Chapitre 1

Racines, convexes et (G, M)-familles

1.1 Le corps F

Dans tout cet article, F est un corps global et, sauf mention expresse du contraire lorsque nous faisons le parallèle avec le cas des corps de nombres, il est de caractéristique $p > 0$.

Soit $\mathbb{F}_q$ « le » corps fini à q éléments, pour une puissance q du nombre premier p. Soit $\mathcal{V}$ une courbe projective lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$, de corps de fonctions F. L'ensemble $|\mathcal{V}|$ des points fermés de $\mathcal{V}$ est en bijection avec l'ensemble des places de F. Pour $v \in |\mathcal{V}|$, on note F_v le corps complété de F en v, $\mathfrak{o}_v$ l'anneau des entiers de F_v, $\mathfrak{p}_v$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_v$, et κ_v le corps résiduel $\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v$. Ce dernier est une extension finie de $\mathbb{F}_q$, de degré $\deg(v)$ appelé « degré de v », et de cardinal $q_v = q^{\deg(v)}$. Pour $v \in |\mathcal{V}|$, on note encore v la valuation sur F_v normalisée par $v(F_v^\times) = \mathbb{Z}$, c'est-à-dire par $v(\varpi_v) = 1$ pour une uniformisante ϖ_v de F_v, et on note $|\ |_v$ la valeur absolue sur F_v définie par

$$|x|_v = q_v^{-v(x)}, \quad x \in F_v.$$

Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles[1] et $\mathbb{A}^\times$ le groupe des idèles de F. On dispose de l'application degré

$$\deg : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{Z},$$

définie par

$$\deg(a) = \sum_{v \in |\mathcal{V}|} -v(a_v) \deg(v) \qquad \text{pour} \qquad a = (a_v)_{v \in |\mathcal{V}|} \in \mathbb{A}^\times,$$

et on pose $|a| = \prod_v |a_v|_v = q^{\deg(a)}$. Le groupe $F^\times$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{A}^\times$, contenu dans

$$\mathbb{A}^1 = \{a \in \mathbb{A}^\times : \deg(a) = 0\},$$

et le quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}^1$ est un compact.

[1] Le corps F étant fixé dans toute la suite nous allègeons la notation en notant simplement $\mathbb{A}$ l'anneau $\mathbb{A}_F$.

1.2 Espaces vectoriels et réseaux

Soit P un groupe algébrique linéaire connexe défini sur F. On note $X_F(P)$ le groupe des *caractères algébriques* de P définis sur F. Si R est un anneau, on pose

$$\mathfrak{a}_{P,R} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}(X_F(P), R).$$

Le $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}}$ est un réseau de l'espace vectoriel réel

$$\mathfrak{a}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{a}_{P,\mathbb{R}}.$$

Pour $x \in P(\mathbb{A})$, on note $\mathbf{H}_P(x)$ l'élément de $\mathfrak{a}_P$ tel que

$$\langle \chi, \mathbf{H}_P(x)\rangle = \deg \chi(x) \quad \text{pour tout} \quad \chi \in X_F(P).$$

L'application $x \mapsto \mathbf{H}_P(x)$ est un homomorphisme

$$\mathbf{H}_P : P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P,$$

dont l'image – notée $\mathfrak{a}_{P,F}$ dans [8] et dans [34] – sera ici notée $\mathcal{A}_P$:

$$\mathcal{A}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{H}_P(P(\mathbb{A})).$$

Pour un corps de fonctions, $\mathcal{A}_P$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}}$ et donc un réseau de $\mathfrak{a}_P$ (alors que $\mathcal{A}_P = \mathfrak{a}_P$ pour un corps de nombres). Une inclusion de F-groupes algébriques linéaires connexes $P \subset Q$ induit des homomorphismes

$$\mathfrak{a}_{P,\bullet} \to \mathfrak{a}_{Q,\bullet}.$$

On pose

$$\mathfrak{a}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \ker[\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_Q] \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \ker[\mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_Q] = \mathcal{A}_P \cap \mathfrak{a}_P^Q.$$

Pour $H \in \mathcal{A}_P$ on notera $P(\mathbb{A}; H)$ l'image réciproque de H. Le noyau de $\mathbf{H}_P$, usuellement noté $P(\mathbb{A})^1$, n'est autre que $P(\mathbb{A}; 0)$. Le groupe $P(\mathbb{A})^1 = P(\mathbb{A}; 0)$ opère par translations sur $P(\mathbb{A}; H)$ ainsi que le groupe $P(F)$ des points F-rationnels de P qui est un sous-groupe de $P(\mathbb{A})^1$, et donc $P(\mathbb{A})^1$ opère à droite sur le quotient $P(F)\backslash P(\mathbb{A}; H)$.

Supposons que le radical unipotent U_P de P soit défini sur F et qu'il existe une section $\iota : \overline{P} = P/U_P \to P$, elle aussi définie sur F (c'est toujours le cas si P est un F-sous-groupe parabolique d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur F). On note Z_P le centre « schématique » de $\overline{P}$, et $A_P \subset Z_P$ le tore F-déployé maximal de Z_P. On identifie A_P à $\iota(A_P)$. L'homomorphisme naturel

$$\mathcal{A}_{A_P} \to \mathcal{A}_P$$

est bien défini (il ne dépend pas de la section ι). Il est injectif mais non surjectif en général ; son image sera notée

$$\mathcal{B}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{H}_P(A_P(\mathbb{A})).$$

C'est un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{A}_P$; on pose

$$\mathfrak{c}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_P \backslash \mathcal{A}_P \simeq A_P(\mathbb{A}) P(\mathbb{A})^1 \backslash P(\mathbb{A}).$$

Pour $P \subset Q$ deux F-sous-groupes paraboliques d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur F, l'inclusion $A_P \subset A_Q$ (définie via le choix de sections $\overline{P} \to P$ et $\overline{Q} \to Q$ définies sur F) induit une section $\mathfrak{a}_Q \to \mathfrak{a}_P$ de l'homomorphisme surjectif $\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_Q$ et donc une décomposition

$$\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_P^Q.$$

Pour $X = X_P \in \mathfrak{a}_P$, cette décomposition s'écrit $X = X_Q + X^Q$.

1.3 Dualité et mesures

On appelle *caractère* d'un groupe topologique, un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$, et *caractère unitaire*, un caractère à valeurs dans le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Le dual de Pontryagin d'un groupe abélien localement compact est le groupe topologique de ses caractères unitaires.

Si $\mathfrak{a}$ est un espace vectoriel réel de dimension finie, on notera $\mathfrak{a}^*$ l'espace vectoriel réel dual, $\langle \Lambda, X \rangle$ le produit scalaire de $X \in \mathfrak{a}$ et $\Lambda \in \mathfrak{a}^*$, et $\widehat{\mathfrak{a}}$ le dual de Pontryagin de $\mathfrak{a}$ que l'on peut identifier, au moyen de l'exponentielle, au sous-espace $i\mathfrak{a}^*$ des vecteurs imaginaires purs dans $\mathfrak{a}^* \otimes \mathbb{C}$. Si $\mathcal{R}$ est un réseau de $\mathfrak{a}$, on notera $\mathcal{R}^\vee$ l'ensemble des $\Lambda \in i\mathfrak{a}^*$ tels que $\langle \Lambda, X \rangle \in 2i\pi Z$ pour tout $X \in \mathcal{R}$. C'est l'orthogonal de $\mathcal{R}$ du point de vue de la dualité de Pontryagin : le groupe compact $\widehat{\mathfrak{a}}/\mathcal{R}^\vee$ s'identifie au dual de Pontryagin de $\mathcal{R}$:

$$\widehat{\mathcal{R}} \simeq \widehat{\mathfrak{a}}/\mathcal{R}^\vee.$$

Pour une fonction à décroissance rapide f sur $\mathcal{R}$, on note $\widehat{f}$ la fonction lisse sur $\widehat{\mathcal{R}}$ définie par

$$\widehat{f}(\Lambda) = \sum_{X \in \mathcal{R}} f(X) e^{\langle \Lambda, X \rangle}, \quad \Lambda \in \widehat{\mathcal{R}}.$$

Si $\widehat{\mathcal{R}}$ est muni de la mesure duale de la mesure de comptage sur $\mathcal{R}$, c'est-à-dire telle que $\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{R}}) = 1$, on a la formule d'inversion

$$f(X) = \int_{\widehat{\mathcal{R}}} \widehat{f}(\Lambda) e^{-\langle \Lambda, X \rangle} \, \mathrm{d}\Lambda, \quad X \in \mathcal{R}.$$

Pour alléger légèrement les notations, pour P comme en section 1.2, on se permettra d'écrire $\widehat{\mathfrak{a}}_P$, $\widehat{\mathcal{A}}_P$, etc., en place de $\widehat{\mathfrak{a}_P}$, $\widehat{\mathcal{A}_P}$, etc. On pose

$$\boldsymbol{\mu}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\mathcal{A}}_P.$$

Notons $\Xi(P)$, resp. $\Xi(P)^1$, l'ensemble des caractères unitaires de $A_P(\mathbb{A})$, resp. $A_P(\mathbb{A})^1$, qui sont triviaux sur $A_P(F)$. Ce sont deux groupes abéliens localement compacts, et $\Xi(P)^1$ est un quotient discret de $\Xi(P)$. On notera $\Xi(P)^+$ l'ensemble des caractères, non nécessairement unitaires. Le groupe $\Xi(P)$ s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to \widehat{\mathcal{B}}_P \to \Xi(P) \to \Xi(P)^1 \to 0.$$

Convention 1.3.1. Pour les mesures de Haar sur les groupes abéliens localement compacts, on adoptera les normalisations suivantes. On impose la compatibilité aux suites exactes courtes et à la dualité de Pontryagin. Les réseaux de $\mathfrak{a}_P$ sont munis de la mesure de comptage. Cela implique que le groupe fini $\mathfrak{c}_P$ est, lui aussi, muni de la mesure de comptage, et que l'on a[2]

$$\mathrm{vol}(\boldsymbol{\mu}_P) = \mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{B}}_P) = \mathrm{vol}(\widehat{\mathfrak{c}}_P) = 1.$$

On impose aussi que la mesure de Haar sur $A_P(F)\backslash A_P(\mathbb{A})$ vérifie

$$\mathrm{vol}(A_P(F)\backslash A_P(\mathbb{A})^1) = 1.$$

Ceci implique en particulier que le groupe discret $\Xi(P)^1$, dual du groupe compact $A_P(F)\backslash A_P(\mathbb{A})^1$, est muni de la mesure de comptage.

