Chapitre 9

Développement géométrique

9.1 Convergence : côté géométrique

Rappelons qu'on a introduit en section 3.3 l'ensemble $\mathfrak{O}$ des classes d'équivalence de paires primitives dans $\widetilde{G}(F)$ et que pour chaque $\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}$ on a défini un ensemble $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$ de classes de conjugaison de $\widetilde{G}(F)$. Compte tenu du lemme 3.3.2 on peut décomposer $k^T_{\text{géom}}(x)$ en

$$k^T_{\text{géom}}(x) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} k^T_{\mathfrak{o}}(x)$$

où $k^T_{\mathfrak{o}}$ ne comporte que la contribution des éléments $\delta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$:

$$k^T_{\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} k^T_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\xi x)$$

avec

$$k^T_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = \hat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(x) - T) K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x, x),$$

où

$$K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x, x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}\cap\widetilde{P}(F)} \omega(x) f(x^{-1}\delta u x)\,\mathrm{d}u.$$

On rappelle que d'après le lemme 3.3.2 (ii), on a la décomposition

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{P}(F) = (\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_P(F))U_P(F),$$

ce qui donne un sens à l'expression ci-dessus.

On considère Q, $R \in \mathcal{P}_{\text{st}}$. Rappelons que d'après [25, lemme 2.11.1] il existe un $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}$ tel que $Q \subset P \subset R$ si et seulement si on a $Q^+ \subset R^-$. On a défini en section 3.4 un ensemble $\mathfrak{S}^Q_{P_0}(T_1, T)$ dépendant d'un compact $C_Q \subset G(\mathbb{A})$, et on a noté $F^Q_{P_0}(\cdot, T)$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$Q(F)\mathfrak{S}^Q_{P_0}(T_1, T).$$

Comme en [25, proposition 3.6.3], on suppose que C_Q est assez gros, et que T et $-T_1$ sont assez réguliers.

On pose[1]

$$\boldsymbol{Y}_Q = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})Q(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

[1] Le lecteur prendra garde que dans [25] on passe au quotient par $\mathfrak{B}_G$, qui, dans le cas des corps de nombres, est identifié à un sous-groupe du centre, car f a été intégrée sur le centre.

Le point clef pour la convergence du côté géométrique (théorème 9.1.2 ci-dessous) est le résultat suivant [25, proposition 9.1.1] :

Proposition 9.1.1. *Supposons T assez régulier, c'est-à-dire $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$ où c est une constante dépendant du support de f. L'intégrale*

$$\int_{\boldsymbol{Y}_Q} F_{P_0}^{Q}(x,T)\widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(x)-T)\left|\sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}},\widetilde{Q}^+\subset\widetilde{P}\subset\widetilde{R}^-}(-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{Q}}}K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x,x)\right|\mathrm{d}x$$

est convergente.

Démonstration. Notons Ω_f le support de f. C'est un compact de $\widetilde{G}(\mathbb{A})$, et pour $x \in G(\mathbb{A})$ tel que $K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x,x) \neq 0$, on a $x^{-1}\delta u x \in \Omega_f$ pour des éléments $\delta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{P}(F)$ et $u \in U_P(\mathbb{A})$. Puisque $\mathbf{H}_G(x^{-1}\delta u x) = 0$ et $\Omega_f \cap G(\mathbb{A})^1$ est compact, on peut appliquer [25, corollaire 3.6.7] : si T est assez régulier, précisément si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$ où c est une constante dépendant de Ω_f, les $\delta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{P}(F)$ qui donnent une contribution non nulle à l'expression de l'énoncé appartiennent à $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{Q}^+(F)$. En utilisant la décomposition (point (ii) du lemme 3.3.2)

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{Q}^+(F) = (\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_{Q^+}(F))U_{Q^+}(F),$$

on peut donc comme dans la preuve de [25, proposition 9.1.1] remplacer $K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x,x)$ par une expression $\Phi_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x)$ qui s'écrit $\Phi_{\widetilde{P},\mathfrak{o}} = \sum_{\eta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}\cap\widetilde{M}_{Q^+}} \Phi_{\widetilde{P},\eta,\mathfrak{o}}(x)$ avec

$$\Phi_{\widetilde{P},\eta,\mathfrak{o}}(x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \sum_{\nu\in U_{Q^+}(F)} f(x^{-1}\eta\nu u x)\,\mathrm{d}u.$$

Posons

$$\Xi_Q^R(x) = \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(x)-T)\sum_{\eta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}\cap\widetilde{M}_{Q^+}}\left|\sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}},Q\subset P\subset R}(-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}}\Phi_{\widetilde{P},\eta,\mathfrak{o}}(x)\right|.$$

Il s'agit de montrer que l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{Y}_Q} F_{P_0}^{Q}(x,T)\ \Xi_Q^R(x)\ \mathrm{d}x$$

est convergente. Posons

$$\boldsymbol{Z}_Q = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})A_Q(F)\backslash A_Q(\mathbb{A}) \subset \boldsymbol{Y}_Q.$$

