

EIN NEUES PRINZIP FÜR TRANSZENDENZBEWEISE

JAN POPKEN AND KURT MAHLER

SUMMARY. In this paper, Mahler and Popken extend a result in Popken's dissertation. In particular, they show that, for any q with $0 < |q| < 1$, at least one of the three numbers

$$\sum_{n \geq 1} \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^4}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^6}$$

is a transcendental number.

ACKNOWLEDGEMENT. The article

J. Popken and K. Mahler. Ein neues Prinzip für Transzendenzbeweise. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, 38:864–871, 1935.

is reproduced here with kind permission of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. This material is excluded from reuse and has not been licensed under the CCBY licence of the full work, no reproduction of any kind for this material is permitted without permission from the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences.

Mathematics. — *Ein neues Prinzip für Transzendenzbeweise.* Von J. POPKEN und K. MAHLER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of September 28, 1935).

Der erste Verfasser zeigte in seiner Dissertation u. a. das folgende Ergebnis ¹⁾:

Satz 12: *Stellt die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

mit algebraischen Koeffizienten a_h eine im Ursprung reguläre analytische Funktion dar, die einer eigentlichen algebraischen Differentialgleichung genügt, so ist mit einem geeignet gewählten $c > 0$ für $h \geq 2$

$$\text{entweder } a_h = 0 \text{ oder } |a_h| \geq e^{-c h (\log h)^2}.$$

Dieser Satz kann in manchen Fällen zu Transzendenzbeweisen benutzt werden; denn genügt eine vorgegebene Potenzreihe einer algebraischen Differentialgleichung und streben ihre Koeffizienten a_h genügend schnell gegen Null, so können diese Koeffizienten, die von nur endlich vielen Zahlen algebraisch abhängen, nicht alle algebraisch sein.

Zu besonders bemerkenswerten Anwendungen gelangt man bei manchen Funktionen aus der Theorie der elliptischen Funktionen; ein solches Beispiel, das aber durchaus nicht vereinzelt dasteht, wollen wir in dieser Arbeit im Einzelnen behandeln. Wir werden nämlich zeigen, dass für jedes beliebige q mit

$$0 < |q| < 1$$

mindestens eine der drei Zahlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \quad (h = 1, 2, 3)$$

transzendent ist.

Die Methode der vorliegenden Note stammt vom ersten Verfasser, die Durchführung des Beispiels vom zweiten.

¹⁾ J. POPKEN, Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen, Diss. Groningen 1935, S. 88.

1. Die WEIERSTRASSsche σ -Funktion gestattet die Darstellung ²⁾

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^2 \frac{\pi n \omega'}{\omega}} \right).$$

Wird

$$q = e^{\frac{i\pi\omega'}{\omega}}$$

gesetzt, so dass q der Ungleichung

$$0 < |q| < 1$$

genügt, so folgt

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4q^{2n} \sin^2 \frac{\pi u}{2\omega}}{(1-q^{2n})^2} \right).$$

Führen wir die neue Veränderliche

$$x = 2i \sin \frac{\pi u}{2\omega}$$

und die beiden Funktionen

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^{2n} x^2}{(1-q^{2n})^2} \right), \quad F(x) = -\log f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{q^{2n} x^2}{(1-q^{2n})^2} \right)$$

ein, so wird also

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma(u) = \frac{\omega}{\pi i} x f(x), \quad \log \sigma(u) - \frac{\eta u^2}{2\omega} = \log \frac{\omega}{\pi i} + \log x - F(x). \quad (1)$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} \right|$$

konvergiert, so stellt $f(x)$ eine ganze Funktion von x mit unendlich vielen Nullstellen dar; $f(x)$ ist also eine ganze *transzendente* Funktion, so dass in der TAYLORreihe

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{2h}$$

²⁾ HALPHEN, *Traité des Fonctions elliptiques* I, S. 400, zweite Formel von (21).

