Chapitre 12

Estimées uniformes des développements spectraux

12.1 La formule de départ

Soit $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. On pose

$$Q' = \theta_0^{-1}(Q), \quad Q_0 = Q \cap Q'.$$

Rappelons que l'on a posé

$$\boldsymbol{Y}_{Q_0} = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})Q_0(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

Pour $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}$, on note $n^{Q'}(S)$ le nombre de chambres dans $\mathfrak{a}_S^{Q'}$. Pour $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}$, $\sigma \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{Q',\mathbb{C}}$, on a défini en section 7.2 un opérateur

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega) = \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta_0, f, \omega) : \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma)),$$

et on a fixé une base orthonormale $\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$ de l'espace pré-hilbertien $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$. Pour $\Psi \in \boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$, posons

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(x,y) = \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(x, \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\Psi, \theta_0\mu)\overline{E^{Q'}(y,\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu$$

et

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y) = \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y,y).$$

La convergence de l'intégrale est claire puisque $\boldsymbol{\mu}_S$ est compact. Observons que, par définition, on a

$$\sum_{\Psi \in \boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(x,y) = \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,Q',\sigma}(x,y;\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

On a la variante suivante de [25, proposition 12.1.1] :

Proposition 12.1.1. *Pour $T \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c(f)$, on a*

$$\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T} = \sum_{\substack{Q,R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}} \\ Q \subset R}} \widetilde{\eta}(Q,R) \int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T) \times \left(\sum_{S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}} \frac{1}{n^{Q'}(S)} \sum_{\sigma \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M_S)} \widehat{c}_{M_S}(\sigma) \sum_{\Psi \in \boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y) \right) \mathrm{d}y.$$

Démonstration. Elle est identique à celle de *loc. cit.*, compte-tenu de la formule de la proposition 10.2.1 et de l'expression pour le noyau $K_{Q,\delta_0,\chi}$, donnée par la proposition 7.3.2. ■

D'après la proposition 7.3.2, l'ensemble des (σ, Ψ), tels que $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f, \omega)\Psi \neq 0$, est fini. Donc, seul un nombre fini de termes non nuls apparaissent dans l'expression de $\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}$. L'expression $\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}$ est une combinaison linéaire finie d'intégrales itérées (en y et en μ)

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T)\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y)\,\mathrm{d}y. \tag{12.1}$$

A priori, la proposition n'affirme que la convergence des intégrales dans l'ordre indiqué, et pas la convergence absolue de l'intégrale multiple.

Pour $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$ et $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$, on considérera aussi les expressions suivantes :

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x, y) = \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(x, \Phi, \theta_0\mu)\overline{E^{Q'}(y, \Psi, \mu)}\,\mathrm{d}\mu$$

et

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(y) = \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(y, y).$$

À nouveau, la convergence de l'intégrale est claire, puisque $\boldsymbol{\mu}_S$ est compact.

Remarque 12.1.2. On observe que pour $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$, on peut écrire

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f, \omega)\Psi = \sum_{\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))} \vartheta_{\Phi,\Psi}(\mu)\Phi,$$

où la somme porte sur un ensemble fini et où les $\vartheta_{\Phi,\Psi}$ sont des fonctions lisses sur le groupe compact $\boldsymbol{\mu}_S$. On voit donc que l'expression $\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y)$, introduite plus haut, est une combinaison linéaire finie d'expressions du type

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi;\vartheta}(y) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(y, \Phi, \theta_0\mu)\overline{E^{Q'}(y, \Psi, \mu)}\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu,$$

où $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$ ne dépend pas de μ et où ϑ est une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_S$. Pour l'étude de la convergence des intégrales itérées (12.1), il suffira de considérer celle des

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T)\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi;\vartheta}(y)\,\mathrm{d}y. \tag{12.2}$$

Pour prouver la convergence de (12.2), on peut remplacer la fonction ϑ par le sup de sa valeur absolue et, à un scalaire près, on peut supposer que ce sup vaut 1. On est donc ramené à prouver la convergence des intégrales itérées

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y)-T)\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(y)\,\mathrm{d}y. \tag{12.3}$$

En revanche pour effectuer le calcul exact de (12.1), il faut effectuer le calcul exact de (12.2) pour n'importe quel ϑ.

