1\cdots\varrho_m\end{matrix}\right)$ durch $z^{(m-1)(\varrho_1+\cdots+\varrho_m)}$ teilbar und die Formel von Hermite

$$\mathfrak{D}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = (\varrho_1 - 1)!\,(\varrho_2 - 1)! \dots (\varrho_m - 1)! \prod_{k=1}^{m} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (\omega_k - \omega_l)^{\varrho_l} \quad z^{(m-1)(\varrho_1 + \dots + \varrho_m)}$$

bewiesen [3]).

9. Die vorige Identität ergibt sich auch aus einer Beziehung, die zwischen den beiden Matrizen $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ und $\mathfrak{A}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ besteht. Es ist

$$\sum_{l=1}^{m} A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_l z} = R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \qquad (h = 1, 2, \dots, m),$$

$$\mathfrak{A}_{k1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_l z} - \mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) e^{\omega_1 z} = R_{k,l1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \quad (k, l = 1, 2, \dots, m)$$

und also

$$e^{\omega_1 z} \sum_{l=1}^{m} A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) =$$

$$= \mathfrak{A}_{k1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) - \sum_{l=1}^{m} A_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) R_{k,l1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right).$$

Auf der rechten Seite dieser Identität stehen lauter Potenzreihen, die erst mit der $(\varrho_1 + \dots + \varrho_m)$-ten Potenz von z beginnen. Die Ausdrücke links

$$\sum_{l=1}^{m} A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = E_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

sind als Polynome also durch diese Potenz von z teilbar. Andrerseits ist das Polynom $A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ vom Grad $\varrho_l + \delta_{hl} - 1$, das Polynom $\mathfrak{A}_{kl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ vom Grad $(\varrho_1 + \dots + \varrho_m) + \delta_{kl} - \varrho_l - 1$. Folglich ist $E_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ ein Polynom vom Grad $(\varrho_1 + \dots + \varrho_m) - 1$ für $h \neq k$ und vom Grad $(\varrho_1 + \dots + \varrho_m)$ für $h = k$. Im ersten Fall ist es demnach identisch Null, im zweiten Fall aber identisch gleich einer Konstanten mal $z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m}$. Indem wir Gebrauch machen von den Koeffizienten der höchsten Potenzen von z in den Polynomen $A_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ und $\mathfrak{A}_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$, die früher bestimmt wurden, gelangen wir also zu den Formeln:

$$E_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho_h} z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m} & \text{für } h = k, \\ 0 & \text{für } h \neq k. \end{cases}$$

Diese m^2 Gleichungen lassen sich in die eine Matrizengleichung

$$A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) \mathfrak{A}'\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = z^{\varrho_1 + \dots + \varrho_m}\, \mathsf{P}(\varrho_1 \dots \varrho_m)$$

zusammenfassen; dabei bedeutet der Akzent die transponierte Matrix und $\mathsf{P}(\varrho_1 \dots \varrho_m)$ die Diagonalmatrix

---

[3]) Vgl. hierzu und zu den vorigen Formeln die Arbeit (1) von Hermite. Der Hermitesche Beweis benutzt die Zerlegung der Matrix $\mathfrak{A}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$ in einfachere Faktoren.

$$\mathsf{P}(\varrho_1 \ldots \varrho_m) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\varrho_m} \end{vmatrix}.$$

Durch Übergang zu den Determinanten folgt wieder die Hermitesche Identität; ferner ergibt sich, daß die Unterdeterminanten $D_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ von $A\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ bis auf von z unabhängige Faktoren gerade gleich den Polynomen $\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ sind.

Die vorige Matrizengleichung läßt sich als Verallgemeinerung einer bekannten Gammabeziehung auffassen. Man zeigt leicht, daß für $R(z) > 0$

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = z^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_m} \int_0^\infty \prod_{l=1}^m (\mathfrak{z} + \omega_k - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}} e^{-z\mathfrak{z}} d\mathfrak{z}$$

ist, wo über die positiv reelle Achse integriert wird. Also ist nach oben:

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{z\mathfrak{z}} d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{l=1}^m (\mathfrak{z} + \omega_k - \omega_l)^{\varrho_l + \delta_{hl}}}\right)_{hk} \cdot \left(\int_0^\infty \prod_{l=1}^m (\mathfrak{z} + \omega_k - \omega_l)^{\varrho_l - \delta_{hl}} e^{-z\mathfrak{z}} d\mathfrak{z}\right)'_{hk} = \mathsf{P}(\varrho_1 \ldots \varrho_m),$$

und diese Matrizengleichung enthält im Fall $m = 1$ die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{z\mathfrak{z}}}{\mathfrak{z}^{\varrho+1}} d\mathfrak{z} \cdot \int_0^\infty \mathfrak{z}^{\varrho-1} e^{-z\mathfrak{z}} d\mathfrak{z} = \frac{1}{\varrho},$$

die ein Spezialfall der Funktionalgleichung

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

der Gammafunktion ist.

III.

10. Die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ mögen alle in einem algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ n-ten Grades liegen. Es sei $\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ eine über alle Grenzen wachsende natürliche Zahl; mit $c_1, c_2, \ldots$ werden positive Konstanten bezeichnet, die von ϱ nicht abhängen.

Den Integralformeln in 4. entnimmt man die Ungleichung

$$R_h\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = O\left(\frac{c_1^\varrho}{\varrho!^m}\right), \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Weiter ist nach der Differentialformel in 5.

$$A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = \left\{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \left(\sum_{\lambda_l=0}^\infty \binom{-\varrho - \delta_{hl}}{\lambda_l} (\omega_k - \omega_l)^{-\varrho - \delta_{hl} - \lambda_l} D^{\lambda_l}\right)\right\} \frac{z^{\varrho + \delta_{hk} - 1}}{(\varrho + \delta_{hk} - 1)!},$$

wobei die Summen nur bis zum Index ϱ erstreckt zu werden brauchen. Sei

$$\Omega = \prod_{\substack{h,k=1 \\ h<k}}^m (\omega_k - \omega_h).$$

Der Ausdruck

$$a_{hk}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m} = \Omega^{2\varrho+1}\varrho!\, A_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

ist alsdann ein Polynom in den Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ vom Grad $\frac{m(m-1)(2\varrho+1)}{2}$, dessen Koeffizienten ganze rationale Zahlen von der Größenordnung $O(c_2^\varrho\, \varrho!)$ sind.

Durch die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} a_{hk}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m} e^{\omega_k} = r_h\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m} \qquad (h = 1, 2, \dots, m)$$

mit

$$r_h\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m} = \Omega^{2\varrho+1}\varrho!\, R_h\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m\\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right) = O\left(\frac{c_3^\varrho}{\varrho!^{m-1}}\right)$$

sind m linear unabhängige Formen in den Zahlen e^{ω_k} gegeben. Seien

$$\sum_{k=1}^{m} \mathfrak{a}_{hk} e^{\omega_k} = \mathfrak{r}_h \qquad (h = 1, 2, \dots, \mu; \quad \mu < m)$$

μ unabhängige Linearformen in den e^{ω_k} mit ganzen rationalen Koeffizienten, für die

$$\max_{\substack{h=1,2,\dots,\mu\\ k=1,2,\dots,m}} (|\mathfrak{a}_{hk}|) = a, \quad \max_{h=1,2,\dots,\mu} (|\mathfrak{r}_h|) = r$$

ist. Alsdann sind die μ Formen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_\mu$ zusammen mit gewissen $m - \mu$ der Formen $r_h\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m}$, etwa den Formen

$$r_{h_1}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m}, \quad r_{h_2}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m}, \dots, r_{h_{m-\mu}}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m}$$

linear unabhängig. Die Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{h_1 1}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m} & \dots & a_{h_1 m}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h_{m-\mu}1}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m} & \dots & a_{h_{m-\mu}m}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m} \\ \mathfrak{a}_{11} & \dots & \mathfrak{a}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{a}_{\mu 1} & \dots & \mathfrak{a}_{\mu m} \end{vmatrix}$$

ist also von Null verschieden; sie ist offenbar ein Polynom in den Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ vom Grad $\frac{m(m-1)(m-\mu)(2\varrho+1)}{2}$ mit ganzen rationalen Koeffizienten von der Größenordnung $O(c_4^\varrho\, \varrho!^{m-\mu} a^\mu)$; demnach ist nach bekannten Sätzen

