Chapitre 10

Première forme du développement spectral

10.1 Convergence : côté spectral

On commence par réécrire l'expression pour $k^T_{\mathrm{spec}}(x)$ définie en section 8.2. Pour $Q, R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on pose

$$k^T_{\mathrm{spec}}(Q,R,x) = \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(x) - T) \sum_{\substack{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}} \\ \widetilde{Q}^+\subset\widetilde{P}\subset\widetilde{R}^-}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \mathbf{\Lambda}^{T,Q}_1 K_{\widetilde{P}}(x,x).$$

On a donc

$$k^T_{\mathrm{spec}}(x) = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}} \\ Q\subset R}} \sum_{\xi\in Q(F)\backslash G(F)} k^T_{\mathrm{spec}}(Q,R,\xi x).$$

On pose

$$\widetilde{\epsilon}(Q,R) = \begin{cases} (-1)^{a_{\widetilde{R}}-a_{\widetilde{G}}} & \text{si } Q^+ \subset R^-, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on note $\widetilde{G}(Q,R)$ l'ensemble des $\delta \in \widetilde{G}(F)$ tels que $\delta \in \widetilde{P}(F)$ pour un seul $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ tel que $\widetilde{Q}^+ \subset \widetilde{P} \subset \widetilde{R}^-$ (autrement dit l'ensemble des $\delta \in \widetilde{R}^-(F)$, tels que $\delta \notin \widetilde{P}(F)$ pour tout $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$, tel que $\widetilde{Q}^+ \subset \widetilde{P} \subsetneq \widetilde{R}^-$). On pose

$$K_{Q,R}(x,y) = \int_{U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in\widetilde{G}(Q,R)} \omega(y) f(x^{-1}u_Q^{-1}\delta y)\,\mathrm{d}u_Q.$$

D'après [25, lemme 10.1.1], on a

(10.1)
$$k^T_{\mathrm{spec}}(x) = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}} \\ Q\subset R}} \widetilde{\epsilon}(Q,R) \sum_{\xi\in Q(F)\backslash G(F)} \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)\mathbf{\Lambda}^{T,Q}_1 K_{Q,R}(x,\xi x).$$

Pour $\delta \in \widetilde{G}(F)$, on a défini $K_{Q,\delta}(x,y)$ dans la proposition 7.3.2, et on pose

$$Q_\delta = Q \cap \mathrm{Int}_\delta^{-1}(Q) \in \mathcal{P}^Q_{\mathrm{st}}.$$

On a donc

(10.2)
$$K_{Q,R}(x,x) = \sum_{\delta\in\widetilde{\mathbf{W}}(Q,R)} \sum_{\xi\in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} K_{Q,\delta}(x,\xi x),$$

où $\widetilde{\mathbf{W}}(Q,R)$ est un ensemble de représentants de $\widetilde{G}(Q,R)$ modulo $Q(F)$ à droite et à gauche, i.e. des doubles classes $Q(F)\backslash\widetilde{G}(Q,R)/Q(F)$. Rappelons que l'on a posé

$$\boldsymbol{Y}_{Q_\delta} = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})Q_\delta(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

Rappelons aussi que l'on a fixé en section 3.4 un sous-ensemble fini $\mathfrak{C}_Q$ de $M_0(\mathbb{A})$ tel que $M_Q(\mathbb{A}) = \mathfrak{B}_Q\mathfrak{C}_Q M_Q(\mathbb{A})^1$ où $\mathfrak{B}_Q \subset A_Q(\mathbb{A})$ est l'image d'une section du morphisme $A_Q(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_Q$. On pose

$$M_Q(\mathbb{A})^* \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{C}_Q M_Q(\mathbb{A})^1 = M_Q(\mathbb{A})^1\mathfrak{C}_Q.$$

On a donc $M_Q(\mathbb{A}) = \mathfrak{B}_Q M_Q(\mathbb{A})^*$. On suppose de plus, ce qui est loisible, que $\mathfrak{B}_Q$ est de la forme

$$\mathfrak{B}_Q = \mathfrak{B}_{\widetilde{G}}\mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}},$$

où $\mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}$ est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_Q(\mathbb{A}) \to A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_Q(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_Q^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{B}_Q$$

et $\mathfrak{B}_{\widetilde{G}}$ est l'image d'une section du morphisme $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_{\widetilde{G}}$. Les lemmes 10.1.2 à 10.1.4 de [25] sont vrais ici, et on a la variante de [25, lemme 10.1.5] :

