

## Chapitre 5

# Formes automorphes et produits scalaires

### 5.1 Formes automorphes

On fixe une mesure de Haar  $dg$  sur  $G(\mathbb{A})$ . On note  $dk$  la mesure de Haar sur  $\mathbf{K}$ , telle que  $\text{vol}(\mathbf{K}) = 1$ . Pour  $P \in \mathcal{P}$ , on note  $du_P$ , ou simplement  $du$ , la mesure de Tamagawa sur  $U_P(\mathbb{A})$ . Par quotient par la mesure de comptage sur  $U_P(F)$ , on obtient une mesure sur  $U_P(F) \backslash U_P(\mathbb{A})$  qui vérifie

$$\text{vol}(U_P(F) \backslash U_P(\mathbb{A})) = 1.$$

Posons  $M = M_P$ . La mesure de Haar  $dm$  sur  $M(\mathbb{A})$  est choisie de sorte que l'on ait la formule d'intégration

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(g) dg = \int_{U_P(\mathbb{A}) \times M(\mathbb{A}) \times \mathbf{K}} f(umk) e^{-\langle 2\rho_P, \mathbf{H}_P(m) \rangle} du dm dk,$$

où  $\rho_P$  désigne la demi-somme des racines positives de  $A_P$ . La fonction

$$m \mapsto \delta_P(m) = e^{\langle 2\rho_P, \mathbf{H}_P(m) \rangle}$$

est le module de  $P(\mathbb{A})$  :

$$d(mum^{-1}) = \delta_P(m) du.$$

On pose<sup>1</sup>

$$X_P = P(F)U_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) \quad \text{et} \quad \overline{X}_P = A_P(\mathbb{A})P(F)U_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}).$$

En particulier

$$X_G = G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \quad \text{et} \quad \overline{X}_G = A_G(\mathbb{A})G(F) \backslash G(\mathbb{A}).$$

Les groupes  $G(\mathbb{A})$  et  $P(F)U_P(\mathbb{A})$  sont unimodulaires ; on dispose donc d'une mesure quotient invariante à droite sur  $X_P$ . Pour  $\phi$  localement intégrable et à support compact sur  $X_P$ , on a la formule d'intégration :

$$(5.1) \quad \int_{X_P} \phi(x) dx = \int_{X_M \times \mathbf{K}} \delta_P(m)^{-1} \phi(mk) dm dk,$$

---

<sup>1</sup>On prendra garde à ce que l'espace noté ici  $X_G$  ne coïncide pas avec l'espace ainsi noté dans [25], car dans cette référence il y a, en plus, un quotient par  $\mathfrak{B}_G$ . Son usage correspond plutôt à celui de notre  $\overline{X}_G$ , sans toutefois lui être égal.

où  $dx$  est la mesure quotient. Par contre, si  $P \neq G$ , il n'y a pas de mesure  $G(\mathbb{A})$ -invariante à droite sur  $\overline{X}_P$ . Toutefois, il existe une fonctionnelle invariante à droite  $r_{\overline{X}_P}$  sur l'espace des sections du fibré en droites sur  $\overline{X}_P$ , défini par  $\delta_P$ . Ces sections sont représentables par les fonctions sur  $X_P$ , vérifiant

$$\phi(px) = \delta_P(p)\phi(x) \quad \text{pour } p \in A_P(\mathbb{A})P(F)U_P(\mathbb{A}).$$

La fonctionnelle est définie par :

$$r_{\overline{X}_P}(\phi) = \int_{\overline{X}_M \times \mathbf{K}} \delta_P(m)^{-1} \phi(mk) dm dk,$$

où  $dm$  est la mesure quotient.

Rappelons que l'on a noté  $\Xi(P)$  le groupe des caractères unitaires de  $A_P(\mathbb{A})$  qui sont triviaux sur  $A_P(F)$ . Soit  $\xi \in \Xi(P)$ . On dit qu'une fonction  $\varphi$  sur  $X_P$  « se transforme à gauche suivant  $\xi$  », si pour tout  $x \in G(\mathbb{A})$  on a

$$\varphi(ax) = \xi(a)\varphi(x) \quad \text{pour } a \in A_P(\mathbb{A}).$$

On note  $L^2(X_M)_\xi$  l'espace de Hilbert formé des fonctions  $\varphi$  sur  $X_M$  qui se transforment à gauche suivant  $\xi$  et sont de carré intégrable sur  $\overline{X}_M$ . Le groupe  $M(\mathbb{A})$  agit sur  $L^2(X_M)_\xi$  par translations à droite. Considérons deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  localement intégrables sur  $X_P$  qui se transforment à gauche suivant le même caractère  $\xi \in \Xi(P)$ . On pose (si l'intégrale converge)

$$(5.2) \quad \langle \varphi, \psi \rangle_P = \int_{\overline{X}_M \times \mathbf{K}} \varphi(mk) \overline{\psi(mk)} dm dk.$$

