Chapitre 8

Formule des traces : état zéro

8.1 Le cas compact

Dans cette section nous établissons la formule des traces tordue dans le cas où G_{der} est anisotrope, c'est-à-dire où

$$\overline{\boldsymbol{X}}_G = A_G(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A})$$

est compact. On pose

$$\boldsymbol{Y}_G \stackrel{\text{déf}}{=} A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

Rappelons que l'on a fixé un caractère unitaire ω de $G(\mathbb{A})$ qui soit trivial sur le groupe $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G(F)$. Pour $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ on considère l'intégrale

$$J(f,\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} K(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}x,$$

avec

$$K(f,\omega;x,y) = \sum_{\delta\in\widetilde{G}(F)} f(x^{-1}\delta y)\omega(y).$$

Il est facile de montrer que l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_G$ est absolument convergente. Indiquons rapidement comment on en déduit la formule des traces. Pour plus de détails on renvoie aux chapitres suivants, où les résultats de ce paragraphe seront établis dans un cadre plus général.

On peut développer l'intégrale suivant les classes de conjugaison. On note $\widetilde{\Gamma}$ un système de représentants des classes de $G(F)$-conjugaison dans $\widetilde{G}(F)$ et $G^\delta(F)$ le groupe des points F-rationnels du centralisateur G^δ de δ dans G. Pour $\delta \in \widetilde{G}(F)$, on choisit une mesure de Haar sur $G^\delta(\mathbb{A})$ et on pose

$$a^G(\delta) = \mathrm{vol}(A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^\delta(F)\backslash G^\delta(\mathbb{A})).$$

Si $G^\delta(\mathbb{A}) \not\subset \ker(\omega)$ on pose

$$\mathcal{O}_\delta(f,\omega) = 0$$

et, si $G^\delta(\mathbb{A}) \subset \ker(\omega)$, on pose

$$\mathcal{O}_\delta(f,\omega) = \int_{G^\delta(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \omega(g) f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}\dot{g},$$

où $\mathrm{d}\dot{g}$ est la mesure quotient.

Proposition 8.1.1. *Si G_{der} est anisotrope, on a le développement géométrique*

$$J(f,\omega) = \sum_{\delta\in\widetilde{\Gamma}} a^G(\delta)\mathcal{O}_\delta(f,\omega).$$

Seul un nombre fini de δ (dépendant du support de f) donne une contribution non nulle à la somme.

Nous allons maintenant considérer le développement spectral. En général, $J(f,\omega)$ n'est pas une trace car, sauf si A_G est trivial, l'opérateur $\widetilde{\rho}(f,\omega)$ opérant dans $L^2(\boldsymbol{X}_G)$ n'est pas un opérateur à trace.

Rappelons qu'on a noté $\Xi(G)$ le groupe des caractères unitaires automorphes de $A_G(\mathbb{A})$. On note

$$\Xi(G,\widetilde{G}) \subset \Xi(G)$$

le sous-groupe des caractères triviaux sur $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})$. Les groupes $\Xi(G)$ et $\Xi(G,\widetilde{G})$ sont munis de mesures de Haar en suivant les conventions 1.3.1 : elles donnent le volume 1 à $\widehat{\mathcal{B}}_G$ et $\widehat{\mathcal{B}}_G^{\widetilde{G}}$ respectivement[1]. Soit

$$\Xi(G,\theta,\omega) \subset \Xi(G)$$

le sous-ensemble formé des caractères ξ tels que, en notant ω_{A_G} la restriction de ω à $A_G(\mathbb{A})$, on ait

$$\xi\circ\theta = \omega_{A_G}\otimes\xi.$$

Si $\Xi(G,\theta,\omega)$ est non vide, c'est un espace tordu sous le groupe $\Xi(G)^\theta$ des points fixes sous θ dans $\Xi(G)$. On observe que $\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta$ est un sous-groupe ouvert de $\Xi(G)^\theta$. On munit $\Xi(G)^\theta$ de la mesure de Haar telle que $\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta) = 1$ ce qui fournit une mesure $\Xi(G)^\theta$-invariante sur $\Xi(G,\theta,\omega)$.

