Chapitre 7

Décomposition spectrale

Les sorites de [25, section 7.1] sont valables ici. La décomposition spectrale de $L^2(X_G)$ a été obtenue par Langlands pour les corps de nombres [28] et par Morris pour les corps de fonctions [35, 36], puis rédigée pour tout corps global par Mœglin et Waldspurger [32].

7.1 Un résultat de finitude

Soit $P \in \mathcal{P}$. On observe qu'une fonction $\boldsymbol{K}$-finie sur X_P est forcément $\boldsymbol{K}'$-invariante à droite pour un sous-groupe ouvert $\boldsymbol{K}'$ de $\boldsymbol{K}$. Pour $\xi \in \Xi(P)$, on note $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc},\boldsymbol{K}'}(X_P)_\xi$ le sous-espace de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(X_P)_\xi$, formé des fonctions qui sont $\boldsymbol{K}'$-invariantes. On définit de la même manière les espaces $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(X_P)_\xi$. Sur un corps de fonctions on a le résultat de finitude suivant :

Théorème 7.1.1. *La représentation de $G(\mathbb{A})$ dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(X_P)_\xi$ est admissible : pour tout sous-groupe ouvert compact $\boldsymbol{K}'$ de $G(\mathbb{A})$, l'espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc},\boldsymbol{K}'}(X_P)_\xi$ est de dimension finie.*

Démonstration. D'après le lemme 4.1.2, il existe un sous-ensemble compact Ω de X_P tel que toute forme automorphe cuspidale $\boldsymbol{K}'$-invariante sur X_P soit à support contenu dans Ω. On en déduit que l'espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(X_P)_\xi$ est de dimension finie. En d'autres termes, la représentation de $G(\mathbb{A})$ dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(X_P)_\xi$ est admissible. D'après la décomposition spectrale de Langlands, les formes automorphes discrètes

$$\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc},\boldsymbol{K}'}(X_P)_\xi$$

s'obtiennent comme résidus de séries d'Eisenstein $E^P(x,\Phi',\lambda)$ construites à partir de formes automorphes cuspidales $\Phi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(X_Q)_{\xi'}$ pour un $Q \in \mathcal{P}$ tel que $Q \subset P$, $\xi' \in \Xi(Q)$ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_Q^+ \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}/\mathcal{A}_Q^\vee$; avec la condition que l'élément $\xi' \star \lambda$ de $\Xi(Q)^+$ défini par $(\xi' \star \lambda)(a) = \xi'(a)e^{\langle\lambda,\mathbf{H}_Q(a)\rangle}$ pour tout $a \in A_Q(\mathbb{A})$, prolonge ξ. Observons que $\xi' \star \lambda$ ne dépend que de la projection de λ sur $\mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}/\mathcal{B}_Q^\vee = \ker[\Xi(Q)^+ \to \Xi(Q)^1]$. Pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_Q$ $(= \widehat{\mathcal{A}}_Q)$, la fonction $\mathbf{D}_\mu\Phi'$ appartient à $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(X_Q)_{\xi'\star\mu}$ et

$$E^P(x,\mathbf{D}_\mu\Phi',\lambda-\mu) = E^P(x,\Phi',\lambda) \qquad \text{pour tout} \qquad \lambda \in \boldsymbol{\mu}_Q^+.$$

Soit $\Xi(Q) \times^{\widehat{\mathcal{B}}_Q} \boldsymbol{\mu}_Q^+$ le quotient de $\Xi(Q) \times \boldsymbol{\mu}_Q^+$ par la relation d'équivalence définie comme suit : deux couples (ξ_1',λ_1) et (ξ_2',λ_2) sont équivalents si et seulement s'il existe un $\mu \in \boldsymbol{\mu}_Q$ tel que $(\xi_2', \lambda_2) = (\xi_1' \star \mu, \lambda_1 - \mu)$; auquel cas $\xi_2' \star \lambda_2 = \xi_1' \star \lambda_1$. Puisque $\widehat{\mathfrak{C}}_Q = \ker[\boldsymbol{\mu}_Q^+ \to \mathfrak{a}_{Q,\mathbb{C}}^* / \mathcal{B}_Q^\vee]$ est fini, l'application (surjective)