Ce produit scalaire définit l'espace de Hilbert  $L^2(X_P)_\xi$ , siège de la représentation unitaire « induite parabolique »

$$\text{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})} L^2(X_M)_\xi,$$

définie par

$$(\rho(y)\varphi)(x) = \delta_P^{-1/2}(x)\delta_P^{1/2}(xy)\varphi(xy).$$

Pour la notion générale de forme automorphe, nous renvoyons le lecteur à [32, sous-section I.2.17]. Soit  $M \in \mathcal{L}$ . Un caractère de  $A_M(\mathbb{A})$  est automorphe, s'il est trivial sur  $A_M(F)$ . Ainsi  $\Xi(M)$  est le groupe des caractères unitaires automorphes de  $A_M(\mathbb{A})$ . Pour  $P \in \mathcal{P}(M)$ , une forme automorphe  $\varphi$  sur  $X_P$  est une fonction  $\mathbf{K}$ -finie à droite telle que la fonction  $m \mapsto \varphi(mx)$  sur  $X_M$  est automorphe. Elle est dite cuspidale, si pour tout  $Q \in \mathcal{P}$  tel que  $Q \subsetneq P$ , le terme constant  $\varphi_Q$  est nul – ou, ce qui revient au même, si pour tout  $x$ , la fonction  $m \mapsto \varphi(mx)$  sur  $X_M$  est cuspidale. Notons  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_P)$  l'espace des formes automorphes cuspidales sur  $X_P$ . Pour  $\xi \in \Xi(P)$ , notons

$$\mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_P)_\xi \subset \mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_P),$$

le sous-espace formé des fonctions qui se transforment à gauche suivant  $\xi$ .

**Définition 5.1.1.** Soit  $P \in \mathcal{P}(M)$ . On appelle *représentation automorphe discrète modulo le centre* – ou simplement *discrète* – de  $M(\mathbb{A})$ , une sous-représentation irréductible de  $M(\mathbb{A})$  dans l'espace  $L^2(X_M)_\xi$  pour un  $\xi \in \Xi(M)$ . On note  $L^2_{\text{disc}}(X_M)_\xi$  le sous-espace fermé de  $L^2(X_M)_\xi$  engendré par ces représentations.

On appelle *forme automorphe discrète pour  $P$*  une fonction  $\mathbf{K}$ -finie sur  $X_P$  telle que, pour tout  $x$ , la fonction  $m \mapsto \varphi(mx)$  sur  $M(\mathbb{A})$  soit un vecteur d'une représentation automorphe discrète modulo le centre de  $M$ .

Une représentation automorphe irréductible de  $M(\mathbb{A})$  est discrète modulo le centre si et seulement si sa restriction à  $M(\mathbb{A})^1$  est une somme finie de représentations irréductibles dans

$$L^2(M(F) \backslash M(\mathbb{A})^1).$$

Pour  $\xi \in \Xi(P)$ , on note  $\mathcal{A}_{\text{disc}}(X_P)_\xi$  l'espace engendré par les formes automorphes discrètes qui se transforment à gauche suivant  $\xi$  sur  $X_P$ . Le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$  munit  $\mathcal{A}_{\text{disc}}(X_P)_\xi$  d'une structure d'espace pré-hilbertien. On sait (grâce à la proposition 4.2.1 pour les corps de fonctions) que

$$\mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_P)_\xi \subset \mathcal{A}_{\text{disc}}(X_P)_\xi.$$

Ainsi,  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_P)_\xi$  est lui aussi muni d'une structure d'espace pré-hilbertien.

## 5.2 Opérateurs d'entrelacement et séries d'Eisenstein

Soient  $P, Q \in \mathcal{P}$  deux sous-groupes parabolique associés, i.e. tels que  $M_P$  et  $M_Q$  soient conjugués dans  $G(F)$ . Considérons une fonction  $\Phi$  lisse sur  $X_P$  se transformant à gauche suivant un caractère unitaire automorphe  $\xi$  de  $A_M(\mathbb{A})$ . Pour  $\lambda \in \alpha_{P, \mathbb{C}}^*$  et  $x \in G(\mathbb{A})$ , posons

$$\Phi(x, \lambda) = e^{(\lambda + \rho_P, \mathbf{H}_P(x))} \Phi(x).$$

La fonction  $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$  ne dépend que de l'image de  $\lambda$  dans  $\alpha_{P, \mathbb{C}}^* / \mathcal{A}_P^\vee$ . Pour  $s \in \mathbf{W}(\alpha_P, \alpha_Q)$  et pour  $\lambda \in \alpha_{P, \mathbb{C}}^*$  « assez régulier »<sup>2</sup> dans la chambre associée à  $P$  dans  $\alpha_{P, \mathbb{C}}^*$ , on a une expression définie par une intégrale convergente :

$$(\mathbf{M}_{Q|P}(s, \lambda)\Phi)(x, s\lambda) = \int_{U_{s, P, Q}(\mathbb{A})} \Phi(w_s^{-1}nx, \lambda) dn,$$

