

Chapitre 11

Formule des traces : propriétés formelles

11.1 Le polynôme asymptotique

Rappelons que l'on a la décomposition

$$k_{\text{géom}}^T(x) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{D}} k_{\mathfrak{o}}^T(x)$$

et l'identité fondamentale de la proposition 8.2.1

$$k_{\text{géom}}^T(x) = k_{\text{spec}}^T(x).$$

Pour $\bullet = \text{spec}$, géom ou \mathfrak{o} , on écrira parfois

$$k_{\bullet}^{\tilde{G}, T}(f, \omega; x) \text{ en place de } k_{\bullet}^T(x),$$

s'il est nécessaire de préciser les données. On a vu dans le théorème 9.1.2 et dans le corollaire 10.1.3 que l'intégrale

$$\int_{Y_G} k_{\bullet}^T(x) dx$$

est absolument convergente. En particulier on a la décomposition

$$\int_{Y_G} k_{\bullet}^T(x) dx = \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{G}}} \int_{Y_G(Z)} k_{\bullet}^T(x) dx,$$

où $Y_G(Z)$ est l'image dans Y_G de l'ensemble $\{g \in G(\mathbb{A}) \mid \mathbf{H}_{\tilde{G}}(g) = Z'\}$ pour un relèvement (quelconque) Z' de Z dans $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. La fonction $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}))$ étant fixée, on considère, pour chaque $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}$, la fonction $f_{\tilde{Q}} \in C_c^\infty(\tilde{M}_{\tilde{Q}}(\mathbb{A}))$, définie par

$$f_{\tilde{Q}}(m) = \int_{U_{\tilde{Q}}(\mathbb{A}) \times \mathbf{K}} f(k^{-1}muk) du dk.$$

On a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}} \rightarrow \mathcal{C}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}} \rightarrow \mathfrak{c}_{\tilde{Q}} \rightarrow 0$$

et pour $Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}$ et $T, X \in \mathfrak{a}_0$, on a posé (cf. proposition 2.1.3)

$$\eta_{\tilde{Q}, F}^{\tilde{G}, T}(Z; X) = \sum_{H \in \mathcal{B}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(Z)} \Gamma_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(H - X, T),$$

où $\mathcal{B}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(Z)$ est la fibre au-dessus de $Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{G}}$. On a la variante de [25, théorème 11.1.1] :

Théorème 11.1.1. *Pour $\bullet = \text{spec}$, géom ou \mathfrak{o} , Il existe une fonction*

$$T \mapsto \mathfrak{Z}_{\bullet}^T = \mathfrak{Z}_{\bullet}^{\tilde{G}, T}(f, \omega)$$

dans PolExp telle que si $\mathbf{d}_0(T) \geq c(f)$ pour une constante $c(f)$, ne dépendant que du support de f , on ait

$$\mathfrak{Z}_{\bullet}^T = \int_{Y_G} k_{\bullet}^T(x) dx.$$

Démonstration. On reprend celle de [25, théorème 11.1.1]. D'après [25, lemme 8.2.1], pour $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}$ on a

$$k_{\tilde{P}, \text{spec}}^T(x) = \hat{t}_{\tilde{P}}(\mathbf{H}_0(x) - T) K_{\tilde{P}}(x, x) = k_{\tilde{P}, \text{géom}}^T(x).$$

On a donc

$$k_{\bullet}^T(x) = \sum_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} (-1)^{a_{\tilde{P}} - a_{\tilde{G}}} \sum_{\xi \in P(F) \setminus G(F)} \hat{t}_{\tilde{P}}(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) K_{\tilde{P}, \bullet}(\xi x, \xi x),$$

où

$$K_{\tilde{P}, \text{spec}} = K_{\tilde{P}} = K_{\tilde{P}, \text{géom}}$$

est introduit en section 8.2 et $K_{\tilde{P}, \mathfrak{o}}$ a été défini en section 9.1. Comme dans la démonstration de [25, théorème 11.1.1], pour T et $X \in \mathfrak{a}_{0, \mathbb{Q}}$ assez réguliers, on obtient

