Chapitre 2

Espaces tordus

Tous les résultats de [25, chapitre 2] sont vrais ici, à l'exception de 2.6 et 2.10.

Dans le chapitre précédent, on a décrit la version « corps de fonctions » des résultats de [25, chapitre 1] sur les transformées de Laplace des fonctions caractéristiques de cônes et sur les (G, M)-familles. L'adaptation au cas tordu étant immédiate, nous serons très succincts.

2.1 Hypothèses

Soit $(\widetilde{G}, G)$ un G-espace tordu. On rappelle que $\widetilde{G}$ est une variété algébrique affine, munie d'une action algébrique de G à gauche, qui en fait un G-espace principal homogène, et d'une application

$$\widetilde{G} \to \mathrm{Aut}(G),\, \delta \mapsto \mathrm{Int}_\delta, \qquad \text{telle que} \qquad \mathrm{Int}_{g\delta} = \mathrm{Int}_g \circ \mathrm{Int}_\delta$$

pour tout $g \in G$ et tout $\delta \in \widetilde{G}$. On en déduit une action à droite de G sur $\widetilde{G}$, donnée par

$$\delta g = \mathrm{Int}_\delta(g)\delta.$$

On suppose que $\widetilde{G}$ est défini sur F, c'est-à-dire que les actions à gauche et à droite de G sur $\widetilde{G}$ sont définies sur F, et que $\widetilde{G}(F)$ est non vide. L'ensemble $\widetilde{G}(\mathbb{A})$ des points adéliques de $\widetilde{G}$ est un espace tordu sous $G(\mathbb{A})$, et on a

$$\widetilde{G}(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})\widetilde{G}(F) = \widetilde{G}(F)G(\mathbb{A}).$$

On notera souvent θ l'automorphisme de G défini par Int_δ pour un $\delta \in \widetilde{G}(F)$. On observe que l'automorphisme induit par θ sur $\mathfrak{a}_G$ ne dépend que de $\widetilde{G}$. On pose

$$\mathfrak{a}_{\widetilde{G}} = \mathfrak{a}_G^\theta, \quad \text{et} \quad a_{\widetilde{G}} = \dim \mathfrak{a}_{\widetilde{G}}.$$

On suppose, comme en [25, section 2.5][1], que l'application naturelle

$$\mathfrak{a}_G^\theta \to \mathfrak{a}_G/(1-\theta)\mathfrak{a}_G$$

[1]Dans [34], l'hypothèse est un peu plus forte que celle de [25, section 2.5] : le F-automorphisme θ de Z_G est supposé d'ordre fini, ce qui assure l'existence d'un F-groupe algébrique affine G^+ de composante neutre G, tel que $\widetilde{G}$ soit une composante connexe de G^+.

est un isomorphisme. Dans ce cas on a une décomposition en somme directe

$$\mathfrak{a}_G = \mathfrak{a}_{\widetilde{G}} \oplus \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}, \quad \text{en posant} \quad \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}} = (1-\theta)\mathfrak{a}_G.$$

On observe que

$$\det(\theta - 1|\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}) \neq 0.$$

Notons X le $\mathbb{Z}$-module libre des caractères du tore A_G. Soit X_θ le groupe des co-invariants sous θ dans X, et $\widetilde{X}$ le $\mathbb{Z}$-module libre quotient de X_θ par son sous-groupe de torsion. On notera $A_{\widetilde{G}}$ le tore déployé dont le groupe des caractères est $\widetilde{X}$. C'est aussi le tore déployé dont le groupe des co-caractères est le sous-groupe Y^θ des invariants sous θ du groupe Y des co-caractères de A_G. Le morphisme $X \to \widetilde{X}$ induit un homomorphisme $A_{\widetilde{G}} \to A_G$ qui identifie $A_{\widetilde{G}}$ à la composante neutre du sous-groupe A_G^θ de A_G, formé des points fixes sous θ. En particulier, $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})$ est un sous-groupe d'indice fini de $A_G(\mathbb{A})^\theta = A_G^\theta(\mathbb{A})$. Soit

$$\mathbf{H}_{\widetilde{G}} : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$$

l'application composée de $\mathbf{H}_G : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_G$ et de la projection sur $\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$. On note $\mathcal{A}_{\widetilde{G}}$ l'image de $\mathbf{H}_{\widetilde{G}}$, c'est-à-dire l'image de $\mathcal{A}_G$ par la projection orthogonale par rapport à $\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}$. C'est un réseau de $\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$. Comme dans le cas non tordu, on a un morphisme naturel injectif $\mathcal{A}_{A_{\widetilde{G}}} \to \mathcal{A}_{\widetilde{G}}$. On note $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$ $(= \mathbf{H}_{\widetilde{G}}(A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})))$ son image, qui est un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{A}_{\widetilde{G}}$, et on pose

$$\mathfrak{c}_{\widetilde{G}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{A}_{\widetilde{G}}.$$

