## Chapitre 3

# Théorie de la réduction

## 3.1 Décomposition d'Iwasawa

Pour $v \in |\mathcal{V}|$, on fixe une paire parabolique définie sur $F_v$ minimale $(P_{v,0}, A_{v,0})$ de $G_v = G \times_F F_v$, et on note $M_{v,0}$ le centralisateur de $A_{v,0}$ dans $G_v$. On suppose que

$$P_{v,0} \subset P_{0,v} = P_0 \times_F F_v, \quad A_{v,0} \supset A_{0,v} = A_0 \times_F F_v.$$

Un sous-groupe compact de $G(F_v)$ est dit « $M_{v,0}$-admissible » s'il est spécial – donc maximal – et correspond à un sommet de l'immeuble de $G(F_v)$ qui appartient à l'appartement associé à $A_{v,0}$. Rappelons qu'un sous-groupe compact maximal $M_{v,0}$-admissible $\boldsymbol{K}_v$ de $G(F_v)$ vérifie les propriétés suivantes (cf. [25, lemme 3.1.1]) :

- $G(F_v) = P_{v,0}(F_v)\boldsymbol{K}_v$ (décomposition d'Iwasawa) ;
- tout élément de $N_G(M_{v,0})(F_v)/M_{v,0}(F_v)$ a un représentant dans $\boldsymbol{K}_v$ ;
- pour tout sous-groupe parabolique $P$ de $G$ contenant $M_{v,0}$ et défini sur $F_v$, notant $M$ la composante de Levi de $P$ contenant $M_{v,0}$ (elle est définie sur $F_v$), on a la décomposition $\boldsymbol{K}_v \cap P(F_v) = (\boldsymbol{K}_v \cap M(F_v))(\boldsymbol{K}_v \cap U_P(F_v))$ et $\boldsymbol{K}_v \cap M(F_v)$ est un sous-groupe compact $M_{v,0}$-admissible de $M(F_v)$.

Nous dirons que $\boldsymbol{K}$ est un sous-groupe compact maximal « $M_0$-admissible » de $G(\mathbb{A})$ s'il est de la forme

$$\boldsymbol{K} = \prod_{v \in |\mathcal{V}|} \boldsymbol{K}_v,$$

où les $\boldsymbol{K}_v$ vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout $v \in |\mathcal{V}|$, $\boldsymbol{K}_v$ est un sous-groupe compact $M_{v,0}$-admissible de $G(F_v)$ ;
- pour tout $F$-plongement $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$, on a $\boldsymbol{K}_v = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_v) \cap G(F_v)$ pour presque tout $v \in |\mathcal{V}|$.

Fixons un sous-groupe compact maximal $M_0$-admissible $\boldsymbol{K} = \prod_{v \in |\mathcal{V}|} \boldsymbol{K}_v$ de $G(\mathbb{A})$. Alors on a la décomposition d'Iwasawa

$$G(\mathbb{A}) = P_0(\mathbb{A})\boldsymbol{K},$$

et tout élément de $N_{G(\mathbb{A})}(M_0)/M_0(\mathbb{A})$ a un représentant dans $\boldsymbol{K}$. Plus généralement, pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})\boldsymbol{K}$.

Pour $P \in \mathcal{P}$, grâce à la décomposition d'Iwasawa, on étend les morphismes $\mathbf{H}_P$ en des fonctions sur $G(\mathbb{A})$ tout entier que, par abus de notation, on note encore $\mathbf{H}_P$ :

pour $g \in G(\mathbb{A})$, on écrit $g = pk$ avec $p \in P(\mathbb{A})$ et $k \in \boldsymbol{K}$, et on pose

$$\mathbf{H}_P(g) = \mathbf{H}_P(p).$$

Pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, on note $\widetilde{\mathbf{H}}_P : \widetilde{G}(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$ la fonction définie par

$$\widetilde{\mathbf{H}}_P(\delta_0 g) = \mathbf{H}_P(g).$$

Suivant la convention habituelle, on pose $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{P_0}$ et $\widetilde{\mathbf{H}}_0 = \widetilde{\mathbf{H}}_{P_0}$ .

