Über die Dezimalbruchentwicklung gewisser Irrationalzahlen

Kurt Mahler

Summary. Let $(n)_q$ denote the base-q expansion of the integer n. The Champernowne number to the base q is the concatenation of the base-q expansions of the positive integers after a radix point; that is, the number

$$0.(1)_q(2)_q(3)_q \cdots (n)_q \cdots .$$

In this paper, Mahler shows that each of these numbers is transcendental, but is not a Liouville number.

Acknowledgement. The article

> K. Mahler. Über die Dezimalbruchentwicklung gewisser Irrationalzahlen. *Mathematica B, Zutphen*, 6:22–36, 1937.

is reproduced here with kind permission of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences.

UEBER DIE DEZIMALBRUCHENTWICKLUNG GEWISSER IRRATIONALZAHLEN.

VON

KURT MAHLER in Krefeld.

An nichttrivialen Sätzen über die Dezimalbruchentwicklung spezieller Irrationalzahlen sind bisher nicht viele bekannt. Borel zeigte, dass in der Dezimalbruchentwicklung fast jeder positiven reellen Zahl eine jede der zehn Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ asymptotisch mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ und allgemeiner jede der 10^t Ziffernsequenzen aus t Ziffern mit derselben Wahrscheinlichkeit 10^{-t} auftritt [1]). Nach Maillet ist ferner der Dezimalbruch jeder *Liouville-Zahl* (kurz: *L-Zahl*) quasiperiodisch, d.h. er enthält immer wieder Sequenzen,

---

1) E. Borel, Rend. Circ. Mat. Palermo **27** (1909), 578—84.
Man sagt, dass fast jede reelle Zahl eine bestimmte Eigenschaft E hat (oder dass fast alle reellen Zahlen eine bestimmte Eigenschaft E haben), wenn diejenigen Zahlen, denen die Eigenschaft E nicht zukommt, sämtlich einer Menge angehören, die auf der Zahlengerade das Borel-Lebesguesche Längenmass Null hat. Kenntnis der Masstheorie ist für den Leser dieser Arbeit aber nicht nötig.

die sich eine stark wachsende Anzahl von Malen wiederholen [2]. Ein quantitatives Ergebnis über die Anzahl der Wiederholungen der speziellen Sequenz $\{0\}$ bei *Nicht-Liouville-Zahlen* (kurz: *NL-Zahlen*) stammt von Burnside [3].

In der vorliegenden Arbeit behandle ich die Frage, wie oft hinter der $(n-1)$-ten Dezimalstelle im Dezimalbruch einer irrationalen NL-Zahl

$$\vartheta = g + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \, 10^{-\nu} = g, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

also z.B. einer algebraischen Irrationalzahl, der Zahl e, der Zahl π oder der Zahl $\log 2$, eine gegebene Sequenz

$$A = \{A_0 A_1 \ldots A_{t-1}\}$$

aus t Ziffern sich wiederholen kann. Für diese Anzahl s wird eine einfache Ungleichung abgeleitet; beschränkt man sich auf Sequenzen mit genügend grossem Quotient $\frac{t}{n}$, so zeigt sich, dass s unter einer nur von ϑ abhängigen Schranke liegt und insbesondere für $\vartheta = e$ und sogar für fast jedes ϑ von einem n ab höchstens gleich 2 ist.

Weiter wird für jeden positiven echten Bruch δ der Begriff der δ-Sequenz eingeführt; hierunter versteht man eine Sequenz A, für die der gekürzte Bruch [4])

$$\frac{Z}{N} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{t-1} A_\nu \, 10^{-(\mu t + \nu + 1)} = 0, \overline{A_0 A_1 \ldots A_{t-1}},$$

dessen Dezimalbruchperiode gleich dieser Sequenz ist, einen Nenner von höchstens δt Stellen hat. Der erwähnten Ungleichung für s entnimmt man, dass im Dezimalbruch der irrationalen NL-Zahl ϑ von einem n ab δ-Sequenzen mit genügend

---

2) Introduction à la théorie des nombres transcendants (Paris 1906), Kapitel 7.

Eine Irrationalzahl ϑ heisst *Liouville*-Zahl, wenn es zu jeder noch so grossen Zahl $\omega > 2$ unendlich viele Brüche $\frac{x}{y}$ mit ganzen x und y $(y \geqq 1)$ und

$$\left| \vartheta - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^\omega}$$

gibt.

3) W. Burnside, Messenger Math. **49** (1920), 127.

4) Die überstrichene Ziffernsequenz ist periodisch wiederholt zu denken.

grossem $\frac{t}{n}$ überhaupt nicht auftreten können, falls δ kleiner als eine nur von ϑ abhängige Schranke ist. Merkwürdigerweise sind also nicht alle Sequenzen in bezug auf ihr Auftreten im Dezimalbruch für ϑ gleichberechtigt.