$$\Xi(Q) \times^{\widehat{\mathcal{B}}_Q} \boldsymbol{\mu}_Q^+ \to \Xi(Q)^+, \; (\xi', \lambda) \mapsto \xi' \star \lambda$$

est à fibres fines. Comme l'espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_Q)_{\xi'}$ est de dimension finie, il suffit de voir que les éléments de $\Xi(Q)^+$ de la forme $\xi' \star \lambda$ avec $(\xi', \lambda) \in \Xi(Q) \times \boldsymbol{\mu}_Q^+$, tels qu'il existe une forme $\Phi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_Q)_{\xi'}$ pouvant donner naissance par résidu de la série d'Eisenstein $E^P(x, \Phi', \cdot)$ en λ à une forme dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$, appartiennent à un ensemble fini. La projection $(\xi' \star \lambda)^1 = \xi' \star \lambda|_{A_Q(\mathbb{A})^1}$ de $\xi' \star \lambda$ sur $\Xi(Q)^1$ coïncide avec la projection de ξ', qui est un caractère du groupe fini $A_Q(F)(\boldsymbol{K}' \cap A_Q(\mathbb{A})^1)\backslash A_Q(\mathbb{A})^1$. Par conséquent, les classes $\xi' + \widehat{\mathcal{B}}_Q$ varient dans un sous-ensemble fini de $\Xi(Q)/\widehat{\mathcal{B}}_Q$. On peut donc fixer ξ' et se contenter de faire varier λ. Écrivons $\lambda = \lambda_{\mathrm{u}} + \lambda^+$ avec $\lambda_{\mathrm{u}} \in \boldsymbol{\mu}_Q$ et $\lambda^+ \in \mathfrak{a}_Q^*$. La projection $(\lambda^+)_P$ de λ sur $\mathfrak{a}_P^*$ est nulle (car $\xi' \star \lambda|_{A_P(\mathbb{A})} = \xi$) et la projection $(\lambda^+)_Q^P$ de λ sur $\mathfrak{a}_Q^{P,*}$ varie dans un compact de $\mathfrak{a}_Q^{P,*}$. La compacité de $\boldsymbol{\mu}_Q$ assure que λ varie dans un compact du cylindre $\boldsymbol{\mu}_Q^+$. L'intersection d'un ensemble compact et d'un ensemble discret (les pôles d'une série d'Eisenstein) est finie, ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Ce théorème rend inutile le découpage suivant les données cuspidales utilisé par Arthur (et repris dans [25]) dans le développement spectral de la formule des traces, puisqu'il règle immédiatement les éventuelles questions de convergence.

7.2 Données discrètes et décomposition spectrale

Pour $M \in \mathcal{L}$, notons $\mathbf{W}^G(M)$ le quotient de l'ensemble des éléments $w \in \mathbf{W}^G$ tels que $w(M) = M$ par $\mathbf{W}^M$. C'est un groupe et on note $w^G(M)$ son ordre. Rappelons que pour σ une représentation de $M(\mathbb{A})$ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_M$, on a noté $\sigma_\lambda = \sigma \star \lambda$ la représentation définie par les opérateurs

$$\sigma \star \lambda : x \mapsto e^{\langle \lambda, \mathbf{H}_M(x) \rangle} \sigma(x).$$