unendlich viele Koeffizienten a_h von Null verschieden sind. Diese Koeffizienten lassen sich explizit darstellen in der Form

$$a_0 = 1, \quad a_h = (-1)^h \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_h} \frac{q^{2(n_1+n_2+\dots+n_h)}}{\{(1-q^{2n_1})(1-q^{2n_2})\dots(1-q^{2n_h})\}^2} \\ (h = 1, 2, 3, \dots),$$

wo die Summation über alle Systeme von h natürlichen Zahlen n_1, n_2, \dots, n_h mit $n_1 < n_2 < \dots < n_h$ erstreckt wird; ihre Absolutbeträge besitzen daher die obere Schranke

$$|a_h| \leq \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} \dots \sum_{n_h=h}^{\infty} \frac{|q|^{2(n_1+n_2+\dots+n_h)}}{(1-|q|^2)^{2h}} \leq \\ \leq \frac{|q|^{2(1+2+\dots+h)}}{(1-|q|^2)^{2h}} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} |q|^{2\nu_1} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} |q|^{2\nu_2} \dots \sum_{\nu_h=0}^{\infty} |q|^{2\nu_h} = \frac{|q|^{2(1+2+\dots+h)}}{(1-|q|^2)^{3h}} \\ (h = 1, 2, 3, \dots),$$

so dass für jedes noch so grosse positive c

$$|a_h| = o(e^{-c h (\log h)^2})$$

ist. Wir werden im folgenden Paragraphen zeigen, dass $f(x)$ einer algebraischen Differentialgleichung genügt. Auf Grund von Satz 12 können daher nicht alle Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

algebraisch sein.

Entsprechenderweise hat $F(x)$ eine TAYLORreihe

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} A_h \frac{x^{2h}}{h}$$

mit den Koeffizienten

$$\frac{A_h}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \quad (h = 1, 2, 3, \dots).$$

Aus

$$f(x) = e^{-F(x)}, \quad F(0) = 0$$

ist leicht abzuleiten, dass jeder Koeffizient a_h ein Polynom in A_1, A_2, \dots, A_h mit rationalen Koeffizienten ist³⁾. Also folgt

„Nicht alle Zahlen

$$A_h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

sind für $0 < |q| < 1$ algebraisch“.

³⁾ Siehe z.B. J. POPKEN, loc. cit. S. 106.

2. Man gelangt folgendermassen zu der Differentialgleichung für $f(x)$:
Es ist bekanntlich

$$p(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2},$$

$$p'(u)^2 = 4p(u)^3 - g_2 p(u) - g_3, \quad \dots \quad (2)$$

wo g_2 und g_3 die rationalen Invarianten sind. Ferner ist nach (1)

$$-\log \sigma(u) + \frac{\eta u^2}{2\omega} = \log \frac{\pi i}{\omega} - \log x + F(x)$$

und also

$$p(u) + \frac{\eta}{\omega} = -\frac{d^2 \log x}{du^2} + \frac{d^2 F(x)}{du^2},$$

$$p'(u) = -\frac{d^3 \log x}{du^3} + \frac{d^3 F(x)}{du^3}.$$

Weiter ist wegen $x = 2i \sin \frac{\pi u}{2\omega}$:

$$\frac{dx}{du} = \frac{i\pi}{2\omega} \sqrt{x^2 + 4},$$

$$\frac{d^2 x}{du^2} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^2 x,$$

$$\frac{d^3 x}{du^3} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^3 \sqrt{x^2 + 4}$$

und daher

$$\frac{dF(x)}{du} = \frac{i\pi}{2\omega} F'(x) \sqrt{x^2 + 4},$$

$$\frac{d^2 F(x)}{du^2} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^2 \{(x^2 + 4) F''(x) + x F'(x)\},$$

$$\frac{d^3 F(x)}{du^3} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^3 \{(x^2 + 4) F'''(x) + 3x F''(x) + F'(x)\} \sqrt{x^2 + 4}.$$

ferner

$$\frac{d \log x}{du} = \frac{i\pi}{2\omega} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x},$$

$$\frac{d^2 \log x}{du^2} = -\left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^2 \cdot \frac{4}{x^2},$$

$$\frac{d^3 \log x}{du^3} = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^3 \cdot \frac{8\sqrt{x^2 + 4}}{x^3},$$