$$\frac{1}{\delta} = O(c_5^\varrho\, \varrho!^{(m-\mu)(n-1)}\, a^{(n-1)\mu}).$$

Sei die Unterdeterminante von δ zur l-ten Zeile und k-ten Spalte mit δ_{lk}^* bezeichnet; dann ist offenbar

$$\delta_{lk}^* = O(c_6^\varrho\, \varrho!^{m-\mu-1} a^\mu), \quad \delta_{lk}^* r_{h_l}\binom{\omega_1 \dots \omega_m}{\varrho_1 \dots \varrho_m} = O(c_8^\varrho\, \varrho!^{-\mu} a^\mu) \quad \text{für } 1 \leqq l \leqq m - \mu,$$

$$\delta_{lk}^* = O(c_7^\varrho\, \varrho!^{m-\mu} a^{\mu-1}), \quad \delta_{lk}^* \mathfrak{r}_{l-m+\mu} = O(c_9^\varrho\, \varrho!^{m-\mu} a^{\mu-1} r) \quad \text{für } m - \mu + 1 \leqq l \leqq m,$$

und wegen der Identität

$$\delta c^{\omega_k} = \sum_{l=1}^{m-\mu} (-1)^{l+k} \delta_{lk}^{*} r_{hl} \begin{pmatrix} \omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m \end{pmatrix} + \sum_{l=m-\mu+1}^{m} (-1)^{l+k} \delta_{lk}^{*} \mathfrak{r}_{l-m+\mu}$$

wird

$$1 = O(c_{10}^{\varrho}\, \varrho!^{m(n-1)-\mu n}\, a^{\mu n}) + O(c_{11}^{\varrho}\, \varrho!^{(m-\mu)n}\, a^{\mu n-1}\, r)$$

oder

$$c_{11}^{\varrho}\, \varrho!^{(m-\mu)n}\, a^{\mu n-1}\, r \geqq c_{12} - c_{13}\, c_{10}^{\varrho}\, \varrho!^{m(n-1)-\mu n}\, a^{\mu n}.$$

Wir machen jetzt die Annahme

$$\mu n > m(n-1) \qquad \text{d. h.} \quad \mu > m\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

ist a genügend groß, so gibt es dann immer eine größte Zahl ϱ, so daß

$$\frac{c_{12}}{2} \geqq c_{13}\, c_{10}^{\varrho}\, \varrho!^{m(n-1)-\mu n}\, a^{\mu n}$$

wird; daraus ergibt sich die asymptotische Gleichung

$$\log \varrho! \sim \frac{\mu n}{\mu n - m(n-1)} \log a$$

und folglich

$$r \geqq a^{-\tau-\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{für} \quad a \geqq a_0(\varepsilon)$$

mit dem Exponenten [4])

$$\tau = \mu n - 1 + \frac{(m-\mu)\mu n^2}{\mu n - m(n-1)} = \frac{m \mu n}{\mu n - m(n-1)} - 1.$$

11. Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ N algebraische Zahlen im Zahlkörper $\mathfrak{K}$ n-ten Grades, die linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen, $M_1, M_2, \dots, M_N$ und $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ je N natürliche Zahlen; die Koeffizienten des Ausdrucks

$$\mathfrak{r} = \sum_{\lambda_1=0}^{M_1} \dots \sum_{\lambda_N=0}^{M_N} \mathfrak{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_N} e^{\lambda_1 \vartheta_1 + \dots + \lambda_N \vartheta_N}; \quad a = \max_{\substack{\lambda_1 = 0,1,\dots,M_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0,1,\dots,M_N}} (|\mathfrak{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_N}|) > 0$$

seien ganz rational. Die Linearformen

$$\mathfrak{r}_{\lambda_1 \dots \lambda_N} = e^{\lambda_1 \vartheta_1 + \dots + \lambda_N \vartheta_N}\, \mathfrak{r} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0, 1, \dots, \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0, 1, \dots, \mu_N \end{pmatrix}$$

von der Anzahl

$$\mu = (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) \dots (\mu_N + 1)$$

in den Ausdrücken

$$e^{\omega_{\lambda_1 \dots \lambda_N}}, \quad \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_N} = \lambda_1 \vartheta_1 + \dots + \lambda_N \vartheta_N \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0, 1, \dots, M_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0, 1, \dots, M_N + \mu_N \end{pmatrix}$$

der Anzahl

$$m = (M_1 + \mu_1 + 1)(M_2 + \mu_2 + 1) \dots (M_N + \mu_N + 1)$$

---

[4]) Siehe wegen des Beweisverfahrens in 10. die Arbeit von Siegel (7).

sind offenbar linear unabhängig, und jeder der Quotienten

$$\left|\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}}\right|$$

liegt zwischen positiven endlichen Schranken, die von den Zahlen $\mathfrak{a}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}$ nicht abhängen. Für $\varepsilon > 0$ und $a \geqq a_0(\varepsilon)$ besteht also die Ungleichung

$$|\mathfrak{r}| \geqq a^{-\tau-\varepsilon}$$

mit

$$\tau = \frac{n(M_1+\mu_1+1)\ldots(M_N+\mu_N+1)\,(\mu_1+1)\ldots(\mu_N+1)}{n(\mu_1+1)\ldots(\mu_N+1)-(n-1)\,(M_1+\mu_1+1)\ldots(M_N+\mu_N+1)} - 1,$$

wenn

$$n(\mu_1+1)\ldots(\mu_N+1)-(n-1)\,(M_1+\mu_1+1)\ldots(M_N+\mu_N+1) > 0$$

ist. Diese Ungleichung kann durch die Annahmen

$$\mu_l = \left[\frac{M_l}{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{1/N}-1}\right]$$

erfüllt werden, denn dann ist

$$1+\frac{M_l}{\mu_l+1} \leqq \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{\frac{1}{N}},$$

also

$$1-\frac{n-1}{n}\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{M_l}{\mu_l+1}\right) \geqq 1-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n}{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$$

und

$$\frac{\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{M_l}{\mu_l+1}\right)}{1-\frac{n-1}{n}\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{M_l}{\mu_l+1}\right)} \leqq 2n,$$

so daß

$$\tau \leqq 2n\,(\mu_1+1)\ldots(\mu_N+1)-1 \leqq 2n\prod_{l=1}^{N}\left(\left[\frac{M_l}{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{1/N}-1}\right]+1\right)-1$$

wird. Für $N = 1$ kann die eckige Klammer fortgelassen werden, so daß dann

$$\tau \leqq 2n(2n-1)\,M_1 + (2n-1)$$

ist. Damit ist bewiesen:

Satz 2. *Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$ N algebraische Zahlen eines Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ n-ten Grades, die linear unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen. Sind dann $M_1, M_2, \ldots, M_N$ irgend N natürliche Zahlen und die Koeffizienten der Linearform*

$$\mathfrak{r} = \sum_{\lambda_1=0}^{M_1}\cdots\sum_{\lambda_N=0}^{M_N}\mathfrak{a}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}\,e^{\lambda_1\vartheta_1+\cdots+\lambda_N\vartheta_N},\quad a = \max_{\substack{\lambda_1=0,1,\ldots,M_1\\ \vdots \\ \lambda_N=0,1,\ldots,M_N}}\left(|\mathfrak{a}_{\lambda_1\ldots\lambda_N}|\right)$$

in den Zahlen

$$e^{\lambda_1\vartheta_1+\cdots+\lambda_N\vartheta_N}$$

ganz rational, so besteht für genügend großes a die Ungleichung

$$|\mathfrak{r}| \geqq a^{-T_{N,n} M_1 \dots M_N}$$

mit einer positiven Zahl $T_{N,n}$, die allein von n und N abhängt. Die Zahlen

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \dots, e^{\vartheta_N}$$

sind also algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen. Für $N = 1$ ist speziell, unter Beachtung der früheren Definition

$$\omega_m(e^{\vartheta_1}) \leqq 2n(2n-1)\,m + (2n-1), \qquad \omega(e^{\vartheta_1}) \leqq 2n(2n-1),$$

also e^{ϑ_1} eine S-Zahl. Allgemeiner folgt leicht aus den eben gezeigten unteren Abschätzungen für $\mathfrak{r}$, daß jede von den Zahlen

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \dots, e^{\vartheta_N}$$

algebraisch abhängige Zahl entweder eine A-Zahl oder eine S-Zahl oder eine T-Zahl ist. *Unter U eine beliebige U-Zahl, z. B. eine Liouvillesche Zahl λ verstanden, sind also die Zahlen*

$$e^{\vartheta_1}, e^{\vartheta_2}, \dots, e^{\vartheta_N}, U$$

stets algebraisch unabhängig.

