Chapitre 4

L'opérateur de troncature

4.1 Terme constant

Une fonction $\varphi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ est dite *à croissance lente* s'il existe des réels $c, r > 0$ tels que pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on ait

$$|\varphi(g)| \leq c|g|^r.$$

On écrit aussi « $|\varphi(g)| \ll |g|^r$ pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ ».

Soit $P \in \mathcal{P}$, et soit φ une fonction sur $U_P(F)\backslash G(\mathbb{A})$, mesurable et localement L^1. On définit le terme constant $\varphi_P = \Pi_P\varphi$ de φ le long de P par

$$\varphi_P(x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \varphi(ux)\,\mathrm{d}u, \quad x \in G(\mathbb{A}),$$

où $\mathrm{d}u$ est la mesure de Tamagawa sur $U_P(\mathbb{A})$ – i.e. celle qui donne le volume 1 au quotient $U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})$. Alors φ_P est une fonction sur $U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ mesurable et localement L^1. De plus, si φ est à croissance lente, resp. lisse, alors φ_P est à croissance lente, resp. lisse.

Pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on note $\mathcal{R}_0^{P,+}$ l'ensemble des racines de T_0 dans M_P qui sont positives par rapport à Δ_0^P. Rappelons que l'on a fixé en section 3.4 un domaine de Siegel $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_G\mathfrak{S}^*$ pour le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$. Fixons aussi un sous-groupe ouvert compact $\boldsymbol{K}'$ de $G(\mathbb{A})^1$.

Le lemme suivant [32, lemme I.2.7] est le résultat technique clef pour l'étude du terme constant dans le cas des corps de fonctions.

Lemme 4.1.1. *Soit $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. Il existe une constante $c_P > 0$ telle que si $g \in \mathfrak{S}$ vérifie $\langle \mathbf{H}_0(g), \alpha\rangle > c_P$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}_0^{G,+} \smallsetminus \mathcal{R}_0^{P,+}$, alors, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, on a $\varphi_P(g) = \varphi(g)$.*

Ce lemme se généralise aux fonctions φ sur $U_{P'}(\mathbb{A})M_{P'}(F)\backslash G(\mathbb{A})$, pour $P' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $P \subset P'$: en remplaçant $\mathcal{R}_0^{G,+}$ par $\mathcal{R}_0^{P',+}$ dans la condition sur g, on obtient, de même, $\varphi_P(g) = \varphi(g)$. On a aussi la variante suivante [32, corollaire I.2.8] :

Lemme 4.1.2. *Il existe une constante $c' > 0$ telle que pour tout $T' \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\boldsymbol{d}_0(T') > c'$, la propriété suivante soit vérifiée : pour tout $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, tout $g \in \mathfrak{S}$ tel que*

$$\begin{cases} \langle \alpha, \mathbf{H}_0(g) - T'\rangle > 0 & \textit{pour tout } \alpha \in \Delta_P, \\ \langle \varpi, \mathbf{H}_0(g) - T'\rangle \leq 0 & \textit{pour tout } \varpi \in \hat{\Delta}_0^P, \end{cases}$$

et toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, on a $\varphi_P(g) = \varphi(g)$.

Pour $Q, R \in \mathcal{P}$ tels que $Q \subset R$, et ψ une fonction sur $U_Q(F)\backslash G(\mathbb{A})$ mesurable et localement L^1, on pose[1]

$$\Pi_{Q,R}\psi = \sum_{\{P\in\mathcal{P}|Q\subset P\subset R\}} (-1)^{a_P-a_R}\psi_P.$$

C'est encore une fonction sur $U_Q(F)\backslash G(\mathbb{A})$, mesurable et localement L^1.

Lemme 4.1.3. *Il existe une constante $c'' > 0$ telle que pour tous les couples de sous-groupes paraboliques $Q, R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ avec $Q \subsetneq R$, tout $g \in \mathfrak{S}$ vérifiant*

$$\langle \alpha, \mathbf{H}_0(g)\rangle > c'', \qquad \textit{pour tout} \qquad \alpha \in \Delta_Q^R,$$

et toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, invariante à droite par K', on ait

$$\Pi_{Q,R}\varphi(g) = 0.$$

Démonstration. Il suffit d'adapter la démonstration de [32, corollaire I.2.9]. Par définition de $\mathfrak{S}$, il existe une constante $c_1 < 0$, telle que $\langle \mathbf{H}_0(g), \delta\rangle > c_1$ pour tout $g \in \mathfrak{S}$ et tout $\delta \in \mathcal{R}_0^{G,+}$. Fixons aussi une constante $c_2 > 0$, telle que pour tous $P, P' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $P \subset P'$, on ait la version généralisée du lemme 4.1.1 : pour tout $g \in \mathfrak{S}$ tel que $\langle \mathbf{H}_0(g), \alpha\rangle > c_2$, pour tout $\alpha \in \mathcal{R}_0^{P',+} \smallsetminus \mathcal{R}_0^{P,+}$, et pour toute fonction ψ sur $U_{P'}(\mathbb{A})M_{P'}(F)\backslash G(\mathbb{A})$, invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, on a $\psi_{P'}(g) = \varphi(g)$. Posons $c'' = c_2 - c_1$.