La construction de hauteurs dans [25, section 3.2], qui reprend essentiellement celle de [32, sous-section I.2.2], est valable pour un corps global de caractéristique quelconque. Pour la notion de *hauteur* sur un $F$-espace vectoriel de dimension finie, on renvoie à *loc. cit*. On suppose donné un $F$-plongement

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

pour un $F$-espace vectoriel de dimension finie $V$. On choisit une *hauteur* $\|\cdot\|$ sur le $F$-espace vectoriel $\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V)$, et pour $x \in G(\mathbb{A})$, on pose

$$|x| = \|(\rho(x), {}^{\mathrm{t}}\rho(x^{-1}))\|.$$

## 3.2 Point central

D'après [25, lemme 3.3.3], il existe un point $T_0 \in \mathfrak{a}_0^G$ tel que pour tout élément $s \in \mathbf{W}$, et pour tout représentant $w_s$ de $s$ dans $G(F)$, on ait

$$\mathbf{H}_0(w_s) = T_0 - sT_0, \quad \mathbf{H}_0(w_s^{-1}) = T_0 - s^{-1}T_0.$$

Cet point est donné par

$$T_0 = \sum_{\alpha \in \Delta_0} t_\alpha(1)\check{\varpi}_\alpha,$$

où $\check{\varpi}_\alpha \in \mathfrak{a}_0^G$ est l'élément correspondant à $\alpha \in \Delta_0$ dans la base duale et $t_\alpha(1) \in \mathbb{R}$ est défini par

$$\mathbf{H}_0(w_\alpha) = t_\alpha(1)\check{\alpha},$$

où $w_\alpha$ est un représentant dans $G(F)$ de la symétrie $s_\alpha$. Puisque les $\check{\varpi}_\alpha$ sont dans $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $T_0 \in k^{-1}\mathcal{A}_0$. Pour $x \in G(\mathbb{A})$, $T \in \mathfrak{a}_0$ et $s \in \mathbf{W}$, on pose[1]

$$Y_{x,T,s} = s^{-1}(T - \mathbf{H}_0(w_s x)).$$

[1]Dans [25, sections 3.3 et 5.3], les éléments $Y_{x,T,s}$, $Y_{T,s}$, $Y_s$ sont notés respectivement $Y_s(x,T)$, $Y_s(T)$, $Y_s$.

Si $x = 1$, on écrit simplement

$$Y_{T,s} \stackrel{\text{déf}}{=} Y_{1,T,s} = s^{-1}T + (T_0 - s^{-1}T_0),$$

et si $T = 0$, on pose $Y_s = Y_{0,s}$. Pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, et $s \in \mathbf{W}$ tel que $s(P) = P_0$, on pose $Y_{T,P} = Y_{T,s}$. Ceci définit comme en [25, section 3.3] une famille orthogonale

$$\mathfrak{Y}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} (Y_{T,P})_{P\in\mathcal{P}}, \quad \text{avec} \quad Y_{T,P} = [T]_P + (T_0 - [T_0]_P).$$

On note $\mathfrak{Y} = (Y_P)$ la famille $M_0$-orthogonale définie par

$$Y_P \stackrel{\text{déf}}{=} Y_{0,P} = T_0 - [T_0]_P = T_0 - s^{-1}T_0 = Y_s.$$

Puisque $Y_{s(P_0)} = \mathbf{H}_0(w_s^{-1}) \in \mathcal{A}_0$, la famille $\mathfrak{Y}$ est entière et on a $\mathfrak{Y}(T) = \mathfrak{Y} + \mathfrak{T}$.

