Chapitre 5

Formes automorphes et produits scalaires

5.1 Formes automorphes

On fixe une mesure de Haar $\mathrm{d}g$ sur $G(\mathbb{A})$. On note $\mathrm{d}k$ la mesure de Haar sur $\boldsymbol{K}$, telle que $\mathrm{vol}(\boldsymbol{K}) = 1$. Pour $P \in \mathcal{P}$, on note $\mathrm{d}u_P$, ou simplement $\mathrm{d}u$, la mesure de Tamagawa sur $U_P(\mathbb{A})$. Par quotient par la mesure de comptage sur $U_P(F)$, on obtient une mesure sur $U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})$ qui vérifie

$$\mathrm{vol}(U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})) = 1.$$

Posons $M = M_P$. La mesure de Haar $\mathrm{d}m$ sur $M(\mathbb{A})$ est choisie de sorte que l'on ait la formule d'intégration

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(g)\,\mathrm{d}g = \int_{U_P(\mathbb{A})\times M(\mathbb{A})\times \boldsymbol{K}} f(umk)e^{-\langle 2\rho_P, \mathbf{H}_P(m)\rangle}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k,$$

où ρ_P désigne la demi-somme des racines positives de A_P. La fonction

$$m \mapsto \boldsymbol{\delta}_P(m) = e^{\langle 2\rho_P, \mathbf{H}_P(m)\rangle}$$

est le module de $P(\mathbb{A})$:

$$\mathrm{d}(mum^{-1}) = \boldsymbol{\delta}_P(m)\,\mathrm{d}u.$$

On pose[1]

$$\boldsymbol{X}_P = P(F)U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\boldsymbol{X}}_P = A_P(\mathbb{A})P(F)U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}).$$

En particulier

$$\boldsymbol{X}_G = G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\boldsymbol{X}}_G = A_G(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

Les groupes $G(\mathbb{A})$ et $P(F)U_P(\mathbb{A})$ sont unimodulaires ; on dispose donc d'une mesure quotient invariante à droite sur $\boldsymbol{X}_P$. Pour ϕ localement intégrable et à support compact sur $\boldsymbol{X}_P$, on a la formule d'intégration :

$$\int_{\boldsymbol{X}_P} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{X}_M\times \boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_P(m)^{-1}\phi(mk)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k, \tag{5.1}$$

[1] On prendra garde à ce que l'espace noté ici $\boldsymbol{X}_G$ ne coïncide pas avec l'espace ainsi noté dans [25], car dans cette référence il y a, en plus, un quotient par $\mathfrak{B}_G$. Son usage correspond plutôt à celui de notre $\overline{\boldsymbol{X}}_G$, sans toutefois lui être égal.

où $\mathrm{d}x$ est la mesure quotient. Par contre, si $P \neq G$, il n'y a pas de mesure $G(\mathbb{A})$-invariante à droite sur $\overline{\boldsymbol{X}}_P$. Toutefois, il existe une fonctionnelle invariante à droite $r_{\overline{\boldsymbol{X}}_P}$ sur l'espace des sections du fibré en droites sur $\overline{\boldsymbol{X}}_P$, défini par $\boldsymbol{\delta}_P$. Ces sections sont représentables par les fonctions sur $\boldsymbol{X}_P$, vérifiant

$$\phi(px) = \boldsymbol{\delta}_P(p)\phi(x) \quad \text{pour} \quad p \in A_P(\mathbb{A})P(F)U_P(\mathbb{A}).$$

La fonctionnelle est définie par :

$$r_{\overline{\boldsymbol{X}}_P}(\phi) = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_P(m)^{-1}\phi(mk)\,\mathrm{d}\dot{m}\,\mathrm{d}k,$$

où $\mathrm{d}\dot{m}$ est la mesure quotient.