Zu jedem noch so kleinen δ kann man δ-Sequenzen gewinnen, indem man eine beliebig gegebene Sequenz genügend oft wiederholt. Dass es aber auch δ-Sequenzen gibt, die nicht durch Wiederholung einer Teilsequenz entstehen, zeigen wir durch Angabe einer unendlichen Folge von rationalen Zahlen, deren Dezimalbruch-Perioden gerade δ-Sequenzen mit $\delta \to 0$ sind. Solche Brüche ergeben sich z.B. als Annäherungen an die Zahl

$$\sigma = 0{,}1234\ldots.891011\ldots.9899100101\ldots.,$$

deren Dezimalbruch aus den hintereinander geschriebenen natürlichen Zahlen besteht. Es zeigt sich, dass σ selbst eine irrationale und sogar transzendente NL-Zahl ist. In einer demnächst in den ,,Proceedings'' der ,,Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam'' erscheinenden Arbeit wird dieses Ergebnis über σ wesentlich verallgemeinert.

Alle Ueberlegungen dieser Arbeit sind von der speziellen Basis 10 unseres Zahlsystems unabhängig und werden deshalb sogleich für eine willkürliche Zahlsystem-Basis $q \geq 2$ durchgeführt.

I.

1. Sei $q \geq 2$ eine ein für allemal feste natürliche Zahl. Es ist wohlbekannt, dass jede positive reelle Zahl ϑ auf genau eine Art in der Form

$$(1) \qquad \vartheta = \sum_{\nu=d}^{\infty} a_\nu q^{-\nu}$$

geschrieben werden kann, wo d eine gewisse von ϑ abhängige ganze rationale Zahl und a_d, a_{d+1}, a_{d+2}, ... einzeln Zahlen der endlichen Ziffernfolge $0, 1, \ldots., q-1$ sind; wenn ϑ rational ist, möge dabei die Zusatzannahme gemacht werden, dass nicht alle Koeffizienten a_ν von einem Index ab gleich $q-1$ sind.

Analog der Dezimalbruchdarstellung schreiben wir statt (1) der Kürze halber symbolisch für $d \leq 0$

$$\vartheta = a_d\, a_{d+1} \ldots.\, a_0,\, a_1 a_2 a_3 \ldots.$$

5

und für $d > 0$

$$\vartheta = 0,\overbrace{0\,0\ldots\ldots 0}^{d-1}\,a_d\,a_{d+1}\,a_{d+2}\ldots\ldots$$

Beide Fälle lassen sich in die eine Darstellung

$$\vartheta = g,\,a_1a_2a_3\ldots\ldots \tag{2}$$

zusammenfassen; dabei bedeutet $g = [\vartheta] \geq 0$ die grösste in ϑ enthaltene ganze rationale Zahl, ist also für $d \leq 0$ gleich

$$g = a_d\,a_{d+1}\ldots\ldots a_0,\,000\ldots\ldots = a_d\,a_{d+1}\ldots\ldots a_0$$

und für $d > 0$ gleich Null. Im letzteren Fall verschwinden zugleich für $d \geq 2$ die Anfangsziffern $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{d-1}$ hinter dem Komma.

2. Im Folgenden werde die Zahl ϑ als eine NL-Zahl vorausgesetzt; es gebe also eine natürliche Zahl y_0 und zwei positive Zahlen Γ und $\omega \geq 2$, so dass für alle Paare ganzer rationaler Zahlen x und $y \geq y_0$

$$\left|\frac{x}{y} - \vartheta\right| \geq \Gamma y^{-\omega} \tag{3}$$

ist, falls der Absolutbetrag nicht verschwindet. Dies schliessen wir aus, indem wir ϑ weiterhin als irrational annehmen.

Unter

$$A = \{\mathrm{A}_0\,\mathrm{A}_1\ldots\ldots\mathrm{A}_{t-1}\}$$

werde irgend eine Sequenz aus t der Ziffern $0, 1, \ldots\ldots, q-1$ verstanden; wir nennen t ihre Länge. Es gibt einen eindeutig bestimmten gekürzten Bruch $\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}}$ mit positivem Zähler und Nenner, der gleich dem periodischen Bruch [4])

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{t-1}\mathrm{A}_\nu q^{-(\mu t+\nu+1)} = 0,\overline{\mathrm{A}_0\,\mathrm{A}_1\ldots\mathrm{A}_{t-1}} \tag{4}$$

ist. Hat der Nenner N genau u Ziffern in seiner Darstellung zur Basis q, so heisse u die Höhe von A. Offenbar ist

$$\mathrm{Z} \leq \mathrm{N} \leq q^u \tag{5}$$

und ferner t die kleinste natürliche Zahl, so dass die Kongruenz

$$q^t \equiv 1 \pmod{\mathrm{N}} \tag{6}$$

besteht.

