

# Introduction

## Un peu d'histoire

### Décomposition spectrale et formule des traces

La formule des traces, pour l'action à droite de l'algèbre des fonctions sphériques sur l'espace localement symétrique  $\Gamma \backslash \mathfrak{h}$  quotient du demi-plan de Poincaré  $\mathfrak{h}$  par le groupe modulaire  $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ , est devenue depuis l'exposé de Selberg [38] à Bombay en 1956 un des outils fondamentaux de la théorie des formes modulaires.

L'établissement de la formule des traces suppose connu la description de la décomposition spectrale de l'espace de Hilbert  $L^2(\Gamma \backslash \mathfrak{h})$  au moyen du prolongement méromorphe des Séries d'Eisenstein. Dès 1964, le cas général de la décomposition spectrale de  $L^2(\Gamma \backslash G(\mathbb{R}))$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe arithmétique de  $G(\mathbb{Q})$  avec  $G$  réductif connexe défini sur  $\mathbb{Q}$ , était obtenu par Langlands (ce travail ne fut publié que 12 ans plus tard [28]).

L'étude des opérateurs de Hecke amène à travailler avec des limites projectives de revêtements définis par des sous-groupes de congruence, ce qui revient essentiellement à considérer le quotient  $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ , où  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$  est l'anneau des adèles de  $\mathbb{Q}$ . Le cas des groupes arithmétiques qui ne sont pas de congruence relève plus de la géométrie différentielle que de l'arithmétique. Tout ce qui suit est dans le cadre adèlique.

La théorie générale des Séries d'Eisenstein ouvrait la voie à la généralisation de la formule des traces à tous les groupes réductifs mais aussi à la découverte, par Langlands, des fonctions  $L$  attachées aux représentations automorphes et à ses conjectures sur la fonctorialité.

### La formule des traces d'Arthur-Selberg

Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur un corps de nombres  $F$ . On note  $\mathbb{A}_F$  l'anneau des adèles de  $F$ . La formule des traces – dite d'Arthur-Selberg – pour le quotient  $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$  est une identité entre deux expressions pour une « trace renormalisée » de l'opérateur de convolution défini par une fonction  $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_F))$  dans  $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F))$ . La « trace » doit être « renormalisée » car l'opérateur de convolution n'est à trace que dans le spectre discret et une correction, via des troncutures, est nécessaire pour tenir compte du spectre continu. On aura d'une part un développement géométrique indexé par les classes de conjugaison dans  $G(F)$  et d'autre part un développement spectral :

$$J_{\text{géom}}(f) = J_{\text{spec}}(f).$$

L'établissement de la formule des traces peut être divisé en quatre étapes principales : Arthur obtient successivement

- (1) la forme grossière (« coarse form ») [1, 13];
- (2) la forme fine (« fine form ») [2–5];
- (3) la forme invariante (« invariant form ») [6, 7];
- (4) la forme stabilisée (« stable form ») [9–11].

Chacune des étapes fournit des développements géométriques et spectraux de plus en plus précis. C'est bien sûr le développement ultime, la formule des traces stabilisée, qui permet le plus d'applications.

### La variante tordue

La variante tordue de la formule des traces est apparue dans le travail de Saito et Shintani, immédiatement généralisé par Langlands, pour étudier le changement de base cyclique pour  $GL(2)$  [29]. On sait le rôle joué par ce travail dans la preuve du théorème de Fermat. Le cadre général de la *formule des traces tordue* est le suivant : on considère un  $G$ -espace tordu  $\tilde{G}$  défini sur  $F$  et de plus on tord les représentations par un caractère unitaire  $\omega$  de  $G(\mathbb{A}_F)$  trivial sur  $G(F)$ . Dans la majorité des applications  $\tilde{G} = G \rtimes \theta$  où  $\theta$  est un automorphisme d'ordre fini de  $G$  et  $\omega$  est trivial ; par exemple pour le changement de base cyclique  $\tilde{G}(F) = GL(n, E) \rtimes \theta$  où  $\theta$  est un générateur du groupe de Galois d'une extension finie cyclique  $E/F$ . Toutefois le cas de la torsion des représentations par un caractère  $\omega$  non trivial mais sans torsion sur le groupe ( $\theta$  trivial) intervient aussi naturellement.