Tout caractère χ de $P(\mathbb{A})$ s'écrit de manière unique

$$\chi = \chi_{\mathrm{u}}|\chi|$$

avec $|\chi|(g) = |\chi(g)|$ et χ_{u} unitaire. Le caractère $|\chi|$ est trivial sur $P(\mathbb{A})^1$. On note $\chi^1 = \chi_{\mathrm{u}}^1$ la restriction de χ à $P(\mathbb{A})^1$. Tout élément $\nu \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ définit un caractère de $P(\mathbb{A})$, trivial sur $P(\mathbb{A})^1$:

$$p \mapsto e^{\langle \nu, \mathbf{H}_P(p)\rangle}, \quad p \in P(\mathbb{A}).$$

Ce caractère ne dépend que de l'image de ν dans $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_P$ et sa restriction à $A_P(\mathbb{A})$ ne dépend que de l'image de ν dans $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{B}^\vee_P$. La suite exacte courte

$$0 \to \widehat{\mathfrak{c}}_P \to \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_P \to \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{B}^\vee_P \to 0$$

[2] On observera que cette convention n'est pas celle utilisée dans [8].

correspond à la restriction des caractères de $P(\mathbb{A})$ à $A_P(\mathbb{A})$. Si π est une représentation de $P(\mathbb{A})$, pour $\nu \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{A}_P^\vee$ on note π_ν la représentation de $P(\mathbb{A})$ définie par

$$\pi_\nu(p) = \pi(p)e^{\langle \nu, \mathbf{H}_P(p)\rangle}, \quad p \in P(\mathbb{A}).$$

On la notera aussi parfois $\pi \star \nu$. De même, si ξ est un caractère de $A_P(\mathbb{A})$, pour $\nu \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{B}_P^\vee$, on note $\xi_\nu = \xi \star \nu$ le caractère $a \mapsto \xi(a)e^{\langle \nu, \mathbf{H}_P(a)\rangle}$ de $A_P(\mathbb{A})$.

1.4 Sous-groupes paraboliques

Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. Tous les sous-groupes paraboliques de G considérés dans la suite, ainsi que leurs composantes de Levi, sont supposés définis sur F. On fixe un sous-groupe parabolique minimal P_0 de G et une composante de Levi M_0 de P_0. On note A_0 le tore F-déployé maximal du centre Z_{M_0} de M_0. Ainsi M_0 est le centralisateur de A_0 dans G. Un sous-groupe parabolique de G est dit « standard », resp. « semi-standard », s'il contient P_0, resp. M_0. Un facteur de Levi de G, c'est-à-dire une composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de G, est dit « semi-standard » s'il contient M_0, et il est dit « standard » si c'est la composante de Levi semi-standard d'un sous-groupe parabolique standard. Dans la suite, tous les sous-groupe paraboliques et tous les sous-groupes de Levi seront semi-standards – nous omettrons parfois de le préciser.

On note $\mathcal{P} = \mathcal{P}^G$, resp. $\mathcal{L} = \mathcal{L}^G$, l'ensemble des sous-groupes paraboliques, resp. facteurs de Levi, de G, (semi-standards), et $\mathcal{P}_{\mathrm{st}} = \mathcal{P}^G_{\mathrm{st}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé des éléments standards. Pour $P \in \mathcal{P}$, on note M_P ou simplement M la composante de Levi (semi-standard) de P, et U_P ou simplement U, le radical unipotent de P ; on a les identifications

$$A_P = A_M, \quad \mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_M \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_P = \mathcal{A}_M.$$

On pose

$$a_P = \dim(\mathfrak{a}_P).$$

Pour P, $Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$, on a noté $\mathfrak{a}_P^Q$ le noyau de l'homomorphisme naturel $\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_Q$. On pose

$$a_P^Q = \dim(\mathfrak{a}_P^Q) = a_P - a_Q.$$

Pour $M \in \mathcal{L}$ on note $\mathcal{P}(M)$, resp. $\mathcal{F}(M)$, le sous-ensemble des $Q \in \mathcal{P}$ avec comme composante de Levi $M_Q = M$, resp. $M_Q \supset M$. Pour $Q \in \mathcal{F}(M)$, on pose

$$\mathcal{P}^Q(M) = \{P \in \mathcal{P}(M) : P \subset Q\}, \quad \mathcal{F}^Q(M) = \{P \in \mathcal{F}(M) : P \subset Q\}.$$

On se permettra de remplacer l'indice P par un indice M dans les objets qui ne dépendent pas du choix de $P \in \mathcal{P}(M)$. Par exemple, pour $Q \in \mathcal{F}(M)$ et $P \in \mathcal{P}^Q(M)$, on écrira parfois $\mathfrak{a}_M^Q$ au lieu de $\mathfrak{a}_P^Q$, et X_M^Q au lieu de X_P^Q pour $X \in \mathfrak{a}_{P_0}$. On remplacera souvent l'indice « P_0 » par un indice « 0 » : ainsi on écrira A_0 pour A_{P_0}, $\mathfrak{a}_0$ pour $\mathfrak{a}_{P_0}$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_0^Q$, etc.

On fixe une forme quadratique définie positive $(\cdot, \cdot)$ sur $\mathfrak{a}_0$, invariante par le groupe de Weyl $\mathbf{W} = N^G(A_0)/M_0$, où $N^G(A_0)$ est le normalisateur de A_0 dans G. Pour tout $X \in \mathfrak{a}_0$, on note $\|X\| = (X, X)^{1/2}$ la norme de X. Pour $M \in \mathcal{L}$, la forme $(\cdot, \cdot)$ induit, par restriction, une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{a}_M$, invariante par le groupe de Weyl $\mathbf{W}^M = N^M(A_0)/M_0$. Pour $Q \in \mathcal{F}(M)$, $\mathfrak{a}_M^Q$ n'est autre que l'orthogonal de $\mathfrak{a}_Q$ dans $\mathfrak{a}_M$, pour cette forme.

Pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on dispose des racines de A_0 dans M_P et des coracines, qui sont de éléments de $\mathfrak{a}_0^P$. Pour toute racine α et toute coracine $\check{\beta}$ on a

$$\langle \alpha, \check{\beta} \rangle = N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}.$$

Les coracines appartiennent donc à $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^P$. Soit Δ_0^P l'ensemble des racines simples de A_0 dans M_P pour l'ordre défini par $P_0 \cap M_P$; on note $\check{\Delta}_0^P$ la base de $\mathfrak{a}_0^P$ formée par les coracines simples, et $\hat{\Delta}_0^P$ la base des poids pour M_P, c'est-à-dire la base de $(\mathfrak{a}_0^P)^*$ duale de $\check{\Delta}_0^P$. Lorsque $P = G$, on écrira souvent Δ_0 pour Δ_0^G. On observe que $\Delta_0^P \subset \Delta_0$ et que $\hat{\Delta}_0^P$ est l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de $\hat{\Delta}_0$ au sous-espace $\mathfrak{a}_0^P$ de $\mathfrak{a}_0^G$.

Plus généralement, pour $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $P \subset Q$, on note Δ_P^Q l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de Δ_0^Q au sous-espace $\mathfrak{a}_P^Q$ de $\mathfrak{a}_0^Q$. On note $\check{\Delta}_P^Q$ l'ensemble des projections non nulles des éléments de $\check{\Delta}_0^Q$ sur l'espace $\mathfrak{a}_P^Q$ par rapport à la décomposition $\mathfrak{a}_0^Q = \mathfrak{a}_0^P \oplus \mathfrak{a}_P^Q$. On note $\hat{\Delta}_P^Q$ la base de $(\mathfrak{a}_P^Q)^*$ duale de $\check{\Delta}_P^Q$: c'est le sous-ensemble des éléments de $\hat{\Delta}_0^Q$ nuls sur $\mathfrak{a}_0^P$. On considère les éléments de Δ_P^Q et $\hat{\Delta}_P^Q$ comme des formes linéaires sur $\mathfrak{a}_0$, grâce à la décomposition

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^P \oplus \mathfrak{a}_P^Q \oplus \mathfrak{a}_Q.$$

Rappelons que deux réseaux $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie sont dits *commensurables* si leur intersection $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est d'indice fini dans chacun d'eux. En particulier on a le lemme suivant.

Lemme 1.4.1. *Les réseaux $\mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)$ sont commensurables aux $\mathcal{A}_P^Q$.*

Ces définitions s'étendent à toute paire de sous-groupes paraboliques (P, Q) de G tels que $P \subset Q$: on choisit un élément $g \in G(F)$ tel que $g^{-1}Pg \supset P_0$ et, par transport de structures via le F-automorphisme Int_g de G, on définit les analogues des objets ci-dessus ; cela ne dépend pas du choix de g.

On note $\mathfrak{a}_0^+$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}_0$ tels que $\langle \alpha, X \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. Un élément de $\mathfrak{a}_0$ est dit *régulier* s'il appartient à $\mathfrak{a}_0^+$. Pour $X \in \mathfrak{a}_0$, on pose

$$\boldsymbol{d}_0(X) = \inf_{\alpha \in \Delta_0} \langle \alpha, X \rangle.$$

Ainsi X est régulier si et seulement si $\boldsymbol{d}_0(X) > 0$.

Soit M un facteur de Levi de G. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, les homomorphismes de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathfrak{a}_M \to \mathfrak{a}_P$ et de $\mathbb{Z}$-modules $\mathcal{A}_M \to \mathcal{A}_P$ sont des isomorphismes. Pour P, $Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$, on a noté $\mathcal{A}_P^Q$ le réseau $\ker[\mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_Q] = \mathcal{A}_P \cap \mathfrak{a}_P^Q$ de $\mathfrak{a}_P^Q$.