In der Darstellung (2) von ϑ möge die Teilsequenz

$$\theta = \{a_n\,a_{n+1}\ldots\ldots a_{n+st-1}\} \qquad (n \geq 1)$$

aus einer genau s-maligen Wiederholung der Sequenz A bestehen; es sei also

6

$$(7) \qquad a_{n+\mu t+\nu} = \mathrm{A}_\nu \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots, s-1 \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, t-1 \end{pmatrix}.$$

Zerlegen wir ϑ in die vier Teile

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_3 + \vartheta_4$$

mit

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1 = g, a_1 a_2 \ldots a_{n-1}, \quad \vartheta_2 = 0, \overbrace{0\,0 \ldots 0}^{n-1} \overline{\mathrm{A}_0 \mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_{t-1}}, \\ \vartheta_3 = 0, \overbrace{0\,0 \ldots 0}^{n+st-1} \overline{\mathrm{A}_0 \mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_{t-1}}, \quad \vartheta_4 = 0, \overbrace{0\,0 \ldots 0}^{n+st-1} a_{n+st} a_{n+st+1} \ldots, \end{array} \right.$$

so wird

$$\vartheta_1 = \mathrm{G} \cdot q^{-(n-1)}, \qquad \vartheta_2 = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} q^{-(n-1)},$$

$$\vartheta_3 = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} q^{-(n+st-1)} \leq q^{-(n+st-1)} \qquad \vartheta_4 \leq q^{-(n+st-1)},$$

mit einer gewissen natürlichen Zahl G, wegen

$$q^{n-1}\mathrm{N}\vartheta - q^{n-1}\mathrm{N}(\vartheta_1 + \vartheta_2) = q^{n-1}\mathrm{N}\vartheta - (\mathrm{NG} + \mathrm{Z}) = q^{n-1}\mathrm{N}(\vartheta_4 - \vartheta_3),$$

also wegen (5)

$$| q^{n-1} \mathrm{N} \vartheta - (\mathrm{NG} + \mathrm{Z}) | \leq q^{-st} \mathrm{N} \leq q^{-st+u}.$$

Andrerseits ist für $q^{n-1} \mathrm{N} \geq y_0$ und erst recht für

$$n \geq 1 + \frac{\log y_0}{\log q}$$

nach Voraussetzung (3)

$$| q^{n-1} \mathrm{N}\vartheta - (\mathrm{NG} + \mathrm{Z}) | \geq \Gamma (q^{n-1} \mathrm{N})^{-(\omega-1)} \geq \Gamma q^{-(\omega-1)(n-1+u)},$$

also

$$\Gamma q^{-(\omega-1)(n-1+u)} \leq q^{-st+u},$$

so dass wir schliesslich zu folgendem Resultat gelangen:

Satz 1: *Die irrationale NL-Zahl ϑ genüge für alle Paare ganzer rationaler Zahlen x und y mit $y \geq y_0$ der Ungleichung*

$$\left| \frac{x}{y} - \vartheta \right| \geq \Gamma y^{-\omega}.$$

Die Teilsequenz

$$\theta = \{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+st-1}\}$$

ihrer Darstellung

$$\vartheta = g, a_1 a_2 a_3 \ldots.$$

zur Basis q sei identisch mit einer s-maligen Wiederholung der Sequenz A von der Länge t und der Höhe u. Dann ist für $n \geq 1 + \dfrac{\log y_0}{\log q}$:

7

$$(9) \qquad \boxed{st \leq -\left(\frac{\log \Gamma}{\log q} + \omega - 1\right) + (\omega - 1)n + \omega u.}$$

3. Der vorige Satz kann auf alle irrationalen NL-Zahlen angewandt werden. Aus bekannten Ergebnissen über das Transzendensmass und aus dem *Mahlerschen Invarianzsatz für S-Zahlen und T-Zahlen* geht also hervor [5]), dass ihm mit geeigneten Konstanten y_0, Γ und ω die folgenden Zahlklassen unterworfen sind:

a. Alle algebraischen Irrationalzahlen. [6])

b. Jede Zahl $\alpha = e^{\gamma}$, wo $\gamma \neq 0$ algebraisch ist, und allgemeiner jede von endlichvielen solchen Ausdrücken algebraisch abhängige Irrationalzahl. [5])

c. Die Zahl π und allgemeiner jede von ihr algebraisch abhängige Irrationalzahl. [5])

d. Der natürliche Logarithmus jeder rationalen Zahl $r \neq 0$ und $\neq 1$, und allgemeiner jede von ihm algebraisch abhängige Irrationalzahl. [5])

e. Jede Zahl bis auf eine Menge vom Längenmass Null. [7])