La formule des traces tordue pour les corps de nombres a fait l'objet du *Friday Morning Seminar* de Princeton en 1983–1984. On y donnait le développement spectral fin mais seulement le développement géométrique grossier. Les notes de ce séminaire ont été reprises et complétées dans [25]. La forme fine du développement géométrique a été obtenue plus tard par Arthur en combinant les résultats du *Friday Morning Seminar* avec des résultats d'analyse harmonique locale.

### Lemme fondamental et stabilisation

La formule des traces, sous sa forme invariante, est une égalité entre deux sommes de distributions invariantes par conjugaison sous  $G(F_S)$  où  $S$  est un ensemble fini de places fixé, mais arbitrairement grand. Or, pour établir certains cas de fonctorialité on est amené à comparer des distributions qui ne sont invariantes que sous une forme plus grossière de la conjugaison appelée *conjugaison stable*. La stabilisation consiste en la réécriture, au moyen de *transferts endoscopiques*, de chaque terme de la formule des traces invariante comme une somme de distributions stablement invariantes sur des groupes auxiliaires appelés *groupes endoscopiques*. On

en déduit des transferts de représentations automorphes entre groupes différents. Les premiers exemples sont le transfert de Jacquet-Langlands [22, Chapter 16], la formule des traces stable pour  $\mathrm{SL}(2)$  [23, 24] et le changement de base cyclique pour  $\mathrm{GL}(2)$  [29]. La stabilisation suppose en particulier connu le *lemme fondamental* aux places en dehors de  $S$ . À la suite des travaux de nombreux auteurs, parmi lesquels il faut citer (par ordre alphabétique) Arthur, Kottwitz, Langlands, Laumon, Ngô Báu Châu, Shelstad et Waldspurger, la stabilisation de la formule des traces tordue pour les corps de nombres a été achevée par Mœglin et Waldspurger [33]. Pour une bibliographie complète sur ce sujet nous renvoyons aux deux tomes de cet ouvrage.

C'est au moyen de la *formule des traces tordue stabilisée* qu'Arthur a pu décrire dans [12] les représentations automorphes discrètes des groupes classiques par comparaison avec celles du groupe linéaire, *lorsque  $F$  est un corps de nombres*. De fait, les groupes classiques quasi-déployés se réalisent comme des *groupes endoscopiques* de l'espace tordu  $\widetilde{G} = \mathrm{GL}(n) \rtimes \theta$  où  $\theta$  est l'automorphisme  $g \mapsto {}^t g^{-1}$ .

## Le cas des corps globaux de caractéristique $p > 0$

### État des lieux

On s'attend à ce qu'un analogue de tout ce qui précède existe aussi lorsque  $F$  est un corps global de caractéristique  $p > 0$ , c'est-à-dire un corps de fonctions sur un corps fini. On espère en déduire des résultats similaires à ceux obtenus pour les représentations automorphes sur les corps de nombres.

Dans toute la suite de ce mémoire nous dirons « corps de fonctions » pour « corps de fonctions sur un corps fini ». Examinons l'état de la littérature sur ce sujet.

La décomposition spectrale pour un groupe réductif connexe général a été étendue au cas des corps de fonctions par Morris [35, 36], en prolongement de travaux de Harder [19–21]. Le livre de Mœglin-Waldspurger [32] en redonne une preuve pour tout corps global.

La formule des traces (sous sa forme fine) pour le groupe  $\mathrm{GL}(2)$  – et ses formes intérieures – est énoncée dans Jacquet-Langlands [22, Chapter 16] pour les corps globaux *en toute caractéristique*; toutefois la démonstration en est seulement esquissée. Pour le groupe  $\mathrm{GL}(n)$  (ou une forme intérieure), on dispose de plusieurs versions en caractéristique  $p > 0$ : Drinfeld pour  $n = 2$  [17, 18], Laumon [30], Lafforgue [26, 27]. En adaptant la méthode de Lafforgue, Ngô Dac Tuân a obtenu, dans [37], le développement spectral fin de la formule des traces non tordue pour les groupes réductifs connexes déployés.