Lemme 10.1.1. *Soient $\delta \in Q(F)\backslash\widetilde{G}(Q,R)$, $u \in U_Q(\mathbb{A})$, $a \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}$, $k_1, k_2 \in \boldsymbol{K}$ et $m_1, m_2 \in M_Q(\mathbb{A})^*$. Supposons que, pour un $\xi \in Q(F)$, on ait*

$$K_{Q,\delta}(am_1k_1, \xi u a m_2 k_2) \neq 0 \quad \textit{et} \quad \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(a)) = 1.$$

Alors on a

$$\|\mathbf{H}_0(a)\| \leq c(1 + \|\mathbf{H}_0(m_2)\|)$$

pour une constante $c > 0$ ne dépendant que du support de f.

Démonstration. On reprend, en la modifiant, celle de [25, lemme 10.1.5]. On commence par modifier δ et ξ, comme au début de la preuve de *loc. cit.* : on suppose que $\delta = w_{s_0}\delta_0$, où $w_{s_0} \in M_{R^-}(F)$ représente un élément s_0 du groupe de Weyl $\mathbf{W}^{M_{R^-}}$ de M_{R^-} tel que $s_0^{-1}\alpha > 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta_0^Q$, et $\xi \in U_0(F)$. Pour $i = 1, 2$, on écrit $m_i = m_i' x_i$ avec $m_i' \in M_Q(\mathbb{A})^1$ et $x_i \in \mathfrak{C}_Q$. Rappelons que

$$K_{Q,\delta}(x,y) = \int_{U_Q(\mathbb{A})} \omega(x) \sum_{\mu \in M_Q(F)} f(x^{-1}u_Q^{-1}\mu\delta y)\,\mathrm{d}u_Q.$$

On a supposé

$$K_{Q,\delta}(am_1k_1, \xi u a m_2 k_2) \neq 0,$$

ce qui n'est possible que s'il existe un $u_Q \in U_Q(\mathbb{A})$ et un $\mu \in M_Q(F)$ tels que

$$k_1^{-1} x_1^{-1} m_1'^{-1} a^{-1} u_Q^{-1} \mu\delta\xi u a m_2' x_2 k_2$$

appartient au support de f. On en déduit qu'il existe un compact Ω de $G(\mathbb{A})$, ne dépendant que du support de f, tel que

$$m_1'^{-1} a^{-1} u_Q^{-1} \mu\delta\xi u a m_2' \in \Omega.$$

On décompose $H = \mathbf{H}_0(a)$ suivant la décomposition

$$\mathfrak{a}_Q^{\widetilde{G}} = \mathfrak{a}_Q^{R^-} \oplus \mathfrak{b}_{R^-}^{G} \oplus \mathfrak{a}_{\widetilde{R}^-}^{\widetilde{G}} \oplus \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}},$$

où $\mathfrak{b}_{R^-}^G$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\widetilde{R}}^{\widetilde{G}}$ dans $\mathfrak{a}_{R^-}^G$. On rappelle que $\theta - 1 : \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}} \to \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}$ est un automorphisme. Comme dans la preuve de *loc. cit.*, il suffit de considérer les $a \in \mathfrak{B}_Q$ tels que $H \in \mathfrak{a}_Q^{R^-}$ et la suite de la démonstration est identique. ∎

Proposition 10.1.2. *Supposons T assez régulier, c'est-à-dire $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$, où c est une constante dépendant du support de f. Alors pour tous Q, $R \in \mathcal{P}_{\rm st}$ tels que $Q \subset R$ et tout $\delta \in \widetilde{G}(Q, R)$, l'intégrale*

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_\delta}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T) |\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(x,x)| \,\mathrm{d}x$$

est convergente.