Rappelons que l'on a noté $\Xi(P)$ le groupe des caractères unitaires de $A_P(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur $A_P(F)$. Soit $\xi \in \Xi(P)$. On dit qu'une fonction φ sur $\boldsymbol{X}_P$ « se transforme à gauche suivant ξ », si pour tout $x \in G(\mathbb{A})$ on a

$$\varphi(ax) = \xi(a)\varphi(x) \quad \text{pour} \quad a \in A_P(\mathbb{A}).$$

On note $L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ l'espace de Hilbert formé des fonctions φ sur $\boldsymbol{X}_M$ qui se transforment à gauche suivant ξ et sont de carré intégrable sur $\overline{\boldsymbol{X}}_M$. Le groupe $M(\mathbb{A})$ agit sur $L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ par translations à droite. Considérons deux fonctions φ et ψ localement intégrables sur $\boldsymbol{X}_P$ qui se transforment à gauche suivant le même caractère $\xi \in \Xi(P)$. On pose (si l'intégrale converge)

$$\langle \varphi, \psi \rangle_P = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K}} \varphi(mk)\overline{\psi(mk)}\,\mathrm{d}\dot{m}\,\mathrm{d}k. \tag{5.2}$$

Ce produit scalaire définit l'espace de Hilbert $L^2(\boldsymbol{X}_P)_\xi$, siège de la représentation unitaire « induite parabolique »

$$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})} L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi,$$

définie par

$$(\boldsymbol{\rho}(y)\varphi)(x) = \boldsymbol{\delta}_P^{-1/2}(x)\boldsymbol{\delta}_P^{1/2}(xy)\varphi(xy).$$

Pour la notion générale de forme automorphe, nous renvoyons le lecteur à [32, sous-section I.2.17]. Soit $M \in \mathcal{L}$. Un caractère de $A_M(\mathbb{A})$ est automorphe, s'il est trivial sur $A_M(F)$. Ainsi $\Xi(M)$ est le groupe des caractères unitaires automorphes de $A_M(\mathbb{A})$. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, une forme automorphe φ sur $\boldsymbol{X}_P$ est une fonction $\boldsymbol{K}$-finie à droite telle que la fonction $m \mapsto \varphi(mx)$ sur $\boldsymbol{X}_M$ est automorphe. Elle est dite cuspidale, si pour tout $Q \in \mathcal{P}$ tel que $Q \subsetneq P$, le terme constant φ_Q est nul – ou, ce qui revient au même, si pour tout x, la fonction $m \mapsto \varphi(mx)$ sur $\boldsymbol{X}_M$ est cuspidale. Notons $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)$ l'espace des formes automorphes cuspidales sur $\boldsymbol{X}_P$. Pour $\xi \in \Xi(P)$, notons

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi \subset \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P),$$

le sous-espace formé des fonctions qui se transforment à gauche suivant ξ.

Définition 5.1.1. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$. On appelle *représentation automorphe discrète modulo le centre* – ou simplement *discrète* – de $M(\mathbb{A})$, une sous-représentation irréductible de $M(\mathbb{A})$ dans l'espace $L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ pour un $\xi \in \Xi(M)$. On note $L^2_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ le sous-espace fermé de $L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ engendré par ces représentations.

On appelle *forme automorphe discrète pour* P une fonction $\boldsymbol{K}$-finie sur $\boldsymbol{X}_P$ telle que, pour tout x, la fonction $m \mapsto \varphi(mx)$ sur $M(\mathbb{A})$ soit un vecteur d'une représentation automorphe discrète modulo le centre de M.

Une représentation automorphe irréductible de $M(\mathbb{A})$ est discrète modulo le centre si et seulement si sa restriction à $M(\mathbb{A})^1$ est une somme finie de représentations irréductibles dans

$$L^2(M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1).$$

Pour $\xi \in \Xi(P)$, on note $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ l'espace engendré par les formes automorphes discrètes qui se transforment à gauche suivant ξ sur $\boldsymbol{X}_P$. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ munit $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ d'une structure d'espace pré-hilbertien. On sait (grâce à la proposition 4.2.1 pour les corps de fonctions) que

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi \subset \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi.$$

Ainsi, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ est lui aussi muni d'une structure d'espace pré-hilbertien.

