Chapitre 11

Formule des traces : propriétés formelles

11.1 Le polynôme asymptotique

Rappelons que l'on a la décomposition

$$k^T_{\text{géom}}(x) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} k^T_{\mathfrak{o}}(x)$$

et l'identité fondamentale de la proposition 8.2.1

$$k^T_{\text{géom}}(x) = k^T_{\text{spec}}(x).$$

Pour $\bullet$ = spec, géom ou $\mathfrak{o}$, on écrira parfois

$$k^{\widetilde{G},T}_{\bullet}(f,\omega;x) \quad \text{en place de} \quad k^T_{\bullet}(x),$$

s'il est nécessaire de préciser les données. On a vu dans le théorème 9.1.2 et dans le corollaire 10.1.3 que l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\bullet}(x)\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente. En particulier on a la décomposition

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\bullet}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{Z\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}} \int_{\boldsymbol{Y}_G(Z)} k^T_{\bullet}(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\boldsymbol{Y}_G(Z)$ est l'image dans $\boldsymbol{Y}_G$ de l'ensemble $\{g\in G(\mathbb{A})\,|\,\mathbf{H}_{\widetilde{G}}(g) = Z'\}$ pour un relèvement (quelconque) Z' de Z dans $\mathcal{A}_{\widetilde{G}}$. La fonction $f\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ étant fixée, on considère, pour chaque $\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$, la fonction $f_{\widetilde{Q}}\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\widetilde{M}_Q(\mathbb{A}))$, définie par

$$f_{\widetilde{Q}}(m) = \int_{U_Q(\mathbb{A})\times\boldsymbol{K}} f(k^{-1}muk)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k.$$

On a la suite exacte courte

$$0\to\mathcal{B}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{Q}}\to\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{Q}}\to\mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}\to 0$$

et pour $Z\in\mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}$ et T, $X\in\mathfrak{a}_0$, on a posé (cf. proposition 2.1.3)

$$\eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{Q},F}(Z;X) = \sum_{H\in\mathcal{B}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{Q}}(Z)} \Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{Q}}(H-X,T),$$

où $\mathcal{B}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}(Z)$ est la fibre au-dessus de $Z \in \mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}$. On a la variante de [25, théorème 11.1.1] :

Théorème 11.1.1. *Pour* $\bullet =$ spec, géom *ou* $\mathfrak{o}$, *Il existe une fonction*

$$T \mapsto \mathfrak{J}_\bullet^T = \mathfrak{J}_\bullet^{\widetilde{G},T}(f,\omega)$$

dans PolExp *telle que si* $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c(f)$ *pour une constante* $c(f)$*, ne dépendant que du support de* f*, on ait*

$$\mathfrak{J}_\bullet^T = \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_\bullet^T(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On reprend celle de [25, théorème 11.1.1]. D'après [25, lemme 8.2.1], pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ on a

$$k_{\widetilde{P},\mathrm{spec}}^T(x) = \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(\mathbf{H}_0(x) - T)K_{\widetilde{P}}(x,x) = k_{\widetilde{P},\mathrm{g\acute{e}om}}^T(x).$$

On a donc

$$k_\bullet^T(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)K_{\widetilde{P},\bullet}(\xi x, \xi x),$$

où

$$K_{\widetilde{P},\mathrm{spec}} = K_{\widetilde{P}} = K_{\widetilde{P},\mathrm{g\acute{e}om}}$$

est introduit en section 8.2 et $K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}$ a été défini en section 9.1. Comme dans la démonstration de [25, théorème 11.1.1], pour T et $X \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ assez réguliers, on obtient

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} k_\bullet^{T+X}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{P}_{\mathrm{st}}} \int_{\boldsymbol{Y}_Q} \Gamma_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}(\mathbf{H}_0(x) - X, T)k_{\widetilde{Q},\bullet}^X(x)\,\mathrm{d}x$$

avec

$$k_{\widetilde{Q},\bullet}^X(x) = \sum_{\{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}|\widetilde{P}\subset\widetilde{Q}\}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash Q(F)} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{Q}}}\hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbf{H}_0(\xi x) - X)K_{\widetilde{P},\bullet}(\xi x, \xi x).$$

Fixons un $\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$. Puisque $\mathrm{vol}(A_{\widetilde{G}}(F)\backslash A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})^1) = 1$, on peut remplacer l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_Q$ par une intégrale sur

$$\boldsymbol{Y}'_Q = \mathfrak{B}_{\widetilde{G}}Q(F)\backslash G(\mathbb{A}),$$

où $\mathfrak{B}_{\widetilde{G}}$ est l'image d'une section du morphisme $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_{\widetilde{G}}$. Notons $\mathfrak{B}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}$ l'image d'une section du morphisme composé

$$A_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}) \to A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{B}_{\widetilde{Q}}$$

et posons

$$\mathfrak{B}_{\widetilde{Q}} = \mathfrak{B}_{\widetilde{G}} \mathfrak{B}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}, \quad \boldsymbol{Y}''_Q = \mathfrak{B}_{\widetilde{Q}} Q(F) \backslash G(\mathbb{A}).$$