$$\int_{Y_G} k_{\bullet}^{T+X}(x) dx = \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} \int_{Y_Q} \Gamma_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\mathbf{H}_0(x) - X, T) k_{\tilde{Q}, \bullet}^X(x) dx$$

avec

$$k_{\tilde{Q}, \bullet}^X(x) = \sum_{\{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}} \mid \tilde{P} \subset \tilde{Q}\}} \sum_{\xi \in P(F) \setminus Q(F)} (-1)^{a_{\tilde{P}} - a_{\tilde{Q}}} \hat{t}_{\tilde{P}}^{\tilde{Q}}(\mathbf{H}_0(\xi x) - X) K_{\tilde{P}, \bullet}(\xi x, \xi x).$$

Fixons un $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}$. Puisque $\text{vol}(A_{\tilde{G}}(F) \backslash A_{\tilde{G}}(\mathbb{A})^1) = 1$, on peut remplacer l'intégrale sur Y_Q par une intégrale sur

$$Y'_Q = \mathfrak{B}_{\tilde{G}} Q(F) \backslash G(\mathbb{A}),$$

où $\mathfrak{B}_{\tilde{G}}$ est l'image d'une section du morphisme $A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{G}}$. Notons $\mathfrak{B}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}$ l'image d'une section du morphisme composé

$$A_{\tilde{Q}}(\mathbb{A}) \rightarrow A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}) \backslash A_{\tilde{Q}}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}} = \mathcal{B}_{\tilde{G}} \backslash \mathcal{B}_{\tilde{Q}}$$

et posons

$$\mathfrak{B}_{\tilde{Q}} = \mathfrak{B}_{\tilde{G}} \mathfrak{B}_{\tilde{Q}}, \quad Y''_Q = \mathfrak{B}_{\tilde{Q}} Q(F) \backslash G(\mathbb{A}).$$

Pour $Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}$, notons $Y''_Q(Z)$ l'image de l'ensemble $\{g \in G(\mathbb{A}) \mid \mathbf{H}_{\tilde{Q}}(g) = Z'\}$ dans Y''_Q , où Z' est un relèvement de Z dans $\mathcal{A}_{\tilde{Q}}$. On obtient que

$$\int_{Y_Q} \Gamma_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\mathbf{H}_0(x) - X, T) k_{\tilde{Q}, \bullet}^X(x) dx = \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}} \eta_{\tilde{Q}, F}^{\tilde{G}, T}(Z; X) \int_{Y''_Q(Z)} k_{\tilde{Q}, \bullet}^X(x) dx$$

avec

$$\int_{Y''_Q(Z)} k_{\tilde{Q}, \bullet}^X(x) dx = \int_{[\mathfrak{B}_{\tilde{Q}} M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})](Z)} k_{\bullet}^{\tilde{M}_Q, X}(f_{\tilde{Q}}, \omega; m) dm.$$

Pour $\bullet = \mathfrak{o}$, le terme $k_{\bullet}^{\tilde{M}_Q, X}(f_{\tilde{Q}}, \omega; m)$ est défini en remplaçant dans la définition de $k_{\mathfrak{o}}^{\tilde{G}, X}$ l'ensemble $G(F)$ -invariant $\mathfrak{O}_{\mathfrak{o}}$ par l'ensemble $M_Q(F)$ -invariant $\mathfrak{O}_{\mathfrak{o}} \cap \tilde{M}_Q(F)$. Ce dernier correspond à une union finie (éventuellement vide) de classes de paires primitives dans \tilde{M}_Q . La finitude résulte du lemme 3.4.1. Comme plus haut, on peut remplacer l'intégrale sur $[\mathfrak{B}_{\tilde{Q}} M_Q(F) \backslash M_Q(\mathbb{A})](Z)$ par une intégrale sur $Y_{M_Q}(Z)$. En posant