Considérons un caractère $\xi\in\Xi(G)$ et posons pour x et y dans $G(\mathbb{A})$,

$$K_\xi(f,\omega;x,y) = \sum_{\delta\in A_G(F)\backslash\widetilde{G}(F)} \int_{A_G(\mathbb{A})} \overline{\xi(z)}\, f(z^{-1}x^{-1}\delta y)\omega(y)\,\mathrm{d}z,$$

soit encore

$$K_\xi(f,\omega;x,y) = \int_{A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A})} \overline{\xi(z)}K(f,\omega;zx,y)\,\mathrm{d}z.$$

Par inversion de Fourier, on voit que

$$K(f,\omega;x,y) = \int_{\xi\in\Xi(G)} K_\xi(f,\omega;x,y)\,\mathrm{d}\xi,$$

[1]Rappelons que $\widehat{\mathcal{B}}_G^{\widetilde{G}}$ est le dual de Pontryagin du réseau $\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{B}_G$ de $\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}$.

et on observe que

$$K_\xi(f,\omega;zx,zy) = \zeta_\xi(z)K_\xi(f,\omega;x,y), \tag{8.1}$$

où

$$\zeta_\xi = (\xi\circ\theta)^{-1}\cdot(\omega_{A_G}\otimes\xi) = \omega_{A_G}\otimes\xi^{1-\theta}$$

est un élément du groupe $\Xi(G,\widetilde{G})$. On observe aussi que, par définition,

$$\zeta_\xi = 1 \quad \text{équivaut à} \quad \xi\in\Xi(G,\theta,\omega).$$

Pour $\xi\in\Xi(G)$, on note $L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi$ l'espace de Hilbert des fonctions sur $\boldsymbol{X}_G$ qui se transforment suivant ξ sur $A_G(\mathbb{A})$. Lorsque $\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)$, c'est-à-dire si $\zeta_\xi=1$, l'opérateur $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)$ induit un endomorphisme de $L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi$. D'après le théorème 7.1.1, c'est un opérateur de rang fini. On pose

$$J(f,\omega,\xi) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G} K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}x$$

et on a

$$J(f,\omega,\xi) = \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi\Big). \tag{8.2}$$

On note

$$\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations automorphes irréductibles de $G(\mathbb{A})$ discrètes modulo le centre, qui admettent un prolongement à $(\widetilde{G}(\mathbb{A}),\omega)$. Pour $\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)$, on note $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_\xi$ le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)$, formé des représentations dont le caractère central restreint à $A_G(\mathbb{A})$ est égal à ξ. Enfin pour $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(\Pi,\omega)_\xi$, on note

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi)$$

la composante isotypique de π dans

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G)_\xi \subset L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi.$$

Lemme 8.1.2. *Pour $\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)$, on a*

$$J(f,\omega,\xi) = \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_\xi} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi)\Big).$$

Démonstration. On observe que les représentations π qui n'admettent pas de prolongement à $(\widetilde{G}(\mathbb{A}),\omega)$ contribuent par zéro à la trace de l'opérateur $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)$. ■

On choisit, pour chaque $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G}, \omega)$, un prolongement $\widetilde{\pi}$ à $(\widetilde{G}(\mathbb{A}), \omega)$ de π (plus correctement, d'un représentant (π, V_π) de la classe π) et on note $m(\pi, \widetilde{\pi})$ la multiplicité tordue de $(\pi, \widetilde{\pi})$ dans $L^2(X_G)_{\xi_\pi}$, définie dans [25, section 2.4], où ξ_π est la restriction à $A_G(\mathbb{A})$ du caractère central de π. Le nombre

$$m(\pi, \widetilde{\pi})\mathrm{trace}(\widetilde{\pi}(f, \omega)|V_\pi)$$

ne dépend pas du choix de $\widetilde{\pi}$. Ceci fournit une nouvelle expression :

$$J(f, \omega, \xi) = \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G}, \omega)_\xi} m(\pi, \widetilde{\pi})\mathrm{trace}(\widetilde{\pi}(f, \omega)|V_\pi).$$