<sup>2</sup>En notant  $\mathcal{R}_P$  l'ensemble des racines de  $A_P$  dans  $P$ , on demande ici l'inégalité stricte  $\langle \check{\alpha}, \Re \lambda - \rho_P \rangle > 0$ , pour toute racine  $\alpha \in \mathcal{R}_P$  telle que  $s\alpha \in -\mathcal{R}_Q$ .

où l'on a posé

$$U_{s,P,Q} = (U_Q \cap w_s U_P w_s^{-1}) \backslash U_Q.$$

On obtient ainsi un opérateur

$$\mathbf{M}_{Q|P}(s, \lambda) : \mathcal{A}_{\text{disc}}(X_P)_\xi \rightarrow \mathcal{A}_{\text{disc}}(X_Q)_{s\xi}.$$

Pour  $P$  et  $Q$  standards et  $P$  fixé,  $Q$  est déterminé par  $s$ , et l'on pose

$$\mathbf{M}(s, \lambda) = \mathbf{M}_{Q|P}(s, \lambda).$$

Pour  $s = 1$ , on écrira

$$\mathbf{M}_{Q|P}(\lambda) = \mathbf{M}_{Q|P}(1, \lambda).$$

Dans le cas particulier où  $Q = s(P)$ , on a (cf. [25, lemme 5.2.1]) :

$$\mathbf{M}_{s(P)|P}(s, \lambda) = e^{(\lambda + \rho_P, Y_s)} s, \quad \text{où} \quad Y_s = \mathbf{H}_0(w_s^{-1}) = T_0 - s^{-1}T_0$$

et

$$s : \mathcal{A}_{\text{disc}}(X_P)_\xi \rightarrow \mathcal{A}_{\text{disc}}(X_Q)_{s\xi} \quad \text{est défini par} \quad s\Phi(x) = \Phi(w_s^{-1}x).$$

**Définition 5.2.1.** Pour  $\mu \in \mu_P$ , on pose

$$\varphi_\mu(x) = e^{(\mu, \mathbf{H}_P(x))} \varphi(x),$$

et on note  $\mathbf{D}_\mu$  l'opérateur  $\varphi \mapsto \varphi_\mu$ , i.e.  $\mathbf{D}_\mu \varphi = \varphi_\mu$ .

**Lemme 5.2.2.** Pour  $P, Q \in \mathcal{P}$  associés,  $s \in \mathbf{W}(\alpha_P, \alpha_Q)$ ,  $\mu \in \mu_P$  et  $\lambda \in \alpha_{P,\mathbb{C}}^*$  assez régulier, l'opérateur  $\mathbf{D}_\mu$  vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\mathbf{M}_{Q|P}(s, \lambda) \mathbf{D}_\mu = \mathbf{D}_{s\mu} \mathbf{M}_{Q|P}(s, \lambda + \mu).$$

*Démonstration.* Il suffit d'observer que  $(\mathbf{D}_\mu \Phi)(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda + \mu)$ . ■

Soient  $P, Q \in \mathcal{P}$  tels que  $P \subset Q$ . Pour  $\Phi \in \mathcal{A}_{\text{disc}}(X_P)_\xi$  et  $\lambda \in \alpha_{P,\mathbb{C}}^*$  assez régulier, on définit une série d'Eisenstein sur  $X_Q$ , par la formule :

$$E^Q(x, \Phi, \lambda) = \sum_{\gamma \in P(F) \backslash Q(F)} \Phi(\gamma x, \lambda).$$

Pour  $Q = G$ , on pose  $E(\cdot, \Phi, \lambda) = E^G(\cdot, \Phi, \lambda)$ . Le théorème 5.2.2 de [25] est vrai ici (*mutatis mutandis*)<sup>3</sup> : pour  $\Phi \in \mathcal{A}_{\text{disc}}(X_P)_\xi$  et  $x \in X_Q$ , les fonctions

$$\lambda \mapsto (\mathbf{M}_{Q|P}(s, \lambda)\Phi)(x) \quad \text{et} \quad \lambda \mapsto E(x, \Phi, \lambda)$$

admettent un prolongement méromorphe définissant des fonctions rationnelles sur le cylindre  $\alpha_{P,\mathbb{C}}^*/A_P^\vee = \text{Hom}(A_P, \mathbb{C}^\times)$ .