On ne dispose donc, dans la littérature, que de quelques cas particuliers du développement spectral fin en caractéristique  $p > 0$ . Et pour le développement géométrique, en dehors de  $\mathrm{GL}(n)$ , il n'y a que très peu de résultats.

## Objet du présent mémoire et perspectives

Notre projet est d'établir une formule des traces tordue stabilisée pour les corps globaux sans restriction sur la caractéristique. Ce mémoire est une première étape où nous suivons pas à pas la preuve donnée dans [25], en l'adaptant au cas d'un corps global de caractéristique  $p > 0$ . Nous obtenons le développement spectral fin mais, comme dans [25], nous n'obtenons que le développement grossier du côté géométrique.

Pour le développement spectral fin, la caractéristique  $p$  ne semble jouer pratiquement aucun rôle et les formules que nous obtenons pour les corps de fonctions sont essentiellement identiques à celles pour les corps de nombres.

Il n'en est pas de même du côté géométrique. Si  $p$  est grand par rapport au rang de  $G$ , rien de vraiment nouveau n'apparaît, mais le traitement des petites caractéristiques nécessite des idées nouvelles.

Pour le développement géométrique grossier donné ici, la principale différence avec le cas des corps de nombres est que l'on doit remplacer la notion d'élément semi-simple elliptique régulier par celle, plus générale, d'élément primitif. Cette notion englobe, par exemple, des éléments qui deviennent unipotents sur une extension inséparable, mais ne sont contenus dans le radical unipotent d'aucun sous-groupe parabolique propre défini sur  $F$ . De tels éléments, qui n'apparaissent que pour des caractéristiques assez petites, ne génèrent toutefois pas de difficulté sérieuse à ce stade.

Des phénomènes nouveaux compliquent, par contre, considérablement la preuve et la structure même du développement géométrique fin si  $p$  est petit. Par exemple, pour  $G = \mathrm{SL}(2)$ ,  $p = 2$  et  $v$  une place de  $F$ , le nombre de  $G(F_v)$ -orbites unipotentes est infini. La forme fine de la contribution unipotente aura donc une expression de nature fort différente de celle donnée par Arthur pour les corps de nombres. L'inséparabilité perturbe aussi violemment la descente centrale à la Harish-Chandra. On espère qu'il sera possible d'en établir une variante permettant de ramener le développement géométrique fin à celui de la contribution unipotente.

L'extension au cas des corps de fonctions des résultats d'Arthur [4,5], nécessaires pour le développement géométrique fin, est l'objet d'un travail en cours du second auteur.

Il restera encore à stabiliser la formule des traces mais nous sommes loin d'avoir une vue claire du travail à faire. Dans la littérature, seuls le transfert de Jacquet-Langlands [22] et la stabilisation pour  $\mathrm{SL}(2)$  [23] ont été traités en toute caractéristique.

## Structure du texte

### Différences techniques

Nos références principales seront [25] et [34] et on supposera que le lecteur a ces deux textes sous la main. L'organisation de cet article suit celle de [25] et on se contentera souvent de citer sans démonstration les résultats de cet ouvrage, pour peu qu'ils passent sans autre forme de procès à la caractéristique positive.

Toutefois, lorsqu'on essaie de remplacer dans [25] le corps de nombres par un corps de fonctions, on rencontre immédiatement une différence technique, analogue à celle qui existe entre les cas archimédiens et non-archimédiens dans les travaux d'Arthur [8] et de Waldspurger [34] sur la formule des traces locale. En effet, pour un corps global  $F$  quelconque, on dispose pour chaque sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  défini sur  $F$ , d'un espace vectoriel réel  $\alpha_P$  et d'un homomorphisme