5.2 Opérateurs d'entrelacement et séries d'Eisenstein

Soient P, $Q \in \mathcal{P}$ deux sous-groupes parabolique associés, i.e. tels que M_P et M_Q soient conjugués dans $G(F)$. Considérons une fonction Φ lisse sur $\boldsymbol{X}_P$ se transformant à gauche suivant un caractère unitaire automorphe ξ de $A_M(\mathbb{A})$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ et $x \in G(\mathbb{A})$, posons

$$\Phi(x, \lambda) = e^{\langle \lambda + \rho_P, \mathbf{H}_P(x) \rangle} \Phi(x).$$

La fonction $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$ ne dépend que de l'image de λ dans $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_P$. Pour $s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$ et pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ « assez régulier »[2] dans la chambre associée à P dans $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$, on a une expression définie par une intégrale convergente :

$$(\mathbf{M}_{Q|P}(s, \lambda)\Phi)(x, s\lambda) = \int_{U_{s,P,Q}(\mathbb{A})} \Phi(w_s^{-1} n x, \lambda)\, \mathrm{d}n,$$

[2] En notant $\mathcal{R}_P$ l'ensemble des racines de A_P dans P, on demande ici l'inégalité stricte $\langle \check{\alpha}, \Re\lambda - \rho_P \rangle > 0$, pour toute racine $\alpha \in \mathcal{R}_P$ telle que $s\alpha \in -\mathcal{R}_Q$.

où l'on a posé

$$U_{s,P,Q} = (U_Q \cap w_s U_P w_s^{-1}) \backslash U_Q.$$

On obtient ainsi un opérateur

$$\mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda) : \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(X_P)_\xi \to \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(X_Q)_{s\xi}.$$

Pour P et Q standards et P fixé, Q est déterminé par s, et l'on pose

$$\mathbf{M}(s,\lambda) = \mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda).$$

Pour $s = 1$, on écrira

$$\mathbf{M}_{Q|P}(\lambda) = \mathbf{M}_{Q|P}(1,\lambda).$$

Dans le cas particulier où $Q = s(P)$, on a (cf. [25, lemme 5.2.1]) :

$$\mathbf{M}_{s(P)|P}(s,\lambda) = e^{\langle \lambda+\rho_P, Y_s\rangle} \boldsymbol{s}, \qquad \text{où} \qquad Y_s = \mathbf{H}_0(w_s^{-1}) = T_0 - s^{-1}T_0$$

et

$$\boldsymbol{s} : \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(X_P)_\xi \to \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(X_Q)_{s\xi} \quad \text{est défini par} \quad \boldsymbol{s}\Phi(x) = \Phi(w_s^{-1}x).$$

Définition 5.2.1. Pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_P$, on pose

$$\varphi_\mu(x) = e^{\langle \mu, \mathbf{H}_P(x)\rangle}\varphi(x),$$

et on note $\mathbf{D}_\mu$ l'opérateur $\varphi \mapsto \varphi_\mu$, i.e. $\mathbf{D}_\mu\varphi = \varphi_\mu$.

Lemme 5.2.2. *Pour P, $Q \in \mathcal{P}$ associés, $s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$, $\mu \in \boldsymbol{\mu}_P$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ assez régulier, l'opérateur $\mathbf{D}_\mu$ vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda)\mathbf{D}_\mu = \mathbf{D}_{s\mu}\mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda+\mu).$$

Démonstration. Il suffit d'observer que $(\mathbf{D}_\mu\Phi)(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda+\mu)$. ∎

Soient P, $Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$. Pour $\Phi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(X_P)_\xi$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ assez régulier, on définit une série d'Eisenstein sur X_Q, par la formule :

$$E^Q(x,\Phi,\lambda) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash Q(F)} \Phi(\gamma x,\lambda).$$

Pour $Q = G$, on pose $E(\cdot,\Phi,\lambda) = E^G(\cdot,\Phi,\lambda)$. Le théorème 5.2.2 de [25] est vrai ici (*mutatis mutandis*)[3] : pour $\Phi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(X_P)_\xi$ et $x \in X_Q$, les fonctions

$$\lambda \mapsto (\mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda)\Phi)(x) \quad \text{et} \quad \lambda \mapsto E(x,\Phi,\lambda)$$

admettent un prolongement méromorphe définissant des fonctions rationnelles sur le cylindre $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{A}_P^\vee = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_P, \mathbb{C}^\times)$.