Lemme 1.4.2. *On a une suite exacte courte de réseaux :*

$$0 \to \mathcal{A}_P^Q \to \mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_Q \to 0.$$

Démonstration. Il convient d'établir la surjectivité de la flèche $\mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_Q$. Pour cela on invoque la décomposition d'Iwasawa (rappelée en section 3.1) : tout $q \in Q(\mathbb{A})$ peut s'écrire $q = pk$ avec $k \in \boldsymbol{K}$, où $\boldsymbol{K}$ est un bon sous-groupe compact maximal dans $G(\mathbb{A})$ et $p \in P(\mathbb{A})$, donc $\mathbf{H}_Q(q) = \mathbf{H}_Q(p) = \mathbf{H}_P(p)$. ∎

On pose dualement

$$\boldsymbol{\mu}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \boldsymbol{\mu}_P/\boldsymbol{\mu}_Q = \widehat{\mathcal{A}}_P^Q.$$

Notons qu'en général il n'y a pas de section canonique relevant $\mathcal{A}_Q$ dans $\mathcal{A}_P$. En revanche, on a toujours l'inclusion

$$\mathcal{B}_Q = \mathbf{H}_Q(A_Q(F)) = \mathbf{H}_P(A_Q(F)) \subset \mathcal{B}_P.$$

Puisque A_Q est un sous-tore de A_P, on a l'égalité :

$$\mathcal{B}_Q = \mathcal{B}_P \cap \mathfrak{a}_Q.$$

En résumé, les inclusions

$$A_Q(\mathbb{A}) \subset A_P(\mathbb{A}) \subset M_P(\mathbb{A}) \subset M_Q(\mathbb{A})$$

donnent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_P \arrow[r] & \mathcal{A}_Q \\ \mathcal{B}_P \arrow[u] & \mathcal{B}_Q, \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale du haut est surjective alors que les trois autres sont injectives. On pose

$$\mathcal{B}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_Q \backslash \mathcal{B}_P \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_Q \backslash \mathcal{A}_P.$$

On observe que $\mathcal{B}_P^Q$ est un réseau de $\mathfrak{a}_P^Q$ et que $\mathcal{C}_P^Q$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini qui s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{B}_P^Q \to \mathcal{C}_P^Q \to \mathfrak{c}_P \to 0.$$

1.5 Familles orthogonales et (G, M)-familles

Fixons un facteur de Levi $M \in \mathcal{L}$ et considérons une famille

$$\mathfrak{X} = (X_P)_{P \in \mathcal{F}(M)}$$

d'éléments $X_P \in \mathfrak{a}_P$. Une telle famille est dite *M-orthogonale* (ou simplement *orthogonale*) si pour tous P et Q dans $\mathcal{F}(M)$ tels que $P \subset Q$, la projection $(X_P)_Q$ de X_P dans $\mathfrak{a}_Q$ est égale à X_Q. Pour $M' \in \mathcal{L}$ tel que $M \subset M'$, une famille M-orthogonale détermine par restriction une famille M'-orthogonale. Il suffit, pour définir une famille M-orthogonale, de se donner des $X_P \in \mathfrak{a}_M$ pour chaque $P \in \mathcal{P}(M)$ vérifiant la propriété suivante : si P et $P' \in \mathcal{P}(M)$ sont adjacents et si α est l'unique racine de A_M positive pour P et négative pour P', alors $X_P - X_{P'}$ est un multiple de $\check{\alpha}$. La famille est dite *régulière* si les $X_P - X_{P'}$ sont des multiples positifs de $\check{\alpha}$. On dit que la famille est *entière*, resp. *rationnelle*, si $X_P \in \mathcal{A}_M$, resp. $X_P \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{Q}}$, pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$. Dans ce cas $X_Q \in \mathcal{A}_Q$, resp. $X_Q \in \mathfrak{a}_{Q,\mathbb{Q}}$, pour tout $Q \in \mathcal{F}(M)$.

On notera $\mathfrak{H}_{G,M}$ ou simplement $\mathfrak{H}_M$ si aucune confusion n'en résulte, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie formé des familles M-orthogonales, et

$$\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_{G,M} \subset \mathfrak{H}_M$$

le réseau formé des familles qui sont entières. On note

$$\widehat{\mathfrak{H}}_M = i\mathfrak{H}_M^*$$

le dual de Pontryagin de $\mathfrak{H}_M$. Le groupe compact

$$\widehat{\mathcal{H}}_M = \widehat{\mathfrak{H}}_M / \mathcal{H}_M^\vee$$

s'identifie au dual de Pontryagin de $\mathcal{H}_M$. Pour chaque $P \in \mathcal{F}(M)$, on dispose d'une application

$$\pi_P : \mathfrak{H}_M \to \mathfrak{a}_P, \ \mathfrak{X} \mapsto X_P$$

qui est surjective et on note

$$\iota_P : \widehat{\mathfrak{a}}_P \to \widehat{\mathfrak{H}}_M$$

l'application injective transposée de π_P.

Une manière très simple de construire une famille M_0-orthogonale est de fixer un élément $T \in \mathfrak{a}_0$. Pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, si w est l'unique élément de $\mathbf{W}$ tel que ${}^w(P_0) = P$, on pose $[T]_P = wT$. On a donc $[T]_{P_0} = T$ et l'ensemble

$$\mathfrak{T} = ([T]_P)_{P \in \mathcal{P}(M_0)}$$

définit une famille M_0-orthogonale. Pour $Q \in \mathcal{F}(M_0)$, on a $[T]_Q = ([T]_P)_Q$ pour un (i.e. pour tout) $P \in \mathcal{P}^Q(M_0)$. Cette famille est régulière, resp. rationnelle, si et seulement si $T \in \mathfrak{a}_0^+$, resp. $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. Soit $\mathfrak{X} = (X_P)$ une famille M-orthogonale, et soit T un élément de $\mathfrak{a}_0$. On définit une autre famille M-orthogonale en posant :

$$\mathfrak{X}(T) = \mathfrak{X} + \mathfrak{T}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathfrak{X}(T)_P = X_P + [T]_P.$$

Une (G, M)-famille est la donnée d'une famille de fonctions

$$\boldsymbol{c} = (\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}(\Lambda, P) \mid P \in \mathcal{F}(M))$$

à valeurs dans $\mathbb{C}$, ou plus généralement à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finies $\boldsymbol{E}$, vérifiant les conditions :

- pour tout $P \in \mathcal{F}(M)$, la fonction $\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}(\Lambda, P)$ est lisse sur $\widehat{\mathfrak{a}}_P$;
- pour tous $P, Q \in \mathcal{F}(M)$ tels que $P \subset Q$ (i.e. $P \in \mathcal{F}^Q(M)$), on a

$$\boldsymbol{c}(\cdot, P)|_{\widehat{\mathfrak{a}}_Q} = \boldsymbol{c}(\cdot, Q).$$

Pour chaque $P \in \mathcal{F}(M)$, on prolonge $\boldsymbol{c}(\cdot, P)$ en une fonction sur $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ constante sur les fibres de la projection $\widehat{\mathfrak{a}}_0 \to \widehat{\mathfrak{a}}_P$. Comme pour les familles M-orthogonales, il suffit pour définir une (G, M)-famille de se donner des fonctions lisses

$$\boldsymbol{c}(\cdot, P) : \widehat{\mathfrak{a}}_M \to \boldsymbol{E} \qquad \text{pour} \qquad P \in \mathcal{P}(M)$$

qui vérifient la propriété suivante : pour $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ deux éléments adjacents correspondant à des chambres séparées par le mur $\mathfrak{a}_R$, où R est l'élément de $\mathcal{F}(M)$ engendré par P et P', on a l'égalité

$$\boldsymbol{c}(\cdot, P)|_{\widehat{\mathfrak{a}}_R} = \boldsymbol{c}(\cdot, P')|_{\widehat{\mathfrak{a}}_R}.$$

Les fonctions $c(\cdot, Q)$ pour $Q \in \mathcal{F}(M) \smallsetminus \mathcal{P}(M)$ s'en déduisent par restriction.

Une (G, M)-famille $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot, P))$ est dite *périodique* si pour tout $P \in \mathcal{F}(M)$, la fonction $\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}(\Lambda, P)$ est invariante par translation par $\mathcal{A}_P^\vee$, i.e. se factorise par $\boldsymbol{\mu}_P \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathcal{A}}_P$. Pour qu'une (G, M)-famille $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot, P))$ soit périodique, il suffit que pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, la fonction $\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}(\Lambda, P)$ soit $\mathcal{A}_M^\vee$-périodique. On notera $\mathcal{D}(G, M)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des (G, M)-familles périodiques.

Soit m une mesure de Radon à décroissance rapide sur $\mathfrak{S}_M$ et à valeurs dans $\boldsymbol{E}$. On lui associe une (G, M)-famille en posant, pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_P$:

$$\boldsymbol{c}(\Lambda, P) = \int_{\mathfrak{S}_M} e^{\langle \Lambda, X_P \rangle} \,\mathrm{d}m(\mathfrak{X}),$$

où $X_P = \pi_P(\mathfrak{X})$. La (G, M)-famille $\boldsymbol{c}$ est périodique si et seulement si la mesure m est le produit d'une fonction à décroissance rapide sur le réseau $\mathcal{H}_M$ par la mesure de comptage. Par abus de notation nous noterons encore m cette fonction. Sa transformée de Fourier

$$\widehat{m}(\mathfrak{L}) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} e^{\langle \mathfrak{L}, \mathfrak{U} \rangle} m(\mathfrak{U}) \quad \text{pour} \quad \mathfrak{L} \in \widehat{\mathfrak{H}}_M$$

se factorise par $\widehat{\mathcal{H}}_M$, c'est-à-dire est invariante par $\mathcal{H}_M^\vee$. On notera $\boldsymbol{c}_m$ la (G, M)-famille périodique définie par

$$\boldsymbol{c}_m(\Lambda, P) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} e^{\langle \Lambda, U_P \rangle} m(\mathfrak{U}) = (\widehat{m} \circ \iota_P)(\Lambda).$$

On munit l'espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{H}_M$ d'une structure euclidienne et on note $\|\mathfrak{X}\|$ la norme du vecteur $\mathfrak{X} \in \mathfrak{H}_M$. L'espace $\mathcal{S}(\mathcal{H}_M)$ des fonctions m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$ est muni d'une structure d'espace de Fréchet au moyen des normes n_d pour $d \in \mathbb{N}$:

$$n_d(m) = \sup_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} (1 + \|\mathfrak{U}\|)^d |m(\mathfrak{U})|.$$

Tout opérateur différentiel à coefficients constants D sur $\widehat{\mathfrak{a}}_M$ permet de définir une semi-norme N_D sur l'espace $\mathcal{D}(G, M)$ en posant

$$N_D(\boldsymbol{c}) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \sup_{\Lambda \in \boldsymbol{\mu}_M} |D\boldsymbol{c}(\Lambda, P)|,$$

munissant ainsi $\mathcal{D}(G, M)$ d'une structure d'espace de Fréchet. L'application linéaire

$$\boldsymbol{S} : \mathcal{S}(\mathcal{H}_M) \to \mathcal{D}(G, M),$$

définie par $m \mapsto \boldsymbol{c}_m$, est continue.