$$\mathbf{H}_P : P(\mathbb{A}_F) \rightarrow \alpha_P.$$

On note  $\mathcal{A}_P$  son image et  $\mathcal{B}_P$  l'image de  $A_P(\mathbb{A}_F)$ , où  $A_P$  est le tore déployé maximal dans le centre de  $P/U_P$ . On a les inclusions

$$\mathcal{B}_P \subset \mathcal{A}_P \subset \alpha_P.$$

Pour les corps de nombres, ces trois groupes sont égaux et on dispose d'un relèvement canonique  $\mathfrak{A}_P$  de  $\mathcal{A}_P$  dans  $A_P(\mathbb{A}_F)$ . Il est usuel de se limiter à traiter l'espace des formes automorphes pour  $P$  qui sont invariantes par  $\mathfrak{A}_P$ ; cela ne restreint pas la généralité puisque l'on peut par torsion par un caractère automorphe de  $P(\mathbb{A}_F)$  passer à un caractère quelconque sur  $\mathfrak{A}_P$ . Mais, pour les corps de fonctions, les morphismes  $\mathbf{H}_P$  ne sont plus surjectifs :  $\mathcal{A}_P$  est un réseau de  $\alpha_P$  et en général  $\mathcal{A}_P \neq \mathcal{B}_P$  de sorte qu'un relèvement central de  $\mathcal{A}_P$  n'existe pas. Ceci complique donc certains arguments et a des conséquences sur la présentation des résultats. On prendra garde en particulier à ce que les espaces  $\mathbf{X}_G$  et  $\mathbf{Y}_Q$ , qui interviennent ici, jouent un rôle analogue, mais ne sont pas identiques aux espaces  $\mathbf{X}_G$  et  $\mathbf{Y}_Q$  de [25].

L'autre différence technique – venant de ce que des réseaux ont remplacé les espaces vectoriels pour la combinatoire – est que les polynômes en la variable de troncature  $T$ , qui jouent un rôle essentiel dans l'établissement de la formule des traces pour les corps de nombres, sont ici remplacés par des fonctions de type « polynômes-exponentielles ». Des passages à la limite sont nécessaires pour les éliminer et pour obtenir, par exemple, le développement spectral fin. Ceci complique encore les preuves. Par contre la compacité du dual de Pontryagin des réseaux simplifie le contrôle des convergences d'intégrales.

Comme dans [25], le texte est divisé en quatre parties. Un appendice corrige des bévues de [25].

## Partie I. Géométrie et combinatoire

Dans le chapitre 1, après le rappel des notations usuelles, on adapte à notre cadre le calcul des transformées de Laplace (ou anti-Laplace) des fonctions caractéristiques de polytopes [25, section 1.9], ainsi que les résultats de [25, section 1.10] sur les  $(G, M)$ -familles. Les intégrales sur les polytopes qui apparaissent dans [25] doivent ici être remplacées par des sommes sur l'intersection de ces polytopes avec des réseaux. La combinatoire des polytopes est certes identique, mais la manipulation des intersections est plus délicate; on doit en particulier tenir compte des groupes finis  $\mathfrak{c}_P = \mathcal{B}_P \setminus \mathcal{A}_P$ . Leur traitement requiert l'utilisation de divers outils techniques empruntés à Arthur [8] et à Waldspurger [34]. Pour les corps de nombres, les  $(G, M)$ -familles fournissent des polynômes en la variable de troncature  $T$ , qui permettent de contrôler le comportement asymptotique des divers termes de la formule des traces. Ici les  $(G, M)$ -familles fournissent, pour les  $T$  « rationnels », des expressions du type PolExp c'est-à-dire des combinaisons linéaires de polynômes et d'exponentielles. Par un passage à la limite on définit un polynôme qui est l'analogue du polynôme asymptotique pour les corps de nombres. Dans le chapitre 2, on généralise au cas tordu les relations et propriétés du chapitre 1. L'analogue de l'étude dans le cas tordu de la notion d'élément semi-simple [25, section 2.6] est renvoyée ici au chapitre suivant. Le chapitre 3 contient des rappels sur la théorie de la réduction. Sur un corps global de caractéristique  $p > 0$ , cette théorie est essentiellement due à Harder [20]. En reprenant les idées de Harder sur la descente galoisienne, Springer [39] a donné un traitement uniforme (valable pour tout corps global) des principaux résultats de cette théorie. Là où c'est nécessaire, on remplace donc par [39] la référence au livre de Borel [14] dans [25, chapitre 3]. Par ailleurs, on définit un ersatz de la décomposition de Jordan (inutilisable ici, car, en général, elle n'est pas rationnelle) : on remplace la notion d'élément quasi semi-simple régulier elliptique par celle d'élément *primitif* (qui d'ailleurs apparaît dans [25, section 3.7]). Toute paire  $(\tilde{M}, \delta)$  formée d'un facteur de Levi  $\tilde{M}$  de  $\tilde{G}$  défini sur  $F$  et d'un élément primitif  $\delta$  de  $\tilde{M}(F)$ , définit un sous-ensemble  $\mathcal{O}_\circ$  de  $\tilde{G}(F)$  stable par  $G(F)$ -conjugaison. Ces ensembles  $\mathcal{O}_\circ$  jouent le rôle des classes de ss-conjugaison de [25].