12. Das letzte Ergebnis enthält die Aussage, daß die Zahl e eine S-Zahl ist. Bei Benutzung der Hermiteschen Formeln kann man zu einem schärferen Resultat gelangen.

Es werde wieder $\varrho_0 = \varrho_1 = \dots = \varrho_m = \varrho$ als große natürliche Zahl angenommen und dann

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \mathfrak{A}_{h+1,k+1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0\ 1 \dots m \\ \varrho\ \varrho \dots \varrho \end{matrix}\right),$$
$$R_{hkl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = R_{h+1,k+1,l+1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0\ 1 \dots m \\ \varrho\ \varrho \dots \varrho \end{matrix}\right)$$

gesetzt, so daß

$$\mathfrak{A}_{hl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{kz} - \mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{lz} = R_{hkl}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$$

ist. Wegen

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^{(m+1)\varrho-\lambda-1} \left.\frac{d^\lambda F_h(\mathfrak{z})}{d\mathfrak{z}^\lambda}\right|_{\mathfrak{z}=k}, \qquad F_h(\mathfrak{z}) = \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z}-l)^{\varrho-\delta_{hl}}$$

ist klar, daß die Polynome $\mathfrak{A}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ lauter ganze rationale Koeffizienten mit dem gemeinsamen Teiler

$$(\varrho - 1)!$$

besitzen. Die Zahlen $\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ sind also gleichfalls durch $(\varrho-1)!$ teilbar.

Es ist als Integral geschrieben:

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \int_0^\infty \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z}+k-l)^{\varrho-\delta_{hl}} e^{-\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z},$$

$$R_{hkl}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = e^{k+l} \int_k^l \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z}-l)^{\varrho-\delta_{hl}} e^{-\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}.$$

Wenn ϱ über alle Grenzen wächst, so ergeben sich hieraus mittels der Methode von Laplace leicht asymptotische Formeln [1]).

[1]) Siehe (1), S. 157 und (3).

Im Integral für $\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ wird das asymptotische Verhalten durch das Verhalten des Integranden bei $\mathfrak{z} \sim (m+1)\varrho$ bestimmt. Hier ist aber

$$\prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z}+k-l)^{\varrho-\delta_{hl}} = \mathfrak{z}^{(m+1)\varrho-1} \prod_{l=0}^{m} \left(1+\frac{(k-l)\varrho}{\mathfrak{z}\cdot\varrho}\right)^{\varrho-\delta_{hl}} \sim \mathfrak{z}^{(m+1)\varrho-1} e^{\frac{\varrho}{\mathfrak{z}}\sum\limits_{l=0}^{m}(k-l)} \sim \mathfrak{z}^{(m+1)\varrho-1} e^{k-\frac{m}{2}},$$

und durch einfache Abschätzungen zeigt man

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \sim e^{k-\frac{m}{2}}\,\Gamma((m+1)\varrho) \sim e^{k-\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{(m+1)\varrho}}\,(m+1)^{(m+1)\varrho}\,\varrho^{(m+1)\varrho}\,e^{-(m+1)\varrho}$$

und erst recht

$$\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}(m+1)^{(m+1)\varrho}\,\varrho^{(m+1)\varrho}\,e^{-(m+1)\varrho}\right).$$

Bedeute weiter ζ_λ die Wurzel der Gleichung

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{1}{\mathfrak{z}-l} = 0$$

im Intervall $(\lambda-1, \lambda)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, m$ und sei

$$\tau_\lambda = \prod_{l=0}^{m} (\zeta_\lambda - l), \qquad \sigma_\lambda = \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{(\zeta_\lambda - l)^2}.$$

Das Integral

$$\int_{\lambda-1}^{\lambda} \prod_{l=0}^{m} (\mathfrak{z}-l)^{\varrho-\delta_{hl}}\, e^{-\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}$$

wird für großes ϱ nach der Laplaceschen Methode asymptotisch gleich

$$\frac{e^{-\zeta_\lambda}}{\zeta_\lambda - h}\sqrt{\frac{2\pi}{\varrho\sigma_\lambda}}\,\tau_\lambda^{\varrho},$$

während sich die Funktionen $R_{hkl}\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ additiv aus mehreren dieser Integrale zusammensetzen. Sei

$$\tau = \max_{\lambda=1,2,\ldots,m} (|\tau_\lambda|).$$

Dann ist also

$$R_{hkl}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = O\left(\frac{\tau^{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

Für großes m ist τ leicht abzuschätzen. Man hat

$$|\tau_\lambda| = (\lambda-\zeta)(\lambda-1-\zeta)\ldots(1-\zeta)\cdot\zeta(\zeta+1)\ldots(\zeta+m-\lambda) \leqq \lambda!\,(m-\lambda+1)! = \frac{(m+1)!}{\binom{m+1}{\lambda}},$$

und da $\binom{m+1}{\lambda}$ um so kleiner ist, je kleiner $|m+1-2\lambda|$, so ist

$$0 < \tau \leqq \frac{(m+1)!}{\binom{m+1}{1}} = m!.$$

Man hat also erst recht:

$$R_{hkl}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = O\left(\frac{m!^{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

13. Seien jetzt $a_0, a_1, \ldots a_m$ m ganze rationale Zahlen und das Maximum ihres absoluten Betrages

$$a = \max_{k=0,1,\ldots,m} (|a_k|)$$

von Null verschieden und sehr groß. In dem Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{m} a_k e^k = r$$

können die Werte e^k eliminiert werden mittels der Formeln

$$\mathfrak{A}_{h0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^k = \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) + R_{hk0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, m),$$

so daß

$$\mathfrak{A}_{h0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) r = \sum_{k=0}^{m} a_k \, \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) + \sum_{k=0}^{m} a_k R_{hk0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \quad (h = 0, 1, \ldots, m)$$

ist. Die Determinante

$$\left| \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)_{h,k=0,1,\ldots,m} \right|$$

ist nach der Hermiteschen Formel von Null verschieden; die Linearformen

$$L_h = \sum_{k=0}^{m} a_k \, \mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \qquad (h = 0, 1, \ldots, m)$$

in $a_0, a_1, \ldots, a_m$ können also nicht gleichzeitig verschwinden. Sei etwa L_{h_0} von Null verschieden. Dieser Ausdruck ist dann eine durch $(\varrho - 1)!$ teilbare ganze rationale Zahl, da alle Koeffizienten $\mathfrak{A}_{hk}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)$ es sind; also wird

$$|L_{h_0}| \geqq (\varrho - 1)! \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\varrho}} \, \varrho^\varrho e^{-\varrho}.$$

Seien wieder $c_1, c_2, \ldots$ positive, wohl von m, nicht aber von a und ϱ abhängige Zahlen. Man hat nach den Formeln in 12.

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_k R_{h_0 k0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \right| \leqq c_1 a \frac{m!^\varrho}{\sqrt{\varrho}}, \quad \left| \mathfrak{A}_{h_0 0}\left(1 \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \right| \leqq \frac{c_2}{\sqrt{\varrho}} (m+1)^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho},$$

also

$$\frac{c_2}{\sqrt{\varrho}} (m+1)^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho} |r| \geqq \frac{c_3}{\sqrt{\varrho}} \varrho^\varrho e^{-\varrho} - c_1 a \frac{m!^\varrho}{\sqrt{\varrho}}$$

und

$$|r| \geqq \frac{c_3 \varrho^\varrho e^{-\varrho} - c_1 a m!^\varrho}{c_2 (m+1)^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-(m+1)\varrho}}.$$

Jetzt werde ϱ gewählt als die größte natürliche Zahl, die der Ungleichung

$$c_3 (\varrho - 1)^{\varrho - 1} e^{-(\varrho - 1)} \leqq 2 c_1 a m!^{\varrho - 1}$$

genügt. Dann ist gewiß

$$\varrho \log \varrho = \log a + \varrho \log (m! \, e) + O(\log \varrho)$$

und

$$\varrho \sim \frac{\log a}{\log \log a}.$$

Es wird also

$$\log|r| \geqq (\varrho\log\varrho - \varrho + O(1)) - \left\{(m+1)\,\varrho\log\varrho - (m+1)\,\varrho\log\frac{m+1}{e} + O(1)\right\}$$

oder

$$\log|r| \geqq -m\log a - \left\{m\log(m!\,e) - (m+1)\log\frac{m+1}{e} + 1\right\}\frac{\log a}{\log\log a}((1+o(1)).$$

Also ist für $\varepsilon > 0$ und $a > a(\varepsilon)$

$$|r| \geqq a^{-m-\frac{\lambda+\varepsilon}{\log\log a}},$$

und zwar besitzt λ den Wert

$$\lambda = m\log(m!\,e) - (m+1)\log\frac{m+1}{e} + 1 = m^2\log m + O(m^2).$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *Die Koeffizienten der Linearform*

$$r = a_0 + a_1 e + \cdots + a_m e^m, \quad a = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, (a_m|)$$

seien ganz rationale Zahlen, die nicht gleichzeitig verschwinden. Dann gibt es eine positive Zahl c, die weder von m, noch von den Koeffizienten der Form r abhängt, so daß für $a \geqq a(m)$ die Ungleichung

$$|r| \geqq a^{-m-\frac{cm^2\log(m+1)}{\log\log a}}$$

besteht [1]).