Lemme 1.5.1. *Toutes les (G, M)-familles périodiques sont obtenues de cette manière. En d'autres termes, l'application $\boldsymbol{S}$ est surjective.*

Démonstration. C'est une variante de [25, proposition 1.10.1]. La preuve en est identique, à ceci près que la fonction χ sur $\mathbb{R}$ servant à construire la globalisation sur $\widehat{\mathfrak{H}}_M$ de la (G, M)-famille $\boldsymbol{c}$ donnée, qui ici est périodique, doit être prise périodique au lieu de lui imposer d'être à support compact. Plus précisément, on fixe une base $\mathcal{B}_G$ de $\widehat{\mathfrak{a}}_G = i\mathfrak{a}_G^*$, et pour chaque $P \in \mathcal{F}(M)$, on pose

$$\mathcal{B}_P = \iota_P(\mathcal{B}_G \cup i\widehat{\Delta}_P) \subset \widehat{\mathfrak{H}}_M.$$

On note $\mathcal{B}$ la base de $\widehat{\mathfrak{H}}_M$ formée par l'union de ces ensembles $\mathcal{B}_P$. C'est l'union de $\mathcal{B}_G$ et des $e_Q = \iota_Q(i\varpi_Q)$, où Q parcourt l'ensemble $\mathcal{F}_{\max}(M)$ des sous-groupes paraboliques maximaux propres de G contenant M et ϖ_Q est l'unique élément de $\widehat{\Delta}_Q$. Pour chaque $P \in \mathcal{F}(M)$, on a une partition de $\mathcal{B}$ en

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_P \cup \mathcal{B}^P \quad \text{avec} \quad \mathcal{B}^P = \{e_Q \,|\, Q \in \mathcal{F}_{\max}(M),\ Q \not\supset P\}$$

qui induit une décomposition de $\widehat{\mathfrak{H}}_M$ en somme directe. Pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{H}}_M$, on note $\lambda = \lambda_P + \lambda^P$ la décomposition associée et l'on pose

$$\chi_P(\lambda^P) = \prod_{Q \not\supset P} \chi(x_Q(\lambda)) \quad \text{si} \quad \lambda^P = \sum_{Q \not\supset P} x_Q(\lambda) e_Q.$$

On définit la fonction

$$f(\lambda) = \sum_{P \in \mathcal{F}(M)} (-1)^{a_Q - a_M} \boldsymbol{c}(\lambda_P, P) \chi_P(\lambda^P),$$

où l'on a identifié $\lambda_P \in \iota_P(\widehat{\mathfrak{a}}_P)$ à un élément de $\widehat{\mathfrak{a}}_P$. Notons $\mathcal{Z}$ le réseau de $\mathbb{R}$ engendré par les $x_Q(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{H}_M^\vee$ et $Q \in \mathcal{F}_{\max}(M)$. Il suffit de prendre pour χ une fonction lisse et $\mathcal{Z}$-invariante sur $\mathbb{R}$, telle que $\chi(0) = 1$. N'importe quel caractère de $\mathcal{Z}\backslash\mathbb{R}$ convient – par exemple $\chi = 1$. ∎

Ce résultat permet de définir d'autres normes sur l'espace $\mathcal{D}(G, M)$:

Définition 1.5.2. Pour $d \in \mathbb{N}$ on pose

$$N_d(\boldsymbol{c}) = \inf\{n_d(m) \mid \boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{c}\}.$$

1.6 Fonctions caractéristiques de cônes et de convexes

Pour $P, Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$, on note[3] τ_P^Q, resp. $\widehat{\tau}_P^Q$, la fonction caractéristique du cône ouvert dans $\mathfrak{a}_0$ défini par Δ_P^Q, resp. $\hat{\Delta}_P^Q$:

$$\tau_P^Q(X) = 1 \Leftrightarrow \langle \alpha, X \rangle > 0,\ \forall \alpha \in \Delta_P^Q,$$

$$\widehat{\tau}_P^Q(X) = 1 \Leftrightarrow \langle \varpi, X \rangle > 0,\ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P^Q.$$

Pour $Q = G$, on écrira souvent $\tau_P = \tau_P^G$, $\widehat{\tau}_P = \widehat{\tau}_P^G$. La propriété essentielle pour la combinatoire est que les matrices, indexées par les couples de sous-groupes paraboliques standards, $\tau = (\tau_{P,Q})$ et $\widehat{\tau} = (\widehat{\tau}_{P,Q})$ définies par

$$\tau_{P,Q} = \begin{cases} (-1)^{a_P} \tau_P^Q & \text{si } P \subset Q \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \widehat{\tau}_{P,Q} = \begin{cases} (-1)^{a_P} \widehat{\tau}_P^Q & \text{si } P \subset Q \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

[3] Comme dans [25], toutes les fonctions indexées par P sont des fonctions sur $\mathfrak{a}_0$ qui se factorisent à travers $\mathfrak{a}_0^P \backslash \mathfrak{a}_0$ ($\simeq \mathfrak{a}_P$). Dans [34], elles sont considérées comme des fonctions sur $\mathfrak{a}_P$.

sont inverses l'une de l'autre : $\tau\widehat{\tau} = \widehat{\tau}\tau = 1$ (cf. [25, proposition 1.7.2]).

Soit $M \in \mathcal{L}$. Fixons un élément $Q \in \mathcal{P}(M)$. Cet élément définit un ordre sur l'ensemble des racines de A_M dans G. On écrit $\alpha >_Q 0$, resp. $\alpha <_Q 0$, pour signifier qu'une racine α est positive, resp. négative, pour cet ordre. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, notons $\phi_{P,Q}^G$ la fonction caractéristique des $X \in \mathfrak{a}_P^G$ suivante :

$$\phi_{P,Q}^G(X) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \varpi_\alpha, X\rangle \leq 0 & \text{pour } \alpha \in \Delta_P, \text{ tel que } \alpha >_Q 0, \\ \langle \varpi_\alpha, X\rangle > 0 & \text{pour } \alpha \in \Delta_P, \text{ tel que } \alpha <_Q 0, \end{cases}$$

où $\{\varpi_\alpha : \alpha \in \Delta_P\} = \hat{\Delta}_P$ est la base de $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ duale de $\{\check{\alpha} : \alpha \in \Delta_P\} = \check{\Delta}_P$. On note $a(P, Q)$ le nombre des $\alpha \in \Delta_P$ tels que $\alpha <_Q 0$. Par définition, $\phi_{P,Q}^G$ se factorise par $\mathfrak{a}_P^G$. Observons que $\phi_{P,Q}^G$ est noté $\phi_{M,s}$ dans [25] lorsque $P = s(Q)$ pour un élément s dans le groupe de Weyl. Plus généralement pour $R \in \mathcal{F}(M)$ et $P, Q \in \mathcal{P}^R(M)$, on définit la fonction $\phi_{Q,P}^R$ comme ci-dessus, en remplaçant G par $L = M_R$, P par $P \cap L$, et Q par $Q \cap L$. Nous aurons aussi besoin de ϕ_P^Q, la fonction caractéristique du cône fermé dans $\mathfrak{a}_0$, défini par $-\hat{\Delta}_P^Q$:

$$\phi_P^Q(X) = 1 \Leftrightarrow \langle \varpi, X\rangle \leq 0, \ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P^Q.$$

On observera que $\phi_P^Q = \phi_{P,P}^Q$.

Nous allons citer des résultats empruntés à la section 1.8 de [25]. Leurs preuves reposent sur le lemme 1.8.1 de [25, page 22], dont la démonstration est incorrecte. Cette erreur a été observée par P.-H. Chaudouard. Une preuve alternative en est donnée dans l'annexe (cf. **Err** (i), lemme A.3).

Pour P et R dans $\mathcal{P}$ tels que $P \subset R$, on définit la fonction Γ_P^R sur $\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0$ par

$$\Gamma_P^R(H, X) = \sum_{\{Q | P \subset Q \subset R\}} (-1)^{a_Q - a_R} \tau_P^Q(H) \widehat{\tau}_Q^R(H - X).$$

D'après [25, lemme 1.8.3] la projection dans $\mathfrak{a}_P^R$ du support de la fonction $H \mapsto \Gamma_P^R(H, X)$ est une union d'ensembles $C(P, Q, R, X)$ et est donc compacte. Précisément, il existe une constante $c > 0$ telle que, si $\Gamma_P^R(H, X) \neq 0$, on a

$$\|H_P^R\| \leq c\|X_P^R\|,$$

où $X \mapsto X_P^R$ est la projection sur l'orthogonal de $\mathfrak{a}_0^P \oplus \mathfrak{a}_R$. De plus, si P est standard et X est régulier, on a

$$\Gamma_P^R(H, X) = \tau_P^R(H)\phi_P^R(H - X).$$

Soit $M \in \mathcal{L}$. Pour une famille M-orthogonale $\mathfrak{X} = (X_P)$ et pour $R \in \mathcal{F}(M)$, on note $\Gamma_M^R(\cdot, \mathfrak{X})$ la fonction sur $\mathfrak{a}_0$ définie par

$$\Gamma_M^R(H, \mathfrak{X}) = \sum_{P \in \mathcal{F}^R(M)} (-1)^{a_P - a_R} \widehat{\tau}_P^R(H - X_P).$$

D'après [25, proposition 1.6.5], si la famille $\mathfrak{X}$ est régulière, alors $\Gamma_M^R(\cdot, \mathfrak{X})$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des $H \in \mathfrak{a}_0$, dont la projection H_M^R dans $\mathfrak{a}_M^R$ appartient à l'enveloppe convexe des points X_P^R pour $P \in \mathcal{P}^R(M)$. En général, la projection du support de la fonction $\Gamma_M^R(\cdot, \mathfrak{X})$ dans $\mathfrak{a}_M^R$ est compacte [25, corollaire 1.8.5]. Précisément, il existe une constante $c > 0$ (indépendante de la famille $\mathfrak{X}$), telle que pour tout $H \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\Gamma_M^R(H, \mathfrak{X}) \neq 0$, on ait

$$\|H_M^R\| \leq c \sup_{P \in \mathcal{P}^R(M)} \|X_P^R\|.$$

On se limite maintenant au cas $R = G$.

Lemme 1.6.1. *Soit $Q \in \mathcal{P}(M)$. On a*

$$\Gamma_M^G(H, \mathfrak{X}) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} (-1)^{a(P,Q)} \phi_{P,Q}^G(H - X_P).$$

Démonstration. Ceci résulte de [25, proposition 1.8.7 (2)]. ■

Pour les (nombreuses) autres égalités reliant les fonctions τ_P^Q, $\hat{\tau}_P^Q$, $\phi_{P,Q}^G$, Γ_P^Q et Γ_M^Q, on renvoie à [25, sections 1.7, 1.8] et à [34, section 1.3].

Pour $P, Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$, les fonctions méromorphes ϵ_P^Q sur $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ sont définies dans [25, section 1.9]. On rappelle leur définition :

Définition 1.6.2. On munit l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_P^Q$ d'une mesure de Haar. Pour $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ en dehors des murs, on pose

$$\epsilon_P^Q(\Lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_P^Q / \mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)) \prod_{\alpha \in \Delta_P^Q} \langle \Lambda, \check{\alpha} \rangle^{-1},$$

où $\mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)$ désigne le réseau de $\mathfrak{a}_P^Q$ engendré par $\check{\Delta}_P^Q$, et $\mathfrak{a}_P^Q / \mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)$ est muni de la mesure quotient de la mesure sur $\mathfrak{a}_P^Q$ par la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)$.