Plus généralement, pour $x \in G(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_0$, on définit comme en [25, lemme 3.3.2 (iii)] une famille $M_0$-orthogonale $(Y_{x,T,P})$ : pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, et $s \in \mathbf{W}$ tel que $s(P) = P_0$, on pose $Y_{x,T,P} = Y_{x,T,s}$. On a donc $Y_{T,P} = Y_{1,T,P}$. La famille $(Y_{x,T,P})$ est rationnelle si $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. De plus (*loc. cit.*), il existe une constante $c$ telle que si $\boldsymbol{d}_0(T) > c$, alors cette famille est régulière.

## 3.3 Éléments primitifs

En caractéristique positive, la décomposition de Jordan n'est en général pas définie sur le corps de base; il convient donc ici de remplacer la notion d'élément quasi semi-simple régulier elliptique par celle d'élément primitif [25, section 3.7, page 76] : un élément de $\widetilde{G}(F)$ est dit *primitif* (dans $\widetilde{G}$) s'il n'appartient à aucun sous-espace parabolique propre de $\widetilde{G}$ défini sur $F$, autrement dit, si son orbite sous $G(F)$ ne rencontre aucun $\widetilde{P}(F)$ pour $\widetilde{P} \neq \widetilde{G}$. On note $\widetilde{G}(F)_{\text{prim}}$ l'ensemble des éléments primitis de $\widetilde{G}(F)$. Pour $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{L}}$, on dispose plus généralement de la notion d'élément primitif de $\widetilde{M}(F)$ et de l'ensemble $\widetilde{M}(F)_{\text{prim}}$.

On appelle *paire primitive* (dans $\widetilde{G}$) une paire $(\widetilde{M}, \delta)$ où $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ et $\delta$ est un élément primitif de $\widetilde{M}(F)$. Deux paires primitives $(\widetilde{M}, \delta)$ et $(\widetilde{M}', \delta')$ sont dites équivalentes si elles sont conjuguées i.e. s'il existe un élément $x \in G(F)$ tel que $\widetilde{M}' = \mathrm{Int}_x(\widetilde{M})$ et $\delta' = \mathrm{Int}_x(\delta)$. On note $[\widetilde{M}, \delta]$ la classe d'équivalence de $(\widetilde{M}, \delta)$ et $\mathfrak{O}$ l'ensemble de ces classes.

Pour un élément $\gamma \in \widetilde{G}(F)$, on note $\mathcal{O}(\gamma)$ sa classe de $G(F)$-conjugaison. Considérons un espace parabolique $\widetilde{P} = \widetilde{M}U \in \widetilde{\mathcal{P}}$ tel que $\mathcal{O}(\gamma) \cap \widetilde{P}(F) \neq \emptyset$ avec $\widetilde{P}$ minimal pour cette propriété. On choisit $g \in G(F)$ tel que $g^{-1}\gamma g \in \widetilde{P}(F)$. On peut écrire $g^{-1}\gamma g = \delta u$ avec $\delta \in \widetilde{M}(F)$ et $u \in U(F)$. La condition de minimalité assure que $\delta$ est primitif dans $\widetilde{M}(F)$.

**Lemme 3.3.1.** *La correspondance $\gamma \mapsto (\widetilde{M}, \delta)$ induit une application surjective*

$$\zeta : \widetilde{G}(F) \to \mathfrak{D}.$$

*Démonstration.* Il convient de montrer que deux paires primitives associées à un même $\gamma$ sont équivalentes. Soient donc $\widetilde{P} = \widetilde{M}U$ et $\widetilde{P}' = \widetilde{M}'U'$ deux éléments de $\widetilde{\mathcal{P}}$ tels que

$$\gamma = \delta u = \delta' u'$$

pour $\delta \in \widetilde{M}(F)$, $u \in U(F)$, $\delta' \in \widetilde{M}'(F)$ et $u' \in U'(F)$ ; de plus $\widetilde{P}$ et $\widetilde{P}'$ sont minimaux pour ces conditions. L'ensemble

$$\widetilde{H} = \widetilde{P} \cap \widetilde{P}' = (P \cap P')\gamma = \gamma(P \cap P')$$