Définition 7.2.1. On appelle *donnée discrète* pour G un couple (M, σ), où σ est une représentation automorphe irréductible de $M(\mathbb{A})$ discrète modulo le centre, c'est-à-dire apparaissant comme composant de $L^2_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ – l'espace de Hilbert engendré par les sous-représentations irréductibles de $L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ – pour un caractère unitaire automorphe ξ de $A_M(\mathbb{A})$. Deux données discrètes (M, σ) et (M', σ') de G sont dites *équivalentes* s'il existe un couple $(w, \lambda) \in \mathbf{W}^G \times \boldsymbol{\mu}_M$ tel que

$$wMw^{-1} = M' \quad \text{et} \quad w(\sigma \star \lambda) \simeq \sigma'.$$

Nous noterons $\mathrm{Stab}_M(\sigma)$ le sous-groupe de $\widehat{\mathfrak{c}}_M$ formé des λ tels que $\sigma \star \lambda \simeq \sigma$, et $\widehat{c}_M(\sigma)$ son indice :

$$\widehat{c}_M(\sigma) = \frac{|\ \widehat{\mathfrak{c}}_M\ |}{|\mathrm{Stab}_M(\sigma)|}.$$

Soit (M, σ) une donnée discrète pour G et soit $P \in \mathcal{P}(M)$. Soit ξ la restriction à $A_M(\mathbb{A})$ du caractère central de σ. On notera

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P, \sigma) \subset \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$$

le sous-espace des formes automorphes φ sur $\boldsymbol{X}_P$ telles que, pour tout $x \in G(\mathbb{A})$, la fonction $m \mapsto \varphi(mx)$ sur $\boldsymbol{X}_M$ soit un vecteur de la composante isotypique de σ dans $L^2_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_M)_\xi$. C'est l'espace des fonctions $\boldsymbol{K}$-finies à droite dans l'espace de la représentation induite parabolique de $P(\mathbb{A})$ à $G(\mathbb{A})$ de la composante isotypique de σ dans $L^2_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_M)_\xi$.

Considérons $x \in \boldsymbol{X}_P$, $y \in \widetilde{G}(\mathbb{A})$, $\theta = \mathrm{Int}_\delta$ avec $\delta \in \widetilde{G}(F)$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$. Rappelons que l'on a posé

$$\varphi(x, \mu) = e^{\langle \mu + \rho_P, \mathbf{H}_P(x)\rangle} \varphi(x). \tag{7.1}$$

Définition 7.2.2. Pour une représentation automorphe irréductible σ de $M_P(\mathbb{A})$ discrète modulo le centre, on définit pour $Q = \theta(P)$ un opérateur unitaire[1]

$$\boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta, y, \omega) : \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P, \sigma) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_Q, \theta(\omega \otimes \sigma)), \tag{7.2}$$

en posant

$$(\boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta, y, \omega)\varphi)(x, \theta(\mu)) = (\omega\varphi)(\delta^{-1}xy, \mu). \tag{7.3}$$

Cet opérateur réalise un avatar tordu par δ et ω de la représentation induite parabolique

$$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\sigma \star \mu).$$

Différentes réalisations peuvent apparaître et doivent être comparées :

Lemme 7.2.3. *Pour μ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_M$, les avatars tordus*

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\lambda+\mu}(\delta, y, \omega) \qquad \textit{et} \qquad \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma\star\lambda,\mu}(\delta, y, \omega)$$

[1] On prendra garde à ce que, contrairement au cas des corps de nombres, on ne dispose pas d'un représentant canonique dans l'orbite de σ sous les décalages par les $\mu \in \boldsymbol{\mu}_M$.

sont équivalents et l'entrelacement est donné par les opérateurs $\mathbf{D}_\lambda$ et $\mathbf{D}_{\theta(\lambda)}$ (définition 5.2.1). En d'autres termes, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P, \sigma) \arrow[r, "\boldsymbol{\rho}_1"] \arrow[d, "\mathbf{D}_\lambda"'] & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_Q, \theta(\omega \otimes \sigma)) \arrow[d, "\mathbf{D}_{\theta(\lambda)}"] \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P, \sigma \star \lambda) \arrow[r, "\boldsymbol{\rho}_2"] & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_Q, \theta(\omega \otimes \sigma \star \lambda)) \end{tikzcd}$$

est commutatif, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbf{D}_{\theta(\lambda)} \circ \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\lambda+\mu}(\delta, y, \omega) = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma\star\lambda,\mu}(\delta, y, \omega) \circ \mathbf{D}_\lambda. \tag{7.4}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des équations (7.1) et (7.3). ∎