On observera que, si $\langle \Re(\Lambda), \alpha \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$, on a

$$\epsilon_P^Q(\Lambda) = \int_{\mathfrak{a}_P^Q} \phi_P^Q(H) e^{\langle \Lambda, H \rangle} \, \mathrm{d}H.$$

Pour $X_P \in \mathfrak{a}_P$ on pose aussi

$$\epsilon_P^{Q, X_P}(\Lambda) = \int_{\mathfrak{a}_P^Q} \phi_P^Q(H - X_P) e^{\langle \Lambda, H \rangle} \, \mathrm{d}H = e^{\langle \Lambda, X_P^Q \rangle} \epsilon_P^Q(\Lambda).$$

En sommant sur des réseaux au lieu d'espaces vectoriels on définit, comme en [34, section 1.5], des variantes $\varepsilon_P^{Q, X_P}(Z; \Lambda)$ des fonctions ϵ_P^{Q, X_P}. Pour $Z \in \mathcal{A}_Q$, on pose

$$\mathcal{A}_P^Q(Z) \overset{\text{déf}}{=} \{H \in \mathcal{A}_P : H_Q = Z\}.$$

Si $Z' \in \mathcal{A}_P$ est tel que $Z'_Q = Z$, on a alors

$$\mathcal{A}_P^Q(Z) = Z' + \mathcal{A}_P^Q.$$

Pour $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$, $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $X_P \in \mathfrak{a}_P$, on pose

$$\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{A}_P^Q(Z)} \phi_P^Q(H - X_P) e^{\langle \Lambda, H\rangle}.$$

Lemme 1.6.3. *La série définissant $\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)$ est absolument convergente si $\langle \Re\Lambda, \check{\alpha}\rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$. Dans ce domaine, la série ne dépend que de la projection de Λ dans $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_P^\vee$. Pour $X_P \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}$, la fonction*

$$\Lambda \mapsto \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)$$

se prolonge méromorphiquement à tout $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$.

Démonstration. Montrons le prolongement méromorphe, pour $X_P \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}$. La preuve ci-après est classique (cf. [8] et [34]). Pour tout entier $k \geq 1$ on pose

$$\mathcal{D}_k = k^{-1}\mathcal{D}, \qquad \text{où} \qquad \mathcal{D} = \mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q) \subset \mathfrak{a}_P^Q.$$

Choisissons k tel que $\mathcal{D}_k$ contienne $\mathcal{A}_P^Q$ et $(X_P - Z')^Q$. Le réseau dual $\mathcal{D}_k^\vee$, formé des $\Lambda \in \mathfrak{a}_P^{Q,*} \otimes \mathbb{C}$ tels que $\langle \Lambda, Y\rangle \in 2i\pi Z$ pour tout $Y \in \mathcal{D}_k$, vérifie l'inclusion

$$\mathcal{D}_k^\vee \subset \mathcal{A}_P^{Q,\vee}.$$

Considérons les fonctions méromorphes[4]

$$\varepsilon_{P,k}^Q(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_P^Q} (1 - e^{-k^{-1}\langle \Lambda, \check{\alpha}\rangle})^{-1}.$$

L'ensemble des $H \in \mathcal{D}_k$ tels que $\phi_P^Q(H) = 1$ est celui formé des

$$\sum_{\alpha \in \Delta_P^Q} n_\alpha k^{-1}\check{\alpha}$$

pour des entiers $n_\alpha \leq 0$. Pour $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ tel que $\langle \Re\Lambda, \check{\alpha}\rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$, on a donc :

$$\varepsilon_{P,k}^Q(\Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{D}_k} \phi_P^Q(H) e^{\langle \Lambda, H\rangle}.$$

[4] Dans [8], cette fonction est notée $(\theta_{P,k^{-1}}^Q)^{-1}$.

Par inversion de Fourier sur le groupe abélien fini $\mathcal{A}_P^Q\backslash\mathcal{D}_k$, on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) &= \frac{e^{\langle\Lambda,Z'\rangle}}{[\mathcal{D}_k:\mathcal{A}_P^Q]}\sum_{\nu\in\mathcal{A}_P^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee}\sum_{H\in\mathcal{D}_k}\phi_P^Q(H+Z'-X_P)e^{\langle\Lambda+\nu,H\rangle}\\ &= \frac{e^{\langle\Lambda,Z'\rangle}}{[\mathcal{D}_k:\mathcal{A}_P^Q]}\sum_{\nu\in\mathcal{A}_P^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee}\sum_{H\in\mathcal{D}_k}\phi_P^Q(H)e^{\langle\Lambda+\nu,H+(X_P-Z')^Q\rangle}\end{aligned}$$

et donc

$$\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) = \frac{e^{\langle\Lambda,Z'\rangle}}{[\mathcal{D}_k:\mathcal{A}_P^Q]}\sum_{\nu\in\mathcal{A}_P^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee} e^{\langle\Lambda+\nu,(X_P-Z')^Q\rangle}\varepsilon_{P,k}^Q(\Lambda+\nu).$$

Le lemme en résulte. ∎

Lemme 1.6.4. *Le lemme 1.6.3 reste vrai pour tout $X_P\in\mathfrak{a}_P$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{Z}$ le réseau de $\mathbb{R}$ engendré par les $\langle\varpi,H\rangle$ pour $\varpi\in\hat\Delta_P^Q$ et $H\in\mathcal{A}_P$. Pour $\varpi\in\hat\Delta_P^Q$, $X_P\in\mathfrak{a}_P$ et $H\in\mathcal{A}_P$, posons $x_\varpi=\langle\varpi,X_P\rangle\in\mathbb{R}$ et $h_\varpi=\langle\varpi,H\rangle\in\mathcal{Z}$. Notons $\hat\Delta_1$ l'ensemble des $\varpi\in\hat\Delta_P^Q$ avec $x_\alpha\in\mathcal{Z}$. Il existe un $Y_P\in\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}$ tel que les coordonnées $y_\varpi=\langle\varpi,Y_P\rangle$ vérifient :

- $y_\varpi=x_\varpi$ pour tout $\varpi\in\hat\Delta_1$;
- $(y_\varpi-h_\varpi)(x_\varpi-h_\varpi)>0$ pour tout $\varpi\in\hat\Delta_P^Q\smallsetminus\hat\Delta_1$ et tout $H\in\mathcal{A}_P$.

Pour un tel Y_P on a

$$\phi_P^Q(H-Y_P)=\phi_P^Q(H-X_P)$$

et donc

$$\varepsilon_P^{Q,Y_P}(Z;\Lambda)=\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda).$$ ∎

Pour $P,\,Q\in\mathcal{P}(M)$, $Z\in\mathcal{A}_Q$ et $X_P\in\mathfrak{a}_P$, on pose

$$\varepsilon_{P,Q}^{G,X_P}(Z;\Lambda)=\sum_{H\in\mathcal{A}_P^G(Z)}\phi_{P,Q}^G(H-X_P)e^{\langle H,\Lambda\rangle},$$

la série étant absolument convergente si $\langle\Re\Lambda,\check\alpha\rangle>0$ pour tout $\alpha\in\Delta_Q$. Elle ne dépend que de la projection de Λ dans $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_P^\vee$.

Lemme 1.6.5. *Pour $X_P\in\mathfrak{a}_P$, la fonction $\Lambda\mapsto\varepsilon_{P,Q}^{G,X_P}(Z;\Lambda)$ ne dépend que de l'image de Λ dans $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_P^\vee$. Elle se prolonge méromorphiquement à tout $\Lambda\in\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$, et on a l'égalité*

$$\varepsilon_{P,Q}^{G,X_P}(Z;\Lambda)=(-1)^{a(P,Q)}\varepsilon_P^{G,X_P}(Z;\Lambda).$$

Démonstration. Compte tenu du lemme 1.6.4, c'est l'assertion (2) de [34, section 1.5]. ∎

Soit $\mathfrak{X} = (X_P)_{P \in \mathcal{F}(M)}$ une famille M-orthogonale. On pose[5]

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q(Z)} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}) e^{\langle \Lambda, H\rangle}.$$

Lemme 1.6.6. *La série*

$$\sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q(Z)} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}) e^{\langle \Lambda, H\rangle}$$

est une somme finie. La fonction $\Lambda \mapsto \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ est une fonction entière de $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$, qui ne dépend que de l'image de Λ dans $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_M^\vee$. Pour Λ en dehors des murs, on a l'identité suivante :

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda).$$

Démonstration. La compacité de la projection sur $\mathfrak{a}_M^Q$ du support de la fonction

$$H \mapsto \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X})$$

([25, corollaire 1.8.5]) implique que la série définissant $\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}$ est une somme finie. Elle définit donc une fonction entière. Pour la seconde assertion on invoque l'expression de Γ_M dans le lemme 1.6.1[6], au moyen des $\phi_{P,Q}$ et du lemme 1.6.5. ∎

Pour $P \in \mathcal{P}^Q(M)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$, notons $d(\lambda)$ le cardinal de l'ensemble des $\alpha \in \Delta_P^Q$, tels que $\langle \lambda, \check{\alpha}\rangle \in 2ik\pi\mathbb{Z}$.

---

[5]L'indice F et la lettre Z indiquent que l'on somme sur le translaté $\mathcal{A}_M^Q(Z) = Z' + \mathcal{A}_M^Q$ du réseau $\mathcal{A}_M^Q$ de $\mathfrak{a}_M^Q$; à ne pas confondre avec l'intégrale $\int_{\mathfrak{a}_M^G} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}) e^{\langle \Lambda, H\rangle}\, \mathrm{d}H$ (cf. [25, lemme 1.9.3]) qui apparaîtra dans la preuve de la proposition 1.7.4. Idem pour l'expression $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$, voir plus loin.

[6]On observera que l'identité du lemme 1.6.1, qui résulte de [25, proposition 1.8.7], remplace (avantageusement) la décomposition [25, lemme 1.9.3 (3)], dont ni la formulation, ni la preuve, ne s'étendent au cas des corps de fonctions – en effet, les murs peuvent contenir des points du réseau qui donnent alors une contribution non nulle.

Lemme 1.6.7. *On suppose que la famille M-orthogonale $\mathfrak{X}$ est rationnelle. Choisissons un entier k tel que, pour tout $P \in \mathcal{P}^Q(M)$, le réseau $\mathcal{D}_k$ dans $\mathfrak{a}_M^Q$ contienne $\mathcal{A}_M^Q$ et $(X_P - Z')^Q$. La valeur en Λ de la fonction $\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ peut s'écrire*

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} \sum_{\nu} p_{P,\Lambda+\nu}(X_P^Q) e^{\langle \Lambda+\nu, X_P^Q\rangle},$$

où les ν varient dans $\mathcal{A}_M^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee$ et les $p_{P,\lambda}$ sont des polynômes en X_P^Q, de degré $d(\lambda)$.