est un espace tordu de groupe sous-jacent $H = P \cap P'$. Soit $L$ une composante de Levi de $H$ définie sur $F$ (cf. [16, proposition 4.7]). Puisque $\mathrm{Int}_\gamma(L)$ en est une autre, d'après *loc. cit.* il existe un unique élément $u_H \in U_H(F)$ tel que $\mathrm{Int}_\gamma(L) = \mathrm{Int}_{u_H}(L)$, où $U_H$ est le radical unipotent de $H$. Ainsi

$$\widetilde{L} = \eta L = L\eta, \quad \text{avec} \quad \eta = u_H^{-1}\gamma \in \widetilde{H}(F),$$

est une composante de Levi de $\widetilde{H}$ définie sur $F$ : on a l'égalité $\widetilde{H} = \widetilde{L} \ltimes U_H$. Comme $\widetilde{H}$ normalise $U$ (resp. $U'$), d'après [16, proposition 4.4 (b)] $Q = \widetilde{H}U$ (resp. $\widetilde{Q} = \widetilde{H}U'$) est un sous-espace parabolique de $\widetilde{G}$ défini sur $F$ et contenu dans $\widetilde{P}$ (resp. $\widetilde{P}'$). Par construction, $\gamma \in \widetilde{Q}(F)$ (resp. $\gamma \in \widetilde{Q}'(F)$). Par minimalité, on a donc $\widetilde{Q} = \widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}' = \widetilde{P}'$. D'après *loc. cit.*, cela entraîne que $\widetilde{L}$ est une composante de Levi de $\widetilde{P}$ (resp. $\widetilde{P}'$) et $U_H \subset U$ (resp. $U_H \subset U'$). On en déduit qu'il existe un unique $v \in U(F)$ (resp. $v' \in U'(F)$) tel que $\widetilde{L} = \mathrm{Int}_v(\widetilde{M})$ (resp. $\widetilde{L} \subset \mathrm{Int}_{v'}(\widetilde{M})$). On a donc

$$\widetilde{M}' = \mathrm{Int}_y(\widetilde{M}), \quad \text{avec} \quad y = v'^{-1}v.$$

Il reste à montrer que $\delta$ et $\delta'$ sont conjugués par ce $y$. Écrivons $\gamma = \delta'' u''$ avec $\delta'' \in \widetilde{L}(F)$ et $u'' \in U_H(F)$. On a donc

$$\gamma = v^{-1}\delta'' v u_1, \quad \text{avec} \quad u_1 = v^{-1}\mathrm{Int}_{\delta''^{-1}}(v)u''.$$

Or $v^{-1}\delta'' v$ appartient à $\widetilde{M}$ et $u_1$ appartient à $U(F)$. Puisque $\gamma = \delta u$, cela entraîne $v^{-1}\delta'' v = \delta$ et $u_1 = u$. On obtient, de la même manière, l'égalité $v'^{-1}\delta'' v' = \delta'$. On a donc bien $\delta' = \mathrm{Int}_y(\delta)$. ∎

**Lemme 3.3.2.** *On a les assertions suivantes :*

(i) *L'application $\zeta$ fournit une partition de l'ensemble des classes de $G(F)$-conjugaison dans $\widetilde{G}(F)$, et pour $\mathfrak{o} = [\widetilde{M}, \delta] \in \mathfrak{D}$, l'ensemble*

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} = \bigcup_{\widetilde{Q} \in \mathcal{P}(\widetilde{M})} \{g^{-1}\delta u g \,|\, g \in G(F),\, u \in U_Q(F)\}$$

*est la fibre de $\zeta$ au desus de $\mathfrak{o}$.*

(ii) *Pour $\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, on a la décomposition*

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{Q}(F) = (\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_Q(F))U_Q(F).$$