Soient $Q, R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $Q \subsetneq R$, et soit $g \in \mathfrak{S}$. Posons

$$\Delta_Q^R(g) = \{\alpha \in \Delta_Q^R : \langle \alpha, \mathbf{H}_0(g)\rangle \le c''\}.$$

L'ensemble des $P \in \mathcal{P}$ tels que $Q \subset P \subset R$ est en bijection avec l'ensemble des couples (Θ, Θ') avec $\Theta \subset \Delta_Q^R(g)$ et $\Theta' \subset \Delta_Q^R \smallsetminus \Delta_Q^R(g)$. Pour un tel couple (Θ, Θ'), on note $P(\Theta, \Theta')$ l'élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q \subset P(\Theta, \Theta') \subset R$, défini par

$$\Delta_Q^{P(\Theta,\Theta')} = \Theta \cup \Theta'.$$

Puisque

$$a_{P(\Theta,\Theta')} - a_R = a_Q - a_R - (|\Theta| + |\Theta'|),$$

on a

$$\Pi_{Q,R}\varphi(g) = (-1)^{a_Q-a_R} \sum_{(\Theta,\Theta')} (-1)^{|\Theta|+|\Theta'|}\varphi_{P(\Theta,\Theta')}(g),$$

[1] Dans [25, section 4.3], cette fonction est notée $\Theta\psi$.

où (Θ, Θ') parcourt les couples comme ci-dessus. Fixé un tel couple, toute racine $\alpha \in \mathcal{R}^{P(\Theta,\Theta'),+} \smallsetminus \mathcal{R}^{P(\Theta,\emptyset),+}$ s'écrit $\alpha = \beta + \delta$ avec $\beta \in \Theta'$ et $\delta \in \mathcal{R}^{P(\Theta,\Theta'),+} \cup \{0\}$, et l'on a

$$\langle \alpha, \mathbf{H}_0(g) \rangle = \langle \beta, \mathbf{H}_0(g) \rangle + \langle \delta, \mathbf{H}_0(g) \rangle > c'' + \inf\{c_1, 0\} \geq c_2.$$

Par conséquent, $\varphi_{P(\Theta,\Theta')}(g) = \varphi_{(\Theta,\emptyset)}(g)$. On a donc

$$\Pi_{Q,R}\varphi(g) = (-1)^{a_Q - a_R} \Bigg(\sum_{\Theta' \subset \Delta_Q^R \smallsetminus \Delta_Q^R(g)} (-1)^{|\Theta'|} \Bigg) \sum_{\Theta \subset \Delta_Q^R(g)} (-1)^{|\Theta|} \varphi_{P(\theta,\emptyset)}(g).$$

Or, la somme sur Θ' est nulle si $\Delta_Q^G(g) \neq \Delta_Q^R$, ce qui prouve le lemme. ■

Pour $Q = P_0$ et $R = G$, puisque l'ensemble des $g \in \mathfrak{S}^*$, tels que $\langle \mathbf{H}_0(g), \alpha \rangle \leq c''$, est compact, on a, en particulier [32, corollaire I.2.9] :

Lemme 4.1.4. *Il existe un sous-ensemble compact $C = C_{K'}$ de $\mathfrak{S}^*$ tel que, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, le support de*

$$\Pi_{P_0,G}\varphi|_{\mathfrak{S}^*}$$

soit contenu dans C.

Soit $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. Pour $T \in \mathfrak{a}_0$, on définit un opérateur de troncature $\mathbf{\Lambda}^{T,Q}$ pour une fonction $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ par

$$\mathbf{\Lambda}^{T,Q}\varphi(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}, P \subset Q} (-1)^{a_P - a_Q} \sum_{\xi \in P(F)\backslash Q(F)} \widehat{\tau}_P^Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)\varphi_P(\xi x).$$

D'après [25, lemme 3.7.1], la somme sur ξ est finie. Notons que l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^{T,Q}$ ne dépend que de la projection T^Q de T sur $\mathfrak{a}_0^Q$. On pose

$$\mathbf{\Lambda}^T = \mathbf{\Lambda}^{T,G}.$$

Les résultats de [25, section 4.1] sur les propriétés de $\mathbf{\Lambda}^T$ sont vrais ici. En particulier, pour T assez régulier (i.e. tel que $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$ pour une constante c dépendant de G), l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^T$ est un idempotent [25, corollaire 4.1.3] : on a $\mathbf{\Lambda}^T \circ \mathbf{\Lambda}^T\varphi = \mathbf{\Lambda}^T\varphi$.