Lemme 8.1.3. *On suppose que l'ensemble $\Xi(G, \theta, \omega)$ est non vide. Si $\{\psi\}$ est une famille de fonctions sur $\Xi(G, \widetilde{G})$ qui tend, au sens des distributions, vers la masse de Dirac à l'origine, alors pour tout fonction κ lisse sur $\Xi(G)$, on a*

$$\lim_{\psi} \int_{\xi \in \Xi(G)} \psi(\omega_{A_G} \otimes \xi^{1-\theta})\kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\xi \in \Xi(G, \theta, \omega)} \kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe $\xi_0 \in \Xi(G, \theta, \omega)$. En écrivant ξ sous la forme $\xi = \xi_0\xi_1\xi_2$ avec $\xi_2 \in \Xi(G)^\theta$, on a

$$\omega_{A_G} \otimes \xi^{1-\theta} = \xi_1^{1-\theta}.$$

On observe alors qu'en posant $\Xi(G)_1 = \Xi(G)/\Xi(G)^\theta$, on a

$$\int_{\xi \in \Xi(G)} \psi(\omega_{A_G} \otimes \xi^{1-\theta})k(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\xi_1 \in \Xi(G)_1} \psi(\xi_1^{1-\theta})\left(\int_{\xi_2 \in \Xi(G)^\theta} k(\xi_0\xi_1\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_2\right)\mathrm{d}\xi_1.$$

On peut supposer que ψ est à support dans le tore compact

$$\widehat{\mathcal{B}}_G^{\widetilde{G}} = (1-\theta)\widehat{\mathcal{B}}_G \ (\subset \Xi(G, \widetilde{G})).$$

Puisque les mesures sont compatibles avec la suite exacte courte

$$0 \to \widehat{\mathcal{B}}_G^\theta \to \widehat{\mathcal{B}}_G \xrightarrow{1-\theta} \widehat{\mathcal{B}}_G^{\widetilde{G}} \to 0,$$

le lemme en résulte. ∎

Proposition 8.1.4. *Si G_{der} est anisotrope, on a l'identité :*

$$J(f, \omega) = \int_{\xi \in \Xi(G, \theta, \omega)} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f, \omega)|L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi\Big)\,\mathrm{d}\xi,$$

soit encore

$$J(f, \omega) = \int_{\xi \in \Xi(G, \theta, \omega)} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G}, \omega)_\xi} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f, \omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G, \pi)\Big).$$

Démonstration. Par définition,

$$J(f,\omega)=\int_{\boldsymbol{Y}_G}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x,$$

soit encore

$$J(f,\omega)=\int_{\dot{x}\in\overline{\boldsymbol{X}}_G}\int_{z\in A_G(F)A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_G(\mathbb{A})}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}K_\xi(f,\omega;zx,zx)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x}.$$

Considérons une famille $\{\phi\}$ de fonctions à support compact sur le groupe abélien localement compact

$$A_G(F)A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_G(\mathbb{A})$$

et tendant vers la fonction 1, de sorte que la famille $\{\widehat{\phi}\}$ de leurs transformées de Fourier tende vers la masse de Dirac sur $\Xi(G,\widetilde{G})$ à l'origine. Alors $J(f,\omega)$ est égal à

$$\lim_{\phi\to 1}\int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G}\int_{A_G(F)A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_G(\mathbb{A})}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}K_\xi(f,\omega;zx,zx)\,\mathrm{d}\xi\right)\phi(z^{-1})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x},$$

soit encore, en utilisant l'équation (8.1), à

$$\lim_{\phi\to 1}\int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G}\int_{A_G(F)A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_G(\mathbb{A})}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}\phi(z^{-1})\zeta_\xi(z)K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x}.$$

Comme ϕ est à support compact, on peut intervertir les intégrations en z et ξ, et on a

$$J(f,\omega)=\lim_{\phi\to 1}\int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}\widehat{\phi}(\zeta_\xi)K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\dot{x}.$$

Compte tenu du lemme 8.1.3, cette limite s'écrit

$$\int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G}\left(\int_{\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)}K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\dot{x}.$$

Comme $\overline{\boldsymbol{X}}_G$ est compact, on peut encore intervertir, et on obtient

$$J(f,\omega)=\int_{\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)}J(f,\omega,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

On conclut en invoquant l'equation (8.2). ■

On pose

$$\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}\overset{\text{déf}}{=}\widehat{\mathcal{A}}_{\widetilde{G}}$$

et on note $\boldsymbol{\Pi}_{\text{disc}}(\widetilde{G},\omega)$ le quotient de $\Pi_{\text{disc}}(\widetilde{G},\omega)$ par la relation d'équivalence donnée par la torsion par les éléments de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}$. Pour $\pi\in\Pi_{\text{disc}}(\widetilde{G},\omega)$, on pose

$$\widehat{c}_{\widetilde{G}}(\pi)=\frac{|\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}|}{|\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}}(\pi)|},$$

où $\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}}(\pi)\subset\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}$ est le stabilisateur de π dans $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}$.