Par intégration contre une fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$, on définit l'opérateur

$$\boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta, f, \omega)$$

et on pose

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{P,\sigma,\mu}(y, \omega) = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta_0, y, \omega), \quad \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{P,\sigma,\mu}(f, \omega) = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta_0, f, \omega).$$

Soit $\varphi : \boldsymbol{X}_G \to \mathbb{C}$ une fonction continue et à support compact. Pour $P \in \mathcal{P}$, $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)$ et $\mu \in \boldsymbol{\mu}_P$, on pose

$$\widehat{\varphi}(\Psi, \mu) = \int_{\boldsymbol{X}_G} \varphi(x) \overline{E(x, \Psi, \mu)}\, \mathrm{d}x.$$

Pour deux fonctions $\phi, \varphi : \boldsymbol{X}_G \to \mathbb{C}$ continues et à support compact, on pose

$$\langle \phi, \varphi \rangle_{\boldsymbol{X}_G} = \int_{\boldsymbol{X}_G} \phi(x) \overline{\varphi(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Pour $M \in \mathcal{L}$, notons

- $\Pi_{\mathrm{disc}}(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations automorphes irréductibles de $M(\mathbb{A})$ discrètes modulo le centre ;
- $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)$ le quotient de $\Pi_{\mathrm{disc}}(M)$ par la relation d'équivalence donnée par la torsion par les caractères unitaires de $\mathcal{A}_M$;
- $\boldsymbol{\Psi}_P(\sigma)$ une base orthonormale de l'espace vectoriel pré-hilbertien $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P, \sigma)$.

D'après [32, chapitre VI] avec les conventions 1.3.1 pour la normalisation des mesures ($\mathrm{vol}(\boldsymbol{\mu}_M) = 1$) et les notations de la définition 7.2.1, on a le théorème suivant.

Théorème 7.2.4. *Le produit scalaire* $\langle \phi, \varphi \rangle_{\boldsymbol{X}_G}$ *admet la décomposition spectrale*

$$\langle \phi, \varphi \rangle_{\boldsymbol{X}_G} = \sum_{M \in \mathcal{L}/\mathbf{W}} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma) \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \sum_{\Psi \in \boldsymbol{\Psi}_P(\sigma)} \widehat{\phi}(\Psi, \mu) \overline{\widehat{\varphi}(\Psi, \mu)} \,\mathrm{d}\mu,$$

où l'on a identifié $\mathcal{L}/\mathbf{W}$ *à un ensemble de représentants dans* $\mathcal{L}$*, et où, pour chaque classe* $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)$*, on a choisi un représentant* $\sigma \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M)$ *dans la classe* $\boldsymbol{\sigma}$*.*[2]

7.3 Décomposition spectrale d'un noyau

La proposition 7.2.2 de [25] est vraie ici, *mutatis mutandis*[3]. Plus précisément, soient $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ et θ un F-automorphisme de G. Soit $H(x, y)$ un noyau intégral sur $\boldsymbol{X}_{\theta(P)} \times \boldsymbol{X}_P$, de la forme $H = K_1 K_2^*$:

$$H(x, y) = \int_{\boldsymbol{X}_P} K_1(x, z) K_2^*(z, y) \,\mathrm{d}z,$$

où K_1 (resp. K_2) est un noyau $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-admissible sur $\boldsymbol{X}_{\theta(P)} \times \boldsymbol{X}_P$ (resp. $\boldsymbol{X}_P \times \boldsymbol{X}_P$). On suppose que pour $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^P$, $\sigma \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$ et $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, on a des opérateurs de rang fini et, plus précisément, qui s'annulent en dehors d'un ensemble fini de vecteurs de $\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$:

$$A_{1,\sigma,\mu} \in \mathrm{Hom}(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma), \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta(S)}, \theta(\sigma)))$$

et

$$A_{2,\sigma,\mu} \in \mathrm{Hom}(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma), \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)),$$

vérifiant

$$\int_{\boldsymbol{X}_P} K_1(x, y) E^P(y, \Psi, \mu) \,\mathrm{d}y = E^{\theta(P)}(x, A_{1,\sigma,\mu}\Psi, \theta(\mu))$$

et

$$\int_{\boldsymbol{X}_P} K_2(x, y) E^P(y, \Psi, \mu) \,\mathrm{d}y = E^P(x, A_{2,\sigma,\mu}\Psi, \mu).$$

Posons

$$B_{\sigma,\mu} = A_{1,\sigma,\mu} A_{2,\sigma,\mu}^* \in \mathrm{Hom}(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma), \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta(S)}, \theta(\sigma)))$$

---

[2] On observera que pour chaque facteur de Levi $M \in \mathcal{L}/\mathbf{W}$, on a choisi un sous-groupe parabolique P de composante de Levi M. Le choix de ces sous-groupes paraboliques P est indifférent. Il en est de même pour les formules des propositions 7.3.1 et 7.3.2 ci-dessous.

[3] On observera que, dans [25], la définition des espaces $\boldsymbol{X}_P$ diffère de la nôtre par un quotient par $\mathfrak{B}_P$; il en résulte que, pour que la formule [25, proposition 7.2.2 (1)] soit correcte, il faut la modifier comme indiqué en **Err** (viii) dans l'annexe.

et

$$H_\sigma(x,y;\mu) = \sum_{\Psi\in\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} E^{\theta(P)}(x, B_{\sigma,\mu}\Psi, \theta(\mu))\overline{E^P(y,\Psi,\mu)}.$$

Proposition 7.3.1. *Le noyau $H(x,y)$ admet la décomposition spectrale*

$$H(x,y) = \sum_{M\in\mathcal{L}/\mathbf{W}} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} H_\sigma(x,y;\mu)\,\mathrm{d}\mu. \tag{7.5}$$

De plus, la somme sur Ψ dans l'expression $H_\sigma(x,y;\mu)$ est finie, et en posant

$$h(x,y) = \sum_{M\in\mathcal{L}/\mathbf{W}} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} |H_\sigma(x,y;\mu)|\,\mathrm{d}\mu,$$

on a la majoration (inégalité de Schwartz)

$$|H(x,y)| \le h(x,y) \le K_1K_1^*(x,x)^{1/2}K_2K_2^*(y,y)^{1/2}. \tag{7.6}$$

Démonstration. Comme dans la preuve de [25, proposition 7.2.2], cela résulte des généralités sur la décomposition spectrale des noyaux produits [25, proposition 7.1.1 (1)] et de la forme explicite de la décomposition spectrale automorphe (théorème 7.2.4). ■

Pour $\delta\in\widetilde{G}(F)$, posons $\theta = \mathrm{Int}_\delta$ et $Q = \theta(P)$. On considère l'opérateur

$$\boldsymbol{\rho}(\delta, f, \omega) : L^2(\boldsymbol{X}_P) \to L^2(\boldsymbol{X}_Q),$$

défini par

$$\boldsymbol{\rho}(\delta, f,\omega)\phi(x) = \int_{\widetilde{G}(\mathbb{A})} f(y)(\omega\phi)(\delta^{-1}xy)\,\mathrm{d}y.$$

Il est donné par le noyau intégral

$$K_{Q,\delta}(x,y) = \int_{U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})} \omega(x)\sum_{\eta\in Q(F)} f(x^{-1}u^{-1}\eta^{-1}\delta y)\,\mathrm{d}u.$$

Soit $S\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}^P$, et soit σ une représentation automorphe de $M_S(\mathbb{A})$. Pour $\mu\in\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ et $f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$, on a défini en section 7.2 un opérateur

$$\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta, f,\omega) : \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta(S)}, \theta(\omega\otimes\sigma)).$$