Bei der Anwendung von Satz 1 in diesen Fällen sind hauptsächlich die folgenden zwei Annahmen von Interesse:

Erstens sei A eine festgewählte Sequenz, also t und u von n unabhängig. In diesem Fall ist aus der Ungleichung (9) ersichtlich, dass die Anzahl der Wiederholungen von A in der Entwicklung von ϑ für $n \to \infty$ höchstens wie

$$(10) \qquad \frac{\omega - 1}{t}\, n + O(1)$$

zunimmt. Wir wollen speziell folgende Zahlen betrachten:

A. *Alle reell-quadratischen Irrationalzahlen.* [8])

B. *Alle Irrationalzahlen der Form $\dfrac{ae + b}{ce + d}$, wo a, b, c, d rationale Zahlen sind.* [9])

---

5) K. Mahler, J. reine und angew. Math. **166** (1932) 118—150.
6) J. Liouville, C. R. Acad. Sci. Paris (1844) 883—885, 910—911.
7) A. Khintchine, Math. Annalen **92** (1924) 115—125.
8) Da solche Zahlen periodische Kettenbruchentwicklung haben, kann für sie $\omega = 2$ gewählt werden.
9) Aus dem bekannten Kettenbruch für e geht hervor, dass für ω jede Zahl > 2 genommen werden kann. Siehe z.B. [2]), Kapitel 6. Sogar ein analoger Satz mit e^r statt e ($r \neq 0$ rational) bleibt gültig, wie z.B. aus den Untersuchungen von Popken über das Transzendenzmasz von e folgt. Siehe [5]).

C. *Alle Zahlen bis auf eine Menge vom Linienmass Null.* [7]) Aus den zitierten Arbeiten geht dann hervor, dass unter diesen Annahmen für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ sogar $\omega < 2 + \epsilon$ angenommen werden kann und also für $n \geq n(\epsilon)$

$$s \leq \frac{1+\epsilon}{t} n \tag{11}$$

ist.

Zweitens betrachten wir Sequenzen A, deren Länge t mindestens von derselben Grössenordnung wie der Anfangsindex n von θ ist. Wegen $u \leq t$ kann für diese die Ungleichung (9) auf die bequemere Form

$$s \leq \omega + \frac{\omega n}{t} \text{ für } n \geq \max \left\{ 1 + \frac{\log y_0}{\log q}, -\left(\frac{\log \Gamma}{\log q} + \omega - 1\right) \right\} \tag{12}$$

gebracht werden. Nehmen wir noch an, dass

$$t > \frac{\omega}{[\omega] - \omega + 1} n \tag{13}$$

ist, so wird also $s < [\omega] + 1$, d.h. $s \leq [\omega]$, so dass jede genügend lange Sequenz A sich in der Entwicklung von ϑ höchstens $[\omega]$-mal wiederholen kann. *Nun kann speziell bei den drei Zahlklassen A, B und C jedesmal $\omega < 3$ angenommen werden; für solche Zahlen gilt demnach, dass eine Sequenz, die beim n-ten Glied der Entwicklung von ϑ beginnt und deren t gross im Vergleich zu n ist, sich höchstens einmal wiederholen kann.* Diese Aussage erscheint um so merkwürdiger, weil sie auf fast jede positiv-reelle Irrationalzahl angewandt werden kann.

4. Sei δ ein willkürlich gegebener positiver echter Bruch:

$$0 < \delta \leq 1. \tag{14}$$

Die Sequenz A heisse eine *δ-Sequenz*, wenn ihre Länge t und ihre Höhe u mit einander durch die Ungleichung

$$u \leq \delta t \tag{15}$$

verknüpft sind. Es ist evident, dass durch hinreichend vielmalige Wiederholung einer gegebenen Sequenz δ-Sequenzen mit beliebig kleinem δ entstehen, da ja alle so konstruierbaren Sequenzen die gleiche Höhe, aber immer mehr wachsende Länge besitzen. Wie im folgenden Kapitel gezeigt wird, gibt es aber auch δ-Sequenzen zu jedem noch so kleinen δ, die nicht gleich einer mehrfach wiederholten Teilsequenz sind; solche δ-Sequenzen wollen wir *einfach* nennen.