<sup>3</sup>Les propriétés de rationalité dans le cas cuspidal sont établies dans [32, section IV.4]. Le cas général est traité dans [32, appendice II].

### 5.3 La $(G, M)$ -famille spectrale

Soient  $M \in \mathcal{L}$ ,  $P \in \mathcal{P}(M)$  et  $\lambda \in \alpha_{P, \mathbb{C}}^*$ . On définit une  $(G, M)$ -famille périodique à valeurs opérateurs [25, corollaire 5.3.2] : pour  $Q \in \mathcal{P}(M)$  et  $\Lambda \in \widehat{\alpha}_M$ , on pose

$$\mathcal{M}(P, \lambda; \Lambda, Q) = \mathbf{M}_{Q|P}(\lambda)^{-1} \mathbf{M}_{Q|P}(\lambda + \Lambda).$$

Soit  $T \in \alpha_0$ . Rappelons que l'on a défini en section 3.2 une famille  $M_0$ -orthogonale, qui est rationnelle si  $T \in \alpha_{0, \mathbb{Q}}$  :

$$\mathfrak{Y}(T) = (Y_{T, P}),$$

où, pour  $P \in \mathcal{P}(M_0)$ , on a posé

$$Y_{T, P} = [T]_P + Y_P, \quad \text{et} \quad Y_P = T_0 - [T_0]_P.$$

Suivant la convention habituelle, pour  $Q \in \mathcal{P}$  et  $P \in \mathcal{P}(M_0)$  tels que  $P \subset Q$ , on pose  $Y_{T, Q} = (Y_{T, P})_Q$  et  $Y_Q = (Y_P)_Q$ . Rappelons que pour  $P \in \mathcal{P}(M_0)$ , l'élément  $Y_P$  appartient à  $\mathcal{A}_0$ . En particulier, la famille  $M_0$ -orthogonale  $(Y_P)$  est entière. On peut donc définir une autre  $(G, M)$ -famille périodique à valeurs opérateurs : pour  $Q \in \mathcal{P}(M)$  et  $\Lambda \in \widehat{\alpha}_M$ , on pose

$$\mathcal{M}(\mathfrak{Y}; P, \lambda; \Lambda, Q) = e^{\langle \Lambda, Y_Q \rangle} \mathcal{M}(P, \lambda; \Lambda, Q).$$

Le lemme suivant résulte de la proposition 1.6.8 :

**Lemme 5.3.1.** *Fixons un élément  $Z \in A_G$ . Les fonctions méromorphes de  $\lambda$  et  $\Lambda$  à valeurs opérateurs<sup>4</sup>*

$$\mathcal{M}_{M, F}^{G, T}(Z, \mathfrak{Y}; P, \lambda; \Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(M)} \varepsilon_Q^{G, [T]_Q}(Z; \Lambda) \mathcal{M}(\mathfrak{Y}; P, \lambda; \Lambda, Q)$$

sont lisses pour les valeurs imaginaires pures de  $\lambda$  et  $\Lambda$ .

Observons que l'expression  $\mathcal{M}_{M, F}^{G, T}(Z, \mathfrak{Y}; P, \lambda; \Lambda)$  est égale à

$$\mathcal{M}_{M, F}^{G, T}(Z; P, \lambda; \Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(M)} \varepsilon_Q^{G, [T]_Q}(Z; \Lambda) \mathcal{M}(P, \lambda; \Lambda, Q)$$

si  $\mathfrak{Y} = 0$ , et donc, par exemple, si  $G$  est déployé.

---

<sup>4</sup>La notion de méromorphie invoquée pour un opérateur, disons  $A(\lambda)$ , est entendue au sens faible, il s'agit de la méromorphie pour les fonctions  $\lambda \mapsto A(\lambda)\Phi$ , pour  $\Phi$  dans un espace de Banach.

Soit  $Z \in \mathcal{A}_G$ . Pour  $Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ , on introduit la fonction méromorphe de  $\lambda \in \mathfrak{a}_{Q, \mathbb{C}}^*$  et  $\mu \in \mathfrak{a}_{R, \mathbb{C}}^*$ , à valeurs opérateurs,

$$\Omega_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu) = \sum_{S, s, t} \varepsilon_S^{G, T_S}(Z; s\lambda - t\mu) \mathbf{M}(t, \mu)^{-1} \mathbf{M}(s, \lambda),$$

où  $S$  parcourt les éléments de  $\mathcal{P}_{\text{st}}$  qui sont associés à  $Q$ ,  $s$  parcourt les éléments de  $\mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_S)$ , et  $t$  parcourt les éléments de  $\mathbf{W}(\mathfrak{a}_R, \mathfrak{a}_S)$ . Notons que  $\Omega_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu)$  ne dépend que des images de  $\lambda$  dans  $\mathfrak{a}_{Q, \mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_Q^\vee$  et de  $\mu$  dans  $\mathfrak{a}_{R, \mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_R^\vee$ , et que l'on a  $\Omega_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu) = 0$  si  $R$  et  $Q$  ne sont pas associés.