Speziell ist also nach den Definitionen und Hilfssätzen in 1. und 2. die Gleichung

$$\omega(e) = 1$$

erfüllt, so daß die arithmetische Funktion ω für die reelle Zahl e den kleinsten überhaupt möglichen Wert Eins annimmt. Es ist allgemeiner auch

$$\omega(e^z) = 1,$$

wo z irgendeine rationale Zahl bedeutet. Dagegen gilt

$$\omega(ie^z) = \frac{1}{2},$$

so daß für nichtreelle Zahlen der Mindestwert 1/2 von ω ebenfalls erreicht wird.

[1]) Siehe die Arbeiten von Siegel (7), S. 31 und von Popken (6).

Eingegangen 5. Januar 1931.

Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil II [1]).

Von *Kurt Mahler* in Göttingen.

IV.

14. Im Gegensatz zu bisher werde $\varrho_0 = \varrho_1 = \cdots = \varrho_m = \varrho$ als feste endliche natürliche Zahl und m als eine natürliche Zahl, die über alle Grenzen wächst, angenommen und dann

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = A_{k+1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0 & 1 \dots m \\ \varrho & \varrho \dots \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=0}^{m} (\mathfrak{z} + k - h)^{\varrho}},$$

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} 0 & 1 \dots m \\ \varrho & \varrho \dots \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\infty} \frac{e^{z\mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{h=0}^{m} (\mathfrak{z} - h)^{\varrho}}$$

gesetzt, so daß

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{k=0}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) e^{kz}$$

ist. Offenbar ist

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \frac{z^l}{l!} A_k^{(l)}\begin{pmatrix} m \\ \varrho \end{pmatrix}, \quad A_k^{(l)}\begin{pmatrix} m \\ \varrho \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0} \frac{\mathfrak{z}^{l-\varrho}\, d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} (\mathfrak{z} + k - h)^{\varrho}}.$$

Setzt man

$$\psi_k\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \prod_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} (\mathfrak{z} + k - h)^{-\varrho},$$

so ist also

$$(\varrho - l - 1)!\, A_k^{(l)}\begin{pmatrix} m \\ \varrho \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^{\varrho-l-1} \psi_k\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right)\Bigg|_{\mathfrak{z}=0}.$$

15. Um die Ableitungen von $\psi_k(\mathfrak{z})$ zu bestimmen, werde die Funktion

$$\chi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \sum_{\substack{h=0 \\ h\neq k}}^{m} (\mathfrak{z} + k - h)^{-l}$$

---

[1]) Teil I erschien als letzter Beitrag zu Heft 2 dieses Bandes. —

Druckfehler-Berichtigung zum ersten Teil dieser Arbeit:

S. 121, Zeile 8 von unten: man lese $z_1^{\alpha_1}$ statt z^{α_1}.

S. 121, Zeile 6 von unten: man lese $\mathfrak{a}_1 \omega_{m\mathfrak{a}_2}(z_2)$ statt $\mathfrak{a}_1 \omega_{m\mathfrak{a}_2} \mathfrak{a}_2(z_2)$.

S. 127, Zeile 3 von unten: man lese Spalte statt Zeile.

eingeführt. Macht man den Ansatz

$$\left(\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^l \psi_k\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = \psi_k\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) \Phi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right),$$

so findet man

$$\Phi_k^{(0)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = 1,\quad \Phi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = -\varrho\chi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right),\quad \Phi_k^{(2)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = \varrho^2\chi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)^2 + \varrho\chi_k^{(2)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right).$$

Allgemeiner ist offenbar

$$\frac{d}{d\mathfrak{z}}\chi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = -l\chi_k^{(l+1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)$$

und

$$\Phi_k^{(l+1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = -\varrho\chi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)\Phi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) + \frac{d}{d\mathfrak{z}}\Phi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right).$$

Durch Schluß von l auf $l+1$ ergibt sich daher aus den letzten Formeln der Hilfssatz:

a) Es ist identisch

$$\Phi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+l\lambda_l=l} C_{\lambda_1,\ldots,\lambda_l}\,\varrho^{\lambda_1+\cdots+\lambda_l}\,\chi_k^{(1)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)^{\lambda_1}\cdots\chi_k^{(l)}\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)^{\lambda_l},$$

wobei über alle Zerlegungen von l der Form

$$l = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + l\lambda_l$$

mit nichtnegativen ganzen rationalen λ summiert wird und die $C_{\lambda_1,\ldots,\lambda_l}$ gewisse ganze rationale Zahlen sind, die allein von der betreffenden Zerlegung, nicht aber von ϱ oder m oder k abhängen.

16. Zur Abkürzung werde gesetzt [2]):

$$M_m = m!,\qquad D_m = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Wegen

$$\psi_k\left(0\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = \left(\frac{(-1)^{m-k}}{k!\,(m-k)!}\right)^{\varrho},\qquad \chi_k^{(l)}\left(0\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = \sum_{\substack{h=0\\ h\neq k}}^{m}\frac{1}{(k-h)^l}$$

ist dann offenbar jede der Zahlen

$$M_m^{\varrho}\,\psi_k\left(0\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = (-1)^{(m-k)\varrho}\binom{m}{\varrho}^{\varrho}\quad\text{und}\quad D_m^l\,\chi_k^{(l)}\left(0\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)$$

ganz rational; aus Hilfssatz a folgt also:

b) Die Zahl

$$M_m^{\varrho} D_m^{\varrho}\left(\frac{d}{d\mathfrak{z}}\right)^l \psi_k\left(\mathfrak{z}\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right)\Bigg|_{\mathfrak{z}=0} = \Psi_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}$$

ist ganz rational.

Es gelingt unschwer, für $\Psi_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}$ obere Schranken anzugeben. Wenn ε eine positive Konstante ist, so besteht bekanntlich für $m \geqq m_0(\varepsilon)$ die Ungleichung [3])

$$D_m \leqq e^{(1+\varepsilon)m}.$$

Weiter ist

$$\binom{m}{k} \leqq 2^m,\qquad \left|\sum_{\substack{h=0\\ h\neq k}}^{m}\frac{1}{(k-h)^l}\right| \leqq 2\sum_{h=1}^{m}\frac{1}{h^l} = O(e^{\varepsilon m}).$$

---

[2]) Das Zeichen $\{1, 2, \ldots, m\}$ bedeutet das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, m$.

[3]) Siehe hierzu: E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I, S. 74 u. 195

Demnach ergibt sich der weitere Hilfssatz:

c) Für jedes $\varepsilon > 0$ und gleichmäßig in k besteht die Ungleichung

$$\Psi_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} = O(e^{(1+\varepsilon)m\varrho}\,2^{m\varrho}).$$

17. Setzt man

$$\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} = M_m^\varrho D_m^\varrho \frac{(\varrho-1)!}{l!} A_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} = \binom{\varrho-1}{l} \Psi_k^{(\varrho-l-1)}\binom{m}{\varrho},$$

so sind nach b und c die Zahlen $\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}$ sämtlich ganz rational, und es ist gleichmäßig in den Indizes für genügend großes m

$$\left|\mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho}\right| \leqq (3e)^{m\varrho}.$$

Alsdann ist

$$(\varrho-1)!\, M_m^\varrho D_m^\varrho A_k\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} z^l.$$

Es möge gesetzt werden:

$$\sum_{k=0}^{m} \mathsf{A}_k^{(l)}\binom{m}{\varrho} u^k = \boldsymbol{a}^{(l)}\left(u\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right).$$

Dann ist offenbar

$$(\varrho-1)!\, M_m^\varrho D_m^\varrho R\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = \sum_{l=0}^{\varrho-1} \boldsymbol{a}^{(l)}\left(e^z\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) z^l.$$

Im folgenden nehmen wir e^z positiv rational an:

$$e^z = \frac{x}{y}$$

mit zwei teilerfremden natürlichen Zahlen x und y. Die Zahlen

$$y^m \boldsymbol{a}^{(l)}\left(e^z\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = a_l\binom{m}{\varrho}$$

sind demnach ganz rational und genügen für genügend großes ϱ und m der Ungleichung

$$\left|a_l\binom{m}{\varrho}\right| \leqq (4e)^{m\varrho}.$$

Wird noch gesetzt:

$$(\varrho-1)!\, y^m M_m^\varrho D_m^\varrho R\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = r\binom{m}{\varrho},$$

so sind demnach die Koeffizienten der Näherungsform

$$r\binom{m}{\varrho} = \sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l\binom{m}{\varrho} z^l$$

als ganz rational erkannt und nach oben abgeschätzt. Auch für den Wert dieser Näherungsform selbst können Schranken nach oben und unten hergeleitet werden.