*Démonstration.* Le point (i) est clair. Prouvons (ii). Soit $(\widetilde{M}, \delta)$ une paire primitive dans la classe $\mathfrak{o}$. On distingue deux cas : ou bien il n'existe aucun élément $x \in G(F)$ tel que $\widetilde{M} \subset \mathrm{Int}_x(\widetilde{M}_Q)$, auquel cas les ensembles à gauche et à droite de l'égalité du point (ii) sont vides. Ou bien il existe un tel $x$ et, quitte à remplacer $\widetilde{Q}$ par $\mathrm{Int}_x(\widetilde{Q})$, on peut supposer que $\widetilde{M} \subset \widetilde{M}_Q$. Un $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{Q}(F)$ peut s'écrire $\gamma = \gamma_1 u$ avec $\gamma_1 \in \widetilde{M}_Q(F)$ et $u \in U_Q(F)$. Soient $\widetilde{P}_1$ un $F$-sous-espace parabolique de $\widetilde{M}_Q$ minimal pour la condition $\gamma_1 \in \widetilde{P}_1(F)$ et $\widetilde{M}_1$ une composante de Levi de $\widetilde{P}_1$ (définie sur $F$). On a $\gamma_1 = \delta_1 u_1$ avec $\delta_1 \in \widetilde{M}_1(F)$ et $u_1 \in U_{P_1}(F)$. La paire $(\widetilde{M}_1, \delta_1)$ est conjuguée à $(\widetilde{M}, \delta)$ et $\gamma_1$ appartient donc à $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_Q(F)$. D'où l'inclusion $\subset$. L'inclusion en sens inverse s'obtient de manière similaire. ■

## 3.4 Ensembles de Siegel, partitions et lemme de finitude

Rappelons qu'on a noté $G(\mathbb{A})^1$ le noyau de $\mathbf{H}_G$, et $P_0(\mathbb{A})^1 = M_0(\mathbb{A})^1 U_0(\mathbb{A})$, celui de $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{P_0}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $A_0^G(t)$ l'ensemble des $a \in A_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$ tels que

$$\langle \alpha\, , \mathbf{H}_0(a) \rangle > t \quad \text{pour toute racine} \quad \alpha \in \Delta_0.$$

On peut choisir un ensemble fini $\mathfrak{F}$ dans $M_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$, de sorte que

$$(A_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1) M_0(\mathbb{A})^1 \mathfrak{F} = M_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1.$$

D'après [39], on sait que :

(1) le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ est compact si et seulement si $G_{\mathrm{der}}$ est anisotrope ;

(2) il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$G(\mathbb{A})^1 = G(F) P_0(\mathbb{A})^1 A_0^G(t) \mathfrak{F} \boldsymbol{K}.$$

Puisque $M_{0,\mathrm{der}}$ est anisotrope, l'assertion (1) montre qu'il existe un sous-ensemble compact $\Omega_0$ de $M_{0,\mathrm{der}}(\mathbb{A})$, tel que $M_{0,\mathrm{der}}(\mathbb{A}) = M_0(F)\Omega_0$. D'après [39, Proposition 1.7], l'ensemble $U_0(F)\backslash U_0(\mathbb{A})$ est compact, il existe donc un sous-ensemble compact $\Omega_1$ de $U_0(\mathbb{A})$, tel que $U_0(F)\Omega_1 = U_0(\mathbb{A})$. Il résulte de l'assertion (2) qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que, en posant $\Omega = \Omega_1 \Omega_0 \subset P_0(\mathbb{A})$, on ait

$$G(\mathbb{A})^1 = G(F)\Omega A_0^G(t) \mathfrak{F} \boldsymbol{K}. \tag{3.1}$$

Maintenant considérons une section du morphisme composé

$$A_0(\mathbb{A}) \to A_G(\mathbb{A})\backslash A_0(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_0^G = \mathcal{B}_G\backslash\mathcal{B}_0 \ (= \mathcal{A}_{A_G}\backslash\mathcal{A}_{A_0})$$

et notons $\mathfrak{B}_0^G$ son image. Une telle section s'obtient en choisissant (arbitrairement) des représentants dans l'image réciproque d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{B}_0^G$ et en prenant le sous-groupe engendré[2]. On pose

$$\mathfrak{B}_0^G(t) = \mathfrak{B}_0^G \cap A_0^G(t).$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\Omega$ un sous-ensemble compact de $P_0(\mathbb{A})^1$, on pose

$$\mathfrak{S}^1_{t,\mathfrak{F},\Omega} = \Omega\mathfrak{B}_0^G(t)\mathfrak{F}\boldsymbol{K}.$$