Le lemme 5.3.4 de [25] est vrai ici. Il entraîne la variante suivante de [25, lemme 5.3.5]<sup>5</sup> : en posant  $M = M_R$ , le changement de variables  $s \mapsto u = t^{-1}s$ ,  $S \mapsto S' = t^{-1}S$  et  $s\lambda - t\mu \mapsto \Lambda_u = u\lambda - \mu$ , donne

$$\begin{aligned} \Omega_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu) &= \sum_{u \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)} \sum_{S' \in \mathcal{P}(M)} e^{\langle \Lambda_u, Y_{S'} \rangle} \varepsilon_{S'}^{G, [T]S'}(Z; \Lambda_u) \mathcal{M}(R, \mu; \Lambda_u, S') \mathbf{M}_{R|Q}(u, \lambda) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)} \mathcal{M}_{M, F}^{G, T}(Z, \mathfrak{Y}; R, \mu; \Lambda_u) \mathbf{M}_{R|Q}(u, \lambda). \end{aligned}$$

Puisque, pour  $\lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_Q$ , l'opérateur  $\mathbf{M}_{R|Q}(u, \lambda)$  est une isométrie [25, théorème 5.2.2 (2)], on en déduit que la fonction à valeurs opérateurs

$$(\lambda, \mu) \mapsto \Omega_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu)$$

est lisse pour les valeurs imaginaires pures de  $\lambda$  et  $\mu$ . L'opérateur

$$\Omega_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu)$$

entrelace les représentation de  $G(\mathbb{A})$  dans  $\mathcal{A}_{\text{disc}}(X_Q)_\xi$  et  $\mathcal{A}_{\text{disc}}(X_R)_{\xi'}$ , où  $\xi$  et  $\xi'$  sont des caractères unitaires automorphes de  $A_Q(\mathbb{A})$  et  $A_R(\mathbb{A})$  respectivement, tels que pour un (i.e. pour tout)  $u \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)$ , on ait  $\xi' = u\xi$ .

**Définition 5.3.2.** On pose

$$[\Omega]_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu) = |\widehat{\mathfrak{c}}_R|^{-1} \sum_{v \in \widehat{\mathfrak{c}}_R} \mathbf{D}_v \Omega_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu + v).$$

La fonction à valeurs opérateurs  $(\lambda, \mu) \mapsto [\Omega]_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu)$  est lisse pour les valeurs imaginaires pures de  $\lambda$  et  $\mu$ .

<sup>5</sup>Dans l'énoncé de *loc. cit.*,  $M$  est la composante de Levi standard de  $Q$ .

## 5.4 Séries d'Eisenstein et troncature

Soit  $M \in \mathcal{L}$ . Pour  $Z \in \mathcal{A}_G$  et  $H \in \mathcal{A}_M$ , on pose

$$X_G(Z) = G(F) \backslash G(\mathbb{A}; Z), \quad X_M(H) = M(F) \backslash M(\mathbb{A}; H)$$

et

$$\overline{X}_M = A_M(\mathbb{A})M(F) \backslash M(\mathbb{A}).$$

Pour  $P \in \mathcal{P}(M)$ , soient  $\Phi$  et  $\Psi$  deux fonctions sur  $X_P$  qui se transforment à gauche suivant le même caractère unitaire automorphe de  $A_M(\mathbb{A})$ . On a défini un produit scalaire

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_P = \int_{\overline{X}_M \times \mathbf{K}} \Phi(mk) \overline{\Psi(mk)} dm dk.$$

**Lemme 5.4.1.** *Pour  $H \in \mathcal{A}_M$ , on pose*

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{P,H} = \int_{X_M(H) \times \mathbf{K}} \Phi(mk) \overline{\Psi(mk)} dm dk.$$

*On a alors*

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{P,H} = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1} \sum_{\nu \in \widehat{\mathfrak{c}}_M} e^{-\langle \nu, H \rangle} \langle \mathbf{D}_\nu \Phi, \Psi \rangle_P.$$

*Démonstration.* On observe que puisque

$$\Phi(amk) \overline{\Psi(amk)} = \Phi(mk) \overline{\Psi(mk)}$$

pour tout  $a \in A_M(\mathbb{A})$ , le produit scalaire  $\langle \Phi, \Psi \rangle_{P,H}$  ne dépend que de l'image de  $H$  dans  $\mathfrak{c}_M$ . On conclut par transformée de Fourier sur le groupe fini  $\mathfrak{c}_M$ . ■