Für δ-Sequenzen grosser Länge lassen sich die Ergebnisse aus der zweiten Hälfte des vorigen Paragraphen wesentlich verschärfen. Zu diesem Zweck ersetzen wir die Höhe u in (9) durch die grössere Zahl δt und erhalten alsdann

$$(16) \quad s \leq \delta\omega + \frac{\omega n}{t} \text{ für } n \geq \max\left\{1 + \frac{\log y_0}{\log q}, -\left(\frac{\log \Gamma}{\log q} + \omega - 1\right)\right\}$$

und unter den beiden Zusatzannahmen

$$(17) \qquad t > \frac{\omega n}{1 - \delta\omega}, \quad \delta < \frac{1}{\omega},$$

also $s < 1$, d.h. $s = 0$. Somit können unter diesen Voraussetzungen *die in der Entwicklung von ϑ beim Index n beginnenden t Ziffern unmöglich mit der betrachteten* δ-Sequenz A *zusammenfallen*. Gehört ϑ zu einer der Zahlklassen A, B und C, so kann $\delta = \frac{1}{3}$ gewählt werden; in diesen drei Fällen ergibt sich also, dass in der Entwicklung von ϑ beim Index n überhaupt keine $\frac{1}{3}$-Sequenz mit im Vergleich zu n grosser Länge t anfangen kann.

Die Tabellen der Periodenlänge von Dezimalbrüchen rationaler Zahlen machen es wahrscheinlich, dass für $q = 10$ und also wohl auch für beliebiges q ein grosser Teil der Sequenzen einer vorgegebenen Länge aus δ-Sequenzen mit kleinem δ besteht; die vorigen Aussagen wären also hiernach ziemlich scharf. Jedenfalls wäre es von Interesse, für jedes δ eine asymptotische Formel für die Anzahl der δ-Sequenzen, bzw. für die der einfachen δ-Sequenzen mit grosser Länge aufzustellen.

II.

5. Die natürlichen Zahlen gestatten in bezug auf die Basis q der Reihe nach die Darstellungen

$$1 = 1,\ 2 = 2,\ \ldots,\ q - 1 = q - 1,\ q = 10,\ q + 1 = 11,\ \ldots,$$
$$2q = 20,\ \ldots,\ q^2 - 1 = q - 1\ q - 1,\ q^2 = 100,\ \ldots.$$

Indem wir diese Symbole der Reihe nach hinter das Komma niederschreiben, kommen wir zu der Zahl

$$(18) \quad \sigma_q = 0{,}12\ldots q - 1\ 10\ 11\ldots 1\ q{-}1\ 20\ldots q - 1\ \ q{-}1\ 100\ldots$$

Offenbar ist σ_q ein positiver echter Bruch und obendrein eine irrationale Zahl; denn in der vorigen Darstellung tritt evidenterweise jede überhaupt mögliche endliche Kombination der Ziffern $0, 1, \ldots, q-1$ immer wieder einmal auf, während für eine rationale Zahl diese Entwicklung von einer Stelle ab periodisch sein müsste.[10]) Es ist möglich, für σ_q eine sehr schnell konvergierende Reihe rationaler Zahlen anzugeben, aus der sich weitergehende Folgerungen ziehen lassen.

Bei der Darstellung zur Basis q werden die $q-1$ Zahlen
$$1, 2, \ldots, q-1$$
einstellig, die $(q^2-1)-(q-1) = q^2-q$ Zahlen
$$q = 10, \quad q+1 = 11, \ldots, \quad q^2-1 = q-1\ q-1$$
zweistellig, die $(q^3-1)-(q^2-1) = q^3-q^2$ Zahlen
$$q^2 = 100, \quad q^2+1 = 101, \ldots, \quad q^3-1 = q-1\ q-1\ q-1$$
dreistellig, usw. Da jede weitere Stelle rechts hinter dem Komma aus der vorangehenden durch Multiplikation mit $\frac{1}{q}$ hervorgeht, so lässt sich demnach die Definitionsgleichung (18) überführen in

$$\begin{aligned}\sigma_q = &\sum_{k=1}^{q-1} kq^{-k} + \sum_{k=q}^{q^2-1} kq^{-(q-1)-2\{k-(q-1)\}} + \\ (19) \qquad &+ \sum_{k=q^2}^{q^3-1} kq^{-(q-1)-2(q^2-q)-3\{k-(q^2-1)\}} + \\ &+ \sum_{k=q^3}^{q^4-1} kq^{-(q-1)-2(q^2-q)-3(q^3-q^2)-4\{k-(q^3-1)\}} + \ldots\end{aligned}$$

Diese Darstellung kann noch wesentlich vereinfacht werden. Offenbar ist

$$\begin{aligned}(q-1)-2(q-1) &= -(q-1) = -\frac{q^2-1}{q-1}+2,\\ (q-1)+2(q^2-q)-3(q^2-1) &= -(q^2+q-2) = -\frac{q^3-1}{q-1}+3,\\ (q-1)+2(q^2-q)+3(q^3-q^2)-4(q^3-1) &= \\ = -(q^3+q^2+q-3) &= -\frac{q^4-1}{q-1}+4, \text{ usw.}\end{aligned}$$

Weiter ist für veränderliches x

10) Wegen der arithmetischen Eigenschaften der Dezimalbrüche und der Entwicklungen zur Basis q siehe z.B. A. Leman, Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie, Math. Bibliothek **19**, (Leipzig und Berlin 1916, Teubner).