On commence par estimer, pour $v \in U_Q(\mathbb{A})$ et $x \in G(\mathbb{A})$, l'intégrale

$$\Theta_Q^R(v,x) = \int_{\boldsymbol{Z}_Q} \Xi_Q^R(vax)\boldsymbol{\delta}_Q(a)^{-1}\,\mathrm{d}a,$$

de façon uniforme lorsque x reste dans un compact fixé. Notons que la somme sur η dans l'expression $\Xi_Q^R(vax)$ porte sur un ensemble fini, dépendant *a priori* de x et a. Comme dans la preuve de [25, proposition 9.1.1], on montre que pour x dans un compact fixé, l'ensemble des $a \in \boldsymbol{Z}_Q$ donnant une contribution non triviale à l'expression $\Theta_Q^R(v, x)$ est contenu dans un compact ; par conséquent la somme sur η dans l'expression $\Xi_Q^R(vax)$ porte sur un ensemble fini (indépendant de a et x dans un compact fixé). Il reste à estimer la somme sur a dans l'expression $\Theta_Q^R(v, x)$. Notons $\boldsymbol{Z}_Q^{R-}$ l'image de

$$A_Q(\mathbb{A}) \cap A_{R^-}(\mathbb{A})^1 = \{a \in A_Q(\mathbb{A}) : \mathbf{H}_{R^-}(a) = 0\}$$

dans $\boldsymbol{Z}_Q$. Le morphisme

$$1 - \theta_0 : \boldsymbol{Z}_Q \to \boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{Z}_{P_0}, \quad a \mapsto a\theta_0(a^{-1})$$

a pour noyau le sous-groupe $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_Q^{R-}$ de $\boldsymbol{Z}_{Q+}^{R-}$ formé des éléments θ_0-invariants. D'après la preuve [25, proposition 9.1.1], il suffit de considérer les $a \in \widetilde{\boldsymbol{Z}}_Q^{R-}$.

Soit $\mathfrak{u}$ l'algèbre de Lie de U_{Q+}. On n'a pas ici d'application exponentielle mais on peut fixer un F-isomorphisme de varietés algébriques $j : \mathfrak{u} \to U_{Q+}$ compatible avec l'action de A_{Q+}, i.e. tel que

$$j \circ \mathrm{Ad}_a = \mathrm{Int}_a \circ j$$

pour tout $a \in A_{Q+}$. On obtient j par restriction à partir d'un F-isomorphisme de variétés algébriques $j_0 : \mathfrak{u}_0 \to U_0$ compatible avec l'action de $A_0 = A_{P_0}$, où $\mathfrak{u}_0$ est l'algèbre de Lie de $U_0 = U_{P_0}$. Pour toute racine α de A_0 dans U_0, on pose $\alpha = \{\alpha, 2\alpha\}$ si 2α est une racine et $(\alpha) = \{\alpha\}$ sinon. On note $U_{(\alpha)}$ le F-sous-groupe de U_0 correspondant à (α) et $\mathfrak{u}_{(\alpha)}$ son algèbre de Lie. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines primitives (c'est-à-dire non divisibles) de A_0 dans U_0, ordonnées arbitrairement. On a la décomposition en produit direct $U_0 = U_{(\alpha_1)} \cdots U_{(\alpha_r)}$, resp. en somme directe $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}_{(\alpha_1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}_{(\alpha_r)}$, et il suffit de prouver que pour $i = 1, \dots, r$, il existe un F-isomorphisme de variétés algébriques $\xi_i : \mathfrak{u}_{(\alpha_i)} \to U_{(\alpha_i)}$ compatible avec l'action de A_0. Alors pour $X \in \mathfrak{u}_0$, on écrit $X = \sum_{i=1}^r X_i$ avec $X_i \in \mathfrak{u}_{(\alpha_i)}$ et on pose $j_0(X) = \xi_1(X_1) \cdots \xi_r(X_r)$. Fixons un indice i et prouvons l'existence de ξ_i. Supposons tout d'abord $(\alpha_i) = \{\alpha_i\}$. D'après [15, Lemma 21.17, Theorem 21.20], $U_{(\alpha_i)}$ est F-isomorphe, en tant que variété algébrique, à un espace affine V_i, la conjugaison par $a \in A_0$ sur $U_{(\alpha_i)}$ correspondant à la translation par $\alpha_i(a)$ sur V_i. Si maintenant $(\alpha_i) = \{\alpha_i, 2\alpha_i\}$, d'après [15, Lemma 21.19] et la preuve de [15, Theorem 21.20], il existe un F-isomorphisme de variétés algébriques

$$(U_{(\alpha_i)}/U_{(2\alpha_i)}) \times U_{(2\alpha_i)} \to U_{(\alpha_i)}$$

compatible avec l'action de A_0 et l'argument précédent s'applique à chacun des deux groupes unipotents $U_{(\alpha_i)}/U_{(2\alpha_i)}$ et $U_{(2\alpha_i)}$. Cela prouve l'existence de ξ_i en général, et donc celle de j_0. La restriction de j_0 à $\mathfrak{u}$ donne le F-isomorphisme $j : \mathfrak{u} \to U_{Q+}$ cherché ; il est compatible avec l'action de A_0. Observons que j induit une bijection $\mathfrak{u}(\mathbb{A}) \to U_{Q+}(\mathbb{A})$ qui se restreint en une bijection $\mathfrak{u}(F) \to U_{Q+}(F)$.

