Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor-Koeffizienten rationaler Funktionen

Kurt Mahler

Summary. Herein, Mahler shows that, if

$$R(z) = \sum_{n \geqslant 0} G(n) z^n$$

is a rational function having algebraic coefficients, infinitely many of which are zero, then there is a natural number r and at most r non-negative rational integers $r_1, r_2, \ldots, r_\varrho$, pairwise incongruent modulo r, such that only finitely many $G(n)$, with $n \equiv r_\tau \pmod{r}$ and $n \geqslant r_\tau$ for $\tau = 1, 2, \ldots, \varrho$, vanish.

Acknowledgement. The article

> K. Mahler. Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor-Koeffizienten rationaler Funktionen. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, 38:50–60, 1935.

is reproduced here with kind permission of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences.

vers l'infini $\xi \to +\infty$ et ayant pour image dans Δ une courbe $L_{\varepsilon,h}$ s'étendant vers l'infini $\tau \to +\infty$ (No. 2), et composée d'arcs partiels des arcs $\beta'\beta''$. Si l'on parcourt $K_{\varepsilon,h}$ dans la direction des ξ croissants on a les domaines $\bar{\Gamma}_a$ (No. 5) à sa gauche. Donc en parcourant $L_{\varepsilon,h}$ dans la direction correspondante, c'est à dire tel que $\tau \to +\infty$, on a les images des $\bar{\Gamma}_a$ à sa gauche. Il en résulte que les points β, β', β'' sont sur la droite $\nu = +\frac{\pi}{2}$. Par suite sur $K_{\varepsilon,h}$:

$$|\nu(\zeta) - \eta| < M\varepsilon + \frac{\delta^2}{4} + \delta$$

Pour les mêmes raisons il existe dans Γ une courbe $K^*_{\varepsilon,h}$ entre les droites $\eta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\delta^2}{4}$ et $-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta^2}{4} + \delta$, s'étendant vers l'infini $\xi \to +\infty$, sur laquelle

$$|\nu(\zeta) - \eta| < M\varepsilon + \frac{\delta^2}{4} + \delta$$

Faisons tendre ε et h vers zéro; alors δ tend vers zéro, et M a été fixé indépendant de ε et h.

Toute bande $|\eta| < \gamma < \frac{\pi}{2}$ est pour ξ assez grand entre les courbes $K_{\varepsilon,h}$ et $K^*_{\varepsilon,h}$ pourvu que ε et h soient assez petits. Parce que sur ces deux courbes $|\nu - \eta| < M\varepsilon + \frac{\delta^2}{4} + \delta$, on a dans toute telle bande

$$\lim_{\xi \to +\infty} (\nu - \eta) = 0.$$

Mathematics. — *Eine arithmetische Eigenschaft der* TAYLOR-*koeffizienten rationaler Funktionen.* Von KURT MAHLER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT.)

(Communicated at the meeting of December 22, 1934).

In einer Note: „Ueber die Coefficienten in der TAYLORschen Entwicklung rationaler Funktionen" (Tôhoku Math. Journal, 20 (1921) 26—31) griff vor einigen Jahren C. SIEGEL die Frage an, welche rationalen Funktionen unendlich viele verschwindenden TAYLOR-koeffizienten besitzen, und leitete speziell alle rationalen Funktionen dritter Ordnung mit dieser Eigenschaft ab, deren Koeffizienten sämtlich rational sind. Sein

Beweis benutzte den THUEschen Satz. In einer vor kurzem erschienenen Arbeit: "Note on an arithmetical property of recurring series" (Math. Z., 39 (1934) 211—214) zeigte M. WARD, dass man statt dessen auch einen bekannten Satz von DELAUNAY und NAGELL über kubische Binärformen benutzen kann, um zum gleichen Ergebnis zu gelangen; ausserdem gewann WARD mittels des THUEschen Satzes ein weiteres spezielles Ergebnis für rationale Funktionen vierter Ordnung.

