Über das Mass der Menge aller S-Zahlen

Kurt Mahler

Summary. In this paper, Mahler proves that the set of real numbers which are not S-numbers has Lebesgue zero measure.

Acknowledgement. The article

K. Mahler. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen. *Math. Ann.*, 106:131–139, 1932.

is reproduced here with permission of Springer Nature Customer Service Center (SNCSC).

Über das Maß der Menge aller S-Zahlen.

Von

Kurt Mahler in Göttingen.

Bei Untersuchungen über transzendente Zahlen wird man zu dem Begriff der S-Zahlen geführt[1]); man versteht hierunter transzendente Zahlen x, für die jeder Ausdruck

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \quad (a = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_m|) \geqq 1)$$

beliebigen Grades in x mit ganzen rationalen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ der Ungleichung

$$|a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m| \geqq \Gamma(m)\, a^{-\gamma m}$$

genügt, wobei $\gamma > 0$ nur von x, $\Gamma(m) > 0$ nur von x und m abhängt.

In Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß die Menge aller Liouvilleschen Zahlen das Maß Null besitzt, werden in dieser Note folgende beiden Sätze nachgewiesen[2]):

„*Das Linienmaß der Menge aller Punkte auf der reellen Achse, die keine S-Zahlen sind, ist gleich Null.*"

[1]) Siehe die Arbeiten:

J. Popken, Zur Transzendenz von e, Math. Zeitschr. **29**, S. 525.

K. Mahler, Über Beziehungen zwischen der Zahl e und Liouvilleschen Zahlen, Math. Zeitschr. **31**, S. 729.

K. Mahler, Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, Journal f. d. r. u. ang. Mathematik (im Druck).

In der ersten Arbeit wird gezeigt, daß e eine S-Zahl ist, in der dritten, daß auch e^z fur algebraisches $z \neq 0$ eine S-Zahl ist. In der zweiten Arbeit wird bewiesen, daß zwei transzendente Zahlen s und t, zwischen denen eine algebraische Beziehung mit algebraischen Koeffizienten $\sum_{h=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} A_{hk} s^h t^k = 0$ besteht, entweder zugleich S-Zahlen sind oder zugleich keine S-Zahlen.

[2]) In der Arbeit: „Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Perron", Math. Zeitschr. 22, S. 274–284, beweist Herr A. Khintchine den verwandten, aber tieferen Satz, daß die Menge aller reellen S-Zahlen mit $\gamma = 1$ das Maß Null besitzt.

9*

„Das Flächenmaß der Menge aller Punkte in der komplexen Zahlebene, die keine S-Zahlen sind, ist Null.“

Beim Beweis wird davon ausgegangen, daß ein Polynom $f(x)$ vom Grad $m \geqq 2$ mit ganzen rationalen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ und lauter einfachen Nullstellen für $|x| \leqq 3a$ der Ungleichung

$$|f(x)| + |f'(x)| \geqq \frac{1}{m \cdot 3^{m-1}(2m-2)!\, m^m a^{3m-4}}$$

$$(a = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_m|) \geqq 1)$$

genügt, wie man wegen des Nichtverschwindens der Diskriminante zeigt. Hieraus erhält man eine obere Schranke für das Maß der reellen oder der komplexen Punkte, die einer Ungleichung

$$|f(x)| \leqq \mu a^{-4m}$$

mit konstantem $\mu > 0$ genügen; aus diesen Abschätzungen kann man leicht die Behauptung ableiten.

1. Das Polynom m-ten Grades

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \qquad (a_m \neq 0,\ m \geqq 2)$$

besitze ganze rationale Koeffizienten mit

$$a = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_m|) \geqq 1$$

und lauter voneinander verschiedene Nullstellen. Seine Diskriminante

$$d = \frac{1}{a_m} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ a_1 & 2a_2 & \cdots & m a_m & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_1 & 2a_2 & \cdots & m a_m \end{vmatrix}$$

ist daher von Null verschieden, als ganze rationale Zahl also mindestens vom Absolutbetrag Eins. Setzt man