Soit $\mathfrak{u}^*$ le dual de $\mathfrak{u}$. Fixons un caractère non trivial ψ de $F\backslash\mathbb{A}$, et notons $\mathfrak{u}^\vee$ l'orthogonal de $\mathfrak{u}(F)$ dans $\mathfrak{u}^*(\mathbb{A})$ pour ce caractère. Pour $\Lambda \in \mathfrak{u}^*(\mathbb{A})$ et $u \in U_P(\mathbb{A})$, posons

$$g(x, \Lambda, \delta, u) = \int_{\mathfrak{u}(\mathbb{A})} \psi(\langle \Lambda, X\rangle) f(x^{-1}\delta j(X)ux)\,\mathrm{d}X.$$

Comme dans la preuve de [25, proposition 9.1.1], la formule de Poisson permet d'écrire

$$\Xi_Q^R(x) = \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T)\sum_{\eta}\left|\sum_{\Lambda\in\mathfrak{u}^\vee(Q,R)} g(x, \Lambda, \eta, 1)\right|,$$

où $\mathfrak{u}^\vee(Q, R)$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{u}^\vee$ défini en *loc. cit.* Observons qu'ici g est à support compact en Λ comme transformée de Fourier d'une fonction lisse à support compact. La suite de la démonstration est identique à celle de *loc. cit.* : via l'étude de l'action coadjointe de $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_Q^{R-}$ sur $\mathfrak{u}^\vee$, on obtient que la somme définissant $\Theta_Q^R(v, x)$ est absolument convergente, uniformément lorsque x reste dans un compact. On conclut comme à la fin de la preuve de *loc. cit.* ■

Rappelons que si le compact C_Q est assez gros, et si T et $-T_1$ sont assez réguliers, on a la partition [25, proposition 3.6.3]

$$\sum_{Q\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}, Q\subset P}\ \sum_{\xi\in Q(F)\backslash P(F)} F_{P_0}^Q(\xi x, T)\tau_Q^P(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) = 1.$$

On en déduit un analogue de [25, théorème 9.1.2] :

Théorème 9.1.2. *Si T est assez régulier, précisément si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$ où c est une constante ne dépendant que du support de f, l'expression*

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} \int_{\boldsymbol{Y}_G} |k_{\mathfrak{o}}^T(x)|\,\mathrm{d}x$$

est convergente. De plus, seul un ensemble fini de classes $\mathfrak{o}$ (dépendant du support de f) donne une contribution non triviale à la somme.

L'intégrale étant absolument convergente, il est loisible de poser

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{o}}^T \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\mathfrak{o}}^T(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{J}_{\text{géom}}^T \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\text{géom}}^T(x)\,\mathrm{d}x.$$

On obtient alors le développement géométrique de la formule des traces :

Corollaire 9.1.3. *On a*

$$\mathfrak{J}_{\text{géom}}^T = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} \mathfrak{J}_{\mathfrak{o}}^T.$$

Il ne s'agit ici que de la forme dite « grossière » du développement géométrique. Nous allons donner une forme plus explicite pour certains termes. La théorie des intégrales orbitales pour les corps de fonctions est encore à écrire. Elle sera bien sûr nécessaire pour un développement géométrique « fin » au sens de Langlands. Il est toutefois possible de traiter les termes primitifs (cf. section 9.2) et les termes quasi semi-simples comme pour les corps de nombres (cf. section 9.4). Pour les autres termes, on tombe sur des difficultés que nous n'essaierons pas de résoudre ici (cf. section 9.3). Il est raisonnable d'espérer que pour $p \gg 1$ ces difficultés disparaissent (cf. section 9.5).

9.2 Contribution des classes primitives

Notons $\mathfrak{O}_{\mathrm{prim}} \subset \mathfrak{O}$ l'ensemble des classes de $G(F)$-conjugaison d'éléments primitifs dans $\widetilde{G}(F)$. Pour $\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}_{\mathrm{prim}}$, l'expression

$$k_{\mathfrak{o}}^{T}(x) = \sum_{\delta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}}} \omega(x) f(x^{-1}\delta x)$$

ne dépend pas de T. On la note aussi $k_{\mathfrak{o}}(x)$. Avec les notations de la section 8.2, on a donc

$$k_{\mathrm{prim}}(f,\omega;x) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}_{\mathrm{prim}}} k_{\mathfrak{o}}(x)$$

et l'intégrale

$$J_{\mathrm{prim}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\mathrm{prim}}(f,\omega;x)\,\mathrm{d}x \tag{9.1}$$