In der vorliegenden Arbeit zeige ich folgenden algemeineren Satz:

"*Wenn die rationale Funktion*

$$R(Z) = \sum_{x=0}^{\infty} G(x)\, Z^x$$

lauter algebraische TAYLOR-*koeffizienten besitzt und hiervon unendlich viele verschwinden, so gibt es eine natürliche Zahl r und hierzu höchstens r nicht negative ganze rationale Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_\rho$, die zu je zweien inkongruent mod r sind, derart dass alle* TAYLOR-*koeffizienten $G(x)$, deren Index x zu einer der arithmetischen Reihen*

$$x \equiv r_\tau \pmod r,\ x \geqq r_\tau \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

gehört und ausserdem nur noch höchstens endlichviele weitere verschwinden."

Von diesem Satz wird dann eine Anwendung auf *rekurrierende Reihen* mit algebraischen Gliedern gemacht und eine hinreichende Bedingung abgeleitet, damit in einer solchen Reihe jedes Glied nur höchstens endlich oft vorkommt.

Der Beweis benutzt nicht den THUEschen Satz, sondern statt dessen eine neue Art der Anwendung p-adischer Zahlen auf Diophantische Probleme, die zu Ende vorigen Jahres von TH. SKOLEM veröffentlicht wurde, und die dazu bestimmt scheint, bei vielen Fragen wesentlich mehr zu liefern als die THUEsche Methode; siehe: „Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf Diophantische Gleichungen (Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Mat. Naturv. Klasse (1933) No. 6)." Ich setze die Kenntnis dieser SKOLEMschen Arbeit nicht voraus, sondern entwickle alles, was von ihr gebraucht wird.

1.) Bei den folgenden Ueberlegungen wird Gebrauch gemacht von dem $\mathfrak{p}$-adischen Analogon zu einem bekannten Satz der Funktionentheorie, das folgendermassen lautet:

„*Sei $\mathfrak{K}$ ein endlicher algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{p}$ ein Primideal hieraus, $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ die $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ der Ring aller ganzen Elemente aus $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$. Wenn die Potenzreihe*

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots.$$

Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ hat und für jede Zahl z aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ konvergiert, so hat sie allein dann unendlich viele Nullstellen in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, wenn sie für jede ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahl verschwindet."

Sei nämlich

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$$

eine unendliche Folge von verschiedenen Nullstellen von $f(z)$ in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Aus den bekannten Eigenschaften der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen folgt, dass sich aus dieser unendlichen Zahlfolge eine ebenfalls unendliche Teilfolge

$$\zeta_{\nu_1}, \zeta_{\nu_2}, \zeta_{\nu_3}, \ldots$$

von lauter verschiedenen Nullstellen von $f(z)$ auswählen lässt, die gegen eine $\mathfrak{p}$-adische Zahl ζ konvergieren; da alle Glieder der Folge in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ liegen, ist auch ζ eine ganze $\mathfrak{p}$-adische Zahl.

Nach der TAYLORschen Reihenentwicklung, die auch im Körper $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ erhalten bleibt, ist alsdann für jedes z aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$

$$f(z) = f_0^* + f_1^*(z-\zeta) + f_2^*(z-\zeta)^2 + \ldots,$$

wo zur Abkürzung

$$f_i^* = \frac{f^{(i)}(\zeta)}{i!} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wurde. In dieser Reihenentwicklung werde jetzt für z der Reihe nach jedes Glied der Folge

$$\zeta_{\nu_1}, \zeta_{\nu_2}, \zeta_{\nu_3}, \ldots$$

eingesetzt; da alle Zahlen $f(\zeta_{\nu_i})$ verschwinden und ferner die Zahlen

$$\zeta_{\nu_1}-\zeta, \zeta_{\nu_2}-\zeta, \zeta_{\nu_3}-\zeta, \ldots$$

nach Voraussetzung gegen Null streben, ergibt sich dann in bekannter Weize sukzessive

$$f_0^* = 0, f_1^* = 0, f_2^* = 0, \ldots$$

und also das identische Verschwinden von $f(z)$ für alle Zahlen aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$.

2.) Bedeute nunmehr

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

endlich viele nichtverschwindende algebraische Zahlen,

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$$

ein System von ebenso vielen Polynomen in x, die nicht identisch Null sind und algebraische Koeffizienten besitzen. Die Funktion

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j^x P_j(x)$$

ist alsdann insbesondere für alle ganzen rationalen Zahlen x sinnvoll. Es werde angenommen, dass $F(x)$ verschwindet, wenn x gleich einer Zahl der unendlichen Folge verschiedener ganzer rationaler Zahlen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

die alle $\geqslant 0$ sind, ist; wir wollen eine einfache Eigenschaft von $F(x)$ ableiten, die hieraus folgt.