$$\mathfrak{J}_{\bullet}^{\tilde{G}, X}(f, \omega) = \int_{Y_G} k_{\bullet}^X(f, \omega; x) dx,$$

on a donc

$$\mathfrak{J}_{\bullet}^{\tilde{G}, T+X}(f, \omega) = \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}} \eta_{\tilde{Q}, F}^{\tilde{G}, T}(Z; X) \mathfrak{J}_{\bullet}^{\tilde{M}_Q, X}(Z; f_{\tilde{Q}}, \omega)$$

avec

$$\mathfrak{J}_{\bullet}^{\tilde{M}_Q, X}(Z; f_{\tilde{Q}}, \omega) = \int_{Y_{M_Q}(Z)} k_{\bullet}^{\tilde{M}_Q, X}(f_{\tilde{Q}}, \omega; m) dm.$$

D'où le résultat puisque d'après la proposition 2.1.3 les fonctions $T \mapsto \eta_{\tilde{Q}, F}^{\tilde{G}, T}(Z; X)$ appartiennent à PolExp. ■

11.2 Action de la conjugaison

Pour $y \in G(\mathbb{A})$, on note f^y la fonction $f \circ \text{Int}_y$. Soient $y \in G(\mathbb{A})$ et $T \in \alpha_{\mathfrak{o}, \mathbb{Q}}$. Pour $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}$ et $Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}$, considérons la fonction dans $C_c^\infty(\tilde{M}_Q(\mathbb{A}))$ définie par

$$m \mapsto f_{\tilde{Q}, y}^T(Z; m) = \int_{U_Q(\mathbb{A}) \times \mathbf{K}} f(k^{-1} muk) \eta_{\tilde{Q}, F}^{\tilde{G}, -\mathbf{H}_0(ky)}(Z; T) du dk$$

avec

$$\eta_{\tilde{Q},F}^{\tilde{G},X}(Z;T) = \sum_{H \in \mathcal{B}_{\tilde{Q}}(Z)} \Gamma_{\tilde{Q}}(H - T, X).$$

Proposition 11.2.1. Soient $y \in G(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. Pour $\bullet = \text{spec}$, géom ou \circ et pour T assez régulier, on a

$$\mathfrak{S}_{\bullet}^{\tilde{G},T}(f^y, \omega) = \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}} \mathfrak{S}_{\bullet}^{\tilde{M}_{\tilde{Q}},T}(f_{\tilde{Q},y}^T(Z), \omega).$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème 11.1.1. Commençons par remplacer f par f^y et x par xy dans l'expression pour $k_{\bullet}^T(x)$. On obtient

$$k_{\bullet}^T(f^y, \omega; xy) = \sum_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} (-1)^{a_{\tilde{P}} - a_{\tilde{G}}} \sum_{\xi \in P(F) \setminus G(F)} \hat{t}_{\tilde{P}}(\mathbf{H}_0(\xi xy) - T) K_{\tilde{P},\bullet}(\xi x, \xi x),$$

où $K_{\tilde{P},\bullet}(x', x') = K_{\tilde{P},\bullet}(f, \omega; x', x')$. Si $x' = u_0 m_0 k$ est une décomposition d'Iwasawa de $x' \in G(\mathbb{A})$, avec $u_0 \in U_0(\mathbb{A})$, $m_0 \in M_0(\mathbb{A})$ et $k = k_{x'} \in \mathbf{K}$, alors on a

$$\mathbf{H}_0(x'y) = \mathbf{H}_0(m_0) + \mathbf{H}_0(ky) = \mathbf{H}_0(x') + \mathbf{H}_0(ky).$$