$$F_0(x) = \frac{1}{a_m} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & & \\ x & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots \\ x^{m-2} & \cdots & a_0 & & a_1 & \cdots & a_m \\ 0 & 2a_2 & 3a_3 & \cdots & m a_m & & \vdots \\ 0 & a_1 & 2a_2 & \cdots & (m-1)a_{m-1} & m a_m & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_1 & & 2a_2 & \cdots\ m a_m \end{vmatrix};$$

$$F_1(x)=\frac{1}{a_m}\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & & a_m & & \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & & a_{m-1} & a_m & \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & a_0 & & a_1 & \cdots & & a_m \\ 1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdots & m a_m & & & \vdots \\ x & a_1 & 2a_2 & \cdots & (m-1)a_{m-1} & m a_m & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ x^{m-1} & \cdots & & a_1 & & 2a_2 & \cdots & m a_m \end{vmatrix},$$

so besteht die Identität

$$f(x)\,F_0(x)+f'(x)\,F_1(x)=d.$$

Das Polynom $F_0(x)$ ist vom Grad $m-2$, das Polynom $F_1(x)$ vom Grad $m-1$ in x; die Koeffizienten der beiden Polynome sind absolut höchstens gleich

$$c_0(m)\,a^{2m-3} \quad \text{mit} \quad c_0(m)=(2m-2)!\,m^m,$$

wie eine triviale Abschätzung zeigt.

Wird $|x|\leqq 3a$ angenommen, so bestehen daher die Ungleichungen

$$|F_0(x)|\leqq c_0(m)\,a^{2m-3}\cdot(m-1)(3a)^{m-2}<c_0(m)\,a^{2m-3}\cdot m(3a)^{m-1};$$
$$|F_1(x)|\leqq c_0(m)\,a^{2m-3}\cdot m(3a)^{m-1},$$

und man erhält aus der vorigen Identität die Beziehung

$$|f(x)|+|f'(x)|\geqq 2\,c_1(m)\,a^{-(3m-4)}$$

mit

$$c_1(m)=\frac{1}{2m\cdot 3^{m-1}c_0(m)}=\frac{1}{2m\cdot 3^{m-1}(2m-2)!\,m^m}.$$

2. Sei μ ein echter Bruch mit $\mu\leqq c_1(m)$ und die Ungleichung

$$|f(x)|\leqq \mu\,a^{-(3m-4)}, \quad \text{d. h. erst recht} \quad |f(x)|\leqq 1$$

erfüllt. Wegen $a_m\neq 0$ ist dann

$$|x^m|\leqq 1+a(1+|x|+\dots+|x^{m-1}|)\leqq 2a\frac{|x|^m-1}{|x|-1}.$$

Diese Ungleichung verlangt, daß entweder

$$|x|\leqq 1$$

oder

$$|x|-1\leqq 2a\frac{|x|^m-1}{|x^m|}<2a$$

ist. Auf jeden Fall ist daher

$$|x|\leqq 3a.$$

Man darf folglich die obige Ungleichung zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ anwenden und gelangt zum

Hilfssatz 1. *Wenn das Polynom $f(x)$ der Ungleichung*

$$|f(x)| \leqq \mu a^{-(3m-4)} \qquad (0 \leqq \mu \leqq \min(1, c_1(m)) = c_1(m))$$

genügt, so befriedigt seine Ableitung $f'(x)$ die Ungleichung

$$|f'(x)| \geqq c_1(m) a^{-(3m-4)}.$$

3. Sei zunächst x reell angenommen. Die Menge der Punkte x auf der reellen Achse, für die

$$|f(x) \leqq \mu a^{-4m}, \quad \text{d. h. erst recht} \quad |f(x)| \leqq \mu a^{-(3m-4)}$$

ist, werde mit $M(f)$ bezeichnet. Nach dem vorigen Hilfssatz ist in $M(f)$

$$|f'(x)| \geqq c_1(m) a^{-(3m-4)}.$$

Offenbar setzt sich $M(f)$ aus endlichvielen getrennt liegenden Intervallen zusammen. In jedem dieser Intervalle genügt $f'(x)$ als stetige Funktion von x entweder überall der Ungleichung

$$f'(x) \geqq +c_1(m) a^{-(3m-4)}$$

oder überall der Ungleichung

$$f'(x) \leqq -c_1(m) a^{-(3m-4)}.$$

In einem beliebigen Teilintervall von $M(f)$ ist demnach $f(x)$ monoton wachsend oder monoton abnehmend; sind x_1 und x_2 seine beiden Endpunkte, so ist folglich seine Länge nach oben begrenzt durch

$$|x_1 - x_2| \leqq \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{c_1(m) a^{-(3m-4)}}.$$