Lemme 8.1.5. *Le morphisme*

$$\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta \to \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{G}} = \widehat{\mathcal{B}_G^\theta},$$

induit par $\xi \mapsto \xi|_{\mathcal{B}_{\widetilde{G}}}$, *est surjectif et son noyau est fini, de cardinal*

$$j(\widetilde{G}) = |\det(1-\theta|\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}})|.$$

Démonstration. Le groupe $\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta$ est le dual de Pontryagin du groupe $(1-\theta)\mathcal{B}_G\backslash\mathcal{B}_G$. Le morphisme composé

$$\mathcal{B}_{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_G^\theta \to \mathcal{B}_G \to (1-\theta)\mathcal{B}_G\backslash\mathcal{B}_G$$

est injectif et son conoyau est égal à

$$\big((1-\theta)\mathcal{B}_G + \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\big)\backslash\mathcal{B}_G = (1-\theta)\mathcal{B}_G\backslash\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}}.$$

Or, l'indice $[\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}} : (1-\theta)\mathcal{B}_G]$ est égal à $|\det(1-\theta|\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}})|$. D'où le lemme, par dualité de Pontryagin. ■

Avec les conventions 1.3.1 pour la normalisation des mesures ($\mathrm{vol}(\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}) = 1$), la proposition 8.1.4 s'écrit aussi :

Proposition 8.1.6. *Si* G_{der} *est anisotrope on a l'identité*

$$J(f,\omega) = j(\widetilde{G})^{-1} \sum_{\boldsymbol{\pi}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)} \hat{c}_{\widetilde{G}}(\pi) \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}} \mathrm{trace}\big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi_\lambda)\big)\,\mathrm{d}\lambda,$$

où, pour chaque classe $\boldsymbol{\pi}$, *on a choisi un représentant* π *dans* $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)$. *Seul un nombre fini de* $\boldsymbol{\pi}$ *(dépendant de* f*) donne une contribution non triviale à la somme.*

Démonstration. On peut écrire

$$\int_{\Xi(G,\theta,\omega)}^{\oplus} L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi\,\mathrm{d}\xi = \bigoplus_{\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)^1} \int_{\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta}^{\oplus} L^2(\boldsymbol{X}_G)_{\xi\star\mu}\,\mathrm{d}\mu,$$

où $\Xi(G,\theta,\omega)^1 \subset \Xi(G)^1$ est l'ensemble des restrictions à $A_G(\mathbb{A})^1$ des éléments de $\Xi(G,\theta,\omega)$. On a donc

$$J(f,\omega) = \sum_{\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)^1} \int_{\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta} \mathrm{trace}\big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|L^2(\boldsymbol{X}_G)_{\xi\star\mu}\big)\,\mathrm{d}\mu$$

et

$$\mathrm{trace}\big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|L^2(\boldsymbol{X}_G)_{\xi\star\mu}\big) = \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_{\xi\star\mu}} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi)\Big).$$

En remarquant que, pour tout $\nu \in \widehat{\mathfrak{C}}_{\widetilde{G}}$,

$$\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_{\xi\star\mu} \quad \text{équivaut à} \quad \pi \star \nu \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_{\xi\star\mu},$$

puis en passant aux classes d'équivalence modulo torsion par les éléments de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}$, on obtient l'expression de l'énoncé, grâce au lemme 8.1.5. ∎

Corollaire 8.1.7. *Si G_{der} est anisotrope, la formule des traces tordue est l'identité*

$$\sum_{\delta\in\widetilde{\Gamma}} a^G(\delta)\mathcal{O}_\delta(f,\omega) = j(\widetilde{G})^{-1} \sum_{\boldsymbol{\pi}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)} \widehat{c}_{\widetilde{G}}(\pi) \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi_\lambda)\Big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Ce sont les identités des propositions 8.1.1, 8.1.4 et 8.1.6 que nous devons généraliser lorsque G_{der} n'est plus nécessairement anisotrope. Il conviendra d'intégrer sur $\boldsymbol{Y}_G$ des avatars tronqués du noyau. La première étape est fournie par le paragraphe suivant.