Notons que d'après ce qui précède, $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$ coïncide avec le sous-groupe $\mathcal{B}_G^\theta$ de $\mathcal{B}_G$, formé des points fixes sous θ : on a

$$\mathcal{B}_{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_G^\theta = \mathcal{B}_G \cap \mathfrak{a}_{\widetilde{G}}.$$

On pose

$$\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{B}_G \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_G^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{A}_G.$$

On observe que $\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}}$ est un réseau de $\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}$, et que $\mathcal{C}_G^{\widetilde{G}}$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini qui s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{B}_G^{\widetilde{G}} \to \mathcal{C}_G^{\widetilde{G}} \to \mathfrak{c}_G \to 0.$$

On suppose, ce qui est loisible, que la paire parabolique définie sur F minimale (P_0, A_0) de G a été choisie de telle sorte qu'elle soit stable par Int_{δ_0} pour un élément $\delta_0 \in \widetilde{G}(F)$, déterminé de manière unique modulo $M_0(F)$. On fixe un tel δ_0, et on pose $\theta_0 = \mathrm{Int}_{\delta_0}$, $\widetilde{P}_0 = \delta_0 P_0$ et $\widetilde{M}_0 = \delta_0 M_0$. Alors le F-automorphisme θ_0 de G induit par fonctorialité un automorphisme de $\mathfrak{a}_0$, que l'on note encore θ_0. Puisque le F-automorphisme θ_0 préserve A_0 et P_0, il induit une permutation de l'ensemble fini Δ_0 et donc un automorphisme d'ordre fini de $\mathfrak{a}_0^G$.

On renvoie à [25, sections 2.7, 2.8] pour la définition des sous-ensembles (ou sous-espaces) paraboliques et sous-ensembles de Levi et l'adaptation des autres notions. En particulier, un sous-groupe parabolique standard P dont le normalisateur dans $\widetilde{G}$ est non vide est θ_0 stable et l'ensemble $\widetilde{P} = P\delta_0$ est un sous-espace parabolique standard.

L'extension au cas tordu de la notion de famille orthogonale, de (G, M)-famille et de la combinatoire des fonctions $\tau, \widehat{\tau}, \phi$ et Γ, est immédiate (cf. [25, section 2.9]). On dispose de plus ici de la notion de famille $\widetilde{M}$-orthogonale entière et de $(\widetilde{G}, \widetilde{M})$-famille périodique. Toute famille M-orthogonale $\mathfrak{X} = (X_P)$ définit par projection une famille $\widetilde{M}$-orthogonale $(X_{\widetilde{P}})$, et si $\mathfrak{X}$ est entière alors $(X_{\widetilde{P}})$ l'est aussi. En particulier, tout élément $T \in \mathfrak{a}_0$ définit une famille $\widetilde{M}$-orthogonale $([T]_{\widetilde{P}})$. Toutes les relations de [25, section 1.7, 1.8] et de [34, section 1.3] sont valables pour ces nouvelles fonctions. Par exemple, si $\mathfrak{X} = (X_{\widetilde{P}})$ est une famille $\widetilde{M}$-orthogonale, pour $\Lambda \in \mathfrak{a}^*_{0,\mathbb{C}}$, on pose

$$\gamma^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}_{\widetilde{M},F}(Z;\Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{A}^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}(Z)} \Gamma^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{M}}(H,\mathfrak{X}) e^{\langle \Lambda, H\rangle}.$$

Comme dans le cas non tordu, $\Lambda \mapsto \gamma^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}_{\widetilde{M},F}(Z;\Lambda)$ est une fonction entière de $\Lambda \in \mathfrak{a}^*_{0,\mathbb{C}}$, et on a la décomposition pour Λ en dehors des murs

$$\gamma^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}_{\widetilde{M},F}(Z;\Lambda) = \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}^{\widetilde{Q}}(\widetilde{M})} \varepsilon^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}_{\widetilde{P}}(Z;\Lambda).$$