Zu diesem Zweck verstehen wir unter $\mathfrak{K}$ denjenigen endlichen algebraischen Zahlkörper etwa vom Grad s, der von den Zahlen

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

und den Koeffizienten der Polynome

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$$

erzeugt wird. Weiter bedeute $\mathfrak{p}$ irgend ein Primideal dieses Körpers, das zu den Zählern und Nennern der gebrochenen Hauptideale

$$(A_1), (A_2), \ldots, (A_m)$$

teilerfremd ist; ein solches Primideal (und sogar unendlich viele verschiedene mit dieser Eigenschaft) gibt es natürlich. Seine Norm hat die Gestalt

$$N(\mathfrak{p}) = p^f,$$

wo p die zu $\mathfrak{p}$ gehörige natürliche Primzahl und f den Grad von $\mathfrak{p}$ bezeichnet. Sei e die Ordnung von $\mathfrak{p}$, d.h. die grösste natürliche Zahl, so dass $\mathfrak{p}^e$ noch in p aufgeht.

Wie in 1.) sei $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$ wieder die $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ die Gesamtheit aller ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen.

3.) Sei jetzt k eine natürliche Zahl, die der Bedingung

$$k > \frac{e}{p-1}$$

genügt, und alsdann zur Abkürzung

$$r = \varphi(\mathfrak{p}^k) = N(\mathfrak{p}^k)\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)$$

der zu $\mathfrak{p}^k$ gehörige Wert der Eulerschen Funktion. Für jede Zahl α aus

$\mathfrak{K}$, deren Zähler und Nenner zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd sind, gilt demnach die Kongruenz

$$\alpha^r \equiv 1 \ (mod\ \mathfrak{p}^k),$$

und es ist insbesondere

$$A_j^r \equiv 1 \ (mod\ \mathfrak{p}^k) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Bedeute π eine Zahl aus $\mathfrak{K}$, die wohl durch $\mathfrak{p}$, nicht aber durch $\mathfrak{p}^2$ teilbar ist; setzen wir

$$A_j^r = 1 + \pi^k \alpha_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

so werden demnach alle so bestimmten Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

in $\mathfrak{K}$ liegen und ganz $\mathfrak{p}$-adisch sein.

Ist nun z eine nichtnegative ganze rationale Zahl, so wird nach der Binomialformel

$$A_j^{rz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_j^\nu \cdot \pi^{k\nu} \binom{z}{\nu} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

In dieser Entwicklung sind aber die Binomialkoeffizienten

$$\binom{z}{\nu}$$

Polynome in z; die Ausdrücke

$$\nu! \binom{z}{\nu}$$

erhalten die Form eines Polynomes in z mit ganzen rationalen Koeffizienten. Weiter ist bekanntlich der Exponent der höchsten Potenz von p, der in $\nu!$ aufgeht, gleich

$$\left[\frac{\nu}{p}\right] + \left[\frac{\nu}{p^2}\right] + \ldots \leqslant \frac{\nu}{p-1},$$

der Exponent der höchsten Potenz von $\mathfrak{p}$, der hierin aufgeht, also

$$\leqslant \frac{e\nu}{p-1}.$$

Aus der an k gestellten Bedingung folgt somit, dass die Koeffizienten der Polynome

$$\alpha_j^\nu \cdot \pi^{k\nu} \binom{z}{\nu}$$

mit wachsendem ν gleichmässig in Bezug auf die $\mathfrak{p}$-adische Bewertung gegen Null streben; die sämtlichen Reihen

$$A_j^{rz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_j^{\nu} \pi^{k\nu} \binom{z}{\nu} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

sind also für jedes z aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ konvergent.

4.) Wir hatten angenommen, dass $F(x)$ verschwindet, wenn x zu der unendlichen Folge von nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

die alle verschieden sind, gehört. Jede dieser Zahlen werde auf die Gestalt

$$x_i = r_i + r z_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

gebracht, wobei

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

eine neue Folge von über alle Grenzen wachsenden nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen bilden, während jedes Glied der Folge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

gleich einer der r Zahlen

$$0, 1, \ldots, r-1$$

ist.