Définition 4.1.5. Pour $X \in \mathfrak{a}_Q^G$ et $T \in \mathfrak{a}_0^G$, on définit[2]

$$T[\![X]\!] = T[\![X]\!]^Q \in \mathfrak{a}_0^Q$$

[2]On a utilisé les doubles crochets pour éviter les confusions avec la famille M_0-orthogonale $([T]_P)$ définie par un élément $T \in \mathfrak{a}_0$.

en posant
$$T - X = \sum_{\alpha\in\Delta_0} x_\alpha \check{\alpha} \qquad \text{et} \qquad T[\![X]\!] = \sum_{\alpha\in\Delta_0^Q} x_\alpha \check{\alpha}.$$

Le raffinement [25, lemme 4.2.2] des propriétés de $\mathbf{\Lambda}^{T,Q}$ est encore vrai ici.

4.2 Troncature et support

Cette section adapte au cas des corps de fonctions les résultats de [25, section 4.3]. On fixe un $T \in \mathfrak{a}_0$, assez régulier. La proposition suivante joue ici le rôle de [25, proposition 4.3.2]. Elle est très simple à prouver et fournit cependant des décroissances beaucoup plus radicales.

Proposition 4.2.1. *Soit $\boldsymbol{K}'$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$. Il existe un sous-ensemble fermé $\Omega = \Omega_{T,\boldsymbol{K}'}$ de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ d'image compacte dans*
$$\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}),$$
tel que, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, le support de la fonction tronquée $\mathbf{\Lambda}^T\varphi$ soit contenu dans Ω.

Démonstration. On reprend la démonstration de l'assertion (2) du lemme I.2.16 de [32]. Fixons un élément $T' \in \mathfrak{a}_0$ assez régulier : on demande que la conclusion du lemme 4.1.2 soit vérifiée pour $\boldsymbol{K}'$. Pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, notons $G(\mathbb{A})_{P,T'}$ l'ensemble des $x \in G(\mathbb{A})$ vérifiant
$$\begin{cases} \langle \alpha, \mathbf{H}_0(x) - T'\rangle > 0 & \text{pour tout } \alpha \in \Delta_P, \\ \langle \varpi, \mathbf{H}_0(x) - T'\rangle \le 0 & \text{pour tout } \varpi \in \hat{\Delta}_0^P, \end{cases}$$
et posons
$$\mathfrak{S}^*_{P,T'} = \mathfrak{S}^* \cap G(\mathbb{A})_{P,T'}.$$
D'après [25, lemme 4.1.1], pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ et $x \in G(\mathbb{A})$, si $(\mathbf{\Lambda}^T\varphi)_P(x) \neq 0$, alors
$$\langle \varpi, \mathbf{H}_0(x) - T\rangle \le 0, \quad \text{pour tout} \quad \varpi \in \hat{\Delta}_P.$$
Grâce à [25, lemme 1.2.8], on en déduit que le support de $(\mathbf{\Lambda}^T\varphi)_P|_{\mathfrak{S}^*_{P,T'}}$ est contenu dans un compact de $\mathfrak{S}^*$ indépendant de φ. En appliquant le lemme 4.1.2 à la fonction $\mathbf{\Lambda}^T\varphi$, on obtient que le support de $\mathbf{\Lambda}^T\varphi|_{\mathfrak{S}^*_{P,T'}}$ est contenu dans un compact de $\mathfrak{S}^*$ indépendant de φ. Puisque ([25, lemme 1.7.5])
$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}} \phi_{P_0}^P \tau_P^G = 1,$$
on a $G(\mathbb{A}) = \bigcup_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}} G(\mathbb{A})_{P,T'}$. D'où la proposition. ∎

Pour démontrer la proposition 4.2.1, on a utilisé la partition [25, lemme 1.7.5] de $\mathfrak{a}_0$. On observe aussi que, d'après [25, lemme 3.6.4], on a

$$\mathbf{\Lambda}^T\varphi(x) = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset R}} A^T_{Q,R}\varphi(x), \tag{4.1}$$

avec

$$A^T_{Q,R}\varphi(x) = \sum_{\xi\in Q(F)\backslash G(F)} F^Q_{P_0}(\xi x, T)\sigma^R_Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)\Pi_{Q,R}\varphi(\xi x). \tag{4.2}$$

Si $Q = R$, alors $\sigma^R_Q = 0$, sauf si $Q = R = G$, auquel cas

$$A^T_{G,G}\varphi(x) = F^G_{P_0}(x, T)\varphi(x).$$

On note $\mathbf{C}^T$ l'opérateur $A^T_{G,G}$. Puisque la fonction $F^G_{P_0}(\cdot, T)$ est invariante à gauche par $\mathfrak{B}_G G(F)$ et que son support est d'image compacte dans $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, il existe un sous-ensemble fermé $\Omega^* = \Omega^*_{T,\boldsymbol{K}'}$ de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, d'image compacte dans $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, tel que, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, le support de $(\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T)\varphi$ soit contenu dans Ω^*. On a aussi la variante de [25, proposition 4.3.3] :