est absolument convergente. Elle définit une distribution sur $\widetilde{G}(\mathbb{A})$, donnée par

$$J_{\mathrm{prim}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \sum_{\delta \in \widetilde{\Gamma}_{\mathrm{prim}}} \int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G(\mathbb{A})} \omega(g) f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}g \tag{9.2}$$

où $\widetilde{\Gamma}_{\mathrm{prim}}$ est un système de représentants des classes de $G(F)$-conjugaison dans $\widetilde{G}(F)_{\mathrm{prim}}$. Ici $G^{\delta}(F)$ est le groupe des points F-rationnels du centralisateur[2] G^{δ} de δ dans G, et $\mathrm{d}g$ est le quotient de la mesure de Haar sur $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ par la mesure de comptage sur $A_{\widetilde{G}}(F)\backslash G^{\delta}(F)$. Seul un nombre fini de δ (dépendant du support de f) donne une contribution non triviale à la somme.

[2] Vu comme F-schéma en groupes, G^{δ} n'est *a priori* ni lisse, ni connexe.

Corollaire 9.2.1. *Pour $\delta \in \widetilde{G}(F)_{\mathrm{prim}}$, l'intégrale orbitale*

$$\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G(\mathbb{A})} \omega(g) f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}g$$

est absolument convergente.

Corollaire 9.2.2. *Pour $\delta \in \widetilde{G}(F)_{\mathrm{prim}}$, le groupe (localement compact) $G^{\delta}(\mathbb{A})$ est unimodulaire et le quotient*

$$A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G^{\delta}(\mathbb{A})$$

est de volume fini.

Démonstration. Considérons le cas $\omega = 1$ et f positive. L'intégrale orbitale

$$\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G(\mathbb{A})} f(x^{-1}\delta x)\,\mathrm{d}x$$

étant convergente, il en résulte que pour toute fonction lisse φ et à support compact sur

$$Y = G^{\delta}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}),$$

l'intégrale

$$\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G(\mathbb{A})} \varphi(x) f(x^{-1}\delta x)\,\mathrm{d}x$$

est convergente et définit une fonctionnelle $G(\mathbb{A})$-invariante à droite sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions ψ sur Y de la forme $\psi(\dot{x}) = \varphi(\dot{x}) f(x^{-1}\delta x)$. Mais, en variant f et φ, on obtient ainsi toutes les fonctions lisses et à support compact sur Y. Il existe donc une mesure $G(\mathbb{A})$-invariante à droite sur Y, ce qui implique que le groupe $G^{\delta}(\mathbb{A})$ est unimodulaire, puisque $G(\mathbb{A})$ l'est. La convergence de l'intégrale orbitale implique que le volume de $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G^{\delta}(\mathbb{A})$ est fini. ∎

Pour $\delta \in \widetilde{G}(\mathbb{A})_{\mathrm{prim}}$, on choisit une mesure de Haar sur $G^{\delta}(\mathbb{A})$ et on pose

$$a^{G}(\delta) = \mathrm{vol}(A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G^{\delta}(\mathbb{A})),$$

où le volume est calculé en prenant la mesure quotient de la mesure de Haar sur $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash G^{\delta}(\mathbb{A})$ par la mesure de comptage sur $A_{\widetilde{G}}(F)\backslash G^{\delta}(F)$. Si $G^{\delta}(\mathbb{A}) \not\subset \ker(\omega)$, on pose

$$\mathcal{O}_{\delta}(f, \omega) = 0,$$

et si $G^{\delta}(\mathbb{A}) \subset \ker(\omega)$, on pose

$$\mathcal{O}_{\delta}(f, \omega) = \int_{G^{\delta}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \omega(g) f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}\dot{g},$$

où $\mathrm{d}\dot{g}$ est la mesure quotient de la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ par la mesure de Haar sur $G^\delta(\mathbb{A})$.

On fixe un système de représentants $\widetilde{\Gamma} \subset \widetilde{G}(F)$ des classes de $G(F)$-conjugaison dans $\widetilde{G}(F)$, et on note $\widetilde{\Gamma}_{\mathrm{prim}} \subset \widetilde{\Gamma}$ le sous-ensemble formé des éléments primitifs.