18. Dazu beschränken wir uns auf zwei spezielle Fälle: entweder sei z reell und positiv, oder es sei $e^z = 1$ und $z = 2\pi i$.

Im ersten Fall werde ausgegangen von der Formel

$$R\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}m\\ \varrho\end{matrix}\right) = (J^\varrho e^z)^m \frac{z^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}.$$

18*

Längs der Strecke

$$0 \leqq t \leqq z$$

ist

$$1 \leqq e^t \leqq e^z,$$

also nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$J^{m\varrho} \frac{z^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!} \leqq R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq e^{mz} J^{m\varrho} \frac{z^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}.$$

Hieraus ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{z^{m\varrho+\varrho-1}}{(m\varrho+\varrho-1)!} \leqq R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq e^{mz} \frac{z^{m\varrho+\varrho-1}}{(m\varrho+\varrho-1)!}.$$

Nach der Stirlingschen Formel ist aber

$$m!^\varrho \sim (2\pi)^{\frac{\varrho}{2}} m^{\frac{\varrho}{2}} m^{m\varrho} e^{-m\varrho},$$

$$(m\varrho+\varrho-1)! \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} m^{(m+1)\varrho} \varrho^{(m+1)\varrho} e^{-m\varrho},$$

also

$$\frac{m!^\varrho}{(m\varrho+\varrho-1)!} \sim \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{\frac{\varrho-1}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}-(m+1)\varrho}.$$

Bedeutet ε eine positive Konstante, so ist demnach für genügend großes m

$$z^{m\varrho} \varrho^{-m\varrho} e^{-\frac{m\varepsilon}{2}} \leqq M_m^\varrho R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} m \\ \varrho \end{matrix}\right) \leqq z^{m\varrho} \varrho^{-m\varrho} e^{mz} e^{+\frac{m\varepsilon}{2}},$$

und da ferner nach dem Primzahlsatz für genügend großes m

$$e^{m-\frac{m\varepsilon}{2\varrho}} \leqq D_m \leqq e^{m+\frac{m\varepsilon}{2\varrho}}$$

ist, so erhält man für $m \geqq m_0(\varepsilon, \varrho)$ die Ungleichungen

$$\left(\frac{ez}{\varrho}\right)^{m\varrho} y^m e^{-m\varepsilon} \leqq r\binom{m}{\varrho} \leqq \left(\frac{ez}{\varrho}\right)^{m\varrho} y^m e^{mz} e^{+m\varepsilon}.$$

Diese Ungleichungen lassen sich im Verein mit den früheren in einer einfachen Form aussprechen. Sei

$$a = (4e)^{m\varrho};$$

alsdann können die vorigen Ungleichungen geschrieben werden:

$$a^{-\Omega_1} \leqq r\binom{m}{\varrho} \leqq a^{-\Omega_2}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{\log(4e)}\left(\log\varrho - \log(ez) - \frac{\log y - \varepsilon}{\varrho}\right), \\ \Omega_2 &= \frac{1}{\log(4e)}\left(\log\varrho - \log(ez) - \frac{\log y + z + \varepsilon}{\varrho}\right), \end{aligned}\right\} \quad \Omega_1 > \Omega_2.$$

Mit wachsendem ϱ streben beide Zahlen gegen Unendlich, während ihre Differenz gegen Null konvergiert. *Bedeutet Ω eine beliebig große positive Zahl, so gibt es also eine natürliche Zahl ϱ, für die*

$$\Omega_1 > \Omega_2 \geqq \Omega$$

ist; alsdann gehören zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m je ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$, so daß zugleich

$$\max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m, \qquad C = C(\varrho) = (4e)^\varrho$$

und

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l \leqq C^{-m\Omega_2}$$

ist.

In dieser Aussage ist nach dem Transzendenzkriterium in 2. insbesondere die Transzendenz von $\log \zeta$ enthalten.

19. Um ein entsprechendes Ergebnis für die Zahl π zu erhalten, werde weiter statt m die gerade Zahl $2m$ eingesetzt. Man hat offenbar

$$R\left(2\pi i \middle| \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{2\pi i \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}-1)\cdots(\mathfrak{z}-2m)\}^\varrho} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{2\pi i \mathfrak{z}}\, d\mathfrak{z}}{\{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2-1^2)\cdots(\mathfrak{z}^2-m^2)\}^\varrho},$$

oder wenn die neue Veränderliche

$$u = \frac{i\mathfrak{z}}{m}$$

eingeführt wird:

$$R\left(2\pi i \middle| \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{i^{2m\varrho+\varrho-2}}{2\pi m^{2m\varrho+\varrho-1}} \int_{C_\infty} \left\{u\left(u^2+\frac{1^2}{m^2}\right)\cdots\left(u^2+\frac{m^2}{m^2}\right)\right\}^{-\varrho} e^{2\pi m u}\, du.$$

Hier kann der Integrationsweg leicht auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes übergeführt werden in eine Gerade G_α, die senkrecht zur reellen Achse durch den Punkt $\alpha > 0$ auf der reellen Achse geht; wird integriert in der Richtung vom Negativ-Imaginären zum Positiv-Imaginären, so ist dann

$$R\left(2\pi i \middle| \begin{matrix} 2m \\ \varrho \end{matrix}\right) = \frac{i^{2m\varrho+\varrho-2}}{2\pi m^{2m\varrho+\varrho-1}} \int_{G_\alpha} e^{2\pi m u - \varrho\,\tau(u)}\, du,$$

$$\tau(u) = \log u + \sum_{k=1}^{m} \log\left(u^2 + \frac{k^2}{m^2}\right).$$

Dabei ist die u-Ebene längs der negativ-reellen Achse aufzuschneiden und in der aufgeschnittenen Ebene unter $\log u$ das Integral

$$\log u = \int_1^u \frac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}$$

zu verstehen.

Die Funktion $\tau(u)$ läßt sich mittels der Eulerschen Summenformel vereinfachen. Bedeutet $S(x)$ die Funktion

$$S(x) = \frac{(x-[x])^2 - (x-[x])}{2},$$

so ist für zwischen 0 und m zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f(x)$

$$\frac{f(0)+f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} f(k) = \int_0^m f(x)\, dx - \int_0^m f''(x) S(x)\, dx,$$

also mit $x = mt$

$$\tau(u) - \log\sqrt{u^2+1} = m\int_0^1 \log(u^2+t^2)\,dt - \frac{2}{m}\int_0^1 \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2} S(mt)\,dt.$$

Das letzte Integral hat längs G_α gleichmäßig in u die Größenordnung

$$O(1),$$

während das erste Integral den genauen Wert

$$\frac{u}{i}\log\frac{u+i}{u-i} + \log(u^2+1) - 2$$

besitzt. Längs G_α ist somit gleichmäßig in u

$$\tau(u) = m\left\{\frac{u}{i}\log\frac{u+i}{u-i} + \log(u^2+1) - 2\right\} + \log\sqrt{u^2+1} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

In gleicher Weise findet man bei den Ableitungen

$$\tau^{(l)}(u) = (-1)^{l-1}(l-1)!\sum_{k=-m}^{+m}\left(u+\frac{ki}{m}\right)^{-l} \qquad (l = 1, 2, 3)$$

die Werte

$$\tau'(u) = \frac{m}{i}\log\frac{u+i}{u-i} + \frac{u}{u^2+1} + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \tau''(u) = -\frac{2m}{u^2+1} + O(1), \quad \tau'''(u) = O(m),$$

die ebenfalls gleichmäßig auf G_α gelten.