Proposition 4.2.2. *Soit $\boldsymbol{K}'$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$. Il existe une constante $c = c_{\boldsymbol{K}'}$ (qui ne dépend pas de T) telle que, si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$, alors pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, on a*

$$(\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T)\varphi = 0.$$

Démonstration. Pour étudier $(\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T)\varphi(x)$, on traite séparément chaque terme $A^T_{Q,R}\varphi(x)$, avec $Q \neq R$ dans (4.1). On peut prendre x dans $\mathfrak{S}$. Pour $\xi \in Q(F)\backslash G(F)$, il s'agit de contrôler $\Pi_{Q,R}\varphi(\xi x)$, sous la condition

$$F^Q_{P_0}(\xi x, T)\sigma^R_Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) = 1.$$

D'après [25, lemme 3.6.1], pour x fixé, il y a au plus un ξ modulo $Q(F)$ tel que l'expression ci-dessus soit non nulle. Puisqu'on est libre de multiplier ξx par un élément de $Q(F)$, on peut supposer que $\xi x = uay \in \mathfrak{S}^Q_{P_0}(T_1, T)$ avec $u \in U_Q(\mathbb{A})$, $a \in \mathfrak{B}_0$ et $y \in C_Q$ (cf. section 3.4). On peut même supposer que $u \in \Omega_Q$ pour un compact $\Omega_Q \subset U_Q(\mathbb{A})$, tel que $U_Q(F)\Omega_Q = U_Q(\mathbb{A})$. Rappelons que C_Q est un compact fixé (assez gros, mais indépendant de T) de $G(\mathbb{A})$, et que $H = \mathbf{H}_0(\xi x)$ vérifie

$$\begin{cases} \langle\alpha, H - T_1\rangle > 0 & \forall\alpha \in \Delta^Q_0, \\ \langle\varpi, H - T\rangle \leq 0 & \forall\varpi \in \hat{\Delta}^Q_0. \end{cases}$$

Puisque $\sigma_Q^R(H-T)=1$, on a $\langle\alpha,H\rangle > \langle\alpha,T\rangle$ pour tout $\alpha\in\Delta_Q^R$. Comme l'élément $T-T_1$ est régulier, il existe $c_1\in\mathbb{R}$ (indépendant de T) tel que $\langle\alpha,H\rangle > c_1$ pour tout $\alpha\in\mathcal{R}^{R,+}$. D'après le lemme 4.1.3, il existe $c''>0$ tel que, pour $g\in\mathfrak{S}$ tel que $\langle\mathbf{H}_0(g),\alpha\rangle > c''$, pour tout $\alpha\in\Delta_Q^R$, on ait $\Pi_{Q,R}\varphi(g)=0$, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$, invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$. Ici l'élément $\xi x = uay$ n'appartient pas à $\mathfrak{S}$, mais $H=\mathbf{H}_0(a)+\mathbf{H}_0(y)$, et y reste dans un compact fixé, par conséquent il existe $c_1'\in\mathbb{R}$ (indépendant de T) tel que $\log|\alpha(a)|>c_1'$ pour tout $\alpha\in\mathcal{R}^{R,+}$. Puisque u reste dans un compact fixé de $U_Q(\mathbb{A})$, pour tout $P'\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}^R$, la version généralisée du lemme 4.1.1 s'applique encore à ξx (cf. la preuve du lemme I.2.7 de [32]), et quitte à modifier la constante c'', la conclusion du lemme 4.1.3 s'applique encore à ξx. D'où la proposition. ∎

La différence par rapport au cas des corps de nombres est ici spectaculaire : sur un corps de nombres F, pour toute fonction lisse à croissance uniformément lente φ sur $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, la fonction $\boldsymbol{\Lambda}^T\varphi$ est seulement à décroissance rapide. Par ailleurs la décomposition

$$\boldsymbol{\Lambda}^T=\mathbf{C}^T+(\boldsymbol{\Lambda}^T-\mathbf{C}^T),$$

qui joue un rôle crucial dans les estimées de [25, chapitres 12 et 13], est bien plus simple à contrôler, car ici, pour toute fonction $\boldsymbol{K}'$-invariante à droite sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, non seulement $\boldsymbol{\Lambda}^T\varphi$ est à support d'image compacte dans $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, mais si T est assez régulier, la troncature est encore plus brutale : on a $\boldsymbol{\Lambda}^T\varphi=\mathbf{C}^T\varphi$. Cela simplifiera, plus loin, la preuve des estimées à établir.