Pour $Z \in \mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}$, notons $\boldsymbol{Y}''_Q(Z)$ l'image de l'ensemble $\{g \in G(\mathbb{A}) \,|\, \mathbf{H}_{\widetilde{Q}}(g) = Z'\}$ dans $\boldsymbol{Y}''_Q$, où Z' est un relèvement de Z dans $\mathcal{A}_{\widetilde{Q}}$. On obtient que

$$\int_{\boldsymbol{Y}_Q} \Gamma_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}(\mathbf{H}_0(x) - X, T) k_{\widetilde{Q},\bullet}^X(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}} \eta_{\widetilde{Q},F}^{\widetilde{G},T}(Z; X) \int_{\boldsymbol{Y}''_Q(Z)} k_{\widetilde{Q},\bullet}^X(x)\, \mathrm{d}x$$

avec

$$\int_{\boldsymbol{Y}''_Q(Z)} k_{\widetilde{Q},\bullet}^X(x)\, \mathrm{d}x = \int_{[\mathfrak{B}_{\widetilde{Q}} M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})](Z)} k_\bullet^{\widetilde{M}_Q,X}(f_{\widetilde{Q}}, \omega; m)\, \mathrm{d}m.$$

Pour $\bullet = \mathfrak{o}$, le terme $k_\bullet^{\widetilde{M}_Q,X}(f_Q, \omega; m)$ est défini en remplaçant dans la définition de $k_{\mathfrak{o}}^{\widetilde{G},X}$ l'ensemble $G(F)$-invariant $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$ par l'ensemble $M_Q(F)$-invariant $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_Q(F)$. Ce dernier correspond à une union finie (éventuellement vide) de classes de paires primitives dans $\widetilde{M}_Q$. La finitude résulte du lemme 3.4.1. Comme plus haut, on peut remplacer l'intégrale sur $[\mathfrak{B}_{\widetilde{Q}} M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})](Z)$ par une intégrale sur $\boldsymbol{Y}_{M_Q}(Z)$. En posant

$$\mathfrak{J}_\bullet^{\widetilde{G},X}(f, \omega) = \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_\bullet^X(f, \omega; x)\, \mathrm{d}x,$$

on a donc

$$\mathfrak{J}_\bullet^{\widetilde{G},T+X}(f, \omega) = \sum_{\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}} \eta_{\widetilde{Q},F}^{\widetilde{G},T}(Z; X)\, \mathfrak{J}_\bullet^{\widetilde{M}_Q,X}(Z; f_{\widetilde{Q}}, \omega)$$

avec

$$\mathfrak{J}_\bullet^{\widetilde{M}_Q,X}(Z; f_{\widetilde{Q}}, \omega) = \int_{\boldsymbol{Y}_{M_Q}(Z)} k_\bullet^{\widetilde{M}_Q,X}(f_{\widetilde{Q}}, \omega; m)\, \mathrm{d}m.$$

D'où le résultat puisque d'après la proposition 2.1.3 les fonctions $T \mapsto \eta_{\widetilde{Q},F}^{\widetilde{G},T}(Z; X)$ appartiennent à PolExp. ■

11.2 Action de la conjugaison

Pour $y \in G(\mathbb{A})$, on note f^y la fonction $f \circ \mathrm{Int}_y$. Soient $y \in G(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. Pour $\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ et $Z \in \mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}$, considérons la fonction dans $C_{\mathrm{c}}^\infty(\widetilde{M}_Q(\mathbb{A}))$ définie par

$$m \mapsto f_{\widetilde{Q},y}^T(Z; m) = \int_{U_Q(\mathbb{A}) \times \boldsymbol{K}} f(k^{-1} m u k) \eta_{\widetilde{Q},F}^{\widetilde{G},-\mathbf{H}_0(ky)}(Z; T)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}k$$

avec

$$\eta^{\widetilde{G},X}_{\widetilde{Q},F}(Z;T) = \sum_{H\in\mathcal{B}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{Q}}(Z)} \Gamma_{\widetilde{Q}}(H-T,X).$$