Pour une $(\widetilde{G}, \widetilde{M})$-famille $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot, \widetilde{P}))$, comme en section 1.6 et modulo le choix d'une mesure de Haar sur l'espace $\mathfrak{a}^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{M}}$, on définit pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$ en dehors des murs,

$$\boldsymbol{c}^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{M}}(\Lambda) = \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}^{\widetilde{Q}}(\widetilde{M})} \epsilon^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}(\Lambda)\boldsymbol{c}(\Lambda, \widetilde{P}).$$

De même, si $Z \in \mathcal{A}_{\widetilde{Q}}$ et $\mathfrak{X} = (X_{\widetilde{P}})$ est une famille $\widetilde{M}$-orthogonale, on pose

$$\boldsymbol{c}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}_{\widetilde{M},F}(Z;\Lambda) = \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}^{\widetilde{Q}}(\widetilde{M})} \varepsilon^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}_{\widetilde{P}}(Z;\Lambda)\boldsymbol{c}(\Lambda, \widetilde{P}).$$

Ces fonctions vérifient les mêmes propriétés que dans le cas non tordu. En particulier, toute $(\widetilde{G}, \widetilde{M})$-famille périodique $\boldsymbol{c}$ s'écrit $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_m$, pour une fonction à décroissance rapide m sur le réseau $\mathcal{H}_{\widetilde{M}}$ des familles $\widetilde{M}$-orthogonales qui sont entières. On a une formule d'inversion de Fourier analogue de celle de la proposition 1.6.8 dans le cas tordu, et la fonction $\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}^{\tilde{Q},\mathfrak{X}}_{\tilde{M},F}(Z;\Lambda)$ sur $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ est lisse et invariante par $\mathcal{A}^\vee_{\tilde{M}}$. On a aussi une variante de cette formule d'inversion de Fourier, lorsque $\boldsymbol{c}$ se prolonge en une (G,M)-famille périodique :

Lemme 2.1.1. *Soient $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{L}}$, $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{M})$ et $Z \in \mathcal{A}_{\tilde{Q}}$. Soit $\mathfrak{X}$ une famille $\tilde{M}$-orthogonale, et soit $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot,\tilde{P}))$ une $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille périodique. Supposons que $\boldsymbol{c}$ se prolonge en une (G,M)-famille périodique $(\boldsymbol{c}(\cdot,P))$, et soit m une fonction à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$ telle que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_m$. Alors*

$$\boldsymbol{c}^{\tilde{Q},\mathfrak{X}}_{\tilde{M},F}(Z;\Lambda) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} m(\mathfrak{U})\gamma^{\tilde{Q},\mathfrak{X}}_{\tilde{M},F}(Z,\mathfrak{U};\Lambda)$$

avec

$$\gamma^{\tilde{Q},\mathfrak{X}}_{\tilde{M},F}(Z,\mathfrak{U};\Lambda) = \gamma^{\tilde{Q},\mathfrak{U}'+\mathfrak{X}}_{\tilde{M},F}(Z+U_{\tilde{Q}};\Lambda),$$

où $\mathfrak{U}'$ est la famille $\tilde{M}$-orthogonale entière déduite de $\mathfrak{U}$ par projection.

Démonstration. Notons m' la fonction à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_{\tilde{M}}$ définie par

$$m'(\mathfrak{U}') = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M(\mathfrak{U}')} m(\mathfrak{U}),$$

où $\mathcal{H}_M(\mathfrak{U}') \subset \mathcal{H}_M$ est la fibre au-dessus de $\mathfrak{U}'$. Il suffit de voir que la $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille $\boldsymbol{c}$ est associée à m' : on a $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_{m'}$. ∎

La preuve de la proposition 1.7.4 s'étend au cas tordu et fournit le lemme suivant.

Lemme 2.1.2. *Soient $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{L}}$, $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{M})$ et $Z \in \mathcal{A}_{\tilde{Q}}$. Soit $\mathfrak{X}$ une famille $\tilde{M}$-orthogonale rationnelle, et soit $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot,\tilde{P}))$ une $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille périodique. Pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$, la fonction $T \mapsto \boldsymbol{c}^{\tilde{Q},\mathfrak{X}(T)}_{\tilde{M},F}(Z;\Lambda)$ appartient à* PolExp. *On a aussi l'analogue tordu des points* (ii) *et* (iii) *de la proposition* 1.7.4.