Soit  $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(P(F) \backslash G(\mathbb{A}; Z))$ . On pose, si la série converge,

$$E(x, \varphi) = \sum_{\gamma \in P(F) \backslash G(F)} \varphi(\gamma x).$$

Soit  $\psi \in L^1_{\text{loc}}(\overline{X}_M \times \mathbf{K})$ , c'est-à-dire que  $\psi$  est une fonction localement intégrable sur  $\overline{X}_M \times \mathbf{K}$  qui est invariante à gauche sous  $A_M(\mathbb{A})$ . On pose, si l'intégrale a un sens, pour  $\nu \in \widehat{\mathfrak{c}}_M$ ,

$$\widehat{\psi}(\nu) = \int_{\overline{X}_M \times \mathbf{K}} e^{\langle \nu, \mathbf{H}_M(m) \rangle} \psi(m, k) dm dk.$$

Nous aurons besoin du calcul formel suivant.

**Lemme 5.4.2.** Notons  $\mathcal{A}_M(Z)$  l'image réciproque dans  $\mathcal{A}_M$  de  $Z \in \mathcal{A}_G$ . Soit  $\varphi$  comme ci-dessus et supposons que

$$\varphi_P(x) = \int_{U_P(F) \backslash U_P(\mathbb{A})} \varphi(ux) du$$

soit de la forme

$$(5.3) \quad \varphi_P(mk) = \delta_P(m) e^{(\xi, \mathbf{H}_P(m))} \psi(m, k)$$

pour  $m \in M(\mathbb{A})$ ,  $k \in \mathbf{K}$ ,  $\xi \in \mu_M$  et  $\psi \in L^1_{\text{loc}}(\overline{X}_M \times \mathbf{K})$ . On a l'égalité suivante :

$$\int_{X_G(Z)} E(x, \varphi) dx = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1} \sum_{v \in \widehat{\mathfrak{c}}_M} \sum_{H \in \mathcal{A}_M(Z)} e^{(\xi - v, H)} \widehat{\psi}(v).$$

*Démonstration.* Tout d'abord, il est classique d'observer que

$$\int_{X_G(Z)} E(x, \varphi) dx = \int_{P(F) \backslash G(\mathbb{A}; Z)} \varphi(x) dx = \int_{P(F)U_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}; Z)} \varphi_P(x) dx.$$

La formule d'intégration (5.1) montre alors que

$$\int_{X_G(Z)} E(x, \varphi) dx = \sum_{H \in \mathcal{A}_M(Z)} \int_{X_M(H) \times \mathbf{K}} \delta_P(m)^{-1} \varphi_P(mk) dm dk,$$

soit encore, compte tenu de l'hypothèse (5.3),

$$\int_{X_G(Z)} E(x, \varphi) dx = \sum_{H \in \mathcal{A}_M(Z)} e^{(\xi, H)} \int_{X_M(H) \times \mathbf{K}} \psi(mk) dm dk,$$

et il suffit pour conclure d'observer que

$$\int_{X_M(H) \times \mathbf{K}} \psi(mk) dm dk = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1} \sum_{v \in \widehat{\mathfrak{c}}_M} e^{(-v, H)} \widehat{\psi}(v). \quad \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant établir l'analogie, dans notre cadre, de [25, théorème 5.4.3]. Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  des formes automorphes associées à des sous-groupes paraboliques standards, vérifiant les conditions suivantes :

**Hypothèses 5.4.3.** On suppose que :

- (i)  $\Phi \in \mathcal{A}_{\text{disc}}(X_Q)_\xi$  et  $\Psi \in \mathcal{A}_{\text{disc}}(X_R)_{\xi'}$  pour des sous-groupes paraboliques associés  $Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ , où  $\xi$ , resp.  $\xi'$ , est un caractère unitaire automorphe de  $A_Q(\mathbb{A})$ , resp. de  $A_R(\mathbb{A})$ ;
- (ii)  $\lambda \in \alpha_{Q, \mathbb{C}}^* / \mathcal{A}_Q^\vee$  et  $\mu \in \alpha_{R, \mathbb{C}}^* / \mathcal{A}_R^\vee$ ;
- (iii)  $\xi' = w\xi$  pour un (i.e. pour tout)  $w \in \mathbf{W}(\alpha_Q, \alpha_R)$ .