Proposition 9.2.3. *L'intégrale* (9.1) *est absolument convergente et définit une distribution invariante sur* $\widetilde{G}(\mathbb{A})$. *On a*

$$J_{\mathrm{prim}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \sum_{\delta\in\widetilde{\Gamma}_{\mathrm{prim}}} a^G(\delta)\mathcal{O}_\delta(f,\omega), \tag{9.3}$$

où la somme porte sur un ensemble fini (dépendant du support de f*).*

Démonstration. Un calcul élémentaire fournit l'égalité (9.3). La finitude résulte du lemme 3.4.2. ∎

9.3 Sur la descente centrale

Dans [25, section 9.2], en vue de l'utilisation de la descente centrale de Harish Chandra, qui est une technique essentielle dans les travaux d'Arthur sur le développement géométrique fin, l'expression $k_{\mathfrak{o}}^T(x)$ est remplacée par une expression $j_{\mathfrak{o}}^T(x)$, de même intégrale sur $\boldsymbol{Y}_G$.[3] En caractéristique positive, le lemme 9.2.1 de [25], qui permet de faire ce remplacement, n'est plus vrai, même dans le cas non tordu. En effet considérons une paire primitive (M,δ) dans G et $P = MU$. Notons U^δ le centralisateur de δ dans U.[4] On considère le F-morphisme π_δ de variétés algébriques

$$\pi_\delta : U_P \times U_P^\delta \to U_P \qquad \text{défini par} \qquad (u,v) \mapsto u^{-1}v\,\mathrm{Int}_\delta(u).$$

En général l'inclusion $\pi_\delta(U_P \times U^\delta) \subset U_P$ est stricte et donc le lemme 9.2.2 de [25] est en défaut, comme le montre l'exemple ci-dessous.

---

[3]Rappelons qu'ici $\boldsymbol{Y}_G$ joue le rôle de l'espace $\mathbf{X}_G = \mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ de [25]. Observons aussi que la définition de l'expression $j_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}^T(x)$ donnée dans [25, section 9.2] est incorrecte et doit être remplacée par celle donnée par **Err** (xi) dans l'annexe.

[4]Notons $(1-\delta)U$ l'image du F-endomorphisme $u \mapsto u.\mathrm{Int}_\delta(u)^{-1}$. Ce morphisme se factorise en un F-morphisme bijectif de variétés algébriques $U^\delta\backslash U \to (1-\delta)U$, qui n'est en général pas un isomorphisme. Au F-schéma en groupes (affine) U^δ, correspond un sous-groupe algébrique F*-fermé* (au sens de Borel [15]) de G, noté de la même manière. Le F-morphisme en question est un isomorphisme si et seulement s'il est séparable, auquel cas le F-schéma en groupes U^δ est géométriquement réduit (donc lisse) et correspond à un groupe algébrique défini sur F.

Supposons F de caractéristique $p > 0$. Soit γ un élément de $\mathrm{GL}_p(F)$ qui engendre une extension radicielle non triviale $E = F[\gamma]$ de F. Cette extension est de degré p et γ est primitif dans $\mathrm{GL}_p(F)$. Plongeons $M = \mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_p$ diagonalement dans GL_{2p} et notons δ l'élément (γ, γ) de $M(F)$. Alors (M, δ) est une paire primitive dans $G = \mathrm{GL}_{2p}$ et si P le sous-groupe parabolique standard de G de composante de Levi M, on a $U^\delta(F) \simeq E$. On identifie $U(F)$ à $M_p(F)$ et $U^\delta(F)$ à $E \subset M_p(F)$. On voit que dans ce cas l'application π_δ est donnée par

$$(x, y) \mapsto n(x) + y \qquad \text{où} \qquad n(x) \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Ad}(\gamma) - 1)x.$$

On peut choisir γ tel que γ^p soit scalaire et donc $(\mathrm{Ad}(\gamma) - 1)^p = 0$. Il en résulte que π_δ ne peut pas être surjective. Par exemple si $p = 2$, on a $\gamma n(x) \gamma^{-1} = n(x)$ et donc $n(x) \in E$ pour tout $x \in M_2(F)$, ce qui implique $n(x) + y \in E$ pour tout couple $(x, y) \in M_2(F) \times E$.

Cet exemple montre que pour les paires primitives $(\widetilde{M}, \delta)$ dans $\widetilde{G}$ avec $\widetilde{M} \neq \widetilde{G}$ et δ inséparable, la descente centrale ne fonctionne plus sans modification. C'est l'une des principales difficultés à résoudre du côté géométrique.

9.4 Contribution des classes quasi semi-simples

Un élément δ de $\widetilde{G}$ est dit *quasi semi-simple* si l'automorphisme $\tau = \mathrm{Int}_\delta$ de G est quasi semi-simple, c'est-à-dire s'il stabilise une paire de Borel (B, T) de G. Pour l'étude des automorphismes quasi semi-simples sur un corps quelconque, on renvoie à [31, chapitres 2 et 3]. Un automorphisme τ de G est quasi semi-simple si et seulement l'automorphisme τ_{der} de G_{der} est quasi semi-simple. La composante neutre $G_\tau = (G^\tau)^0$ du centralisateur d'un automorphisme quasi semi-simple τ de G est un groupe algébrique linéaire réductif (connexe)[5]. On prendra garde à ce que si F est de caractéristique $p > 0$, un automorphisme non trivial de G peut être quasi semi-simple et unipotent ; toutefois, un tel automorphisme est forcément quasi-central[6].