D'après [25, proposition 2.9.4 (2)], on en déduit que

$$k_{\bullet}^T(f^y, \omega; xy) = \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} \sum_{\eta \in Q(F) \setminus G(F)} \Gamma_{\tilde{Q}}(\mathbf{H}_0(\eta x) - T, -\mathbf{H}_0(k_{\eta x y})) k_{\tilde{Q},\bullet}^T(\eta x),$$

où $k_{\tilde{Q},\bullet}^T(x') = k_{\tilde{Q},\bullet}^T(f, \omega; x')$, puis, grâce au changement de variable $x \mapsto xy$, que pour $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ assez régulier, on a

$$(11.1) \quad \int_{Y_G} k_{\bullet}^T(f^y, \omega, x) = \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} \int_{Y_Q} \Gamma_{\tilde{Q}}(\mathbf{H}_0(x) - T, -\mathbf{H}_0(k_{x y})) k_{\tilde{Q},\bullet}^T(x) dx.$$

On obtient ensuite (comme dans la preuve du théorème 11.1.1) que, toujours pour $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ assez régulier, le terme à gauche de l'égalité dans (11.1) vaut

$$(11.2) \quad \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}} \int_{Y''_Q(Z)} \eta_{\tilde{Q},F}^{\tilde{G},-\mathbf{H}_0(k_{x y})}(Z;T) k_{\tilde{Q},\bullet}^T(x) dx.$$

Compte tenu de la définition de $f_{\tilde{Q},y}$ et de la décomposition d'Iwasawa pour $G(\mathbb{A})$, on obtient que l'intégrale sur $Y''_Q(Z)$ dans (11.2) est égale à

$$\int_{Y_{M_Q}(Z)} k_{\bullet}^{\tilde{M}_{\tilde{Q}},T}(f_{\tilde{Q},y}^T(Z), \omega; m) dm.$$

D'où la proposition. ■

11.3 La formule des traces : première forme

D'après le théorème 11.1.1, pour tout réseau \mathcal{R} de $\alpha_{0,\mathbb{Q}}$, la restriction à \mathcal{R} de la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\bullet}^{\tilde{G},T}(f, \omega)$ est de la forme

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{R},\bullet}^{\tilde{G},T}(f, \omega) = \sum_{\nu \in \widehat{\mathcal{R}}} p_{\mathcal{R},\nu}(\bullet, f, \omega; T) e^{(T,\nu)},$$

où les $p_{\mathcal{R},\nu}(\bullet, f, \omega; T)$ sont des polynômes en T . D'après les propositions 1.7.4 et 2.1.3 les polynômes $p_{\mathcal{R}_k,0}(\bullet, f, \omega; T)$ ont une limite lorsque $k \rightarrow \infty$ et on pose

$$\mathbf{J}_{\bullet}^{\tilde{G}}(f, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(\bullet, f, \omega; T_0).$$

Théorème 11.3.1. *On a l'identité :*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{D}} \mathbf{J}_{\mathfrak{o}}^{\tilde{G}}(f, \omega) = \mathbf{J}_{\text{spec}}^{\tilde{G}}(f, \omega).$$

Pour M_0 et K fixés, elle est indépendante du choix de P_0 .

Démonstration. Par intégration de l'identité fondamentale de la proposition 8.2.1, ce qui a un sens compte tenu du théorème 9.1.2 et de la proposition 10.2.1, on obtient l'identité

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{D}} \mathfrak{J}_{\mathcal{R},\mathfrak{o}}^{\tilde{G},T}(f, \omega) = \mathfrak{J}_{\mathcal{R}, \text{spec}}^{\tilde{G},T}(f, \omega).$$

L'indépendance du choix de P_0 , lorsque l'on prend $T = T_0$, se prouve comme dans [25, proposition 11.3.1]. Le théorème en résulte par passage à la limite. ■

C'est l'analogie du théorème 11.3.2 de [25]. Le reste de l'ouvrage est consacré au calcul de la limite $\mathbf{J}_{\text{spec}}^{\tilde{G}}(f, \omega)$. L'étude des limites $\mathbf{J}_{\mathfrak{o}}^{\tilde{G}}(f, \omega)$ des termes géométriques fera l'objet d'un article ultérieur.