**Théorème 5.4.4.** Soit  $Z \in \mathcal{A}_G$ . Sous les hypothèses 5.4.3, on a les assertions suivantes :

- (i) On suppose que  $\Phi$  et  $\Psi$  sont cuspidales. On a l'égalité entre fonctions méromorphes de  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\int_{X_G(Z)} \mathbf{\Lambda}^T E(x, \Phi, \lambda) \overline{E(x, \Psi, -\bar{\mu})} dx = \langle [\mathbf{\Omega}]_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu) \Phi, \Psi \rangle_R.$$

- (ii) On suppose que  $\Phi$  et  $\Psi$  sont discrètes mais non nécessairement cuspidales. Il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $\lambda \in \mu_Q$  et tout  $\mu \in \mu_R$ , on ait :

$$\left| \int_{X_G(Z)} \mathbf{\Lambda}^T E(x, \Phi, \lambda) \overline{E(x, \Psi, -\bar{\mu})} dx - \langle [\mathbf{\Omega}]_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu) \Phi, \Psi \rangle_R \right| \ll e^{-cd_0(T)}.$$

*Démonstration.* Prouvons (i). Pour  $\lambda \in \alpha_{Q, \mathbb{C}}^*$  dans le domaine de convergence de la série d'Eisenstein  $E(x, \Phi, \lambda)$ , et puisque  $\Phi$  est cuspidale, on a ([25, proposition 5.4.1])

$$\mathbf{\Lambda}^T E(x, \Phi, \lambda) = \sum_{S, s, \gamma} (-1)^{a(s)} \phi_{M, s}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(\gamma x) - T)) (\mathbf{M}(s, \lambda)(\gamma x, s\lambda)),$$

où la somme porte sur les  $S \in \mathcal{P}_{\text{st}}$  associés à  $Q$ ,  $s \in \mathbf{W}(\alpha_Q, \alpha_S)$ ,  $\gamma \in S(F) \backslash G(F)$ , et  $M = M_Q$ . On déduit du lemme 5.4.2 que pour  $\lambda$  dans le domaine de convergence de  $E(x, \Phi, \lambda)$ , et  $-\bar{\mu}$  dans celui de  $E(x, \Psi, -\bar{\mu})$ , l'intégrale de (i) est égale à

$$(5.4) \quad \sum_{S, s} \int_{X_S(Z)} (-1)^{a(s)} \phi_{M, s}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(x) - T)) \mathbf{A}(x, s) dx$$

avec

$$X_S(Z) = S(F)U_S(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}; Z)$$

( $X_S(Z)$  est l'image de  $(\coprod_{H \in \mathcal{A}_M(Z)} X_M(H)) \times \mathbf{K}$  dans  $X_S$ ), et

$$\mathbf{A}(x, s) = (\mathbf{M}(s, \lambda) \Phi)(x, s\lambda) \overline{\Pi_S E(x, \Psi, -\bar{\mu})},$$

où  $\Pi_S E$  est le terme constant de  $E$  le long de  $S$ . Notons que  $\phi_{M, s}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(x) - T))$  ne dépend que de l'image  $(\mathbf{H}_S(x)^G - T_S^G)$  de  $(\mathbf{H}_0(x) - T)$  dans  $\alpha_S^G$ . D'après [25, théorème 5.2.2 (5)], on a

$$\mathbf{A}(x, s) = \sum_{t \in \mathbf{W}^G(\alpha_R, \alpha_S)} e^{(s\lambda - t\mu + 2\rho_S, \mathbf{H}_S(x))} (\mathbf{M}(s, \lambda) \Phi)(x) \overline{(\mathbf{M}(t, -\bar{\mu}) \Psi)(x)}.$$

La fonction  $\mathbf{M}(s, \lambda)\Phi$  appartient à  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_S)_{s\xi}$  et la fonction  $\mathbf{M}(t, -\bar{\mu})\Psi$  appartient à  $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_S)_{t\xi'}$ . Il résulte des lemmes 5.4.1 et 5.4.2 que l'expression (5.4) est égale à la somme sur  $S$ ,  $s$  et  $t$  de

$$|\widehat{\mathbb{C}}_S|^{-1} \sum_{v \in \widehat{\mathbb{C}}_S} \sum_{H \in \mathcal{A}_S(Z)} (-1)^{a(s)} \phi_{M,s}(H - T_S) e^{\langle s\lambda - t\mu - v, H \rangle} \langle \mathbf{D}_v \mathbf{M}(s, \lambda)\Phi, \mathbf{M}(t, -\bar{\mu})\Psi \rangle_S.$$

Fixons un triplet  $(S, s, t)$  comme ci-dessus. En tenant compte du lemme 1.6.5 on a pour  $\lambda$  assez régulier et  $\mu$  fixé,

$$\sum_{H \in \mathcal{A}_S(Z)} (-1)^{a(s)} \phi_{M,s}(H - T_S) e^{\langle s\lambda - t\mu - v, H \rangle} = \varepsilon_S^{G, T_S}(Z; s\lambda - t\mu - v).$$