D'après (3.1), on voit que pour $t$ assez petit et $\Omega$ assez gros, on a

$$G(\mathbb{A})^1 = G(F)\mathfrak{S}^1_{t,\mathfrak{F},\Omega}. \tag{3.2}$$

On notera simplement $\mathfrak{S}^1$ un tel domaine $\mathfrak{S}^1_{t,\mathfrak{F},\Omega}$, pour le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$.

La propriété de finitude usuelle pour un corps de nombres, à savoir que si $\mathfrak{S}^1$ est un domaine de Siegel pour le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$, alors l'ensemble des $\gamma \in G(F)$ tels que $\gamma\mathfrak{S}^1 \cap \mathfrak{S}^1 \neq \emptyset$ est fini, n'est plus vraie ici. En effet, pour tout corps global, tout élément unipotent $u \in U_0(\mathbb{A})$ et tout voisinage ouvert relativement compact de l'identité $\mathcal{V}$ dans $U_0(\mathbb{A})$, on a $a^{-1}ua \in \mathcal{V}$ pour $a \in A_0(\mathbb{A})$ avec $\mathbf{H}_0(a)$ assez loin dans la chambre de Weyl positive (*i. e.* pour $\boldsymbol{d}_0(\mathbf{H}_0(a))$ assez grand). Maintenant, pour un corps de fonctions, le sous-groupe compact maximal $\boldsymbol{K}$ est ouvert et nous avons donc $\gamma\mathfrak{S}^1 \cap \mathfrak{S}^1 \neq \emptyset$ pour tout $\gamma \in U_0(F)$ ; il en résulte que la propriété de finitude est en défaut.

Pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, notons $P(F)_{\text{st-prim}}$ l'ensemble des $\gamma \in P(F)$ tels que $\gamma \notin Q(F)$, pour tout $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q \subsetneq P$. Tout élément primitif de $G(F)$ est contenu dans $G(F)_{\text{st-prim}}$, mais la réciproque est fausse en général.

Pour $\alpha \in \Delta_0$, notons $P_\alpha$ l'unique élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $\Delta_0 \smallsetminus \{\alpha\}$ soit une base du système de racines de $M_{P_\alpha}$. Un élément $\gamma \in G(F)$ est dans $G(F)_{\text{st-prim}}$ si et seulement s'il n'appartient à aucun $P_\alpha(F)$ pour $\alpha \in \Delta_0$. Soient $\gamma \in G(F)$ et $g, g' \in \mathfrak{S}^1$, tels que $g = \gamma g'$. Écrivons $g = yax$ et $g' = y'a'x'$ avec $y, y' \in \Omega$, $a, a' \in \mathfrak{B}_0^G(t)$ et $x, x' \in \mathfrak{F}\boldsymbol{K}$. D'après [39, Proposition 2.6], pour chaque $\alpha \in \Delta_0$, il existe une constante $c_\alpha > t$ telle que si $\log|\alpha(a)| \geq c_\alpha$ ou $\log|\alpha(a')| \geq c_\alpha$, alors $\gamma \in P_\alpha(F)$. On en déduit que l'ensemble des $\gamma \in G(F)_{\text{st-prim}}$, tels que $\gamma\mathfrak{S}^1 \cap \mathfrak{S}^1 \neq \emptyset$, est fini. Le lemme ci-dessous est une simple généralisation de ce résultat. Nous l'énonçons pour un travail ultérieur (il ne sera pas utilisé ici).