Von jetzt ab sei $\varrho \geqq 5$ und α durch die Gleichung

$$\frac{2\pi}{\varrho} = \frac{1}{i}\log\frac{\alpha+i}{\alpha-i} \equiv 2\operatorname{arc\,cotg}\alpha$$

bestimmt, also

$$\alpha = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{\varrho}.$$

Dann ist

$$\varrho\tau'(\alpha) = 2\pi m + \frac{\alpha\varrho}{\alpha^2+1} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Der Integrationsweg des Integrales

$$\mathfrak{J} = \int_{G_\alpha} e^{2\pi m u - \varrho\tau(u)}\,du = i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi m(\alpha+ti) - \varrho\tau(\alpha+ti)}\,dt$$

werde zerlegt in die Teilintervalle

$$(-m^{-2/5}, +m^{-2/5}), \quad (-\infty, -m^{-2/5}), \quad (+m^{-2/5}, +\infty).$$

Im ersten Intervall ist nach der Taylorschen Reihe mit Restglied in Integralform offenbar gleichmäßig in u

$$\begin{aligned} 2\pi m(\alpha+ti) - \varrho\tau(\alpha+ti) &= (2\pi m\alpha - \varrho\tau(\alpha)) + ti(2\pi m - \varrho\tau'(\alpha)) + \frac{\varrho t^2}{2}\tau''(\alpha) + O(mt^3) \\ &= (2\pi m\alpha - \varrho\tau(\alpha)) - \frac{\varrho m t^2}{\alpha^2+1} + O(m^{-1/5}), \end{aligned}$$

ferner

$$\int_{-m^{-2/5}}^{+m^{-2/5}} e^{-\frac{\varrho m t^2}{\alpha^2+1}}\,dt = m^{-1/2}\int_{-m^{1/10}}^{+m^{1/10}} e^{-\frac{\varrho t^2}{\alpha^2+1}}\,dt \sim m^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varrho t^2}{\alpha^2+1}}\,dt = \left(\frac{(\alpha^2+1)\pi}{m\varrho}\right)^{1/2},$$

folglich

$$\int_{-m^{-2/5}}^{+m^{-2/5}} e^{2\pi m(\alpha+ti)-\varrho\tau(\alpha+ti)}\,dt \sim \left(\frac{(\alpha^2+1)\pi}{m\varrho}\right)^{1/2} e^{2\pi m\alpha-\varrho\tau(\alpha)}.$$

Die Integrale über die beiden noch übrigen Intervalle liefern einen Beitrag von geringerer Größenordnung. Denn es ist

$$\tau(\alpha+ti)-\tau(\alpha)=\sum_{k=-m}^{+m}\log\frac{\alpha+ti+\frac{ki}{m}}{\alpha+\frac{ki}{m}}=\frac{1}{2}\sum_{k=-m}^{+m}\log\left(\frac{\alpha+ti+\frac{ki}{m}}{a+\frac{ki}{m}}\cdot\frac{a+ti-\frac{ki}{m}}{\alpha-\frac{ki}{m}}\right),$$

also

$$\Re(\tau(\alpha+ti)-\tau(\alpha))=\frac{1}{2}\sum_{k=-m}^{+m}\log\left|\frac{(\alpha+ti)^2+\frac{k^2}{m^2}}{\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}}\right|=\frac{1}{4}\sum_{k=-m}^{+m}\log\frac{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}-t^2\right)^2+4\alpha^2t^2}{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=-m}^{+m}\log\left(1+t^2\frac{2\left(\alpha^2-\frac{k^2}{m^2}\right)+t^2}{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}\right)^2}\right).$$

Weiter ist $k^2\leqq m^2$ und wegen der Annahme $\varrho\geqq 5$

$$\alpha=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\varrho}\geqq\operatorname{cotg}\frac{\pi}{5}>1.$$

Also gibt es eine positive Konstante c, die weder von k, noch von m abhängt, so daß für jedes reelle t

$$\frac{2\left(\alpha^2-\frac{k^2}{m^2}\right)+t^2}{\left(\alpha^2+\frac{k^2}{m^2}\right)}\geqq c$$

ist, folglich auch

$$\Re(\tau(\alpha+ti)-\tau(\alpha))\geqq\frac{2m+1}{4}\log(1+ct^2)$$

und demnach

$$\left|\left\{\int_{-\infty}^{-m^{-2/5}}+\int_{+m^{-2/5}}^{+\infty}\right\}e^{2\pi m(\alpha+ti)-\varrho\tau(\alpha+ti)}\,dt\right|\leqq 2e^{2\pi m\alpha-\varrho\tau(\alpha)}\int_{+m^{-2/5}}^{\infty}(1+ct^2)^{-\frac{2m+1}{4}}\,dt.$$

Das Integral rechts geht durch die Substitution

$$1+ct^2=(1+cm^{-4/5})\,x$$

über in den Ausdruck

$$\int_1^{\infty}\frac{(1+cm^{-4/5})^{-\frac{2m-3}{4}}\,x^{-\frac{2m+1}{4}}}{2\sqrt{c}\sqrt{(1+cm^{-4/5})\,x-1}}\,dx,$$

ist daher für $m\to\infty$ von geringerer Größenordnung als jede negative Potenz von m.

Damit ist folgende asymptotische Formel bewiesen:

$$R\left(2\pi i\,\middle|\,\begin{matrix}2m\\ \varrho\end{matrix}\right)\sim\frac{i^{2m\varrho+\varrho-1}}{2\pi m^{2m\varrho+\varrho-1}}\sqrt{\frac{(\alpha^2+1)\pi}{m\varrho}}\,e^{2\pi m\alpha-\varrho\tau(\alpha)};$$

sie läßt sich nach den früheren Abschätzungen überführen in

$$R\left(2\pi i \,\middle|\, \frac{2m}{\varrho}\right) \sim \frac{i^{2m\varrho+\varrho-1}\, e^{2m\varrho}\left(\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{2m\varrho+\varrho-1}}{2\sqrt{\pi m\varrho}\; m^{2m\varrho+\varrho-1}}.$$

Bedeutet ε eine positive Zahl, so ist folglich für $m \geqq m_0(\varepsilon, \varrho)$

$$e^{-\varepsilon m}\left(2e\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{2m\varrho} \leqq \left| r\left(\frac{2m}{\varrho}\right)\right| \leqq e^{+\varepsilon m}\left(2e\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{2m\varrho}.$$

Diese Ungleichung läßt sich in ähnlicher Weise wie früher interpretieren. Sei zur Abkürzung

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \eta, \qquad \Omega_2 = \Omega_0 - \eta,$$

$$\Omega_0 = \frac{\log\left\{\left(2e\sin\frac{\pi}{\varrho}\right)^{-1}\right\}}{\log(4e)}, \qquad \eta = \frac{\varepsilon}{2\varrho\log(4e)}.$$

Mit wachsendem ϱ streben Ω_1 und Ω_2 gegen Unendlich; ihre Differenz kann beliebig klein angenommen werden. *Wenn Ω eine beliebig große positive Zahl ist, so gibt es eine natürliche Zahl ϱ, für die*

$$\Omega_1 > \Omega_2 \geqq \Omega$$

ist; alsdann gehören zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m je ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$, so daß

$$\max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m, \qquad C = (4e)^{2\varrho}$$

und gleichzeitig

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \left|\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l\right| \leqq C^{-m\Omega_2}, \qquad z = 2\pi i$$

ist. Hierin ist speziell die Transzendenz von π enthalten.

20. Mittels einer allgemeinen Überlegung läßt sich aus den letzten Ergebnissen ableiten, daß weder der reelle Logarithmus einer positiven rationalen Zahl, noch die Zahl $2\pi i$, also auch nicht die Zahl π selbst, U-Zahlen sind.

Von der Zahl z werde angenommen, daß sich zu ihr eine natürliche Zahl ϱ, eine Zahl $C > 1$ und zwei positive Zahlen Ω_1 und Ω_2 mit $\Omega_1 > \Omega_2$ angeben lassen, daß zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m dann ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$ existieren, die den Ungleichungen

$$0 < \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m,$$

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \left|\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l\right| \leqq C^{-m\Omega_2}$$

genügen.