[3] Les propriétés de rationalité dans le cas cuspidal sont établies dans [32, section IV.4]. Le cas général est traité dans [32, appendice II].

5.3 La (G, M)-famille spectrale

Soient $M \in \mathcal{L}$, $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$. On définit une (G, M)-famille périodique à valeurs opérateurs [25, corollaire 5.3.2] : pour $Q \in \mathcal{P}(M)$ et $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_M$, on pose

$$\mathcal{M}(P, \lambda; \Lambda, Q) = \mathbf{M}_{Q|P}(\lambda)^{-1}\mathbf{M}_{Q|P}(\lambda + \Lambda).$$

Soit $T \in \mathfrak{a}_0$. Rappelons que l'on a défini en section 3.2 une famille M_0-orthogonale, qui est rationnelle si $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$:

$$\mathcal{Y}(T) = (Y_{T,P}),$$

où, pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, on a posé

$$Y_{T,P} = [T]_P + Y_P, \qquad \text{et} \qquad Y_P = T_0 - [T_0]_P.$$

Suivant la convention habituelle, pour $Q \in \mathcal{P}$ et $P \in \mathcal{P}(M_0)$ tels que $P \subset Q$, on pose $Y_{T,Q} = (Y_{T,P})_Q$ et $Y_Q = (Y_P)_Q$. Rappelons que pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, l'élément Y_P appartient à $\mathcal{A}_0$. En particulier, la famille M_0-orthogonale (Y_P) est entière. On peut donc définir une autre (G, M)-famille périodique à valeurs opérateurs : pour $Q \in \mathcal{P}(M)$ et $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_M$, on pose

$$\mathcal{M}(\mathcal{Y}; P, \lambda; \Lambda, Q) = e^{\langle \Lambda, Y_Q \rangle}\mathcal{M}(P, \lambda; \Lambda, Q).$$

Le lemme suivant résulte de la proposition 1.6.8 :

Lemme 5.3.1. *Fixons un élément $Z \in \mathcal{A}_G$. Les fonctions méromorphes de λ et Λ à valeurs opérateurs*[4]

$$\mathcal{M}_{M,F}^{G,T}(Z, \mathcal{Y}; P, \lambda; \Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(M)} \varepsilon_Q^{G,[T]_Q}(Z; \Lambda)\mathcal{M}(\mathcal{Y}; P, \lambda; \Lambda, Q)$$

sont lisses pour les valeurs imaginaires pures de λ et Λ.

Observons que l'expression $\mathcal{M}_{M,F}^{G,T}(Z, \mathcal{Y}; P, \lambda; \Lambda)$ est égale à

$$\mathcal{M}_{M,F}^{G,T}(Z; P, \lambda; \Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(M)} \varepsilon_Q^{G,[T]_Q}(Z; \Lambda)\mathcal{M}(P, \lambda; \Lambda, Q)$$

si $\mathcal{Y} = 0$, et donc, par exemple, si G est déployé.

[4] La notion de méromorphie invoquée pour un opérateur, disons $A(\lambda)$, est entendue au sens faible, il s'agit de la méromorphie pour les fonctions $\lambda \mapsto A(\lambda)\Phi$, pour Φ dans un espace de Banach.

Soit $Z \in \mathcal{A}_G$. Pour $Q,\ R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on introduit la fonction méromorphe de $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{R,\mathbb{C}}$, à valeurs opérateurs,

$$\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu) = \sum_{S,s,t} \varepsilon_S^{G,T_S}(Z; s\lambda - t\mu)\mathbf{M}(t,\mu)^{-1}\mathbf{M}(s,\lambda),$$

où S parcourt les éléments de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ qui sont associés à Q, s parcourt les éléments de $\mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_S)$, et t parcourt les éléments de $\mathbf{W}(\mathfrak{a}_R,\mathfrak{a}_S)$. Notons que $\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)$ ne dépend que des images de λ dans $\mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_Q$ et de μ dans $\mathfrak{a}^*_{R,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_R$, et que l'on a $\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu) = 0$ si R et Q ne sont pas associés.