In $M(f)$ kann aber offenbar $f(x)$ jeden Wert des Intervalls

$$(-\mu a^{-4m}, \quad +\mu a^{-4m})$$

höchstens m-mal annehmen; die Gesamtlänge von $M(f)$ muß demnach der Ungleichung

$$|M(f)| \leqq \frac{2m\mu a^{-4m}}{c_1(m) a^{-(3m-4)}} = c_2(m) \mu a^{-m-4}$$

mit

$$c_2(m) = 4m^2 3^{m-1} m^m (2m-2)!$$

genügen. Der Beweis setzte $m \geqq 2$ voraus; für $m = 1$ ist dagegen offenbar

$$|M(f)| \leqq 2\mu a^{-4} \leqq c_2(1) \mu a^{-4}.$$

Faßt man beide Ungleichungen zusammen, so erhält man den

Hilfssatz 2. *Die Punktmenge $M(f)$ auf der reellen Achse, in der* *das Polynom $f(x)$ der Ungleichung*

$$|f(x)| \leqq \mu a^{-4m} \qquad (0 \leqq \mu \leqq c_1(m))$$

genügt, besitzt eine Gesamtlänge

$$|M(f)| \leqq c_2(m)\,\mu\, a^{-(m+3)}.$$

4. Sei zu der festen natürlichen Zahl m die positive Zahl $\mu \leqq c_1(m)$ beliebig, aber fest gewählt. $f(x)$ durchlaufe alle Polynome von genau m-tem Grade mit ganzen rationalen Koeffizienten und lauter einfachen Nullstellen. Zu jedem dieser unendlichvielen Polynome gehört eine Punktmenge $M(f)$; die Vereinigungsmenge aller $M(f)$ werde mit $M_m(\mu)$ bezeichnet. Offenbar setzt sich $M_m(\mu)$ aus abzählbar vielen getrennt liegenden Intervallen zusammen. Es gibt zu jeder natürlichen Zahl a höchstens

$$(2a+1)^{m+1} \leqq 3^{m+1} a^{m+1}$$

„erlaubte" Polynome; also folgt aus Hilfssatz 2, daß der Gesamtinhalt von $M_m(\mu)$ höchstens gleich

$$M_m(\mu) \leqq \sum_{a=1}^{\infty} 3^{m+1} a^{m+1} \cdot c_2(m)\,\mu\, a^{-(m+3)} = 3^{m+1} \zeta(2)\, c_2(m)\,\mu$$

ist:

Hilfssatz 3. *Der Inhalt der Punktmenge $M_m(\mu)$ genügt für $\mu \leqq c_1(m)$ der Ungleichung*

$$|M_m(\mu)| \leqq c_3(m)\,\mu \qquad (c_3(m) = 4\,\zeta(2)\, m^2\, 3^{2m}\, m^m\, (2m-2)!).$$

5. Sei $f(x)$ jetzt ein beliebiges Polynom genau m-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten. Dann existiert eine Zerlegung

$$f(x) = \prod_{l=1}^{q} f_l(x),$$

wobei

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_q(x)$$

q Polynome in x etwa von den Graden

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_q, \qquad \sum_{l=1}^{q} m_l = m,$$

mit lauter einfachen Nullstellen sind; ihre Koeffizienten dürfen ohne Einschränkung ganz rational angenommen werden. Bedeutet $a^{(l)}$ das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von $f_l(x)$, so ist nach einem Hilfssatz von C. Siegel[3])

$$a^{(l)} \leqq \frac{m!}{m_l!}\, a.$$

[3]) Siehe die Arbeit: „Approximation algebraischer Zahlen" von C. Siegel, Math. Zeitschr. **10**, S. 176.