## Partie II. Théorie spectrale, troncatures et noyaux

Le chapitre 4 concerne l'opérateur de troncature  $\Lambda^T$ . Ses propriétés sont essentiellement les mêmes que dans le cas des corps de nombres, exceptées les propriétés de décroissance qui sont ici beaucoup plus fortes. On pose

$$X_G = G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F) \quad \text{et} \quad \overline{X}_G = A_G(\mathbb{A}_F) G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F).$$

Pour un corps de fonctions, l'opérateur de troncature  $\Lambda^T$ , appliqué à une fonction lisse et  $K$ -finie  $\varphi$  sur  $X_G$ , fournit une fonction  $\Lambda^T \varphi$  sur  $X_G$  à support d'image

compacte dans  $\overline{X}_G$ . De plus, la décomposition

$$\Lambda^T = \mathbf{C}^T + (\Lambda^T - \mathbf{C}^T),$$

où  $\mathbf{C}^T$  est la multiplication par la fonction caractéristique d'un domaine de Siegel tronqué, se simplifie ici car, si  $T$  est assez régulier, on a  $(\Lambda^T - \mathbf{C}^T)\varphi = 0$ . Le chapitre 5 introduit les opérateurs d'entrelacement et les séries d'Eisenstein dont les propriétés, en particulier leur prolongement méromorphe, ont été établies par Morris [35, 36] et reprises dans [32, chapitres II, IV]. La preuve de la formule pour le produit scalaire de deux séries d'Eisenstein tronquées reprend celle de [25, théorème 5.4.3]. Dans le cas où les fonctions induisantes sont cuspidales, on obtient une formule exacte essentiellement due à Langlands. Dans le cas où les fonctions ne sont pas cuspidales, on dispose d'une formule asymptotique qui se déduit du cas cuspidal. Cette formule asymptotique fournit une majoration uniforme lorsque les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont imaginaires purs. En effet, ici, les espaces de paramètres sont compacts, ce qui n'était pas le cas pour les corps de nombres. Dans le chapitre 6 est introduit le noyau intégral. Le théorème de factorisation de Dixmier-Malliavin, et la propriété de  $\mathcal{A}$ -admissibilité, sont trivialement vrais ici. On énonce la principale propriété du noyau tronqué (l'opérateur de troncature agissant sur la première variable) : sa restriction à  $\mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^*$  est bornée et à support compact, où  $\mathfrak{S}^*$  est un domaine de Siegel pour le quotient  $\overline{X}_G$ . Dans le chapitre 7 on rappelle la décomposition spectrale de  $L^2(X_G)$  due à Langlands pour les corps de nombres [28] et à Morris pour les corps de fonctions [35, 36], puis rédigée pour tout corps global par Mœglin et Waldspurger [32]. On remarquera que si  $A_G$ , le tore déployé maximal dans le centre de  $G$ , n'est pas trivial, il n'y a pas de spectre discret dans  $L^2(X_G)$  et, pour parer ce fait, il est usuel de donner la décomposition spectrale en ayant fixé un caractère unitaire d'un sous-groupe co-compact de  $A_G(F) \backslash A_G(\mathbb{A}_F)$ . Pour les corps de nombres on se limite aux fonctions sur  $X_G$  qui sont invariantes par le relèvement  $\mathfrak{A}_G$  de  $A_G$  dans  $A_G(\mathbb{A}_F)$ . Comme déjà observé ci-dessus, pour les corps de fonctions, un tel relèvement n'existe pas, en général. En l'absence d'un choix naturel, nous ne ferons aucune hypothèse sur le comportement des fonctions sur  $A_G(\mathbb{A}_F)$  et la décomposition spectrale comprendra, comme première étape, la décomposition suivant les caractères unitaires de  $A_G(F) \backslash A_G(\mathbb{A}_F)$ .