Le lemme 5.3.4 de [25] est vrai ici. Il entraîne la variante suivante de [25, lemme 5.3.5][5] : en posant $M = M_R$, le changement de variables $s \mapsto u = t^{-1}s$, $S \mapsto S' = t^{-1}S$ et $s\lambda - t\mu \mapsto \Lambda_u = u\lambda - \mu$, donne

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)\\
&\quad= \sum_{u\in\mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_R)} \sum_{S'\in\mathcal{P}(M)} e^{\langle\Lambda_u,Y_{S'}\rangle}\varepsilon_{S'}^{G,[T]_{S'}}(Z;\Lambda_u)\mathcal{M}(R,\mu;\Lambda_u,S')\mathbf{M}_{R|Q}(u,\lambda)\\
&\quad= \sum_{u\in\mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_R)} \mathcal{M}^{G,T}_{M,F}(Z,\mathfrak{Y};R,\mu;\Lambda_u)\mathbf{M}_{R|Q}(u,\lambda).
\end{aligned}$$

Puisque, pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_Q$, l'opérateur $\mathbf{M}_{R|Q}(u,\lambda)$ est une isométrie [25, théorème 5.2.2 (2)], on en déduit que la fonction à valeurs opérateurs

$$(\lambda,\mu) \mapsto \mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)$$

est lisse pour les valeurs imaginaires pures de λ et μ. L'opérateur

$$\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)$$

entrelace les représentation de $G(\mathbb{A})$ dans $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(X_Q)_\xi$ et $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(X_R)_{\xi'}$, où ξ et ξ' sont des caractères unitaires automorphes de $A_Q(\mathbb{A})$ et $A_R(\mathbb{A})$ respectivement, tels que pour un (i.e. pour tout) $u \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_R)$, on ait $\xi' = u\xi$.

Définition 5.3.2. On pose

$$[\mathbf{\Omega}]^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu) = |\widehat{\mathfrak{C}}_R|^{-1} \sum_{\nu\in\widehat{\mathfrak{C}}_R} \mathbf{D}_\nu\, \mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu+\nu).$$

La fonction à valeurs opérateurs $(\lambda,\mu) \mapsto [\mathbf{\Omega}]^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)$ est lisse pour les valeurs imaginaires pures de λ et μ.

[5] Dans l'énoncé de *loc. cit.*, M est la composante de Levi standard de Q.

5.4 Séries d'Eisenstein et troncature

Soit $M \in \mathcal{L}$. Pour $Z \in \mathcal{A}_G$ et $H \in \mathcal{A}_M$, on pose

$$\boldsymbol{X}_G(Z) = G(F)\backslash G(\mathbb{A}; Z), \quad \boldsymbol{X}_M(H) = M(F)\backslash M(\mathbb{A}; H)$$

et

$$\overline{\boldsymbol{X}}_M = A_M(\mathbb{A})M(F)\backslash M(\mathbb{A}).$$

Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, soient Φ et Ψ deux fonctions sur $\boldsymbol{X}_P$ qui se transforment à gauche suivant le même caractère unitaire automorphe de $A_M(\mathbb{A})$. On a défini un produit scalaire

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_P = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K}} \Phi(mk)\overline{\Psi(mk)}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k.$$

Lemme 5.4.1. *Pour $H \in \mathcal{A}_M$, on pose*

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{P,H} = \int_{\boldsymbol{X}_M(H) \times \boldsymbol{K}} \Phi(mk)\overline{\Psi(mk)}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k.$$

On a alors

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{P,H} = |\widehat{\mathbb{c}}_M|^{-1} \sum_{\nu \in \widehat{\mathbb{c}}_M} e^{-\langle \nu, H \rangle} \langle \mathbf{D}_\nu \Phi, \Psi \rangle_P.$$

Démonstration. On observe que puisque

$$\Phi(amk)\overline{\Psi(amk)} = \Phi(mk)\overline{\Psi(mk)}$$

pour tout $a \in A_M(\mathbb{A})$, le produit scalaire $\langle \Phi, \Psi \rangle_{P,H}$ ne dépend que de l'image de H dans $\mathbb{c}_M$. On conclut par transformée de Fourier sur le groupe fini $\mathbb{c}_M$. ∎