Weil die r-Folge aus unendlich vielen Elementen besteht, muss mindestens eine Zahl in ihr unendlich oft vorkommen. Seien

$$r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(\varrho)} \qquad (1 \leqq \varrho \leqq r)$$

diejenigen der Zahlen

$$0, 1, \ldots, r-1,$$

die in ihr wirklich unendlich oft auftreten. Zu jedem dieser $r^{(h)}$ gehört dann eine unendliche Folge wachsender Indizes

$$i_1^{(h)}, i_2^{(h)}, i_3^{(h)}, \ldots \qquad (h = 1, 2, \ldots, \varrho),$$

für die

$$r_{i_\tau^{(h)}} = r^{(h)} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, \varrho \\ \tau = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

und demnach

$$x_{i_\tau^{(h)}} = r^{(h)} + r z_{i_\tau^{(h)}} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, \varrho \\ \tau = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

ist; es ist klar, dass auch die nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen

$$z_{i_\tau^{(h)}}$$

mit wachsendem τ gegen unendlich streben.

5.) Für jeden der Indizes $h = 1, 2, \ldots, \varrho$ werde nun die neue Funktion

$$f_h(z) = F(r^{(h)} + rz) = \sum_{j=1}^{m} A_j^{r^{(h)}+rz} P_j(r^{(h)} + rz)$$

eingeführt; diese Funktion $f_h(z)$ besitzt dann die unendlich vielen Nullstellen

$$z_{i_1^{(h)}},\ z_{i_2^{(h)}},\ z_{i_3^{(h)}}, \ldots,$$

welche sämtlich verschiedene nichtnegative ganze rationale Zahlen sind.

Aus der Gestalt

$$f_h(z) = \sum_{j=1}^{m} A_j^{r^{(h)}} \cdot A_j^{rz} \cdot P_j(r^{(h)} + rz)$$

und dem Ergebnis in 3.) ergibt sich die unendliche Reihenentwicklung

$$f_h(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_j^{r^{(h)}} \alpha_j^{\nu} \pi^{k\nu} \binom{z}{\nu} P_j(r^{(h)} + rz),$$

die für alle z aus $\mathfrak{J}\mathfrak{p}$ gültig ist; diese Reihenentwicklung lässt sich in eine im gleichen Bereich konvergente Potenzreihe nach z umordnen, da bekanntlich eine $\mathfrak{p}$-adisch konvergente Reihe stets absolut konvergiert.

Auf $f_h(z)$ darf demnach der Hilfssatz in 1.) angewandt werden; seine Voraussetzungen sind gewiss erfüllt, da sogar unendlich viele ganze rationale Nullstellen der Funktion vorhanden sind. Also muss für jede Zahl z aus $\mathfrak{J}\mathfrak{p}$ diese Funktion $f_h(z)$ identisch Null sein; um so mehr verschwindet sie, wenn für z eine nichtnegative ganze rationale Zahl eingesetzt wird, und wir erhalten also schliesslich das Resultat:

„*Wenn die Funktion*

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j^x P_j(x)$$

für unendlich viele nichtnegative ganze rationale Zahlen $x = x_i$ *verschwindet, so gibt es eine natürliche Zahl* r *und endlich viele Zahlen aus der Folge* $0, 1, \ldots, r-1$, *etwa* $r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(\rho)}$, *die alle von einander verschieden sind, so dass* $F(x)$ *an allen Stellen*

$$r^{(1)} + rz,\quad r^{(2)} + rz, \ldots,\quad r^{(\rho)} + rz \qquad (z = 0, 1, 2, \ldots)$$

57

und ausserdem nur noch an höchstens endlich vielen weiteren nichtnegativen ganzen rationalen Stellen gleich Null ist."

Die letzte Zusatzbemerkung ergibt sich aus unserem Beweis, da jede arithmetische Reihe

$$x \equiv r^* \ (mod\ r),\ x \geqslant 0,$$

in der unendlich viele Nullstellen von $F(x)$ liegen, überhaupt nur aus solchen Nullstellen besteht.