so dass sich

$$p(u) = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^2 \left\{ \frac{4\omega\eta}{\pi^2} + \frac{4}{x^2} + (x^2+4)F''(x) + xF'(x) \right\},$$

$$p'(u) = \left(\frac{i\pi}{2\omega}\right)^3 \left\{ -\frac{8}{x^3} + (x^2+4)F'''(x) + 3xF''(x) + F'(x) \right\} \sqrt{x^2+4},$$

und damit wegen (2) die Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ -\frac{8}{x^3} + (x^2+4)F'''(x) + 3xF''(x) + F'(x) \right\}^2 (x^2+4) = \\ & = 4 \left\{ \frac{4\omega\eta}{\pi^2} + \frac{4}{x^2} + (x^2+4)F''(x) + xF'(x) \right\}^3 - \\ & - \left(\frac{2\omega}{i\pi}\right)^4 g_2 \left\{ \frac{4\omega\eta}{\pi^2} + \frac{4}{x^2} + (x^2+4)F''(x) + xF'(x) \right\} - \left(\frac{2\omega}{i\pi}\right)^6 g_3 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

für $F(x)$ ergibt. Wegen

$$F'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

folgt hieraus eine algebraische Differentialgleichung für die Funktion $f(x)$.

3. Die vorige Differentialgleichung für $F(x)$ kann dazu dienen, zwischen den Grössen

$$A_h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \quad (h=1, 2, 3, \dots)$$

bestehende algebraische Relationen herzuleiten. Man hat

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} A_h \frac{x^{2h}}{h},$$

so dass, wenn

$$a_h = h A_h + (4h+2) A_{h+1} \quad (a_0 = 2 A_1)$$

gesetzt wird,

$$(x^2+4)F''(x) + xF'(x) = 4 \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{2h}$$

und folglich

$$(x^2+4)F'''(x) + 3xF''(x) + F'(x) = 8 \sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^{2h-1}$$

ist. Die Differentialgleichung (3) für $F(x)$ geht also über in

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{8}{x^3} + 8 \sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^{2h-1} \right\}^2 (x^2 + 4) = \\ & = 4 \left\{ \frac{4\omega\eta}{\pi^2} + \frac{4}{x^2} + 4 \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{2h} \right\}^3 - \\ & \quad - \left(\frac{2\omega}{i\pi} \right)^4 g_2 \left\{ \frac{4\omega\eta}{\pi^2} + \frac{4}{x^2} + 4 \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{2h} \right\} - \left(\frac{2\omega}{i\pi} \right)^6 g_3. \end{aligned}$$

Weiter ist bekanntlich ⁴⁾

$$\frac{4\omega\eta}{\pi^2} = \frac{1}{3} - 8A_1 = \frac{1}{3} - 4a_0,$$

so dass, wenn noch zur Abkürzung

$$G_2 = \frac{\omega^4 g_2}{\pi^4}, \quad G_3 = -\frac{\omega^6 g_3}{\pi^6}$$

gesetzt wird, die vorige Beziehung die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left\{ -1 + \sum_{h=1}^{\infty} h a_h x^{2h+2} \right\}^2 (x^2 + 4) = \\ & = 4 \left\{ 1 + \frac{x^2}{12} + \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^{2h+2} \right\}^3 - G_2 x^4 \left\{ 1 + \frac{x^2}{12} + \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^{2h+2} \right\} - G_3 x^6 \end{aligned}$$

liefert. Wir entwickeln beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von x^2 und vergleichen die entsprechenden Koeffizienten. Die Koeffizienten von 1 und von x^2 stimmen evidenterweise überein; dagegen ergeben diejenigen von x^4 und x^6 die Relationen:

$$\begin{aligned} -8a_1 &= \frac{1}{12} + 12a_1 - G_2, \\ -16a_2 - 2a_1 &= \frac{1}{432} + 12a_2 + 2a_1 - \frac{G_2}{12} - G_3, \end{aligned}$$

so dass sich sowohl G_2 und G_3 durch a_1 und a_2 , als auch umgekehrt a_1 und a_2 durch G_2 und G_3 linear mit rationalen Koeffizienten ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned} G_2 &= 20a_1 + \frac{1}{12}, & a_1 &= \frac{1}{20}G_2 - \frac{1}{240}, \\ G_3 &= 28a_2 + \frac{7}{3}a_1 - \frac{1}{216}, & a_2 &= \frac{1}{28}G_3 - \frac{7}{60}G_2 + \frac{31}{2160}. \end{aligned}$$

⁴⁾ HALPHEN, loc. cit. S. 404, Formel (33).