Démonstration. C'est l'analogue de [25, proposition 10.1.6]. Rappelons que

$$G(\mathbb{A}) = U_Q(\mathbb{A}) M_Q(\mathbb{A}) \boldsymbol{K}.$$

Puisque $U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})$ est compact, il existe un compact $\Omega \subset U_Q(\mathbb{A})$ tel que $U_Q(\mathbb{A}) = U_Q(F)\Omega$. On a donc

$$G(\mathbb{A}) = Q(F)\Omega\mathfrak{S}^{M_Q}\boldsymbol{K},$$

où

$$\mathfrak{S}^{M_Q} = \mathfrak{B}_Q \mathfrak{S}^{M_Q,*} = (\mathfrak{B}_{\widetilde{G}} \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}})(\mathfrak{E}_Q \mathfrak{S}^{M_Q,1})$$

est un domaine de Siegel pour le quotient $M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})$. On pose $\mathfrak{S}_Q^* = \mathfrak{S}^{M_Q,*}$. Alors $\Omega\,\mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}\,\mathfrak{S}_Q^*\boldsymbol{K}$ est un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_{\widetilde{G}} Q(F)\backslash G(\mathbb{A})$. On est donc ramené à estimer, pour $\delta \in \widetilde{G}(Q, R)$, l'expression

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}} \int_{\Omega \times \mathfrak{S}_Q^* \times \boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_Q(am)^{-1} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T)\,\Xi_{Q,\delta}(uamk) \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k \tag{10.3}$$

avec

$$\Xi_{Q,\delta}(x) = \sum_{\xi \in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} \left|\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(\xi x, \xi x)\right|.$$

D'après [25, lemme 10.1.2], on a

$$\Xi_{Q,\delta}(uamk) = \sum_{\xi \in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} \left|\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(amk, \xi uamk)\right|.$$

On déduit (d'après la définition de $K_{Q,\delta}$) que l'expression (10.3) est égale à

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}} \int_{\Omega \times \mathfrak{S}_Q^* \times \boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_Q(am)^{-1} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T)$$
$$\times \sum_{\xi \in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} \left|\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(mk, \xi a^{1-\delta}(a^{-1}ua)mk)\right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}m\, \mathrm{d}k,$$

avec $a^{1-\delta} = a\mathrm{Int}_\delta^{-1}(a^{-1})$. Notons que $\widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T)$ ne dépend que de la projection $\mathbf{H}_0(a) + \mathbf{H}_Q(m) + T_Q$ de $\mathbf{H}_0(am) - T$ dans $\mathfrak{a}_Q$. Puisque $\mathbf{H}_Q(M_Q(\mathbb{A})^1) = 1$ et $\mathfrak{E}_Q$ est fini, $\mathbf{H}_Q(m)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On en déduit qu'il existe une constante $c_1 > 0$ (ne dépendant que de $\mathfrak{E}_Q$) telle que si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c_1$, alors la condition $\widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T) = 1$ pour un $m \in \mathfrak{S}_Q^*$ entraîne que $\widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(a)) = 1$. D'après le lemme 6.3.1 (i), l'opérateur de troncature fournit un noyau

$$(m_1, m_2) \mapsto \mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(m_1 k, \xi a^{1-\delta}(a^{-1}ua)m_2 k) \tag{10.4}$$

sur $M_Q(\mathbb{A}) \times M_Q(\mathbb{A})$, dont la restriction à $\mathfrak{S}_Q^* \times \mathfrak{S}_Q^*$ est lisse et à support compact, donc bornée. Choisissons un sous-groupe ouvert distingué $\boldsymbol{K}'$ de $\boldsymbol{K}$ tel que la fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ définissant $K_{Q,\delta}$ soit $\boldsymbol{K}'$-bi-invariante. Notons $\boldsymbol{K}'_Q$ le groupe $\boldsymbol{K}' \cap M_Q(\mathbb{A})$. Pour tous a, u, k et ξ, la fonction

$$(m_1, m_2) \mapsto K_{Q,\delta}(m_1 k, \xi a^{1-\delta}(a^{-1}ua)m_2 k),$$

sur $M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A}) \times M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})$, est $(\boldsymbol{K}'_Q \times \boldsymbol{K}'_Q)$-invariante à droite. D'après le lemme 6.3.1 (ii), il existe un compact Ω_2 de $\mathfrak{S}_Q^* \times \mathfrak{S}_Q^*$ tel que pour tous a, u, k et ξ, le support de la restriction à $\mathfrak{S}_Q^* \times \mathfrak{S}_Q^*$ du noyau tronqué (10.4) soit contenu dans Ω_2. Par restriction à la diagonale, on obtient une fonction en $m = m_1 = m_2$ bornée sur $\mathfrak{S}_Q^*$, et à support dans un compact C de $\mathfrak{S}_Q^*$ indépendant de a, u, k et ξ. D'après le lemme 10.1.1 (en supposant $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c_1$), si $\Xi_{Q,\delta}(umak) \neq 0$, alors $\|\mathbf{H}_0(a)^{\widetilde{G}}\| \leq c_2(1 + \|\mathbf{H}_0(m)\|)$ pour une constante $c_2 > 0$. Par conséquent la somme sur $a \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}$ dans (10.3) est finie. D'après [25, lemme 10.1.4], la somme sur ξ dans