[5]Le théorème 4.6.3 de [31] affirme que ce groupe est défini sur F, ce qui n'est pas toujours vrai (la preuve de *loc. cit.* utilise le lemme 4.5.2 de [31] qui est faux en général). Pour un énoncé correct, on renvoie aux travaux récents de Adler-Lansky-Spice sur la question (https://www.arxiv.org/pdf/2503.00183). Nous nous limiterons ici aux éléments quasi-simples vérifiant la conclusion de [31, théorème 4.6.3].

[6]En caractéristique $p > 0$, un automorphisme τ de G est dit *unipotent* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\tau^{p^k} = \mathrm{Id}$. Par exemple pour $p = 2$, l'automorphisme $\tau : t \mapsto t^{-1}$ du tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est quasi semi-simple et unipotent. De plus le morphisme $1 - \tau : t \mapsto t^2$ de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ n'est pas séparable. Un automorphisme quasi semi-simple τ de G est dit *quasi-central* si $\dim(G_{\tau'}) \leq \dim(G_\tau)$ pour tout automorphisme quasi semi-simple τ' de G de la forme $\tau' = \mathrm{Int}_g \circ \tau$ avec $g \in G$.

Pour $\delta \in \widetilde{G}$ et $\tau = \mathrm{Int}_\delta$, notons $(1-\tau)G$ l'image du morphisme de G dans G :

$$1 - \tau : g \mapsto g\tau(g)^{-1}.$$

On dit que δ est *séparable* si le morphisme $1-\tau$ est séparable, c'est-à-dire s'il induit un isomorphisme de variétés algébriques

$$G^\delta \backslash G \to (1-\tau)G.$$

Si $\delta \in \widetilde{G}(F)$ est séparable, le F-schéma en groupes G^δ est lisse et correspond à un sous-groupe algébrique fermé de G défini sur F.

Soit $\delta \in \widetilde{G}(F)$ un élément quasi semi-simple. En général, δ n'est pas séparable, mais on sait que la composante neutre $G_\delta = (G^\delta)^0$ de son centralisateur est un groupe algébrique réductif (connexe). On suppose de plus qu'il est défini sur F. On peut alors, comme sur un corps de nombres, définir son *centralisateur stable* I_δ (cf. [25, section 2.6][7]) :

$$G_\delta \overset{\text{déf}}{=} G^{\delta,0} \subset I_\delta \subset G^\delta.$$

Considérons le tore déployé maximal A_δ dans le centre de I_δ, ou, ce qui revient au même, de G_δ, et notons M_δ le centralisateur de A_δ dans G. C'est un facteur de Levi de G, et δ est elliptique (mais pas nécessairement régulier) dans $\widetilde{M}_\delta = \delta M_\delta$, en d'autres termes[8] :

$$A_\delta = A_{\widetilde{M}_\delta}.$$

Notons $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}(\delta)$ le sous-ensemble de $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ formé des $\widetilde{P}$ tel que $\widetilde{M}_P$ contienne un conjugué de $\widetilde{M}_\delta$ dans $G(F)$. Soit $\mathfrak{o} = [\widetilde{M}, \delta]$ une paire primitive dans $\widetilde{G}$ et soit $\mathfrak{c}$ la classe de $G(F)$-conjugaison de δ dans $\widetilde{G}(F)$. La contribution de $\mathfrak{c}$ à $k_{\mathfrak{o}}^T(x)$ est donnée par

$$k_{\mathfrak{c}}^T(x) = \sum_{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}(\delta)} (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi \in P(F)\backslash G(F)} k_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}^T(\xi x)$$

avec

$$k_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}^T(x) = \hat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(x) - T) K_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(x,x),$$

[7] Le centre « schématique » Z_G n'est en général pas réduit. On considère le centre « réduit » $\mathfrak{Z}_G$ de G, c'est-à-dire le centre, au sens de Borel [15]. C'est un groupe algébrique diagonalisable, *a priori* seulement F-fermé, mais qui est en fait défini sur F : d'après [15, Theorem 18.2] il existe un tore maximal T de G défini sur F ; un tel tore se déploie sur une extension algébrique séparable E de F, par suite le sous-groupe fermé $\mathfrak{Z}_G \subset T$ est défini sur E, donc sur F, puisqu'il est F-fermé. Le centre « réduit » $\mathfrak{Z}_{\widetilde{G}} = \mathfrak{Z}_G^\theta$ de $\widetilde{G}$ est, lui aussi, un groupe algébrique diagonalisable, défini sur F. On prend pour I_δ le sous-groupe algébrique fermé de G, engendré par G_δ et $\mathfrak{Z}_{\widetilde{G}}$.