Sei jetzt in einem beliebigen Punkt x die Ungleichung

$$|f(x)| \leqq \mu\, a^{-4m}$$

erfüllt. Es ist klar, daß dann mindestens eine der Ungleichungen

$$|f_l(x)| \leqq \mu^{\frac{m_l}{m}} a^{-4m_l} \leqq \mu_l\, a^{(l)-4m_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, q)$$

erfüllt ist, wobei

$$\mu_l = \mu^{\frac{m_l}{m}} \left(\frac{m!}{m_l!}\right)^{4m_l}$$

gesetzt ist. Diese Ungleichungen sind gerade von der bisher betrachteten Form; die früheren Ergebnisse dürfen angewandt werden, wenn

$$\mu_l \leqq c_1(m_l) \qquad (l = 1, 2, \ldots, q)$$

ist. Diese Ungleichung ist gewiß erfüllt, wenn die m Ungleichungen

$$\mu \leqq \left(\frac{k!}{m!}\right)^{4m} c_1(k)^{\frac{m}{k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

zugleich bestehen; nach dem Wert von $c_1(k)$

$$c_1(k) = \frac{1}{2k\, 3^{k-1}(2k-2)!\, k^k}$$

hat die rechte Seite dieser Ungleichung offenbar den kleinsten Wert für $k = 1$, so daß die Annahme

$$\mu \leqq c_4(m) \qquad \left(c_4(m) = \frac{1}{2^m\, m!^{4m}}\right)$$

alle Bedingungen erfüllt.

Wenn

$$|f_l(x)| \leqq \mu_l\, a^{(l)-4m_l}$$

ist, so gehört der Punkt x nach den früheren Definitionen zur Menge $M_{m_l}(\mu_l)$, also zu einer der m Mengen

$$M_k\left(\mu^{\frac{k}{m}} \left(\frac{m!}{k!}\right)^{4k}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

also erst recht zu ihrer Vereinigungsmenge, die mit $N_m(\mu)$ bezeichnet sei. Aus Hilfssatz 3 folgt, daß der Gesamtinhalt von $N_m(\mu)$ höchstens gleich

$$|N_m(\mu)| \leqq \sum_{k=1}^{m} c_3(k) \left(\frac{m!}{k!}\right)^{4k} \mu^{\frac{k}{m}}$$

ist. Es werde

$$\mu = c_4(m)\, \varepsilon^m$$

gesetzt; die Zahl ε genügt dann der Bedingung

$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1.$$

Dann geht die Ungleichung für $N_m(\mu)$ über in

$$|N_m(\mu)| \leqq \sum_{k=1}^{m} c_3(k)\left(\frac{m!}{k!}\right)^{4k} c_4(m)^{\frac{k}{m}} \varepsilon^k$$

und erst recht

$$|N_m(\mu)| \leqq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_3(k)}{2^k k!^{4k}},$$

da die Reihe

$$c_5 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_3(k)}{2^k k!^{4k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\zeta(2) k^2 3^{2k} k^k (2k-2)!}{2^k k!^{4k}}$$

konvergiert.

Damit ist folgender Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 4. *$f(x) \mathrel{\mathrlap{\,|}{\equiv}} 0$ durchlaufe alle Polynome m-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten. Die Menge aller reellen Punkte x, in denen eine der unendlichvielen Ungleichungen*

$$|f(x)| \leqq c_4(m)\, \varepsilon^m a^{-4m} \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1)$$

erfüllt ist, setzt sich aus abzählbar vielen getrennt liegenden Intervallen zusammen, deren Gesamtlänge kleiner als

$$c_5\, \varepsilon$$

ist.

6. Der vorige Hilfssatz führt zu einer allgemeinen Aussage über die Häufigkeit der S-Zahlen.

Es durchlaufe $f(x) \mathrel{\mathrlap{\,|}{\equiv}} 0$ alle Polynome beliebigen Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten; ε sei ein positiver echter Bruch und $N(\varepsilon)$ gleich der Menge aller reellen x, in denen irgendeine der unendlichvielen Ungleichungen

$$|f(x)| \leqq \frac{c_4(m)}{m^{2m}} \varepsilon^m a^{-4m}$$

besteht. Demnach ist $N(\varepsilon)$ die Vereinigungsmenge aller Mengen

$$N_m\left(\frac{c_4(m)}{m^{2m}} \varepsilon^m\right) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

und setzt sich daher aus abzählbar vielen getrennt liegenden Intervallen zusammen, deren Gesamtinhalt nach Hilfssatz 4 höchstens gleich

$$\sum_{1}^{\infty} c_5 \frac{\varepsilon}{m^2} = c_5\, \zeta(2)\, \varepsilon$$

ist.