$$\sum_{\xi \in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} \left|\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(mk, \xi a^{1-\delta}(a^{-1}ua)mk)\right|,$$

porte sur un ensemble fini, que l'on peut choisir indépendant de a, u, m et k (puisque $x = mk$ et $y = a^{1-\delta}(a^{-1}ua)mk$ varient dans des compacts, cf. la preuve de *loc. cit.*). Cela achève la démonstration. ■

On en déduit l'analogue de [25, proposition 10.1.7] :

Corollaire 10.1.3. *Si $\boldsymbol{d}_0(T) > c$ où c est une constante dépendant du support de f, l'intégrale*

$$\int_{\boldsymbol{X}_G} |k^T_{\mathrm{spec}}(x)|\,\mathrm{d}x$$

est convergente.

Ce corollaire est aussi impliqué par l'identité fondamentale de la proposition 8.2.1 et le théorème 9.1.2.

10.2 Annulations supplémentaires

Nous allons maintenant donner une expression un peu différente pour

$$\mathfrak{J}^T_{\mathrm{spec}} = \int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\mathrm{spec}}(x)\,\mathrm{d}x.$$

De fait, comme dans [25, corollaire 10.2.3], on a des annulations supplémentaires qui sont une première étape essentielle pour le développement spectral fin :

Proposition 10.2.1. *Si T est assez régulier (comme dans le lemme 10.2.1 de [25]), on a*

$$\mathfrak{J}^T_{\mathrm{spec}} = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset R}} \widetilde{\eta}(Q,R) \int_{\boldsymbol{Y}_{Q_{\delta_0}}} \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(x)-T)\boldsymbol{\Lambda}^{T,Q}_1 K_{Q,\delta_0}(x,x)\,\mathrm{d}x \tag{10.5}$$

avec

$$\widetilde{\eta}(Q,R) = \begin{cases} \widetilde{\epsilon}(Q,R) & \textit{si } Q^+ = R^-,\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. Soient Q, $R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels qu'il existe un $\widetilde{P} \in \widetilde{P}_{\mathrm{st}}$ avec $Q \subset P \subset R$. On suppose que les éléments de $\widetilde{\mathbf{W}}(Q,R)$ sont de la forme $\delta = w_s$ où $w_s \in \widetilde{M}_{R^-}(F)$ est un représentant de $s = s_0 \rtimes \theta_0$ avec $s_0 \in \mathbf{W}^{M_{R^-}}$ de longueur minimale dans sa double classe $\mathbf{W}^{M_Q}\backslash\mathbf{W}^{M_{R^-}}/\mathbf{W}^{M_Q}$. On a donc $s\alpha > 0$ et $s^{-1}\alpha > 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta^Q_0$, et $M_s = Q_\delta \cap M_Q$ est un sous-groupe parabolique standard de M_Q (cf. [25, section 10.2]). On note S l'élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $S \cap M_Q = M_S$, et on pose $U^Q_S = U_S \cap M_Q$. Le lemme 10.2.1 et la proposition 10.2.2 de [25] sont vrais ici. Cela implique que si T est assez régulier (comme dans [25, lemme 10.2.1]), alors pour $Q,\ R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $Q \subset R$, seul l'élément $\delta \in \widetilde{\mathbf{W}}(Q, R)$ appartenant à la double classe $Q(F)\delta_0 Q(F)$ donne une contribution non triviale à l'intégrale de k^T_{spec} exprimé au moyen des équations (10.1) et (10.2). ■

Dans le cas non tordu la formule est beaucoup plus simple, puisque la condition $1 \in \mathbf{W}(Q, R)$ implique $Q = R$, et que $\sigma_Q^Q = 0$ sauf si $Q = G$ [25, lemme 2.11.4]. On a donc, dans le cas non tordu, et pour T assez régulier

$$\mathfrak{J}^T_{\mathrm{spec}} = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G} \boldsymbol{\Lambda}_1^{T,G} K_G(x, x)\, \mathrm{d}x.$$