[2] *A priori*, $\mathfrak{B}_0^G$ n'est pas invariant sous l'action de $\mathbf{W}$.

**Lemme 3.4.1.** *Soit $P = MU \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. Pour $\gamma \in P(F)$, on note $\gamma_M$ la projection de $\gamma$ sur $M(F) = U(F)\backslash P(F)$. Alors l'ensemble des projections $\gamma_M$ des éléments $\gamma \in P(F)_{\text{st-prim}}$, tels que $\gamma\mathfrak{S}^1 \cap \mathfrak{S}^1 \neq \emptyset$, est fini.*

*Démonstration.* Soient $\gamma \in P(F)$ et $g, g' \in \mathfrak{S}^1$ tel que $g = \gamma g'$. Comme plus haut, on écrit $g = yax$, $g' = y'a'x'$. Alors $l = xx'^{-1} \in P(\mathbb{A})$. Pour $p \in P(\mathbb{A})$, écrivons $p = p_U p_M$ avec $p_U \in U(\mathbb{A})$ et $p_M \in M(\mathbb{A})$. L'équation $g = \gamma g'$ se réécrit

$$y_U \mathrm{Int}_{y_M a}(l_U) y_M a\, l_M = \gamma_U \mathrm{Int}_{\gamma_M}(y'_U)\gamma_M y'_M a',$$

soit encore

$$y_U \mathrm{Int}_{y_M a}(l_U) = \gamma_U \mathrm{Int}_{\gamma_M}(y'_U) \quad \text{et} \quad y_M a\, l_M = \gamma_M y'_M a'.$$

Puisque $l_M$ appartient au compact $(P(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{F}\boldsymbol{K}\mathfrak{F}^{-1})_M$ de $M(\mathbb{A})$ et $\gamma_M$ appartient à $M(F)_{\text{st-prim}}$, l'équation $y_M a\, l_M = \gamma_M y'_M a'$ assure que les projections $\gamma_M$ sont dans un ensemble fini. ∎

Fixons comme ci-dessus une section du morphisme $A_G(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_G$ et notons $\mathfrak{B}_G$ son image. Puisque le groupe $\mathfrak{B}_G G(\mathbb{A})^1\backslash G(\mathbb{A}) = \mathfrak{B}_G(M_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1)\backslash M_0(\mathbb{A})$ est fini, on peut également fixer un sous-ensemble fini $\mathfrak{E}_G \subset M_0(\mathbb{A})$, tel que

$$G(\mathbb{A}) = \mathfrak{B}_G G(\mathbb{A})^1 \mathfrak{E}_G = \mathfrak{B}_G \mathfrak{E}_G G(\mathbb{A})^1.$$

Posons

$$\mathfrak{S}^* = \mathfrak{E}_G \mathfrak{S}^1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{B}_G \mathfrak{S}^* = \mathfrak{B}_G \mathfrak{E}_G \mathfrak{S}^1.$$

Ainsi $\mathfrak{S}^*$ est un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, et $\mathfrak{S}$ est un domaine de Siegel pour le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$. Les résultats vrais pour $\mathfrak{S}^1$ s'étendent, sans difficulté, à $\mathfrak{S}^*$.

Pour $L \in \mathcal{L}$, on peut définir de la même manière des domaines de Siegel $\mathfrak{S}^{L,1}$, $\mathfrak{S}^{L,*} = \mathfrak{E}_L \mathfrak{S}^{L,1}$ et $\mathfrak{S}^L = \mathfrak{B}_L \mathfrak{S}^{L,*}$. On peut, bien sûr, imposer, même si ce n'est pas vraiment nécessaire, que ces domaines soient compatibles avec la conjugaison : si $L, L' \in \mathcal{L}$ sont tels que $A_{L'} = \mathrm{Int}_g(A_L)$ pour un $g \in G(F)$, on demande que $\mathfrak{S}^{L',1} = \mathrm{Int}_g(\mathfrak{S}^{L,1})$, $\mathfrak{E}_{L'} = \mathrm{Int}_g(\mathfrak{E}_L)$, et $\mathfrak{B}_{L'} = \mathrm{Int}_g(\mathfrak{B}_L)$.