On obtient que l'expression (5.4) est égale à la somme sur  $S$ ,  $s$  et  $t$ , de

$$(5.5) \quad |\widehat{\mathbb{C}}_S|^{-1} \sum_{v \in \widehat{\mathbb{C}}_S} \varepsilon_S^{G, T_S}(Z; s\lambda - t\mu - v) \langle \mathbf{D}_v \mathbf{M}(s, \lambda)\Phi, \mathbf{M}(t, -\bar{\mu})\Psi \rangle_S,$$

soit encore

$$(5.6) \quad |\widehat{\mathbb{C}}_R|^{-1} \sum_{v \in \widehat{\mathbb{C}}_R} \varepsilon_S^{G, T_S}(Z; s\lambda - t(\mu + v)) \langle \mathbf{D}_{tv} \mathbf{M}(s, \lambda)\Phi, \mathbf{M}(t, -\bar{\mu})\Psi \rangle_S,$$

et, grâce à l'équation fonctionnelle du lemme 5.2.2, on obtient que (5.6) est égal à

$$(5.7) \quad |\widehat{\mathbb{C}}_R|^{-1} \sum_{v \in \widehat{\mathbb{C}}_R} \varepsilon_S^{G, T_S}(Z; s\lambda - t(\mu + v)) \langle \mathbf{D}_v \mathbf{M}(t, -(\mu + v))^{-1} \mathbf{M}(s, \lambda)\Phi, \Psi \rangle_R.$$

On voit apparaître la  $(G, M)$ -famille spectrale à valeurs opérateurs pour  $M = M_R$  et l'intégrale de (i) est donc égale à

$$|\widehat{\mathbb{C}}_R|^{-1} \sum_{v \in \widehat{\mathbb{C}}_R} \langle \mathbf{D}_v \Omega_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu + v)\Phi, \Psi \rangle_R.$$

L'assertion (i) en résulte. Le cas général (ii), dans le cas des corps de nombres, est dû à Arthur [3]. La preuve consiste à se ramener au cas cuspidal, c'est-à-dire à la formule de Langlands [25, théorème 5.4.2 (i)]. Dans le cas des corps de fonctions, on prouve, de la même manière, (ii) à partir de (i). Notons qu'ici les groupes  $\mu_Q$  et  $\mu_R$  sont compacts, d'où la borne uniforme en  $\lambda$  et  $\mu$ . ■

Sous les hypothèses 5.4.3 (i) et 5.4.3 (ii), pour que l'intégrale

$$\int_{X_G(Z)} \Lambda^T E(x, \Phi, \lambda) \overline{E(x, \Psi, -\bar{\mu})} dx$$

soit non nulle, il faut que  $w\xi$  et  $\xi'$  coïncident sur  $A_R(F) \backslash A_R(\mathbb{A})^1$  pour un (et donc pour tout)  $w \in \mathbf{W}(\alpha_Q, \alpha_R)$ . Cette condition équivaut à l'existence d'un  $\tau \in \mu_R$ , tel que

$$(w\xi) \star \tau = \xi'.$$

Son image dans  $\widehat{\mathcal{B}}_R$  est uniquement déterminée.

**Proposition 5.4.5.** *Notons  $\mathcal{E}(\xi, \xi')$  l'ensemble des  $\tau \in \mu_R$  vérifiant l'équation*

$$(w\xi) \star \tau = \xi',$$

pour un  $w \in \mathbf{W}(\alpha_Q, \alpha_R)$ . S'il est non vide, c'est un espace principal homogène sous  $\widehat{\mathcal{C}}_R$ , indépendant du choix de  $w$ . Sous les hypothèses 5.4.3 (i) et 5.4.3 (ii), le théorème 5.4.4 reste vrai sans l'hypothèse 5.4.3 (iii), à condition de remplacer  $[\mathbf{\Omega}]_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu)$  par l'opérateur

$$[\mathbf{\Omega}]_{R|Q}^T(Z, \xi, \xi'; \lambda, \mu) \stackrel{\text{déf}}{=} |\widehat{\mathcal{C}}_R|^{-1} \sum_{v \in \mathcal{E}(\xi, \xi')} \mathbf{D}_v \mathbf{\Omega}_{R|Q}^T(Z; \lambda, \mu + v).$$

Par convention,  $[\mathbf{\Omega}]_{R|Q}^T(Z, \xi, \xi'; \lambda, \mu) = 0$  si  $\mathcal{E}(\xi, \xi')$  est vide. Si  $(\lambda - \mu - v) \in \widehat{\mathcal{C}}_G$  pour  $v \in \mathcal{E}(\xi, \xi')$ , chacun des membres de l'égalité ne dépend que de l'image de  $Z$  dans  $\mathbb{C}_G$ .

*Démonstration.* Il suffit d'observer que  $E(x, \mathbf{D}_v \Psi, \mu) = E(x, \Psi, \mu + v)$ . ■