Pour $\Psi\in\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma)$ et $x\in\boldsymbol{X}_Q$, on a

$$\boldsymbol{\rho}(\delta, f,\omega)E^P(x,\Psi,\mu) = E^Q(x, \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta, f,\omega)\Psi, \theta(\mu)),$$

d'où

$$\int_{\boldsymbol{X}_P} K_{Q,\delta}(x,y)E^P(y,\Psi,\mu)\,\mathrm{d}y = E^Q(x,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta,f,\omega)\Psi,\theta(\mu)).$$

Rappelons que l'on a fixé une base orthonormale $\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$ de l'espace pré-hilbertien $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma)$. Pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, on pose

$$K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu) = \sum_{\Psi\in\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} E^Q(x,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta,f,\omega)\Psi,\theta(\mu))\overline{E^P(y,\Psi,\mu)}.$$

On a les variantes de la proposition 7.3.1 de [25] et de son corollaire 7.3.2 :

Proposition 7.3.2. *La fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ étant fixée, alors*

(i) *le noyau $K_{Q,\delta}(x,y)$ admet la décomposition spectrale suivante :*

$$K_{Q,\delta}(x,y) = \sum_{M\in\mathcal{L}^P/\mathbf{W}^P} \frac{1}{w^P(M)} \sum_{\sigma\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu)\,\mathrm{d}\mu\,;$$

(ii) *la restriction à $\mathfrak{S}\times G(\mathbb{A})$ de la fonction*

$$(x,y)\mapsto \sum_{M\in\mathcal{L}^P/\mathbf{W}^P} \frac{1}{w^P(M)} \sum_{\sigma\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} |\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu)|\,\mathrm{d}\mu$$

est bornée et à support compact en x, et à croissance lente en y.

Démonstration. Le point (i) est une conséquence de la proposition 7.3.1 et de la section 6.2 : on choisit un sous-groupe ouvert compact $\boldsymbol{K}'$ de $G(\mathbb{A})$ tel que $e_{\boldsymbol{K}'} * f * e_{\boldsymbol{K}'} = f$ et $\omega|_{\boldsymbol{K}'} = 1$; pour $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^P$, $\sigma \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$ et $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, on considère les opérateurs

$$A_{1,\sigma,\mu} = \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta,f,\omega) \quad \text{et} \quad A_{2,\sigma,\mu} = \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(e_{\boldsymbol{K}'}),$$

puis on pose $B_{\sigma,\mu} = A_{1,\sigma,\mu}A_{2,\sigma,\mu}^*$.

On en déduit que le noyau tronqué $\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,\delta}(x,y)$ est égal à

$$\sum_{M\in\mathcal{L}^P/\mathbf{W}} \frac{1}{w^P(M)} \sum_{\sigma\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

On observe que, grâce à la factorisation de la section 6.2, on a

$$\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu) = \int_{\boldsymbol{X}_G} \boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,P,\sigma}(x,z;\mu)K_{P,P,\sigma}^*(e_{\boldsymbol{K}'};z,y;\mu)\,\mathrm{d}z$$

avec

$$K_{P,P,\sigma}^*(e_{\boldsymbol{K}'};z,y;\mu) = \sum_{\Psi\in\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} E^P(z,\Psi,\mu)\overline{E^P(y,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(e_{\boldsymbol{K}'})\Psi,\mu)}.$$

On en déduit le point (ii), comme dans la preuve de [25, proposition 7.3.1 (ii)], grâce à l'inégalité de Schwarz (7.6), au lemme 6.3.1 (i), et à l'inégalité du lemme 6.1.1. ■

Corollaire 7.3.3. *La restriction à* $\mathfrak{S} \times G(\mathbb{A})$ *de la fonction*

$$(x, y) \mapsto |\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(x, y)|$$

est bornée et à support compact en x*, et à croissance lente en* y*.*