[8] Observons qu'un élément quasi semi-simple δ est primitif si et seulement s'il est elliptique régulier, c'est-à-dire que G_δ est un tore et le sous-tore déployé maximal de G_δ est égal à $A_{\widetilde{G}}$.

où

$$K_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(x,x) = \int_{U_P(\mathbb{A})} \sum_{\delta \in \mathfrak{c} \cap \widetilde{M}_P(F)} \omega(x) f(x^{-1}\delta u x)\,\mathrm{d}u.$$

Quitte à remplacer δ par un conjugué dans $G(F)$, on peut supposer que $\widetilde{M}_\delta$ est un facteur de Levi standard. Pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$, on définit l'ensemble

$$\mathbf{W}(\mathfrak{a}_{\widetilde{M}_\delta}, \widetilde{P}),$$

comme en [25, section 9.3] et on pose

$$j_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(x) = \iota(\delta)^{-1} \sum_{s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_{\widetilde{M}_\delta}, \widetilde{P})} \sum_{\eta \in I_{s(\delta)}(F)\backslash P(F)} \omega(x) f(x^{-1}\eta^{-1}s(\delta)\eta x),$$

où

$$s(\delta) = w_s \delta w_s^{-1} \quad \text{et} \quad \iota(\delta) = |I_\delta(F)\backslash G^\delta(F)|.$$

Enfin on pose

$$j_{\mathfrak{c}}^T(x) = \sum_{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi \in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)\, j_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(\xi x).$$

Observons que la somme sur $\widetilde{P}$ porte en fait sur le sous-ensemble $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}(\delta)$.

Lemme 9.4.1. *On a l'égalité des intégrales*

$$\int_{\mathbf{Y}_G} k_{\mathfrak{c}}^T(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{Y}_G} j_{\mathfrak{c}}^T(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}(\delta)$ tel que l'orbite $\mathfrak{c}$ rencontre $\widetilde{P}(F)$, pour $\widetilde{M}_1 \subset \widetilde{M}_P$ un conjugué de $\widetilde{M}_\delta$, et pour $s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_{\widetilde{M}_\delta}, \mathfrak{a}_{\widetilde{M}_1})$, d'après [31, proposition 3.7.6] le morphime

$$U_P \to U_P, \quad u \mapsto u^{-1}\mathrm{Int}_{s(\delta)}(u)$$

est séparable. Puisque le centralisateur $U_P^{s(\delta)} = U_P \cap G^{s(\delta)}$ est trivial, ce morphisme est un isomorphisme qui induit une application bijective $U_P(\mathbb{A}) \to U_P(\mathbb{A})$. On en déduit l'égalité

$$K_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(x,x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} j_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(ux)\,\mathrm{d}u$$

et le lemme en résulte. ■

Posons

$$\mathcal{A}_{I_\delta} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{H}_{\widetilde{M}_\delta}(I_\delta(\mathbb{A})) \subset \mathcal{A}_{\widetilde{M}_\delta} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{I_\delta} \subset \mathcal{C}_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}.$$

Si le caractère ω de $G(\mathbb{A})$ est trivial sur $I_\delta(\mathbb{A})^1 = \ker(I_\delta(\mathbb{A}) \to \mathcal{A}_{I_\delta})$, il définit, par restriction à $I_\delta(\mathbb{A})$, un caractère de $\mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}}$ de la forme $H \mapsto e^{\langle \mu_\delta, H\rangle}$ pour un élément

$$\mu_\delta \in \ker(\boldsymbol{\mu}_{I_\delta} \to \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}) \subset \boldsymbol{\mu}_{I_\delta} \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\mathcal{A}}_{I_\delta}.$$

On a introduit en section 3.2 la famille orthogonale $\mathfrak{Y}(x, T)$ et on pose

$$\boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x) = \omega(x) \sum_{H \in \mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}}} \Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(H, \mathfrak{Y}(x, T)) e^{\langle \mu_\delta, H\rangle}.$$

Lemme 9.4.2. *La fonction* $T \mapsto \boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x)$ *est dans* PolExp.

Démonstration. On a la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{B}_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}} \to \mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}} \to \mathfrak{c}_{I_\delta} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{M}_\delta} \backslash \mathcal{A}_{I_\delta} \to 0.$$

On note $\mathcal{B}_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(Z) \subset \mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}}$ la fibre au-dessus de $Z \in \mathfrak{c}_{I_\delta}$ et on pose

$$\eta_{\widetilde{M}_\delta, F}^{\widetilde{G}, \mathfrak{Y}(x,T)}(Z; \mu_\delta) = \sum_{H \in \mathcal{B}_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(Z)} \Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(H, \mathfrak{Y}(x, T)) e^{\langle \boldsymbol{\mu}_\delta, H\rangle}.$$

On a donc

$$\boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x) = \omega(x) \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{I_\delta}} \eta_{\widetilde{M}_\delta, F}^{\widetilde{G}, \mathfrak{Y}(x,T)}(Z; \mu_\delta).$$

L'assertion résulte alors de la proposition 2.1.3. ∎

Observons que pour $M \in \mathcal{L}$, $Q \in \mathcal{F}(M)$ et $m \in M(\mathbb{A})$ on a

$$Y_{mx,T,Q} = Y_{x,T,Q} - \mathbf{H}_Q(m)$$

et donc

$$\Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(H, \mathfrak{Y}(mx, T)) = \Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(H + \mathbf{H}_{M_\delta}(m), \mathfrak{Y}(x, T))$$

pour $m \in M_\delta(\mathbb{A})$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x)$ est invariante par translation à gauche par $h \in I_\delta(\mathbb{A})$.