8.2 L'identité fondamentale

Soit $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$. Pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, on pose

$$K_{\widetilde{P}}(x,y) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in\widetilde{P}(F)} \omega(y) f(x^{-1}\delta u y)\,\mathrm{d}u.$$

C'est le noyau de la représentation naturelle de $(\widetilde{G}(\mathbb{A}),\omega)$ dans $L^2(\boldsymbol{X}_P)$. Pour $Q \in \mathcal{P}$ tel que $Q \subset P$, on note $\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q} K_{\widetilde{P}}(x,y)$ l'opérateur de troncature $\boldsymbol{\Lambda}^{T,Q}$ appliqué à la fonction $x \mapsto K_{\widetilde{P}}(x,y)$, pour y fixé. Le lemme 8.2.1 de [25] est vrai ici.

On pose

$$k^T_{\mathrm{géom}}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} k^T_{\widetilde{P},\mathrm{géom}}(\xi x)$$

avec

$$k^T_{\widetilde{P},\mathrm{géom}}(x) = \hat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(x)-T)K_{\widetilde{P}}(x,x)$$

et

$$k^T_{\mathrm{spec}}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} k^T_{\widetilde{P},\mathrm{spec}}(\xi x)$$

avec

$$k^T_{\widetilde{P},\mathrm{spec}}(x) = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset P\subset R}} \sum_{\xi\in Q(F)\backslash P(F)} \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(\xi x)-T)\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q} K_{\widetilde{P}}(\xi x,\xi x).$$

On a donc

$$k^T_{\mathrm{spec}}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset P\subset R}} \sum_{\xi\in Q(F)\backslash G(F)} \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(\xi x)-T)\mathbf{\Lambda}^{T,Q}_1 K_{\widetilde{P}}(\xi x,\xi x).$$

Tous ces termes ne dépendent que de la projection de T dans

$$\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_0 = \mathfrak{a}^G_0 \oplus \mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_G$$

et on a les identités

$$k^T_{\widetilde{P},\,\mathrm{géom}} = k^T_{\widetilde{P},\,\mathrm{spec}}, \qquad \text{pour tout} \qquad \widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}.$$

On en déduit l'identité fondamentale suivante.

Proposition 8.2.1. *On a l'identité* $k^T_{\mathrm{géom}} = k^T_{\mathrm{spec}}$.

Ce résultat, qui est une conséquence immédiate de la combinatoire des cônes, est le point de départ pour la formule des traces dans le cas non compact.

Chacune des expressions $k^T_{\mathrm{géom}}$ et k^T_{spec} possède un développement : la première suivant les classes d'équivalence de paires primitives et la seconde suivant la décomposition spectrale. Pour obtenir la formule des traces on intègre sur $\boldsymbol{Y}_G$ les fonctions $k^T_{\mathrm{géom}}$ et k^T_{spec}. On montrera que la convergence des intégrales (pour T suffisamment régulier) est compatible avec les développements de chacune de ces expressions. Ainsi, l'égalité de

$$\mathfrak{J}^T_{\mathrm{géom}}(f,\omega) \overset{\mathrm{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\mathrm{géom}}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et de} \qquad \mathfrak{J}^T_{\mathrm{spec}}(f,\omega) \overset{\mathrm{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\mathrm{spec}}(x)\,\mathrm{d}x$$

fournira la formule des traces, c'est-à-dire l'égalité du développement géométrique et du développement spectral. Précisons que l'égalité

$$\mathfrak{J}^T_{\mathrm{géom}}(f,\omega) = \mathfrak{J}^T_{\mathrm{spec}}(f,\omega)$$

est une égalité de fonctions dans PolExp : les intégrales convergent et sont égales pour $T\in\mathfrak{a}_0$ suffisamment régulier et elles définissent un même élément de PolExp (d'après le lemme 1.7.2).