Sei dann q eine natürliche Zahl mit

$$q - 1 < \Omega_2,$$

so daß offenbar z nicht algebraisch von höchstens q-tem Grad ist. Eine beliebige Näherungsform

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten heiße primitiv, wenn die Nullstellen des Polynoms

$$A_0 + A_1 x + \cdots + A_q x^q$$

algebraische Zahlen genau vom Grad q sind. Es werde angenommen, daß zu einer gewissen positiven Zahl λ unendlichviele primitive Näherungsformen

$$R_k = A_{0k} + A_{1k} z + \cdots + A_{qk} z^q, \qquad A_k = \max(|A_{0k}|, |A_{1k}|, \ldots, |A_{qk}|) \geqq 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

als Lösung der Ungleichung

$$0 < |R_k| \leqq A_k^{-\lambda} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

existieren.

Sei in lineare Faktoren zerlegt:

$$A_{0k} + A_{1k} x + \cdots + A_{qk} x^q = A_{qk}(x - \zeta_k)(x - \zeta_k') \cdots (x - \zeta_k^{(q-1)}) .$$

Unter den Zahlen $\zeta_k, \zeta_k', \ldots, \zeta_k^{(q-1)}$ gibt es eine, die möglichst nahe bei der Zahl z liegt; sie sei etwa gleich ζ_k. Dann ist gewiß

$$0 < |z - \zeta_k| \leqq A_k^{-\frac{\lambda}{q}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Jeder Näherungsform R_k mit großem k kann eine Näherungsform $\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l$ zugeordnet werden durch die Bedingung

$$C^{m\vartheta} \leqq A_k \leqq C^{(m+1)\vartheta};$$

dabei bedeutet ϑ eine positive Konstante, über die später verfügt wird. Es werde gesetzt:

$$\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l \zeta_k^{(\varkappa)^l} = \mathsf{Z}_k^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q-1) .$$

Die Koeffizienten a_l sind nach Annahme ganz rational; ferner sind die Zahlen $\zeta_k, \zeta_k', \ldots, \zeta_k^{(q-1)}$ zueinander algebraisch konjugiert. Also sind auch die Zahlen $\mathsf{Z}_k, \mathsf{Z}_k', \ldots, \mathsf{Z}_k^{(q-1)}$ zueinander algebraisch konjugiert; sie sind daher entweder alle zugleich Null oder zugleich von Null verschieden.

Sei jetzt k schon so groß, daß $|\zeta_k| \leqq 2|z|$ ist, und zur Abkürzung

$$c = 1 + 2 \cdot |2z| + 3 \cdot |2z|^2 + \cdots + (\varrho - 1) \cdot |2z|^{\varrho-2} .$$

Offenbar ist dann

$$\left| \int_z^{\zeta_k} (a_1 + 2a_2 x + \cdots + (\varrho - 1) a_{\varrho-1} x^{\varrho-2})\, dx \right| \leqq |z - \zeta_k| \cdot C^m \cdot c \leqq c C^{m\left(1 - \frac{\lambda\vartheta}{q}\right)},$$

und wegen

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1} \zeta_k^{\varrho-1}) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\varrho-1} z^{\varrho-1}) \\ = \int_z^{\zeta_k} (a_1 + 2a_2 x + \cdots + (\varrho - 1) a_{\varrho-1} x^{\varrho-2})\, dx\end{aligned}$$

besteht die Ungleichung

$$|a_0 + a_1 \zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1} \zeta_k^{\varrho-1}| \geqq C^{-m\Omega_1} - c C^{m\left(1 - \frac{\lambda\vartheta}{q}\right)} .$$

Wenn

$$\Omega_1 < \frac{\lambda\vartheta}{q} - 1$$

ist, so wird daher für genügend großes k die rechte Seite von Null verschieden; dann ist somit gleichzeitig

$$\mathsf{Z}_k^{(\varkappa)} \neq 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q-1) .$$

Das Produkt

$$P_k = A_{qk}^{q(\varrho-1)} \prod_{\varkappa=0}^{q-1} Z_k^{(\varkappa)}$$

ist folglich auch von Null verschieden, denn gewiß verschwindet A_{qk} nicht. Als symmetrische Funktion der $\zeta_k^{(\varkappa)}$ muß P_k rational sein; ferner ist P_k auch ganz, da der Nenner beseitigt ist. Also stellt P_k eine ganze und von Null verschiedene rationale Zahl dar, so daß sein Absolutbetrag mindestens Eins beträgt.

Die Zahlen $\zeta_k^{(\varkappa)}$ sind Wurzeln der Gleichung

$$A_{0k} + A_{1k}x + \cdots + A_{qk}x^q = 0;$$

für jede von ihnen ist daher

$$|\zeta_k^{(\varkappa)}|^q \leqq |A_{qk}\zeta_k^{(\varkappa)q}| \leqq A_k\{1 + |\zeta_k^{(\varkappa)}| + \cdots + |\zeta_k^{(\varkappa)}|^{q-1}\} = A_k \frac{|\zeta_k^{(\varkappa)}|^q - 1}{|\zeta_k^{(\varkappa)}| - 1},$$

also entweder $|\zeta_k^{(\varkappa)}| \leqq 1$ oder $|\zeta_k^{(\varkappa)}| \leqq A_k + 1$, d. h. es ist allgemein

$$|\zeta_k^{(\varkappa)}| \leqq A_k + 1 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Also wird für genügend großes k

$$|Z_q^{(\varkappa)}| \leqq C^m \frac{(A_k+1)^\varrho - 1}{A_k} \leqq C^m \cdot 2^\varrho A_k^{\varrho-1} \leqq 2^\varrho C^{m+(\varrho-1)\vartheta(m+1)}$$

und endlich

$$|Z_k| \geqq \frac{1}{|A_{qk}|^{q(\varrho-1)} \prod_{\varkappa=1}^{q-1} |Z_k^{(\varkappa)}|} \geqq \frac{1}{C^{q(\varrho-1)\vartheta(m+1)}\,(2^\varrho C^{m+(\varrho-1)\vartheta(m+1)})^{q-1}}$$

oder

$$|a_0 + a_1\zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\zeta_k^{\varrho-1}| \geqq 2^{-\varrho(q-1)} C^{-\{m(q-1)+(2q-1)(\varrho-1)\vartheta(m+1)\}},$$

während andrerseits

$$|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\varrho-1}z^{\varrho-1}| \leqq C^{-m\Omega_2}$$

ist. Nach Annahme besteht aber die Ungleichung

$$q - 1 < \Omega_2.$$

Ohne Einschränkung darf daher auch angenommen werden, daß die Zahl ϑ der Ungleichung

$$q - 1 + (2q-1)(\varrho-1)\vartheta < \Omega_2$$

genügt. Dies ist der Fall, wenn ε eine kleine positive Konstante bedeutet und alsdann

$$\vartheta = \frac{\Omega_2 - q + 1}{(2q-1)(\varrho-1)(1+\varepsilon)}$$

gewählt wird. Dann wird für genügend großes k

$$\begin{aligned} &|(a_0 + a_1\zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\zeta_k^{\varrho-1}) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\varrho-1}z^{\varrho-1})| \\ &\geqq 2^{-\varrho(q-1)} C^{-\{m(q-1)+(2q-1)(\varrho-1)\vartheta(m+1)\}} - C^{-m\Omega_2} \geqq C^{-m\Omega_2} \end{aligned}$$

während andrerseits nach früherem

$$|(a_0 + a_1\zeta_k + \cdots + a_{\varrho-1}\zeta_k^{\varrho-1}) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{\varrho-1}z^{\varrho-1})| \leqq cC^{-\left(\frac{\lambda\vartheta}{q}-1\right)m}$$

ist. Also muß von einem k ab, d. h. für gewisse beliebig große natürliche Zahlen m

$$C^{-m\Omega_2} \leqq cC^{-\left(\frac{\lambda\vartheta}{q}-1\right)m}$$

sein. Es war aber

$$\frac{\lambda\vartheta}{q} - 1 > \Omega_1$$

vorausgesetzt; wegen $\Omega_1 > \Omega_2$ ist daher erst recht

$$\frac{\lambda\vartheta}{q} - 1 > \Omega_2,$$

und man kommt zu einem Widerspruch.