Démonstration. Pour Λ en dehors des murs, on a

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda).$$

On a vu dans la preuve du lemme 1.6.3 que

$$\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) = \frac{e^{\langle\Lambda,Z'\rangle}}{[\mathcal{D}_k : \mathcal{A}_M^Q]} \sum_{\nu\in\mathcal{A}_M^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee} e^{\langle\Lambda+\nu,(X_P-Z')^Q\rangle} \varepsilon_{P,k}^Q(\Lambda+\nu).$$

Fixons $\lambda = \Lambda + \nu$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et ξ en position générale, on dispose du développement de Laurent au voisinage de $t = 0$ des fonctions $\varepsilon_{P,k}^Q(t\xi + \lambda)$. On rappelle que

$$\varepsilon_{P,k}^Q(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta_P^Q} (1 - e^{-k^{-1}\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle})^{-1}$$

et donc

$$e^{\langle t\xi+\lambda,(X_P-Z')^Q\rangle} \varepsilon_{P,k}^Q(t\xi+\lambda) = t^{-d(\lambda)} e^{\langle t\xi, X_P^Q\rangle} f_P(t,\xi,\lambda) e^{\langle\lambda, X_P^Q\rangle},$$

où $d(\lambda)$ est le nombre de racines $\alpha \in \Delta_P^Q$ telles que $e^{k^{-1}\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle} = 1$, c'est-à-dire $\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle \in 2ik\pi\mathbb{Z}$ et où, pour λ et ξ fixés, $f_P(t,\xi,\lambda)$ est une fonction de t, lisse au voisinage de $t = 0$, indépendante de X_P, et vérifiant $f_P(0,\xi,\lambda) \neq 0$. La dérivée par rapport à t, d'ordre $d(\lambda)$ de

$$e^{\langle t\xi, X_P^Q\rangle} f_P(t,\xi,\lambda),$$

est un polynôme en X_P^Q de degré $d(\lambda)$. Le terme de degré zéro dans le développement de Laurent au voisinage de $t = 0$ de la fonction

$$\frac{e^{\langle t\xi+\lambda,Z'\rangle}}{[\mathcal{D}_k : \mathcal{A}_M^Q]} e^{\langle t\xi+\lambda,(X_P-Z')^Q\rangle} \varepsilon_{P,k}^Q(t\xi+\lambda)$$

est donc de la forme $p_{P,\lambda}(X_P^Q) e^{\langle\lambda, X_P^Q\rangle}$. Comme d'après le lemme 1.6.6 la fonction

$$t \mapsto \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda+t\xi)$$

est lisse, les parties polaires se compensent[7]. ■

Soit $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot, P))$ une (G, M)-famille. Pour $Q \in \mathcal{F}(M)$, $Z \in \mathcal{A}_Q$, et une famille M-orthogonale $\mathfrak{X} = (X_P)$, on note $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; \cdot)$ la fonction définie pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$ en dehors des murs par[8]

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)\boldsymbol{c}(\Lambda, P).$$

Proposition 1.6.8. *Soient $Q \subset R$ deux sous-groupes paraboliques dans $\mathcal{F}(M)$. Considérons une (R, M)-famille périodique $\boldsymbol{c}$ associée à une fonction m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_{R,M}$, et une famille M-othogonale $\mathfrak{X}$. Alors*

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U})\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z + U_Q;\Lambda),$$

et la fonction

$$\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$$

est une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_M$.

Démonstration. On exprime la (R, M)-famille $\boldsymbol{c}$ au moyen de la fonction m : pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\Lambda \in \boldsymbol{\mu}_M$, on a

$$\boldsymbol{c}(\Lambda, P) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{R,M}} e^{\langle \Lambda, U_P \rangle} m(\mathfrak{U}),$$

et donc

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U}) e^{\langle \Lambda, U_P \rangle} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda).$$

Fixons un $P' \in \mathcal{P}(M)$. Pour Λ dans le cône positif associé à P' on a

$$\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) = (-1)^{a(P,P')} \sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q(Z)} \phi_{P,P'}^Q (H - X_P) e^{\langle \Lambda, H \rangle}.$$

Donc $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ est égal à

$$\sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U}) \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} (-1)^{a(P,P')} \sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q(Z)} \phi_{P,P'}^Q (H - X_P) e^{\langle \Lambda, H + U_P \rangle},$$

[7]On remarquera que, contrairement au cas des corps de nombres, les polynômes obtenus ne sont en général pas homogènes.

[8]Notons que cette fonction ne dépend que de la (Q, M)-famille $(\boldsymbol{c}(\cdot, P))_{P \in \mathcal{F}^Q(M)}$ et de la famille (Q, M)-orthogonale $(X_P)_{P \in \mathcal{F}^Q(M)}$, déduites de $\boldsymbol{c}$ et de $\mathfrak{X}$ par restriction.

qui est encore égal à

$$\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U}) \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} (-1)^{a(P,P')} \sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} \phi_{P,P'}^Q(H-(X_P+U_P))e^{\langle\Lambda,H\rangle}.$$

Donc, vu le lemme 1.6.1,

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U}) \sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}+\mathfrak{U})e^{\langle\Lambda,H\rangle}$$

et on obtient la formule de l'énoncé grâce au lemme 1.6.6. On observe maintenant que pour $\Lambda\in\boldsymbol{\mu}_M$, la fonction sur $\mathcal{H}_{R,M}$

$$\mathfrak{U}\mapsto\gamma_{M,F}^{\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z+U_Q;\Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}+\mathfrak{U})e^{\langle\Lambda,H\rangle}$$

est majorée par

$$\mathfrak{U}\mapsto \sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} |\Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}+\mathfrak{U})|.$$

La fonction

$$H\mapsto|\Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}+\mathfrak{U})| \qquad \text{pour} \qquad H\in\mathcal{A}_M$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs entières, bornées indépendamment de $\mathfrak{U}$. Elle est à support compact inclus dans une boule de rayon majoré par un polynôme en $\mathfrak{U}$. Sa somme sur H est donc bornée par un polynôme en $\mathfrak{U}$. Par ailleurs, m est à décroissance rapide, ce qui prouve la convergence absolue, uniforme en Λ, de la série en $\mathfrak{U}$. L'expression $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ est donc une fonction continue en Λ. Plus généralement, les dérivées en Λ correspondent à des séries analogues, où l'opérateur différentiel sur $\boldsymbol{c}$ se traduit en transformée de Fourier par la multiplication par un polynôme en $\mathfrak{U}$. On a encore la convergence uniforme des séries, vu la décroissance rapide de m, d'où la lissité de la fonction $\Lambda\mapsto\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$. ■

Lemme 1.6.9. *On reprend les hypothèses du lemme* 1.6.7. *La valeur en Λ de la fonction $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ peut s'écrire*

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)}\sum_{\nu} q_{P,\Lambda+\nu}(X_P^Q)e^{\langle\Lambda+\nu,X_P^Q\rangle},$$

où les ν varient dans $\mathcal{A}_M^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee$, et les $q_{P,\Lambda+\nu}$ sont des polynômes en X_P^Q de degré inférieur ou égal à $d(\Lambda+\nu)$.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 1.6.7 : les fonctions $f_P(t,\xi,\lambda)$ doivent être remplacées par les

$$g_P(t,\xi,\Lambda+\nu) = f_P(t,\xi,\Lambda+\nu)c(\Lambda+t\xi,P).$$

Il convient ensuite d'observer que là aussi les singularités des $\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)$ se compensent puisque la fonction

$$t \mapsto \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda+t\xi)$$

est lisse d'après la proposition 1.6.8. Mais les degrés des polynômes peuvent s'abaisser là où les $\boldsymbol{c}(\Lambda,P)$ ont des zéros. ∎

Pour une (G,M)-famille $\boldsymbol{c}$ (périodique ou non) et une famille M-orthogonale quelconque $\mathfrak{X}$, on pose pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$ en dehors des murs[9],

$$\boldsymbol{c}_M^{Q,\mathfrak{X}}(\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} \epsilon_P^{Q,X_P}(\Lambda)\boldsymbol{c}(\Lambda,P).$$

Cela définit une fonction lisse sur $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ (les singularités des fonctions ϵ sur les murs sont compensées par des annulations dues aux propriétés des (G,M)-familles). Si $\mathfrak{X}$ est la famille triviale, on écrit simplement

$$\boldsymbol{c}_M^G(\Lambda) = \boldsymbol{c}_M^{G,\mathfrak{X}=0}(\Lambda).$$

Pour $\mathfrak{U} \in \mathfrak{H}_M$, on note $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U})$ la (G,M)-famille définie par

$$\boldsymbol{c}(\mathfrak{U};\Lambda,P) = e^{\langle\Lambda,U_P\rangle}\boldsymbol{c}(\Lambda,P).$$

Pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$ en dehors des murs, on pose

$$\boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{U};\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} \epsilon_P^Q(\Lambda)\boldsymbol{c}(\mathfrak{U};\Lambda,P).$$

On a[10]

$$\boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{U};\Lambda) = e^{\langle\Lambda,U_Q\rangle}\boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{U}^Q;\Lambda),$$

où $\mathfrak{U}^Q$ est la famille M-orthogonale (U_P^Q) dans M_Q. Plus généralement, pour $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{U}$ deux familles M-orthogonales quelconques, on pose

$$\boldsymbol{c}_M^{Q,\mathfrak{X}}(\mathfrak{U};\Lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} \epsilon_P^{Q,X_P}(\Lambda)\boldsymbol{c}(\mathfrak{U};\Lambda,P).$$

Observons que

$$\boldsymbol{c}_M^{Q,\mathfrak{X}}(\mathfrak{U};\Lambda) = \boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{X}^Q+\mathfrak{U};\Lambda).$$

---

[9]Rappelons que la fonction $\epsilon_P^{Q,X_P}(\Lambda)$ dépend du choix d'une mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_P^Q = \mathfrak{a}_M^Q$. On prend, bien sûr, la même mesure pour tous les $P \in \mathcal{P}^Q(M)$.

[10]Notons que dans [34], c'est la (G,M)-famille $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U}^G)$ qui est notée « $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U})$ ».