11

$$\sum_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}-1} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\sum_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}-1} x^k = \frac{d}{dx}\frac{x^{\mathrm{N}}-x^{\mathrm{M}}}{x-1} =$$
$$= \frac{(x-1)(\mathrm{N}x^{\mathrm{N}-1}-\mathrm{M}x^{\mathrm{M}-1})-(x^{\mathrm{N}}-x^{\mathrm{M}})}{(x-1)^2},$$

also nach einer einfachen Umrechnung und für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=q^{n-1}}^{q^n-1} kq^{-kn} = q^n\frac{(q^{2n-1}-q^{n-1}+1)q^{-nq^{n-1}}-(q^{2n}-q^n+1)q^{-nq^n}}{(q^n-1)^2}.$$

Daher kann (19) übergeführt werden in

$$\sigma_q = \sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{q^n-1}{q-1}}\frac{(q^{2n-1}-q^{n-1}+1)q^{-nq^{n-1}}-(q^{2n}-q^n+1)q^{-nq^n}}{(q^n-1)^2}$$

oder auch in

$$\sigma_q = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q^{2n-1}-q^{n-1}+1)}{(q^n-1)^2}q^{-\frac{1}{q-1}\{(nq-n-q)q^{n-1}+1\}} -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q^{2n}-q^n+1)}{(q^n-1)^2}q^{-\frac{1}{q-1}\{(nq-n-1)q^n+1\}}.$$

Fassen wir nun das zu $n+1$ gehörige Plusglied mit dem zu n gehörigem Minusglied zusammen, so wird schliesslich:

$$\sigma_q = \frac{q}{(q-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{q^{2n}-q^n+1}{(q^n-1)^2}-\frac{q^{2n+1}-q^n+1}{(q^{n+1}-1)^2}\right\}q^{-\frac{(nq-n-1)q^n+1}{q-1}}. \tag{20}$$

6. Für jede natürliche Zahl n werde unter D_n das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$q-1,\quad q^2-1,\quad \ldots\ldots\ldots,\quad q^n-1$$

verstanden. Alsdann sei zur Abkürzung

$$(21)\quad \begin{aligned} \mathrm{A}_n &= \mathrm{D}_n^2\Bigg(\frac{q}{(q-1)^2}-\sum_{\nu=1}^{n-1}\left\{\frac{q^{2\nu}-q^\nu+1}{(q^\nu-1)^2}-\frac{q^{2\nu+1}-q^\nu+1}{(q^{\nu+1}-1)^2}\right\}\times \\ &\qquad\times q^{-\frac{(\nu q-\nu-1)q^\nu+1}{q-1}}\Bigg)q^{\frac{(nq-n-q)q^{n-1}+1}{q-1}}, \\ \mathrm{B}_n &= \mathrm{D}_n^2\, q^{\frac{(nq-n-q)q^{n-1}+1}{q-1}}, \\ \mathrm{R}_n &= \sum_{\nu=n}^{\infty}\left\{\frac{q^{2\nu}-q^\nu+1}{(q^\nu-1)^2}-\frac{q^{2\nu+1}-q^\nu+1}{(q^{\nu+1}-1)^2}\right\}q^{-\frac{(\nu q-\nu-1)q^\nu+1}{q-1}}, \end{aligned}$$

so dass also

$$\sigma_q - \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{B}_n} = -\mathrm{R}_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{22}$$

ist. Offenbar sind A_n und B_n natürliche Zahlen, während $-R_n$ eine negative Zahl darstellt, die mit wachsendem n gegen Null strebt gemäss der asymptotischen Gleichung

$$(23) \qquad R_n \sim \left(1 - \frac{1}{q}\right) q^{-\frac{(nq-n-1)q^n+1}{q-1}}.$$