Proposition 9.4.3. *Si* $I_\delta(\mathbb{A})^1 \subset \ker(\omega)$, *on a l'identité*

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} j_c^T(x)\, \mathrm{d}x = \iota(\delta)^{-1} \mathrm{vol}\Big(I_\delta(F) \backslash I_\delta(\mathbb{A})^1\Big) \int_{I_\delta(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} \boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x) f(x^{-1}\delta x)\, \mathrm{d}\dot{x}.$$

L'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_G$ *est nulle sinon.*

Démonstration. Posons

$$e_{\widetilde{M}_\delta}(x,T) = \sum_{s\in\mathbf{W}(\mathfrak{a}_{\widetilde{M}_\delta})} \sum_{\widetilde{Q}\in\mathcal{F}_s(\widetilde{M}_\delta)} (-1)^{a_{\widetilde{Q}}-a_{\widetilde{G}}}\, \widehat{\tau}_{\widetilde{Q}}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(w_s x)-T)).$$

Comme dans la preuve de [25, proposition 9.3.1] on a

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} j_{\mathrm{c}}^T(x)\,\mathrm{d}x = \iota(\delta)^{-1}\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})I_\delta(F)\backslash G(\mathbb{A})} \omega(x)e_{\widetilde{M}_\delta}(x,T)f(x^{-1}\delta x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour que l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_G$ soit non nulle, il faut que $I_\delta(\mathbb{A})^1$ soit inclus dans $\ker(\omega)$. Si tel est le cas, on observe que pour $h\in M_\delta(\mathbb{A})$ on a

$$e_{\widetilde{M}_\delta}(hx,T) = \Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(\mathbf{H}_{M_\delta}(h),\mathfrak{Y}(x,T))$$

et donc que

$$\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})I_\delta(F)\backslash I_\delta(\mathbb{A})} \omega(hx)e_{\widetilde{M}_\delta}(hx,T)\,\mathrm{d}h = \mathrm{vol}(I_\delta(F)\backslash I_\delta(\mathbb{A})^1)\,\boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega,x). \qquad \blacksquare$$

9.5 Sur le développement géométrique fin

Le développement géométrique fin consiste en l'expression des termes du développement géométrique du corollaire 9.1.3 au moyen d'intégrales orbitales pondérées. Les propositions 9.2.3 et 9.4.3 fournissent une telle expression pour les termes primitifs ou quasi semi-simples.

Les autres termes font intervenir des contributions unipotentes et, comme on a vu en section 9.3, la descente centrale ne peut plus être utilisée en général sans modification. On ne peut donc pas espérer pouvoir reprendre sans efforts les travaux d'Arthur, à moins d'imposer à p d'être « suffisament grand » par rapport au rang de G de sorte que[9] :

- pour toute paire primitive $(\widetilde{M},\delta)$, l'élément δ est quasi semi-simple ;
- pour tout $\delta\in\widetilde{G}(F)$, l'automorphisme Int_δ de G est séparable ;
- pour tout $\delta\in\widetilde{G}(F)$ on a une décomposition de Jordan

  $$\delta = \delta_{\mathrm{s}}\delta_{\mathrm{u}} = \delta_{\mathrm{u}}\delta_{\mathrm{s}},$$

  en partie quasi semi-simple δ_s et partie unipotente δ_{u} définie sur F ;

[9] Les hypothèses sont probablement redondantes : il s'agit d'une liste de propriétés toujours vraies pour un corps de nombres mais, en général, fausses pour un corps de fonctions.

- pour tout $\delta \in \widetilde{G}(F)$ quasi semi-simple et tout ensemble fini S de places de F, il n'y a qu'un nombre fini de classes de $G_\delta(F_S)$-conjugaison unipotentes.

Observons que si, comme le fait Arthur, on se limite au cas où un (et donc tout) $\delta \in \widetilde{G}(F)$ induit un automorphisme extérieur d'ordre fini de G, on peut alors demander que le centre schématique Z_G soit réduit et que $\widetilde{G}$ induise un automorphisme de Z_G d'ordre fini premier à p.

Une hypothèse plus forte que les précédentes, mais aussi plus facile à vérifier, est la suivante. On considère $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)$ comme un espace tordu c'est-à-dire que GL_n agit sur lui même par conjugaison. On demande qu'il existe un entier $n < p$ et un F-morphisme d'espaces tordus algébriques

$$\iota : (\widetilde{G}, G) \to (\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)$$

d'image fermée et qui soit un isomorphisme sur son image. Sous ces hypothèses, il doit être possible de reprendre, sans grands changements, les travaux d'Arthur sur le développement géométrique fin : on commence par traiter les contributions unipotentes, c'est-à-dire les paires primitives $(\widetilde{M}, \delta)$ avec δ quasi semi-simple et unipotent ; puis on traite le cas général par descente centrale. Toutefois, cela reste à faire.