Si $\boldsymbol{c}$ est une (G,M)-famille périodique et $\mathfrak{U}$ une famille M-orthogonale rationnelle, la (G,M)-famille $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U})$ est périodique si et seulement si la famille $\mathfrak{U}$ est entière. Auquel cas, si $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_m$ pour une fonction m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$, alors $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U})=\boldsymbol{c}_{m'}$, où

$$m'(\mathfrak{V})=m(\mathfrak{V}-\mathfrak{U}).$$

Pour $\mathfrak{U}$ entière[11] et $\mathfrak{X}$ quelconque on pose

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z,\mathfrak{U};\Lambda)=\sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)}\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)\boldsymbol{c}(\mathfrak{U};\Lambda,P).$$

On a

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z,\mathfrak{U};\Lambda)=\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z+U_Q;\Lambda).$$

On pose aussi

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z,\mathfrak{U};\Lambda)\overset{\text{déf}}{=}\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z+U_Q;\Lambda)=\sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)}\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)e^{\langle\Lambda,U_P\rangle}.$$

Si $\mathfrak{X}=\mathfrak{T}$ pour un $T\in\mathfrak{a}_0$, on remplacera l'exposant $\mathfrak{T}$ par un simple T dans les expressions ci-dessus. Avec cette convention on a le

Corollaire 1.6.10. *Soit $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_m$ une (G,M)-famille périodique donnée par une fonction m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$. Pour $T\in\mathfrak{a}_0$ on a*

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,T}(Z;\Lambda)=\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}m(\mathfrak{U})\gamma_{M,F}^{Q,T}(Z,\mathfrak{U};\Lambda).$$

Démonstration. C'est un corollaire de la proposition 1.6.8. ∎

Soit $\mathfrak{H}_{Q,M}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des familles M-orthogonales dans M_Q, c'est-à-dire qu'on remplace les conditions sur $P\in\mathcal{P}(M)$ par des conditions sur $P\in\mathcal{P}^Q(M)$. Soit $\mathcal{H}_{Q,M}\subset\mathfrak{H}_{Q,M}$ le réseau formé des familles qui sont entières. L'application naturelle (qui n'est *a priori* pas surjective)

$$\mathfrak{H}_M=\mathfrak{H}_{G,M}\to\mathfrak{H}_{Q,M}$$

envoie $\mathcal{H}_M=\mathcal{H}_{G,M}$ dans $\mathcal{H}_{Q,M}$. Elle donne, par dualité, une application

$$\widehat{\mathfrak{H}}_{Q,M}\to\widehat{\mathfrak{H}}_M,$$

qui se factorise en une application

$$\widehat{\mathcal{H}}_{Q,M}\to\widehat{\mathcal{H}}_M.$$

[11] On observera que la famille $\mathfrak{U}^Q$ est *a priori* seulement rationnelle.

Toute fonction lisse h sur $\widehat{\mathfrak{H}}_M = i\mathfrak{H}_M^*$ définit donc par composition une fonction lisse h_Q sur $\widehat{\mathfrak{H}}_{Q,M} = i\mathfrak{H}_{Q,M}^*$, et si h est périodique, alors h_Q l'est aussi. Dans ce cas, $h = \widehat{m}$ pour une (unique) fonction à décroissance rapide m sur le réseau $\mathcal{H}_M$, et on note m_Q la fonction à décroissance rapide sur le réseau $\mathcal{H}_{Q,M}$ définie par $\widehat{m_Q} = h_Q$. Cette fonction vaut 0 en dehors de l'image de l'application $\mathcal{H}_{G,M} \to \mathcal{H}_{Q,M}$, et pour $\mathfrak{U}$ dans cette image on a

$$m_Q(\mathfrak{U}) = \sum_{\mathfrak{V} \in \mathcal{H}_{Q,M}^G(\mathfrak{U})} m(\mathfrak{V}),$$

où $\mathcal{H}_{Q,M}^G(\mathfrak{U}) \subset \mathcal{H}_{G,M}$ est la fibre au-dessus de $\mathfrak{U}$.

Corollaire 1.6.11. *Soit $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_m$ une (G, M)-famille périodique donnée par une fonction m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_{G,M}$. Pour $T \in \mathfrak{a}_0$ on a*

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,T}(Z; \Lambda) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q,M}} m_Q(\mathfrak{U}) \gamma_{M,F}^{Q,T}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda)$$

où

$$\gamma_{M,F}^{Q,T}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda) = \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{U}(T)}(Z + U_Q; \Lambda).$$

Démonstration. C'est encore un corollaire de la proposition 1.6.8. ■

Par inversion de Fourier, ceci se reformule comme suit :

Lemme 1.6.12. *Soit $\mathfrak{X}$ une famille (Q, M)-orthogonale, et soit $\boldsymbol{c}$ une (Q, M)-famille périodique donnée par une fonction à décroissance rapide m sur $\mathcal{H}_{Q,M}$. Pour $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $V \in \mathcal{A}_M$ on pose*

$$\widehat{\boldsymbol{c}}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; V) = \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; \Lambda) e^{-\langle \Lambda, V \rangle} \, \mathrm{d}\Lambda.$$

On a alors

$$\widehat{\boldsymbol{c}}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; V) = \sum_{\substack{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q,M} \\ Z + U_Q = V_Q}} m(\mathfrak{U}) \Gamma_M^Q(V, \mathfrak{X} + \mathfrak{U}).$$

Démonstration. On sait d'après la proposition 1.6.8 que

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; V) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q,M}} m(\mathfrak{U}) \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z + U_Q; V),$$

donc

$$\widehat{\boldsymbol{c}}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; V) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q,M}} m(\mathfrak{U}) \widehat{\gamma}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z + U_Q; V),$$

et on observe que

$$\widehat{\gamma}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z+U_Q;V)=\begin{cases}\Gamma_M^Q(V,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}) & \text{si } Z+U_Q=V_Q,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

■

1.7 L'ensemble PolExp

Nous avons besoin de deux lemmes élémentaires. Faute de référence nous en donnons une preuve.

Lemme 1.7.1. *On considère, pour $k=1,\dots,m$, des nombres complexes a_k et des nombres complexes b_k deux à deux distincts, de module* 1. *On suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}a_k b_k^n=0. \tag{1.1}$$

Alors les a_k sont tous nuls.

Démonstration. On le démontre par récurrence sur m. Si $m=1$, c'est évident. Supposons-le vrai pour $m-1$. En posant $d_k=b_k/b_m$ et $c_k=a_k(1-d_k)$, la condition (1.1) implique

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{m-1}a_k d_k^n-\sum_{k=1}^{m-1}a_k d_k^{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{m-1}c_k d_k^n=0.$$

Les b_k sont tous différents donc les d_k sont tous différents. L'hypothèse de récurrence impose $c_k=0$ pour $1\le k\le m-1$. Comme $1-d_k\ne 0$, les a_k sont nuls pour $1\le k\le m-1$; ceci implique $a_m=0$. ■

Soit $\mathfrak{a}$ un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $\mathcal{R}$ un réseau de $\mathfrak{a}$. On considère pour $T\in\mathcal{R}$ une combinaison linéaire de produits de polynômes et d'exponentielles

$$\phi(T)=\sum_{\nu\in E}p_\nu(T)e^{\langle\nu,T\rangle},$$

où E est un sous-ensemble fini de $\widehat{\mathcal{R}}=\widehat{\mathfrak{a}}/\mathcal{R}^\vee$ et les p_ν sont des polynômes sur $\mathfrak{a}$.

Lemme 1.7.2. *Soit C un cône ouvert non vide de $\mathfrak{a}$, et soit $T_\star\in\mathcal{R}$. On suppose que $\phi(T)$ tend vers 0 lorsque $\|T\|$ tend vers l'infini pour T dans $T_\star+(C\cap\mathcal{R})$. Alors $p_\nu=0$ pour tout ν.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{a}$. Le cas de la dimension zéro est fourni par le lemme 1.7.1. Le réseau $\mathcal{R}$ peut être décomposé en une somme directe $\mathcal{R} = \mathbb{Z}v \oplus \mathcal{R}_1$ avec $v \in C \cap \mathcal{R}$ primitif (c'est-à-dire que $v = nv_1$ avec $v_1 \in \mathcal{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ implique $n = \pm 1$). Considérons $T = nv + T_1 \in \mathcal{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $T_1 \in \mathcal{R}_1$. On peut écrire $\phi(nv + T_1)$ sous la forme

$$\phi(nv + T_1) = \sum_{\mu \in E(v)} q_\mu(n, T_1) b_\mu^n,$$

où les $b_\mu = e^{\langle \mu, v \rangle}$ sont des nombres complexes de module 1, deux à deux distincts et $E(v)$ est le quotient de E défini par la restriction à $\mathbb{Z}v$. Les fonctions q_μ sont de la forme

$$q_\mu(n, T_1) = \sum_{s=0}^{d_\mu} \sum_{\tau \in E_\mu} r_{s,\tau}(T_1) e^{\langle \tau, T_1 \rangle} n^s,$$

où les s sont entiers, les $r_{s,\tau}$ sont des polynômes sur $\mathfrak{a}_1$, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{R}_1$, et E_μ est un sous-ensemble fini de $\widehat{\mathcal{R}}_1 = \widehat{\mathfrak{a}}_1 / \mathcal{R}_1^\vee$. Soit d le degré maximal des polynômes q_μ en n, et soit $a_\mu(T_1)$ le coefficient de n^d dans q_μ :

$$a_\mu(T_1) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\tau \in E_\mu} r_{d,\tau}(T_1) e^{\langle \tau, T_1 \rangle},$$

où, par convention, $r_{d,\tau}(T_1) = 0$, si $d > d_\mu$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n^{-d} \phi(nv + T_1) - \sum_\mu a_\mu(T_1) b_\mu^n \right) = 0. \tag{1.2}$$

On observe que pour T_1 fixé et n assez grand on a

$$nv + T_1 \in T_\star + (C \cap \mathcal{R}).$$

Par hypothèse

$$\lim_{n \to +\infty} \phi(nv + T_1) = 0. \tag{1.3}$$

On déduit de (1.2) et (1.3) que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_\mu a_\mu(T_1) b_\mu^n = 0.$$

D'après le lemme 1.7.1, les $a_\mu(T_1)$ sont tous nul. Par récurrence descendante sur le degré, on obtient que, pour tout entier s et tout $T_1 \in \mathcal{R}_1$,

$$\sum_{\tau \in E_\mu} r_{s,\tau}(T_1) e^{\langle \tau, T_1 \rangle} = 0.$$

Par hypothèse de récurrence sur la dimension de $\mathfrak{a}$, cela implique que les $r_{s,\tau}$ sont nuls. On en déduit que les p_ν le sont également. ∎

Nous introduisons maintenant, comme dans [34, section 1.7], l'ensemble PolExp :

Définition 1.7.3. On note PolExp l'espace vectoriel des fonctions $\phi : \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$ telles que, pour tout réseau $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, il existe une famille indexée par les $\nu \in \widehat{\mathcal{R}}$ de polynômes sur $\mathfrak{a}_0$

$$T \mapsto p_{\mathcal{R},\nu}(\phi, T),$$

avec les propriétés suivantes :

- les $\nu \in \widehat{\mathcal{R}}$ tels que $p_{\mathcal{R},\nu} \neq 0$, sont en nombre fini ;
- pour $T \in \mathcal{R}$, on a l'égalité $\phi(T) = \sum_{\nu\in\widehat{\mathcal{R}}} p_{\mathcal{R},\nu}(\phi, T)e^{\langle\nu,T\rangle}$.

D'après le lemme 1.7.2, les $p_{\mathcal{R},\nu}$ sont uniquement déterminés par une approximation de $\phi_{\mathcal{R}} = \phi|_{\mathcal{R}}$ sur l'intersection de $\mathcal{R}$ et d'un cône ouvert non vide de $\mathfrak{a}_0$. Observons que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux réseaux de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ tels que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$, pour $\nu \in \widehat{\mathcal{R}}$ on a

$$p_{\mathcal{R},\nu}(\phi, T) = \sum_{\nu'\in\mathcal{R}^\vee/\mathcal{R}'^\vee} p_{\mathcal{R}',\nu+\nu'}(\phi, T).$$

La famille $(p_{\mathcal{R},\nu})_{\nu\in\widehat{\mathcal{R}}}$ se déduit donc de la famille $(p_{\mathcal{R}',\nu'})_{\nu'\in\widehat{\mathcal{R}'}}$.