Fixons un élément $T_1 \in \mathfrak{a}_0$. Fixons aussi une section du morphisme $A_0(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_0$, et notons $\mathfrak{B}_0$ son image (on peut prendre $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_G \times \mathfrak{B}_0^G$). Pour $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ et $T \in \mathfrak{a}_0$, on note

$$\mathfrak{S}_{P_0}^Q(T_1, T)$$

l'ensemble des $x = uac \in G(\mathbb{A})$, avec $u \in U_Q(\mathbb{A})$, $a \in \mathfrak{B}_0$, et $c \in C_Q$, où $C_Q$ est un sous-ensemble compact de $G(\mathbb{A})$, tels que

$$\begin{cases} \langle \alpha, \mathbf{H}_0(x) - T_1 \rangle > 0 & \text{pour tout } \alpha \in \Delta_0^Q, \\ \langle \varpi, \mathbf{H}_0(x) - T \rangle \leq 0 & \text{pour tout } \varpi \in \hat{\Delta}_0^Q. \end{cases}$$

D'après [25, lemme 1.8.3], si $T - T_1$ est régulier (ce que l'on suppose), la condition ci-dessus est équivalente à $\Gamma_{P_0}^Q(\mathbf{H}_0(x) - T_1, T - T_1) = 1$. On note

$$F_{P_0}^Q(\cdot, T)$$

la fonction caractéristique de l'ensemble $Q(F)\mathfrak{S}_{P_0}^Q(T_1, T)$. Elle dépend du compact $C_Q$ et aussi de l'élément $T_1 \in \mathfrak{a}_0$. En pratique, on prendra $C_Q$ assez gros, et $-T_1$ et $T$ assez réguliers. En particulier, on supposera toujours que $F_{P_0}^Q(\cdot, T)$ est invariante à gauche par $\mathfrak{B}_Q Q(F)$, où $\mathfrak{B}_Q$ est l'image d'une section du morphisme $A_Q(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_Q$. Observons que puisque $A_Q(F)\mathfrak{B}_Q\backslash A_Q(\mathbb{A}) = A_Q(F)\backslash A_Q(\mathbb{A})^1$ est compact, quitte à grossir le compact $C_Q$, on peut même la supposer invariante à gauche par $A_Q(\mathbb{A})$. On la supposera aussi invariante à droite par $\boldsymbol{K}$.

Tous les résultats de [25, section 3.6] sont vrais ici, en particulier [25, proposition 3.6.3] qui est l'analogue pour $M_P(F)U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ de la partition [25, lemme 1.7.5] de $\mathfrak{a}_0$.

Les lemmes 3.7.1, 3.7.2 et 3.7.3 de [25] sont vrais ici. Quant au lemme 3.7.4 de [25], il suffit d'en modifier l'énoncé de la manière suivante :

**Lemme 3.4.2.** *Soit $\Omega$ un compact de $\widetilde{G}(\mathbb{A})$, et soit $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$. L'ensemble des éléments $\delta \in \widetilde{M}_P(F)$, tels que $\delta$ soit $M_P(F)$-conjugué à un élément $\delta_1 \in \widetilde{M}_{P_1}(F)_{\mathrm{prim}}$ pour un $\widetilde{P}_1 \in \widetilde{\mathcal{P}}$ tel que $\widetilde{P}_1 \subset \widetilde{P}$ (i.e. $P_1 \subset P$), et $x^{-1}\delta u x \in \Omega$ pour des éléments $x \in G(\mathbb{A})$ et $u \in U_P(\mathbb{A})$, appartient à un ensemble fini de classes de $M_P(F)$-conjugaison.*