Von einem n ab ist also $R_n \neq R_{n+1}$, d.h. wegen (22)

$$(24) \qquad A_n B_{n+1} - A_{n+1} B_n \neq 0.$$

Die natürliche Zahl D_n^2 genügt evidenterweise der Ungleichung

$$D_n^2 \leq (q \cdot q^2 \cdot q^3 \ \ldots . \ q^n)^2 = q^{n(n+1)}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen (21) und der Gleichung (23) folgen somit die asymptotischen Formeln

$$(25) \quad \log A_n \sim \log B_n \sim nq^{n-1} \log q, \quad \log R_n \sim -nq^n \log q,$$

so dass insbesondere für jedes konstante $\epsilon > 0$ und $n \geq n_0(\epsilon)$

$$(26) \qquad R_n \leq B_n^{-(q-\epsilon)}$$

wird. Weiter folgt aus (25) noch

$$(27) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\log B_{n+1}}{\log B_n} = q.$$

7. Um eine erste Folgerung aus den letzten Ergebnissen zu ziehen, ziehen wir ein neues Resultat von Th. Schneider mit folgendem Wortlaut heran: „Zu der algebraischen Zahl ϑ gebe es eine unendliche Folge von gekürzten Brüchen $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots .$ mit positivem Nenner, so dass

$$\left| \vartheta - \frac{x_n}{y_n} \right| \leq y_n^{-\omega}$$

ist, wo $\omega > 2$ nur von ϑ abhangt. Dann ist [11])

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log y_{n+1}}{\log y_n} = \infty."$$

Auf Grund dieses Satzes und wegen (22), (26) und (27) folgt also, dass σ_q für $q \geq 3$ transzendent sein muss. Für $q = 2$ versagt das Verfahren jedoch, da alsdann in (26) ein Exponent $2 - \epsilon$ auftritt. Glücklicherweise ist jedoch B_n bis auf einen

11) Th. Schneider, J. reine angew. Math. **175** (1936), 182—192.

Faktor D_n^2 eine reine Potenz von q und ferner

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log D_n^2}{\log B_n} = 0,$$

so dass dieser Faktor für grosses n von geringerer Grössenordnung als jede noch so kleine Potenz von B_n wird. Durch geringe Aenderung des Beweises kann daher ein weiterer Schneiderscher Satz der Arbeit [11]), der die Transzendenz von ϑ schon für $\omega > 1$ lehrt, falls die Nenner y_n Potenzen einer festen Zahl sind, so erweitert werden, dass er auch diese Ausnahmezahl σ_2 umfasst. Somit gilt der allgemeine Satz:

Satz 2: *Die durch die Entwicklung* (18) *zur Basis q definierte Zahl σ_q ist für jeden natürlichen Wert von $q \geq 2$ transzendent.*

8. Um eine zweite Folgerung zu ziehen, betrachten wir einen Näherungsbruch an σ_q mit bereits sehr grossem Nenner. Zu diesem Bruch $\frac{x}{y}$ werden eine natürliche Zahl n durch

$$(28) \quad \tfrac{1}{2}(n-2)(q-1)q^{n-2}\log q < \log y \leq \tfrac{1}{2}(n-1)(q-1)q^{n-1}\log q$$

bestimmt; auch n ist also gross. Somit ist wegen (25)

$$(29) \quad \log B_n \leq \log B_{n+1} \leq 2(n-1)q^n \log q \leq 4\,\frac{q^2}{q-1}\log y,$$

ferner

$$\log B_{n+1}R_{n+1} \leq \log B_n R_n \sim -(n-1)(q-1)q^{n-1}\log q$$

und also

$$(30) \quad \frac{1}{yB_n} - R_n \geq \frac{1}{2yB_n} \geq \frac{1}{2yB_{n+1}} \text{ und } \frac{1}{yB_{n+1}} - R_{n+1} \geq \frac{1}{2yB_{n+1}}.$$

Wegen (24) muss aber eine der beiden Determinanten

$$A_n y - B_n x \quad \text{und} \quad A_{n+1} y - B_{n+1} x$$

von Null verschieden sein, also mindestens vom Absolutbetrag 1; die beiden Identitäten

$$\sigma_q - \frac{x}{y} = \frac{A_n y - B_n x}{yB_n} - R_n \text{ und } \sigma_q - \frac{x}{y} = \frac{A_{n+1} y - B_{n+1} x}{yB_{n+1}} - R_{n+1}$$

ergeben also selbst im ungünstigsten Fall für genügend grosses y die Abschätzung

$$(31) \qquad \left|\sigma_q - \frac{x}{y}\right| \geq \frac{1}{2yB_{n+1}} \geq \tfrac{1}{2} y^{-\left(4\frac{q^2}{q-1}+1\right)}.$$

Somit kommt man zu folgendem Ergebnis:

Satz 3: *Die Zahl σ_q ist für jeden natürlichen Wert von $q \geq 2$ eine NL-Zahl.*