Proposition 1.7.4. *Soient $\boldsymbol{c}$ une (Q, M)-famille périodique à valeurs scalaires, $\mathfrak{X}$ une famille M-orthogonale rationnelle, $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_M$. On note μ l'image de Λ^Q dans $\boldsymbol{\mu}_M^Q = \boldsymbol{\mu}_M/\boldsymbol{\mu}_Q$. Soit $\mathcal{R}$ un réseau de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$ soit $\mathcal{R}_k = k^{-1}\mathcal{R}$. Alors,*

(i) *la fonction $T \mapsto \phi(T) = \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z;\Lambda)$ appartient à* PolExp *;*

(ii) *si $\mu \neq 0$, il existe un entier $k_0 \geq 1$, ne dépendant que de $\mathcal{R}$, tel que $p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi, T) = 0$ pour tout entier $k \geq k_0$;*

(iii) *si $\mu = 0$, i.e. $\Lambda \in \Lambda_Q + \mathcal{A}_M^\vee$, alors*

$$\lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi, T) = \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q\backslash\mathfrak{a}_M^Q)^{-1}e^{\langle\Lambda_Q,Z\rangle}\boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{X}(T)^Q;\Lambda_Q)$$

et, en particulier, cette limite est indépendante de $\mathcal{R}$. Plus précisément, il existe un réel $b > 0$ ne dépendant que de $\mathcal{R}$, $\mathfrak{X}$ et T, tel que pour tout entier $k \geq 1$, on ait la majoration

$$|p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi, T) - \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q\backslash\mathfrak{a}_M^Q)^{-1}e^{\langle\Lambda_Q,Z\rangle}\boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{X}(T)^Q;\Lambda_Q)| \leq b\, N_d(\boldsymbol{c})k^{-1},$$

où d est la dimension de $\mathfrak{a}_M^Q$ et N_d est la norme pour les (G, M)-familles périodiques introduite dans la définition 1.5.2.

Démonstration. L'assertion (i) est une conséquence immédiate du lemme 1.6.9. Relevons Z en un élément Z' de $\mathcal{A}_M$ et choisissons un entier k' tel que, pour tout $P \in \mathcal{P}^Q(M)$, le réseau $\mathcal{D}_{k'}$ de $\mathfrak{a}_M^Q$ contienne $\mathcal{A}_M^Q$ et $(X_P - Z')^Q$. Pour $P \in \mathcal{P}^Q(M)$, notons $[\mathcal{R}]_P^Q$ le réseau de $\mathfrak{a}_M^Q$ image de $\mathcal{R}$ par l'application $T \mapsto [T]_P^Q = ([T]_P)^Q$. On suppose k assez grand de sorte que pour tout $P \in \mathcal{P}^Q(M)$ on ait

$$[\mathcal{R}_k]_P^{Q,\vee} \subset \mathcal{D}_{k'}^\vee \subset \mathcal{A}_M^{Q,\vee}.$$

Avec les notations du lemme 1.6.9 on sait que

$$p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi; T) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \sum_{\nu \in E_P} q_{P,\Lambda+\nu}([T]_P^Q),$$

où

$$E_P = \{\nu \in \mathcal{A}_M^{Q,\vee}/[\mathcal{R}_k]_P^{Q,\vee} \mid \Lambda^Q + \nu = 0\}.$$

On voit que E_P possède un unique élément si $\Lambda^Q \in \mathcal{A}_M^{Q,\vee}$ c'est-à-dire si $\mu = 0$ et est vide sinon; (ii) en résulte. Lorsque $\mu = 0$ on va esquisser une démonstration de (iii), différente de celle de [34, section 1.7, lemme (ii)]. Pour alléger les notations on commence par traiter le cas $\Lambda_Q = 0$. D'après la proposition 1.6.8 on a

$$\phi(T) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} m(\mathfrak{U}) \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda)$$

avec m à décroissance rapide sur le réseau $\mathcal{H}_M$ et

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda) = \gamma_{M,F}^{Q,(\mathfrak{X}+\mathfrak{U})(T)}(Z + U_Q; \Lambda).$$

Fixons $\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M$ et posons $\mathfrak{V} = \mathfrak{X} + \mathfrak{U}$. On rappelle que

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{V}(T)}(Z + U_Q; \Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} \Gamma_M^Q(H, \mathfrak{V}(T)) e^{\langle \Lambda, H \rangle}.$$

Relevons U_Q en un élément U_Q' de $\mathcal{A}_M$, et posons $Z'' = Z' + U_Q'$. On obtient

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{V}(T)}(Z + U_Q; \Lambda) = e^{\langle \Lambda, Z'' \rangle} \sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q} \Gamma_M^Q(Z'' + H, \mathfrak{V}(T)) e^{\langle \Lambda, H \rangle}.$$

Notons $\mathcal{R}_M^Q$ l'image de $\mathcal{R}$ par l'application $H \mapsto H_M^Q$. On suppose $\mathcal{R}$ assez fin de sorte que $\mathcal{R}_M^Q$ contienne $\mathcal{A}_M^Q$ ainsi que l'image $(Z'')^Q$ de Z'' dans $\mathfrak{a}_M^Q$. Par inversion de Fourier sur le groupe fini $\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathcal{R}_M^Q$, on a

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{V}(T)}(Z + U_Q; \Lambda) = \frac{e^{\langle \Lambda, Z'' \rangle}}{[\mathcal{R}_M^Q : \mathcal{A}_M^Q]} \sum_{\nu \in \mathcal{A}_M^{Q,\vee}/\mathcal{R}_M^{Q,\vee}} \sum_{H \in \mathcal{R}_M^Q} \Gamma_M^Q(Z'' + H, \mathfrak{V}(T)) e^{\langle \Lambda+\nu, H \rangle}.$$

Le polynôme en T attaché à $\Lambda = \nu = 0$, que nous noterons $p_{\mathcal{R},0}(\mathfrak{V}, T)$, vaut

$$p_{\mathcal{R},0}(\mathfrak{V}, T) = \frac{1}{[\mathcal{R}_M^Q : \mathcal{A}_M^Q]} \sum_{H \in \mathcal{R}_M^Q} \Gamma_M^Q(Z'' + H, \mathfrak{V}(T)).$$

La restriction à $\mathfrak{a}_M^Q$ de la fonction

$$H \mapsto \Gamma_M^Q(Z'' + H, \mathfrak{V}(T))$$

est, d'après [25, lemmes 1.8.4 (2) et 1.8.3], combinaison linéaire à coefficients dans $\{-1, +1\}$ d'une famille finie de fonctions caractéristiques de polytopes du type $C(P, Q, R, X)$ qui sont convexes, et bornés (mais en général non fermés) ; en particulier elle est à support compact de rayon borné par un polynôme en $\mathfrak{V}(T)$. Lorsque l'on remplace $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}_k = k^{-1}\mathcal{R}$ et que l'on fait tendre k vers l'infini, $p_{\mathcal{R}_k,0}(\mathfrak{V}, T)$ a pour limite une intégrale au sens de Riemann :

$$\lim_{k\to\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(\mathfrak{V}, T) = \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q)^{-1} \int_{H\in\mathfrak{a}_M^Q} \Gamma_M^Q(H, \mathfrak{V}(T))\, \mathrm{d}H,$$

soit encore

$$\lim_{k\to\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(\mathfrak{V}, T) = \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q)^{-1} \gamma_M^Q(\mathfrak{V}(T); 0).$$

Le terme d'erreur est majoré par le volume des hypercubes (les mailles du réseau $k^{-1}\mathcal{R}_M^Q$) rencontrant la frontière des polytopes ; ces hypercubes sont inclus dans un voisinage tubulaire de la frontière des polytopes, de rayon a/k où a est une constante ne dépendant que de la taille des mailles de $\mathcal{R}$. Le voisinage tubulaire a un volume borné par le produit de a/k et de $r(\mathcal{R}, \mathfrak{V}(T))$ qui est la somme des mesures des frontières des polytopes. Donc

$$|p_{\mathcal{R}_k,0}(\mathfrak{V}, T) - \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q)^{-1} \gamma_M^Q(\mathfrak{V}(T); 0)| \le \frac{a}{k} r(\mathcal{R}, \mathfrak{V}(T)).$$

On passe de $\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}$ à $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}$ en sommant sur $\mathfrak{U}$ cette inégalité contre $m(\mathfrak{U})$, d'où :

$$|p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi, T) - \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q)^{-1} \boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{X}(T)^Q; 0)| \le \frac{a}{k} \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} r(\mathcal{R}, \mathfrak{U} + \mathfrak{X}(T))|m(\mathfrak{U})|.$$

Comme $r(\mathcal{R}, \mathfrak{V}(T))$ est majoré par un polynôme en $\mathfrak{V}(T)$ on voit (avec les notations de la définition 1.5.2) qu'il existe un entier d et une fonction $b(\mathcal{R}, \mathfrak{X}(T))$ telle que

$$\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} r(\mathcal{R}, \mathfrak{U} + \mathfrak{X}(T))|m(\mathfrak{U})| \le b(\mathcal{R}, \mathfrak{X}(T)) n_d(m).$$

En prenant l'infimum sur les m, on obtient l'assertion souhaitée lorsque $\Lambda_Q = 0$. Maintenant on observe que

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z; \Lambda_Q) = e^{\langle \Lambda_Q, Z\rangle} \boldsymbol{d}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z; 0),$$

où $\boldsymbol{d}$ est la (Q, M)-famille périodique déduite de $\boldsymbol{c}$ par translation par Λ_Q. Le cas général en résulte. ∎

L'expression

$$\mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q)^{-1} e^{\langle \Lambda_Q, Z\rangle} \boldsymbol{c}_M^{Q,T_1}(\mathfrak{X}^Q; \Lambda)$$

est indépendante du choix de la mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_M^Q$. Dans les applications que nous avons en vue, la normalisation naturelle semble être la suivante : pour chaque $M \in \mathcal{L}$, on munit $\mathfrak{a}_M$ de la mesure de Haar, telle que

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B}_M \backslash \mathfrak{a}_M) = 1$$

et pour $Q \in \mathcal{F}(M)$, on munit $\mathfrak{a}_M^Q$ de la mesure de Haar compatible avec les mesures sur $\mathfrak{a}_M$ et sur $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_{M_Q}$ et avec la décomposition $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_M^Q$. Alors on a

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q) = 1, \quad \text{et} \quad \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q) = |\mathbb{c}_M|^{-1} |\mathbb{c}_Q|.$$