Die beiden Ungleichungen

$$\frac{\lambda\vartheta}{q} - 1 > \Omega_1,$$

$$q - 1 + (2q - 1)(\varrho - 1)\,\vartheta < \Omega_2.$$

können also nicht gleichzeitig erfüllt sein. Die zweite durfte ohne Einschränkung durch die Wahl

$$\vartheta = \frac{\Omega_2 - q + 1}{(2q - 1)(\varrho - 1)(1 + \varepsilon)}$$

befriedigt werden. Also darf die erste Ungleichung nicht gelten, so daß

$$\lambda \leqq \frac{q(2q - 1)(\varrho - 1)(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1}(1 + \varepsilon)$$

sein muß. Damit ist gezeigt:

Wenn λ der Ungleichung

$$\lambda > \frac{q(2q - 1)(\varrho - 1)(\Omega_1 + 1)}{\Omega_2 - q + 1}$$

genügt, so genügen die primitiven Näherungsformen

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten und genügend großem A der Ungleichung

$$|R| \geqq A^{-\lambda}.$$

Man kann dies auch so ausdrücken, daß *alle* primitiven Näherungsformen mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht gleichzeitig verschwinden, der Ungleichung

$$|R| \geqq \Lambda A^{-\lambda}$$

genügen, wo die positive Konstante Λ wohl von λ, nicht aber von den Koeffizienten von R abhängt.

21. Auch für beliebige Näherungen q-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, kann für $q - 1 < \Omega_2$ eine untere Schranke hergeleitet werden. Sei die Zerlegung von

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \quad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

in primitive Faktoren gegeben durch

$$R = \prod_{\tau=1}^{p} R^{(\tau)}, \quad R^{(\tau)} = \sum_{k=0}^{q_\tau} A_k^{(\tau)} z^k,$$

und möge

$$A^{(\tau)} = \max(|A_0^{(\tau)}|, |A_1^{(\tau)}|, \ldots, |A_{q_\tau}^{(\tau)}|) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p),$$

sein; die Zahlen

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(p)}$$

19*

sind gewiß alle mindestens gleich 1. Nach einem Hilfssatz von Siegel genügen sie den Ungleichungen [4])

$$A^{(\tau)} \leqq c\,A, \quad c = q! \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p).$$

Sind jetzt $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(p)}$ p positive Zahlen mit

$$\lambda^{(\tau)} > \frac{q^{(\tau)}(2q^{(\tau)}-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q^{(\tau)} + 1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

und bedeuten ferner $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \ldots, \Lambda^{(p)}$ gewisse positive Konstante, die einzeln wohl von $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(p)}$, nicht aber von den Koeffizienten der Formen $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(p)}$ und R abhängen, so ist

$$|R^{(\tau)}| \geqq \Lambda^{(\tau)} A^{(\tau)-\lambda^{(\tau)}} \geqq c^{-\lambda^{(\tau)}} \Lambda^{(\tau)} A^{-\lambda^{(\tau)}} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

und daher

$$|R| \geqq \Lambda_0 A^{-\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)}-\cdots-\lambda^{(p)}},$$

wo die positive Konstante Λ_0 wohl von den Zahlen $\lambda^{(\tau)}$, nicht aber von den Koeffizienten der Näherungsform R abhängt.

Sei zunächst R genau vom Grad q in z angenommen, also

$$\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)} = q\,.$$

Dann ist auch

$$\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)2} \leqq q^2$$

und folglich

$$\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)}(2q^{(\tau)}-1) = 2\sum_{\tau=1}^{p} q^{(\tau)2} - q \leqq 2q^2 - q = q(2q-1).$$

Somit besteht die Ungleichung

$$\sum_{\tau=1}^{p} \frac{q^{(\tau)}(2q^{(\tau)}-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q^{(\tau)}+1} \leqq \sum_{\tau=1}^{p} \frac{q^{(\tau)}(2q^{(\tau)}-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q+1}$$
$$\leqq \frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2-q+1}.$$

Weil die rechte Seite mit abnehmendem q selbst abnimmt, so muß diese Ungleichung bestehen bleiben, wenn die Form R nur noch höchstens vom Grad q ist. Ist folglich λ eine beliebige positive Zahl größer als

$$\frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2-q+1},$$

so kann sie immer in der Form

$$\lambda = \sum_{\tau=1}^{p} \lambda^{(\tau)}, \quad \lambda^{(\tau)} > \frac{q^{(\tau)}(2q^{(\tau)}-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2-q^{(\tau)}+1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, p)$$

zerlegt werden.

Damit ist folgender Satz bewiesen [5]):

---

[4]) Siehe die Arbeit: C. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 176, Hilfssatz III.

[5]) Nach einer Mitteilung von Herrn Siegel läßt sich für λ_0 ein besserer Wert mittels eines anderen Beweisansatzes erhalten. Für die Zwecke der vorliegenden Arbeit genügt jedoch Satz 4.

Satz 4. *Von der Zahl z werde angenommen, daß sich zu ihr eine natürliche Zahl ϱ, eine Zahl $C > 1$ und zwei positive Zahlen Ω_1 und Ω_2 mit $\Omega_1 > \Omega_2$ angeben lassen, daß zu jeder genügend großen natürlichen Zahl m dann ϱ ganze rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$ existieren, die den Ungleichungen*

$$0 < \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{\varrho-1}|) \leqq C^m,$$

$$C^{-m\Omega_1} \leqq \left|\sum_{l=0}^{\varrho-1} a_l z^l\right| \leqq C^{-m\Omega_2}$$

genügen. Wenn alsdann die positive Zahl λ_0 der Ungleichung

$$\lambda_0 > \frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q + 1}$$

genügt, so läßt sich zu ihr eine positive Konstante Λ_0 angeben, so daß jede Näherungsform

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \qquad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht gleichzeitig verschwinden, und die von einem Grad

$$q < \Omega_2 + 1$$

ist, der Ungleichung

$$|R| \geqq \Lambda_0 A^{-\lambda_0}$$

genügt.

Nach den Definitionen in 1. ist also speziell

$$\mu(z) \geqq \Omega_2 + 1 .$$

22. Satz 4 werde nun auf den reellen Logarithmus $\log \zeta$ positiver rationaler Zahlen und auf die Zahl $2\pi i$ angewandt. Da in beiden Fällen Ω_2 beliebig groß sein kann, so handelt es sich keinmal um U-Zahlen, sondern $\log \zeta$ und $2\pi i$ müssen entweder S-Zahlen oder T-Zahlen sein; insbesondere kann also zwischen ihnen und einer Liouville-Zahl keine algebraische Gleichung mit algebraischen Koeffizienten bestehen. Darüber hinaus lassen sich untere Schranken für die Annäherungen an beide Zahlen angeben:

In beiden Fällen waren Ω_1 und Ω_2 als Funktion von ϱ in der Form

$$\Omega_1 = a \log \varrho + O(1), \qquad \Omega_2 = a \log \varrho + O(1)$$

darstellbar, wo a eine gewisse positive Zahl bedeutet. Zu der gegebenen natürlichen Zahl q kann eine natürliche Zahl ϱ so bestimmt werden, daß

$$\Omega_2 - 1 \leqq q < \Omega_2$$

und folglich

$$\Omega_2 - q + 1 > 1$$

ist. Dann wird

$$\varrho = O(e^{\frac{q}{a}})$$

und

$$\frac{q(2q-1)(\varrho-1)(\Omega_1+1)}{\Omega_2 - q + 1} = O(q^3 e^{\frac{q}{a}}) .$$

Es gibt also eine positive Konstante $c > 1$, so daß für alle q

$$\lambda_0 \leqq c^q$$

angenommen werden kann; damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 5. *Bedeute $z \neq 0$ entweder den reellen Logarithmus einer positiven rationalen Zahl oder die Zahl $2\pi i$. Dann gibt es hierzu eine positive Konstante $c > 1$ und zu jeder natürlichen Zahl q eine weitere positive Konstante $C(q)$, so daß jede Näherungsform*

$$R = A_0 + A_1 z + \cdots + A_q z^q, \qquad A = \max(|A_0|, |A_1|, \ldots, |A_q|) \geqq 1$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, der Ungleichung

$$|R| \geqq C(q)\, A^{-c^q}$$

genügt.

Eine ganz entsprechende Ungleichung muß auch noch gelten, wenn statt $2\pi i$ die Zahl π selbst genommen wird, wie sofort aus 2. folgt. Ferner lassen sich entsprechende Ungleichungen für die Logarithmen aller algebraischen Zahlen aufstellen.

Die Ungleichung in Satz 5 kann noch etwas verschärft werden. So z. B. kann bei $z = 2\pi i$ gezeigt werden, daß die Zahl c für genügend großes q mit einer beliebigen Zahl größer als $2e$ gleichgesetzt werden darf.

Göttingen, 15. November 1930.

Eingegangen 5. Januar 1931.