### Partie III. La formule des traces grossière

Dans le chapitre 8 on donne, à titre d'exemple, la formule des traces dans le cas compact. Comme nous ne faisons aucune hypothèse sur l'action du centre de  $G$ , l'intégrale du noyau sur la diagonale porte ici sur

$$Y_G = A_{\overline{G}}(\mathbb{A}_F)G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F),$$

au lieu de  $\mathfrak{A}_G G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$  dans [25]. Puis on énonce l'identité fondamentale entre les deux troncutures, pour le noyau, qu'il convient de considérer pour traiter le cas gé-

néral. Le chapitre 9 décrit le développement géométrique dit « grossier ». Le résultat principal est la convergence de l'expression

$$\sum_{\mathfrak{o}} \int_{Y_G} |k_{\mathfrak{o}}^T(x)| dx,$$

où  $\mathfrak{o}$  parcourt les classes d'équivalence de paires primitives dans  $\tilde{G}(F)$ . Il implique en particulier que les intégrales orbitales des éléments primitifs sont absolument convergentes. Comme en [25, section 9.3], on ne donnera des formules explicites que pour les orbites primitives et pour les orbites quasi semi-simples. Le développement géométrique fin qui explicite les contributions unipotentes n'est pas abordé ici. Le chapitre 10 établit la convergence d'une première forme du développement spectral. Il s'agit de montrer la convergence de chaque terme d'une somme indexée par des sous-groupes paraboliques. Les résultats principaux sont les propositions 10.1.2 et 10.2.1, analogues de [25, proposition 10.1.6, corollaire 10.2.3]. Dans le chapitre 11, pour chaque terme des développements géométriques et spectraux, un élément de l'ensemble PolExp est défini, ainsi que le polynôme limite. On obtient la première forme, dite « grossière », de la formule des traces.

#### Partie IV. Forme fine des termes spectraux

Il reste à exploiter la décomposition spectrale pour obtenir le développement spectral fin. Les preuves des énoncés suivent pas à pas celles des chapitres 12 et 13 de [25] à deux différences (simplificatrices) près : d'une part, il est inutile d'introduire une fonction  $B$  car ici les paramètres spectraux évoluent dans un espace compact; d'autre part (comme dit plus haut), la décomposition de l'opérateur de troncature en  $\Lambda^T = \mathbf{C}^T + (\Lambda^T - \mathbf{C}^T)$  devient ici, pour  $T$  assez régulier (dépendant de la fonction test  $\varphi$ ),  $\Lambda^T \varphi = \mathbf{C}^T \varphi$ . Le chapitre 14 contient la combinatoire finale donnant lieu aux formules explicites. La preuve de la proposition 14.2.3 est plus technique que celle de son analogue [25, proposition 14.1.8] et fournit une formule moins simple, à cause d'une inversion de Fourier relative à un accouplement qui n'est pas parfait. C'est un problème déjà présent dans le cas local. On s'inspire du traitement de cela dans [34] pour obtenir les formules finales.

#### Appendice

On trouvera en appendice un erratum corrigeant les lapsus et erreurs que nous avons pu repérer dans [25].