Die Komplementärmenge zu $N(\varepsilon)$ in der Menge aller reellen x enthält nach der Definition der S-Zahlen offenbar abgesehen von höchstens abzählbar vielen algebraischen Zahlen nur S-Zahlen, und zwar mit $\gamma \leqq 4$. Da für genügend kleines ε die Menge $N(\varepsilon)$ einen beliebig kleinen Gesamtinhalt besitzt, erst recht also die Menge aller Zahlen in $N(\varepsilon)$, die keine S-Zahlen sind, so ist damit folgender Satz bewiesen.

Satz 1. *Das Maß aller reellen Zahlen, die keine S-Zahlen sind, ist gleich Null.*

Allgemeiner folgt, daß „fast jede" reelle Zahl S-Zahl mit $\gamma \leqq 4$ ist. Vermutlich kann diese Schranke bis auf jede Zahl oberhalb Eins herabgedrückt werden.

7. Der vorige Satz besitzt ein Analogon im Gebiete der komplexen Zahlen.

Es sei wieder $f(x)$ ein Polynom genau m-ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten ohne mehrfache Nullstellen, und mit $M(f)$ werde diesmal die Menge aller *reellen und komplexen* Zahlen verstanden, die der Ungleichung

$$|f(x)| \leqq \mu a^{-4m}$$

genügen. Nach Hilfssatz 1 ist wieder in $M(f)$

$$|f'(x)| \geqq c_1(m)\, a^{-(3m-4)}.$$

Die neue Punktmenge $M(f)$ setzt sich offenbar aus endlichvielen Flächenstücken in der komplexen Ebene zusammen, deren Rand von endlichvielen analytischen Kurvenbögen gebildet wird. Die zu $f(x)$ inverse Funktion $g(y)$ bildet den m-mal überdeckten Kreis

$$|y| \leqq \mu a^{-4m}$$

in der y-Ebene, d. h. eine Punktmenge vom Inhalt

$$m \cdot \pi \mu^2 a^{-8m}$$

konform, aber nicht notwendig schlicht, ab auf $M(f)$. Nach der Lehre von der konformen Abbildung besteht aber folgende Beziehung:

„*Sei durch $y = f(x)$ ein infinitesimales Flächenstück F_x in der x-Ebene um den Punkt x herum konform auf ein infinitesimales Flächenstück F_y in der y-Ebene abgebildet; dann gilt für ihre Flächeninhalte*

$$\frac{F_x}{F_y} = |f'(x)|^{-2}.\text{“}$$

Indem man diese Beziehung integriert und beachtet, daß in $M(f)$

$$|f'(x)|^{-1} \leqq c_1(m)^{-1} a^{3m-4}$$

ist, ergibt sich für den Inhalt dieser Punktmenge die obere Schranke

$$|M(f)| \leqq c_1(m)^{-2} a^{6m-8} \cdot m\pi\mu^2 a^{-8m} = c_6(m)\,\mu^2 a^{-(2m+8)}.$$

Auch diese Ungleichung ist wieder nur für $m \geqq 2$ erfüllt; für $m = 1$ hat man

$$|M(f)| \leqq \pi \mu^2 a^{-8}.$$

Man kommt somit zu einem ganz analogen Ergebnis wie Hilfssatz 2; von hier aus lassen sich aber alle früheren Ableitungen offensichtlich fast ohne Änderung übertragen. Somit gilt auch folgender Satz:

Satz 2. *Das Flächenmaß aller reellen oder komplexen Zahlen x, die keine S-Zahlen sind, ist gleich Null.*

Wahrscheinlich sind sogar „fast alle" reellen oder komplexen Zahlen S-Zahlen mit $\gamma \leqq \frac{1}{2} + \varepsilon$, wo ε irgendeine positive Konstante bedeutet.

Krefeld, den 16. April 1931.

(Eingegangen am 24. 4. 1931.)