9. Schreibt man die Gleichung (22) in der Form

$$\frac{A_n}{B_n} = \sigma_q + R_n,$$

so lässt sie erkennen, dass die Entwicklung von $\frac{A_n}{B_n}$ zur Basis q für wachsendes n immer weiter mit der von σ_q zusammenfällt. Nun ist offenbar

$$1(q-1)+2(q^2-q)+3(q^3-q^2)+\ldots+(n-1)(q^{n-1}-q^{n-2}) = \\ = \frac{(nq-n-q)q^{n-1}+1}{q-1}$$

die Gesamtheit der Stellen aller zur Basis q höchstens $(n-1)$-stelligen Zahlen. Die Periode der Entwicklung von $\frac{A_n}{B_n}$ beginnt daher genau mit

$$1\overbrace{00\ldots 0}^{n-1}\;1\overbrace{00\ldots 01}^{n-2}\;1\overbrace{00\ldots 02}^{n-2}\;1\overbrace{00\ldots 03}^{n-2}\ldots$$

und endet für grosses n wegen (23), soweit sie mit σ_q zusammenfällt, erst kurz vor der Ziffernfolge

$$\overbrace{q-1\;q-1\;\ldots\;q-1}^{n};$$

ausserdem kann sie hiernach noch gewisse Ziffern enthalten, die nicht unmittelbar vorauszusagen sind. Aus dieser heuristischen Betrachtung geht also hervor, dass die Periode von $\frac{A_n}{B_n}$ und also erst recht wegen (21) die von

$$\frac{A_n}{D_n^2} - \left[\frac{A_n}{D_n^2}\right]$$

im Verhältnis zur Ziffernzahl des Nenners sehr lang sein muss und in ihrem Anfang sehr lange mit den hintereinander geschriebenen Darstellungen der Zahlen

$$q^{n-1}, \quad q^{n-1}+1, \quad q^{n-1}+2, \quad \ldots.$$

zur Basis q übereinstimmt.

Es ist jedoch möglich, einen wesentlich einfacheren Bruch mit der gleichen Eigenschaft anzugeben, wenn wir eine Formel heranziehen, die schon bei der Umtransformation von σ_q benutzt wurde.

Nach § 5 ist nämlich

$$\sum_{k=q^{n-1}}^{q^n-1} kq^{-kn} = q^n \frac{(q^{2n-1}-q^{n-1}+1)q^{-nq^{n-1}} - (q^{2n}-q^n+1)q^{-nq^n}}{(q^n-1)^2}.$$

Sei zur Abkürzung

$$(32) \quad \sigma_q(n) = \sum_{q=k^{n-1}}^{q^n-1} kq^{-kn+nq^{n-1}-1} =$$

$$= 0,1\overbrace{0\ldots\ldots 0}^{n-1}1\ldots\ldots\overbrace{q-1\,q-1\ldots\ldots q-1}^{n};$$

hinter dem Komma stehen also bei diesem Ausdruck alle natürlichen Zahlen von q^{n-1} bis q^n-1 in ihrer Darstellung zur Basis q der Reihe nach hintereinander, insgesamt $n(q-1)q^{n-1}$ Ziffern. Nach der vorigen Gleichung ist

$$(33) \quad \frac{q^{n-1}(q^{2n-1}-q^{n-1}+1)}{(q^n-1)^2} =$$

$$= \sigma_q(n) + \frac{q^{n-1}(q^{2n}-q^n+1)q^{-n(q-1)q^{n-1}}}{(q^n-1)^2}$$

und also folgt leicht, dass die Entwicklung des Bruchs

$$(34) \qquad \frac{q^{n-1}(q^{2n-1}-q^{n-1}+1)}{(q^n-1)^2}$$

zur Basis q mit $\sigma_q(n)$ in den ersten

$$n(q-1)q^{n-1} - O(n)$$

Stellen hinter dem Komma übereinstimmen muss. Andrerseits ist leicht einzusehen, dass der Anfang von $\sigma_q(n)$: $1\overbrace{00\ldots\ldots 0}^{n-1}$ sich innerhalb von $\sigma_q(n)$ nirgends wiederholt, da ja die Darstellung keiner Zahl zwischen q^{n-1} und q^n-1 mit einer Null anfangen kann. Also muss die Zahl (34) eine Periode mindestens von der Länge

$$n(q-1)q^{n-1} - O(n)$$

haben. Ihr Nenner ist aber offenbar höchstens $2n$-stellig. Also folgt:

Satz 4: *Zu jedem noch so grossen n gibt es eine Sequenz, die nicht durch Wiederholung einer Teilsequenz entsteht, deren Höhe* *nicht grösser als $2n$, deren Länge aber mindestens gleich $n(q-1)q^{n-1} - O(n)$ ist.*

Damit ist die Existenz von einfachen δ-Sequenzen mit beliebig kleinem δ bewiesen.