Soit $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(P(F)\backslash G(\mathbb{A}; Z))$. On pose, si la série converge,

$$E(x,\varphi) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \varphi(\gamma x).$$

Soit $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K})$, c'est-à-dire que ψ est une fonction localement intégrable sur $\boldsymbol{X}_M \times \boldsymbol{K}$ qui est invariante à gauche sous $A_M(\mathbb{A})$. On pose, si l'intégrale a un sens, pour $\nu \in \widehat{\mathbb{c}}_M$,

$$\widehat{\psi}(\nu) = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K}} e^{\langle \nu, \mathbf{H}_M(m) \rangle} \psi(m,k)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k.$$

Nous aurons besoin du calcul formel suivant.

Lemme 5.4.2. *Notons $\mathcal{A}_M(Z)$ l'image réciproque dans $\mathcal{A}_M$ de $Z \in \mathcal{A}_G$. Soit φ comme ci-dessus et supposons que*

$$\varphi_P(x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \varphi(ux)\,\mathrm{d}u$$

soit de la forme

$$\varphi_P(mk) = \boldsymbol{\delta}_P(m) e^{\langle \xi, \mathbf{H}_P(m)\rangle} \psi(m,k) \tag{5.3}$$

pour $m \in M(\mathbb{A})$, $k \in \boldsymbol{K}$, $\xi \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K})$. On a l'égalité suivante :

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} E(x,\varphi)\,\mathrm{d}x = |\widehat{\mathbb{c}}_M|^{-1} \sum_{\nu \in \widehat{\mathbb{c}}_M} \sum_{H \in \mathcal{A}_M(Z)} e^{\langle \xi - \nu, H\rangle} \widehat{\psi}(\nu).$$

Démonstration. Tout d'abord, il est classique d'observer que

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} E(x,\varphi)\,\mathrm{d}x = \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A};Z)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{P(F)U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A};Z)} \varphi_P(x)\,\mathrm{d}x.$$

La formule d'intégration (5.1) montre alors que

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} E(x,\varphi)\,\mathrm{d}x = \sum_{H \in \mathcal{A}_M(Z)} \int_{\boldsymbol{X}_M(H)\times \boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_P(m)^{-1} \varphi_P(mk)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k,$$

soit encore, compte tenu de l'hypothèse (5.3),

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} E(x,\varphi)\,\mathrm{d}x = \sum_{H \in \mathcal{A}_M(Z)} e^{\langle \xi, H\rangle} \int_{\boldsymbol{X}_M(H)\times \boldsymbol{K}} \psi(mk)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k,$$

et il suffit pour conclure d'observer que

$$\int_{\boldsymbol{X}_M(H)\times \boldsymbol{K}} \psi(mk)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k = |\widehat{\mathbb{c}}_M|^{-1} \sum_{\nu \in \widehat{\mathbb{c}}_M} e^{\langle -\nu, H\rangle} \widehat{\psi}(\nu). \qquad \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant établir l'analogue, dans notre cadre, de [25, théorème 5.4.3]. Soient Φ et Ψ des formes automorphes associées à des sous-groupes paraboliques standards, vérifiant les conditions suivantes :

Hypothèses 5.4.3. On suppose que :

(i) $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_Q)_\xi$ et $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_R)_{\xi'}$ pour des sous-groupes paraboliques associés Q, $R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, où ξ, resp. ξ', est un caractère unitaire automorphe de $A_Q(\mathbb{A})$, resp. de $A_R(\mathbb{A})$;

(ii) $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_Q$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{R,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_R$;

(iii) $\xi' = w\xi$ pour un (i.e. pour tout) $w \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)$.