Allgemein ist für $h = 3, 4, 5, \dots$ der Koeffizient von x^{2h+2} auf der linken Seite der vorigen Gleichung gleich

$$-8h a_h + P_h(a_1, a_2, \dots, a_{h-1}),$$

und auf der rechten Seite gleich

$$12a_h + Q_h(a_1, a_2, \dots, a_{h-1}, G_2, G_3);$$

dabei bedeuten

$$P_h(a_1, a_2, \dots, a_{h-1}) \quad , \quad Q_h(a_1, a_2, \dots, a_{h-1}, G_2, G_3)$$

Polynome in den Argumenten mit rationalen Koeffizienten. Folglich kann a_h für solche h als Polynom in a_1, a_2, \dots, a_{h-1} oder auch als Polynom in $G_1, G_2, G_3, a_4, \dots, a_{h-1}$ mit rationalen Koeffizienten ausgedrückt werden. Indem wir diese Darstellung der Reihe nach für alle $h = 3, 4, 5, \dots$ benutzen, folgt, dass sich alle Zahlen

$$a_h = h A_h + (4h + 2) A_{h+1} \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

als Polynome in

$$a_1, a_2$$

oder auch in

$$G_2, G_3$$

mit rationalen Koeffizienten ausdrücken lassen. Also lassen sich die Größen

$$A_h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^{2h}} \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

auch als Polynome in

$$A_1, A_2, A_3$$

oder auch in

$$\frac{\omega \eta}{\pi^2}, \frac{\omega^4 g_2}{\pi^4}, \frac{\omega^6 g_3}{\pi^6}$$

mit rationalen Koeffizienten darstellen. Da aber nach § 1 mindestens eine der Zahlen A_h transzendent ist, so folgt:

Satz A: Für jedes q mit $0 < |q| < 1$ ist mindestens eine der drei Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{4n}}{(1-q^{2n})^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{6n}}{(1-q^{2n})^6}$$

eine transzendente Zahl.

Satz B: *Von den drei Grössen*

$$\frac{\omega \eta}{\pi^2}, \frac{\omega^4 g_2}{\pi^4}, \frac{\omega^6 g_3}{\pi^6},$$

die zu einer nicht ausgearteten p -Funktion gehören, ist stets mindestens eine nicht algebraisch.

Nachträglich wird uns die Note „Sur les séries entières satisfaisant à une équation différentielle algébrique“ von G. PÓLYA (C.R. Paris, 19 août 1935, p. 444–445) bekannt. Ohne Beweis wird hierin u.a. erstens ein im Wesentlichen zu Satz 12 der POPKENSchen Dissertation äquivalenter Satz und zweitens der hieraus abgeleitete Transzendenzsatz:

„Ist $0 < |h| < 1$, so ist mindestens eine der fünf Zahlen

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r h^{2r}}{1-h^{2r}}, \quad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^3 h^{2r}}{1-h^{2r}}, \quad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^5 h^{2r}}{1-h^{2r}},$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r (2r-1) h^{(2r-1)^2}}{\prod_{r=1}^{\infty} (1-h^{8r})(1-h^{8r-4})^2}, \quad \frac{\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r r^2 h^{4r^2}}{\prod_{r=1}^{\infty} (1-h^{8r})(1-h^{8r-4})^2}$$

transzendent“

mitgeteilt; da die drei ersten von diesen Zahlen im wesentlichen gleich

$$\frac{\omega \eta}{\pi^2}, \frac{\omega^4 g_2}{\pi^4}, \frac{\omega^6 g_3}{\pi^6}$$

sind, so ist dieses PÓLYAsche Ergebnis in dem unsrigen enthalten.