6.) Das vorige Ergebnis führt zu einem Satz über die TAYLOR-koeffizienten rationaler Funktionen:

„Die rationale Funktion $R(Z)$ sei in der Umgebung von $Z=0$ regulär und besitze hier eine Potenzreihe

$$R(Z) = \sum_{x=0}^{\infty} G(x) Z^x$$

mit algebraischen Koeffizienten. Wenn von diesen Koeffizienten unendlich viele gleich Null sind, so gibt es eine natürliche Zahl r und ausserdem höchstens r nichtnegative ganze rationale Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_\rho$, die zu je zweien inkongruent mod r sind, so dass alle Koeffizienten $G(x)$, deren Index x zu einer der arithmetischen Reihen

$$x \equiv r_\tau \ (mod\ r),\ x \geqslant r_\tau \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

gehört und ausserdem nur noch höchstens endlich viele weitere verschwinden".

Denn als rationale Funktion ist $R(Z)$ der Quotient zweier Polynome, und deren Koeffizienten dürfen algebraisch angenommen werden, da die TAYLOR-koeffizenten von $R(Z)$ algebraisch sind. Demnach sind auch die Pole von $R(Z)$ algebraisch, und aus der Partialbruchzerlegung dieser Funktion folgt somit, dass die TAYLOR-koeffizienten $G(x)$ für genügend grosses x gleich einer der früher betrachteten Funktionen

$$F(x) = \sum_{=1}^{m} A_j^x P_j(x)$$

mit algebraischen Zahlen

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

und nicht identisch verschwindenden Polynomen

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$$

mit algebraischen Koeffizienten ist. Der Satz in 5.) zeigt also die Behauptung.

7.) Wenn die sämtlichen TAYLOR-koeffizienten von

$$R(Z) = \sum_{x=0}^{\infty} G(x) Z^x,$$

deren Indizes der arithmetischen Reihe

$$x \equiv r^* \ (mod\ r),\ x \geqslant r^* \geqslant 0$$

angehören, den Wert Null haben, so muss die Funktion

$$\sum_{\lambda=0}^{r-1} e^{-\frac{2\pi i}{r} r^* \lambda} R\left(e^{\frac{2\pi i}{r}\lambda} Z\right)$$

offenbar in ein Polynom ausarten. Sind also die verschiedenen im Endlichen gelegenen Pole von $R(Z)$ der Reihe nach gleich

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n,$$

so muss es zu jedem dieser Pole ζ_μ einen zweiten, etwa ζ_{ν_μ} mit $\nu_\mu \neq \mu$, geben, so dass der Quotient $\frac{\zeta_\mu}{\zeta_{\nu_\mu}}$ gleich einer r-ten Einheitswurzel ist, da sich andernfalls die Pole der verschiedenen Funktionen

$$R\left(e^{\frac{2\pi i}{r}\lambda} Z\right) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1)$$

nicht gegen einander heben können. Wir kommen also zu dem Satz:

„Wenn eine rationale Funktion unendlich viele verschwindende TAYLOR-*koeffizienten hat und ihre sämtlichen* TAYLOR-*koeffizienten algebraische Zahlen sind, wenn ferner ihre verschiedenen im Endlichen gelegenen Pole der Reihe nach gleich*

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$$

sind, so lässt sich jedem dieser Pole ζ_μ ein zweiter von ihm verschiedener Pol ζ_{ν_μ} zuordnen, derart dass der Quotient $\frac{\zeta_\mu}{\zeta_{\nu_\mu}}$ eine Einheitswurzel ist. Die Anzahl der Pole muss also insbesondere mindestens gleich Zwei sein."