Nous aurons besoin d'une variante de ce qui précède. Le $\mathbb{Z}$-module de type fini

$$\mathcal{C}^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\tilde{Q}}\backslash\mathcal{A}_{\tilde{M}}$$

s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{B}_{\tilde{Q}}\backslash\mathcal{B}_{\tilde{M}} \to \mathcal{C}^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}} \to \mathfrak{c}_{\tilde{M}} \to 0.$$

On note $\mathcal{B}^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(Z) \subset \mathcal{C}^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}$ la fibre au-dessus de $Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{M}}$. C'est un espace principal homogène sous $\mathcal{B}^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}} = \mathcal{B}_{\tilde{Q}}\backslash\mathcal{B}_{\tilde{M}}$. Pour $\Lambda \in (\mathfrak{a}^G_{0,\mathbb{C}})^* \oplus \mathcal{B}^\vee_{\tilde{Q}}$, $\tilde{P} \in \mathcal{P}^{\tilde{Q}}(\tilde{M})$, $T \in \mathfrak{a}_0$ et $X \in \mathfrak{a}_0$, on pose

$$\eta^{\tilde{Q},T}_{\tilde{P},F}(Z;X,\Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{B}^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}}(Z)} \Gamma^{\tilde{Q}}_{\tilde{P}}(H-X,T)e^{\langle\Lambda,H\rangle}.$$

L'expression

$$\eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(Z;X) = \eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(Z;X,0) \tag{2.1}$$

ne dépend que de l'image de T dans $\mathcal{B}^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}\backslash\mathfrak{a}^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}$. La proposition suivante est une variante du lemme 1.6.7 et de la proposition 1.7.4.

Proposition 2.1.3. *Pour $X \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, la fonction*

$$T \mapsto \phi(T) = \eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(Z;X)$$

est un élément de PolExp *: pour tout réseau $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, sa restriction à $\mathcal{R}$ s'écrit*

$$\phi_{\mathcal{R}}(T) = \sum_{\nu\in E} p_{\mathcal{R},\nu}(T)e^{\langle\nu,T\rangle},$$

où E est un sous-ensemble fini de $\widehat{\mathcal{R}}$ et les $p_{\mathcal{R},\nu}$ sont des polynômes de degré majoré par $a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{Q}}$. Les polynômes $p_{\mathcal{R}_k,0}$ ont pour limite, lorsque $k \to \infty$, un polynôme qui est indépendant du réseau $\mathcal{R}$.

Démonstration. Puisque

$$\eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(Z;X) = e^{\langle\Lambda,Z'\rangle}\eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(0;X-Z'),$$

on peut supposer $Z = 0$, et il suffit de traiter le cas $\widetilde{Q} = \widetilde{G}$. Posons

$$\eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{P},F}(X,\Lambda) = \eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{P},F}(0;X,\Lambda).$$

On rappelle que

$$\Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}(H,T) = \sum_{\{\widetilde{R}|\widetilde{P}\subset\widetilde{R}\}} (-1)^{a_{\widetilde{R}}-a_{\widetilde{G}}}\tau^{\widetilde{R}}_{\widetilde{P}}(H)\hat{\tau}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{R}}(H-T), \tag{2.2}$$

et que la projection dans $\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}$ du support de la fonction $H \mapsto \Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}(H,T)$ est compacte. Pour $\Lambda \in \mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{0,\mathbb{C}}$, sa transformée anti-Laplace

$$\eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{P},F}(X,\Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{B}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}} \Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}(H-X,T)e^{\langle\Lambda,H\rangle}$$

est donc une fonction holomorphe de Λ. Comme dans le lemme 1.6.3, on considère un réseau $\mathcal{D}_k$ de $\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}$ assez fin pour que $\mathcal{B}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}$ et les images de X et T dans $\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}$ soient contenus dans ce réseau. On a

$$\eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{P},F}(X,\Lambda) = c^{-1}\sum_{\nu\in\mathfrak{N}}\sum_{H\in\mathcal{D}_k} \Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}(H-X,T)e^{\langle\Lambda+\nu,H\rangle},$$