Théorème 5.4.4. *Soit $Z \in \mathcal{A}_G$. Sous les hypothèses 5.4.3, on a les assertions suivantes :*

(i) *On suppose que Φ et Ψ sont cuspidales. On a l'égalité entre fonctions méromorphes de λ et μ :*

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} \boldsymbol{\Lambda}^T E(x,\Phi,\lambda)\overline{E(x,\Psi,-\bar{\mu})}\,\mathrm{d}x = \langle [\boldsymbol{\Omega}]^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)\Phi,\Psi\rangle_R.$$

(ii) *On suppose que Φ et Ψ sont discrètes mais non nécessairement cuspidales. Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_Q$ et tout $\mu \in \boldsymbol{\mu}_R$, on ait :*

$$\left|\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} \boldsymbol{\Lambda}^T E(x,\Phi,\lambda)\overline{E(x,\Psi,-\bar{\mu})}\,\mathrm{d}x - \langle [\boldsymbol{\Omega}]^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)\Phi,\Psi\rangle_R\right| \ll e^{-c\boldsymbol{d}_0(T)}.$$

Démonstration. Prouvons (i). Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}$ dans le domaine de convergence de la série d'Eisenstein $E(x,\Phi,\lambda)$, et puisque Φ est cuspidale, on a ([25, proposition 5.4.1])

$$\boldsymbol{\Lambda}^T E(x,\Phi,\lambda) = \sum_{S,s,\gamma} (-1)^{a(s)} \phi_{M,s}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(\gamma x) - T))(\mathbf{M}(s,\lambda)(\gamma x, s\lambda)),$$

où la somme porte sur les $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ associés à Q, $s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_S)$, $\gamma \in S(F)\backslash G(F)$, et $M = M_Q$. On déduit du lemme 5.4.2 que pour λ dans le domaine de convergence de $E(x,\Phi,\lambda)$, et $-\bar{\mu}$ dans celui de $E(x,\Psi,-\bar{\mu})$, l'intégrale de (i) est égale à

$$\sum_{S,s} \int_{\boldsymbol{X}_S(Z)} (-1)^{a(s)} \phi_{M,s}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(x) - T))\mathbf{A}(x,s)\,\mathrm{d}x \tag{5.4}$$

avec

$$\boldsymbol{X}_S(Z) = S(F)U_S(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A};Z)$$

($\boldsymbol{X}_S(Z)$ est l'image de $\left(\coprod_{H\in\mathcal{A}_M(Z)} \boldsymbol{X}_M(H)\right) \times \boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{X}_S$), et

$$\mathbf{A}(x,s) = (\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi)(x,s\lambda)\Pi_S\overline{E(x,\Psi,-\bar{\mu})},$$

où $\Pi_S E$ est le terme constant de E le long de S. Notons que $\phi_{M,s}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(x) - T))$ ne dépend que de l'image $(\mathbf{H}_S(x)^G - T_S^G)$ de $(\mathbf{H}_0(x) - T)$ dans $\mathfrak{a}_S^G$. D'après [25, théorème 5.2.2 (5)], on a

$$\mathbf{A}(x,s) = \sum_{t\in\mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_R,\mathfrak{a}_S)} e^{\langle s\lambda - t\mu + 2\rho_S, \mathbf{H}_S(x)\rangle}(\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi)(x)\overline{(\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi)(x)}.$$

La fonction $\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi$ appartient à $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(X_S)_{s\xi}$ et la fonction $\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi$ appartient à $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(X_S)_{t\xi'}$. Il résulte des lemmes 5.4.1 et 5.4.2 que l'expression (5.4) est égale à la somme sur S, s et t de

$$|\widehat{\mathbb{C}}_S|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathbb{C}}_S}\sum_{H\in\mathcal{A}_S(Z)}(-1)^{a(s)}\phi_{M,s}(H-T_S)e^{\langle s\lambda-t\mu-\nu,H\rangle}\langle\mathbf{D}_\nu\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi\rangle_S.$$

Fixons un triplet (S,s,t) comme ci-dessus. En tenant compte du lemme 1.6.5 on a pour λ assez régulier et μ fixé,

$$\sum_{H\in\mathcal{A}_S(Z)}(-1)^{a(s)}\phi_{M,s}(H-T_S)e^{\langle s\lambda-t\mu-\nu,H\rangle}=\varepsilon_S^{G,T_S}(Z;s\lambda-t\mu-\nu).$$