8.) Aus dem vorigen Satz folgt speziell:

"Die rationale Funktion

$$S(Z) = \sum_{x=0}^{\infty} H(x) Z^x$$

habe algebraische TAYLOR-*koeffizienten. Sind*

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$$

ihre verschiedenen Pole ($n \geqslant 1$), *so werde angenommen, dass für* $n=1$ *der einzige vorhandene Pol keine Einheitswurzel ist, und dass für* $n \geqslant 2$ *einer dieser Pole, etwa* ζ_1, *selbst keine Einheitswurzel darstellt und mit den übrigen Polen Verhältnisse*

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1}, \frac{\zeta_3}{\zeta_1}, \ldots, \frac{\zeta_n}{\zeta_1}$$

bildet, die auch keine Einheitswurzeln sind. Dann gilbt es höchstens endlich viele TAYLOR*-koeffizienten* $H(x)$, *die den gleichen Wert besitzen. Sind ferner alle* TAYLOR*-koeffizienten* $H(x)$ *ganze algebraische Zahlen und bedeutet* $H'(x)$ *das Maximum aus den Absolutbeträgen von* $H(x)$ *und den sämtlichen hierzu konjugierten algebraischen Zahlen, so wächst* $H'(x)$ *für* $x \to \infty$ *über alle Grenzen."*

Es ist zunächst nach 7.) klar, dass höchstens endlichviele $H(x)$ verschwinden können. Sei dagegen a eine von Null verschiedene algebraische Zahl; die rationale Funktion

$$S(Z) - \frac{a}{1-Z} = \sum_{x=0}^{\infty} (H(x) - a) Z^x$$

besitzt dann die TAYLOR-koeffizienten $H(x)-a$, und die verschiedenen Pole dieser Funktion sind gleich

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, 1.$$

Da nach Voraussetzung keines der Verhältnisse

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1}, \frac{\zeta_3}{\zeta_1}, \ldots, \frac{\zeta_n}{\zeta_1}, \frac{1}{\zeta_1}$$

gleich einer Einheitswurzel ist, folgt aus 7.), dass die Gleichung

$$H(x) - a = 0$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen $x \geqslant o$ besitzt.

Sind ferner alle $H(x)$ ganz algebraisch, so kann es nur endlich viele ganze rationale $x \geqslant o$ geben, für die $H'(x)$ unterhalb einer vorgegebenen positiven Schranke liegt. Denn alle Zahlen $H(x)$ gehören einem gewissen endlichen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ an; in diesem Körper gibt es aber bekanntlich nur höchstens endlich viele ganze algebraische Zahlen, die samt ihren Konjugierten von beschränktem Absolutbetrag sind.

Der letzte Satz macht eine Aussage über das Wachstum der Glieder von rekurrierenden Reihen mit algebraischen Elementen.

9.) Der Satz in 5.) gestattet nicht nur Anwendungen auf die TAYLOR-koeffizienten rationaler Funktionen, sondern kann auch auf andere Funktionsklassen angewandt werden.

60

Seien, um ein Beispiel einer weiteren Anwendung zu geben,

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

endlich viele nichtverschwindende algebraische Zahlen,

$$P_j(x) = \sum_{i=0}^{p_j-1} a_{ij} A_j^{-i} \binom{x}{i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

ebenso viele nicht identisch verschwindende Polynome in x mit algebraischen Koeffizienten. Die TAYLOR-koeffizienten der Funktion

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=0}^{p_j-1} a_{ij} \frac{Z^i}{i!} \right) e^{A_j Z} = \sum_{x=0}^{\infty} F(x) \frac{Z^x}{x!}$$

haben offenbar den Wert

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j^x P_j(x),$$

sind also genau von der früher betrachteten Gestalt. Nach 5.) folgt demnach der Satz:

"Sind

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

endlich viele algebraische Zahlen ungleich Null,

$$A_1(Z), A_2(Z), \ldots, A_m(Z)$$

ebenso viele nicht identisch verschwindende Polynome in Z mit algebraischen Koeffizienten, und hat die Funktion

$$\sum_{j=1}^{m} A_j(Z) e^{A_j Z} = \sum_{x=0}^{\infty} F(x) Z^x$$

unendlich viele TAYLOR*-koeffizienten, die gleich Null sind, so gibt es eine natürliche Zahl r und ausserdem höchstens r nichtnegative ganze rationale Zahlen $r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(\rho)}$, die zu je zweien inkongruent mod r sind, so dass alle Koeffizienten $F(x)$, deren Index x zu einer der arithmetischen Reihen*

$$x \equiv r^{(\tau)} \ (mod\ r), \ x \geqq r^{(\tau)} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, \rho)$$

gehört und weiter nur noch höchstens endlich viele andere den Wert Null haben."

Groningen, December 1934.