où ν parcourt le dual $\mathfrak{N} = \mathcal{B}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G},\vee}/\mathcal{D}_k^{\vee}$ de $\mathcal{B}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{D}_k$ et c est l'indice de $\mathcal{B}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}$ dans $\mathcal{D}_k$. La somme en H peut se calculer au moyen de l'expression (2.2) lorsque $\Re(-\Lambda)$ est régulier :

$$\eta_{\widetilde{P},F}^{\widetilde{G},T}(X,\Lambda) = \sum_{\{\widetilde{R}|\widetilde{P}\subset\widetilde{R}\}} \eta_{\widetilde{P},\widetilde{R}}^{T}(X,\Lambda),$$

avec

$$\eta_{\widetilde{P},\widetilde{R}}^{T}(X,\Lambda) = c^{-1}(-1)^{a_{\widetilde{R}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\nu\in\mathfrak{N}} \sum_{H\in\mathcal{D}_k} \tau_{\widetilde{P}}^{\widetilde{R}}(H-X)\hat{\tau}_{\widetilde{R}}(H-T-X)e^{\langle\Lambda+\nu,H\rangle},$$

qui est une fonction méromorphe en Λ ayant un pôle d'ordre $a_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}} = a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}$ en $\Lambda = 0$. On conclut comme dans le lemme 1.6.7 en considérant les développements de Laurent des $\eta_{\widetilde{P},\widetilde{R}}^{T}(X,\Lambda)$. Pour la dernière assertion, on procède comme dans la preuve de la proposition 1.7.4. ∎

2.2 Les fonctions σ et $\widetilde{\sigma}$

D'après [25, lemme 2.11.1], pour $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, il existe un plus petit $\widetilde{Q}^{+} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ et un plus grand $\widetilde{Q}^{-} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ tels que

$$Q^{-} \subset Q \subset Q^{+}.$$

De plus ([25, lemme 2.11.2]), pour $Q, R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $Q^{+} \subset R^{-}$, on a $(\mathfrak{a}_Q^R)^{\theta_0} = \mathfrak{a}_{\widetilde{Q}^{+}}^{\widetilde{R}^{-}}$.

Pour Q, $R \in \mathcal{P}$, tels que $Q \subset R$, on note σ_Q^R la fonction caractéristique de l'ensemble des $H \in \mathfrak{a}_0$ tels que

$$\begin{cases} \langle\alpha, H\rangle > 0 & \text{pour } \alpha \in \Delta_Q^R, \\ \langle\alpha, H\rangle \leq 0 & \text{pour } \alpha \in \Delta_Q \smallsetminus \Delta_Q^R, \\ \langle\varpi, H\rangle > 0 & \text{pour tout } \varpi \in \hat{\Delta}_R. \end{cases}$$

Si de plus $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ et $Q^{+} \subset R^{-}$, il existe un $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ tel que $Q \subset P \subset R$, alors on définit la variante tordue $\widetilde{\sigma}_Q^R$ de la fonction σ_Q^R en remplaçant la troisième condition par

$$\langle\widetilde{\varpi}, H\rangle > 0 \quad \text{pour tout} \quad \widetilde{\varpi} \in \hat{\Delta}_{\widetilde{P}}.$$

D'après [25, lemme 2.11.3], la fonction $\widetilde{\sigma}_Q^R$ est indépendante du choix du $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ avec $Q \subset P \subset R$ utilisé pour la définir, ce qui justifie la notation.

2.3 La fonction q

Pour $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, considérons l'application linéaire[2]

$$q = q_Q : \mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_Q^{\tilde{G}}$$

définie par

$$q(X) = ((1-\theta_0)X^{\tilde{G}})_Q = ((1-\theta_0)X)_Q^{\tilde{G}}.$$

Elle se factorise à travers la projection orthogonale $\mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_{Q_0}^{\tilde{G}}$, avec

$$Q_0 = Q \cap \theta_0^{-1}(Q) \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}.$$

Tous les résultats de [25, sections 2.12 et 2.13] sont vrais ici, *mutatis mutandis*.

[2]Notons que notre définition de q_Q diffère de celle de [25, section 2.13] puisqu'on projette sur $\mathfrak{a}_Q^{\tilde{G}}$ et non pas sur $\mathfrak{a}_Q^G$. Cela ne change pas grand chose à l'affaire puisque, par hypothèse, l'application $1-\theta$ est un automorphisme de $\mathfrak{a}_G^{\tilde{G}}$.