On obtient que l'expression (5.4) est égale à la somme sur S, s et t, de

$$|\widehat{\mathbb{C}}_S|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathbb{C}}_S}\varepsilon_S^{G,T_S}(Z;s\lambda-t\mu-\nu)\langle\mathbf{D}_\nu\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi\rangle_S, \tag{5.5}$$

soit encore

$$|\widehat{\mathbb{C}}_R|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathbb{C}}_R}\varepsilon_S^{G,T_S}(Z;s\lambda-t(\mu+\nu))\langle\mathbf{D}_{t\nu}\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi\rangle_S, \tag{5.6}$$

et, grâce à l'équation fonctionnelle du lemme 5.2.2, on obtient que (5.6) est égal à

$$|\widehat{\mathbb{C}}_R|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathbb{C}}_R}\varepsilon_S^{G,T_S}(Z;s\lambda-t(\mu+\nu))\langle\mathbf{D}_\nu\mathbf{M}(t,-(\mu+\nu))^{-1}\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\Psi\rangle_R. \tag{5.7}$$

On voit apparaître la (G,M)-famille spectrale à valeurs opérateurs pour $M=M_R$ et l'intégrale de (i) est donc égale à

$$|\widehat{\mathbb{C}}_R|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathbb{C}}_R}\langle\mathbf{D}_\nu\boldsymbol{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu+\nu)\Phi,\Psi\rangle_R.$$

L'assertion (i) en résulte. Le cas général (ii), dans le cas des corps de nombres, est dû à Arthur [3]. La preuve consiste à se ramener au cas cuspidal, c'est-à-dire à la formule de Langlands [25, théorème 5.4.2 (i)]. Dans le cas des corps de fonctions, on prouve, de la même manière, (ii) à partir de (i). Notons qu'ici les groupes $\boldsymbol{\mu}_Q$ et $\boldsymbol{\mu}_R$ sont compacts, d'où la borne uniforme en λ et μ. ∎

Sous les hypothèses 5.4.3 (i) et 5.4.3 (ii), pour que l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)}\boldsymbol{\Lambda}^T E(x,\Phi,\lambda)\overline{E(x,\Psi,-\bar{\mu})}\,\mathrm{d}x$$

soit non nulle, il faut que $w\xi$ et ξ' coïncident sur $A_R(F)\backslash A_R(\mathbb{A})^1$ pour un (et donc pour tout) $w \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)$. Cette condition équivaut à l'existence d'un $\tau \in \boldsymbol{\mu}_R$, tel que

$$(w\xi) \star \tau = \xi'.$$

Son image dans $\widehat{\mathcal{B}}_R$ est uniquement déterminée.

Proposition 5.4.5. *Notons $\mathcal{E}(\xi, \xi')$ l'ensemble des $\tau \in \boldsymbol{\mu}_R$ vérifiant l'équation*

$$(w\xi) \star \tau = \xi',$$

pour un $w \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)$. S'il est non vide, c'est un espace principal homogène sous $\widehat{\mathcal{C}}_R$, indépendant du choix de w. Sous les hypothèses 5.4.3 (i) *et* 5.4.3 (ii)*, le théorème* 5.4.4 *reste vrai sans l'hypothèse* 5.4.3 (iii)*, à condition de remplacer $[\boldsymbol{\Omega}]^T_{R|Q}(Z; \lambda, \mu)$ par l'opérateur*

$$[\boldsymbol{\Omega}]^T_{R|Q}(Z, \xi, \xi'; \lambda, \mu) \overset{\text{déf}}{=} |\widehat{\mathcal{C}}_R|^{-1} \sum_{\nu \in \mathcal{E}(\xi, \xi')} \mathbf{D}_\nu \, \boldsymbol{\Omega}^T_{R|Q}(Z; \lambda, \mu + \nu).$$

Par convention, $[\boldsymbol{\Omega}]^T_{R|Q}(Z, \xi, \xi'; \lambda, \mu) = 0$ si $\mathcal{E}(\xi, \xi')$ est vide. Si $(\lambda - \mu - \nu) \in \widehat{\mathcal{C}}_G$ pour $\nu \in \mathcal{E}(\xi, \xi')$, chacun des membres de l'égalité ne dépend que de l'image de Z dans $\mathfrak{c}_G$.

Démonstration. Il suffit d'observer que $E(x, \mathbf{D}_\nu \Psi, \mu) = E(x, \Psi, \mu + \nu)$. ∎