Proposition 11.2.1. *Soient* $y \in G(\mathbb{A})$ *et* $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. *Pour* $\bullet =$ spec, géom *ou* $\mathfrak{o}$ *et pour* T *assez régulier, on a*

$$\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}_{\bullet}(f^y,\omega) = \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \sum_{Z\in\mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}} \mathfrak{J}^{\widetilde{M}_Q,T}_{\bullet}(f^T_{\widetilde{Q},y}(Z),\omega).$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème 11.1.1. Commençons par remplacer f par f^y et x par xy dans l'expression pour $k^T_\bullet(x)$. On obtient

$$k^T_\bullet(f^y,\omega;xy) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(\mathbf{H}_0(\xi xy)-T)K_{\widetilde{P},\bullet}(\xi x,\xi x),$$

où $K_{\widetilde{P},\bullet}(x',x') = K_{\widetilde{P},\bullet}(f,\omega;x',x')$. Si $x' = u_0 m_0 k$ est une décomposition d'Iwasawa de $x' \in G(\mathbb{A})$, avec $u_0 \in U_0(\mathbb{A})$, $m_0 \in M_0(\mathbb{A})$ et $k = k_{x'} \in \boldsymbol{K}$, alors on a

$$\mathbf{H}_0(x'y) = \mathbf{H}_0(m_0) + \mathbf{H}_0(ky) = \mathbf{H}_0(x') + \mathbf{H}_0(ky).$$

D'après [25, proposition 2.9.4 (2)], on en déduit que

$$k^T_\bullet(f^y,\omega;xy) = \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \sum_{\eta\in Q(F)\backslash G(F)} \Gamma_{\widetilde{Q}}(\mathbf{H}_0(\eta x)-T,-\mathbf{H}_0(k_{\eta x}y))k^T_{\widetilde{Q},\bullet}(\eta x),$$

où $k^T_{\widetilde{Q},\bullet}(x') = k^T_{\widetilde{Q},\bullet}(f,\omega;x')$, puis, grâce au changement de variable $x \mapsto xy$, que pour $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ assez régulier, on a

$$\text{(11.1)} \qquad \int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_\bullet(f^y,\omega,x) = \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \int_{\boldsymbol{Y}_Q} \Gamma_{\widetilde{Q}}(\mathbf{H}_0(x)-T,-\mathbf{H}_0(k_x y))k^T_{\widetilde{Q},\bullet}(x)\,\mathrm{d}x.$$

On obtient ensuite (comme dans la preuve du théorème 11.1.1) que, toujours pour $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ assez régulier, le terme à gauche de l'égalité dans (11.1) vaut

$$\text{(11.2)} \qquad \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \sum_{Z\in\mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}} \int_{\boldsymbol{Y}''_Q(Z)} \eta^{\widetilde{G},-\mathbf{H}_0(k_x y)}_{\widetilde{Q},F}(Z;T)k^T_{\widetilde{Q},\bullet}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de la définition de $f_{\widetilde{Q},y}$ et de la décomposition d'Iwasawa pour $G(\mathbb{A})$, on obtient que l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}''_Q(Z)$ dans (11.2) est égale à

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{M_Q}(Z)} k^{\widetilde{M}_Q,T}_{\bullet}(f^T_{\widetilde{Q},y}(Z),\omega;m)\,\mathrm{d}m.$$

D'où la proposition. ∎

11.3 La formule des traces : première forme

D'après le théorème 11.1.1, pour tout réseau $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, la restriction à $\mathcal{R}$ de la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\bullet}^{\widetilde{G},T}(f,\omega)$ est de la forme

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{R},\bullet}^{\widetilde{G},T}(f,\omega) = \sum_{\nu\in\widehat{\mathcal{R}}} p_{\mathcal{R},\nu}(\bullet,f,\omega;T)\, e^{\langle T,\nu\rangle},$$

où les $p_{\mathcal{R},\nu}(\bullet,f,\omega;T)$ sont des polynômes en T. D'après les propositions 1.7.4 et 2.1.3 les polynômes $p_{\mathcal{R}_k,0}(\bullet,f,\omega;T)$ ont une limite lorsque $k\to\infty$ et on pose

$$\boldsymbol{J}_{\bullet}^{\widetilde{G}}(f,\omega) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(\bullet,f,\omega;T_0).$$

Théorème 11.3.1. *On a l'identité :*

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} \boldsymbol{J}_{\mathfrak{o}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \boldsymbol{J}_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{G}}(f,\omega).$$

Pour M_0 et $\boldsymbol{K}$ fixés, elle est indépendante du choix de P_0.

Démonstration. Par intégration de l'identité fondamentale de la proposition 8.2.1, ce qui a un sens compte tenu du théorème 9.1.2 et de la proposition 10.2.1, on obtient l'identité

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} \mathfrak{J}_{\mathcal{R},\mathfrak{o}}^{\widetilde{G},T}(f,\omega) = \mathfrak{J}_{\mathcal{R},\,\mathrm{spec}}^{\widetilde{G},T}(f,\omega).$$

L'indépendance du choix de P_0, lorsque l'on prend $T=T_0$, se prouve comme dans [25, proposition 11.3.1]. Le théorème en résulte par passage à la limite. ∎

C'est l'analogue du théorème 11.3.2 de [25]. Le reste de l'ouvrage est consacré au calcul de la limite $\boldsymbol{J}_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{G}}(f,\omega)$. L'étude des limites $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{o}}^{\widetilde{G}}(f,\omega)$ des termes géométriques fera l'objet d'un article ultérieur.