12.2 Estimations

Pour $H \in \mathcal{A}_{Q_0}$, soit $M_{Q_0}(\mathbb{A}; H)$ l'ensemble des $m \in M_{Q_0}(\mathbb{A})$ tels que

$$\mathbf{H}_{Q_0}(m) = H.$$

On note $\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)$ l'image de $U_{Q_0}(\mathbb{A}) \times M_{Q_0}(\mathbb{A}; H) \times \boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{Y}_{Q_0}$. On pose

$$\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{A}_{Q_0}.$$

Observons que $\mathbf{H}_{Q_0}$ envoie $\boldsymbol{Z}_{Q_0} = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})A_{Q_0}(F)\backslash A_{Q_0}(\mathbb{A})$ sur un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$. L'intégrale itérée (12.1) est égale à

$$\sum_{H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(H_Q - T) \int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)} \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Les estimations [25, lemme 12.2.1] et [25, proposition 12.2.3] sont valables ici, *mutatis mutandis*. On rappelle que $\mathfrak{S}^*$ est un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, où $\mathfrak{B}_G$ est l'image d'une section du morphisme $A_G(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_G$.

Lemme 12.2.1. *Soit $h \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathfrak{S}^*$, on ait*

$$\sum_{\delta \in \mathfrak{B}_G G(F)} |h(x^{-1}\delta y)| < c\,\delta_{P_0}(x)^{1/2}\delta_{P_0}(y)^{1/2}.$$

Démonstration. Elle est identique à celle de [25, lemme 12.2.1]. Pour passer du groupe U_R à son algèbre de Lie $\mathfrak{u}_R$, on utilise, comme dans la preuve de la proposition de la section 9.1, l'existence d'un F-isomorphisme de variétés algébriques $\mathfrak{u}_R \to U_R$ compatible avec l'action de A_R. ∎

On fixe $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}$, une représentation automorphe $\sigma \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$, et des vecteurs $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$ et $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$. On pose

$$L = M_Q, \quad L' = M_{Q'}, \quad L_0 = M_{Q_0}.$$

On fixe un domaine de Siegel $\mathfrak{S}^{L,*}$ pour le quotient $\mathfrak{B}_Q L(F)\backslash L(\mathbb{A})$. On suppose que $\mathfrak{B}_Q \subset A_Q(\mathbb{A})$ est de la forme

$$\mathfrak{B}_Q = \mathfrak{B}_G \mathfrak{B}_Q^G,$$

où $\mathfrak{B}_Q^G \subset A_Q(\mathbb{A})$ est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_Q(\mathbb{A}) \to A_G(\mathbb{A})\backslash A_Q(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_Q^G.$$

On fixe aussi un compact $\Omega_Q \subset U_Q(\mathbb{A})$ tel que $U_Q(\mathbb{A}) = U_Q(F)\Omega$ et l'on pose

$$\mathfrak{S}_Q^G = \Omega_Q \mathfrak{B}_Q^G \mathfrak{S}^{L,*} \boldsymbol{K}.$$

C'est un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_G Q(F)\backslash G(\mathbb{A})$. On fixe, de la même manière, un domaine de Siegel $\mathfrak{S}_{Q'}^G = \Omega_{Q'} \mathfrak{B}_{Q'}^G \mathfrak{S}^{L',*} \boldsymbol{K}$ pour $\mathfrak{B}_G Q'(F)\backslash G(\mathbb{A})$.

Proposition 12.2.2. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathfrak{S}_Q^G \times \mathfrak{S}_{Q'}^G$, on ait*

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} |E^Q(x, \Phi, \theta_0\mu)\overline{E^{Q'}(y, \Psi, \mu)}|\, \mathrm{d}\mu < c\, \delta_{P_0}(x)^{1/2}\delta_{P_0}(y)^{1/2}.$$

Démonstration. Comme dans [25, proposition 12.2.3] on se ramène à prouver qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathfrak{S}^*$, on ait

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} |E^G(y, \Psi, \mu)|^2\, \mathrm{d}\mu < c\, \delta_{P_0}(y).$$

On choisit un sous-groupe ouvert compact $\boldsymbol{K}'$ de $G(\mathbb{A})$ tel que la fonction Ψ soit invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, et on considère le noyau

$$K_G(e_{\boldsymbol{K}'}; y, y) = \sum_{\delta \in \mathfrak{B}_G G(F)} e_{\boldsymbol{K}'}(y^{-1}\delta y).$$

Son expression spectrale est une somme de termes tous positifs ou nuls, et l'un d'eux est l'intégrale ci-dessus. On conclut, grâce au lemme 12.2.1. ∎

Corollaire 12.2.3. *Pour tout $(x, y) \in G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})$, l'intégrale définissant*

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x, y)$$

est absolument convergente. De plus, il existe $c, D > 0$ et un sous-ensemble compact C_Q de $\mathfrak{S}^{L,*}$ tels que, pour tout $x \in \mathfrak{B}_Q^G \mathfrak{S}^{L,*}\boldsymbol{K}$ et tout $y \in G(\mathbb{A})$, en écrivant $x = ask$ avec $a \in \mathfrak{B}_Q^G$, $s \in \mathfrak{S}^{L,*}$ et $k \in \boldsymbol{K}$, on ait

$$|\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x, y)| \le c\, |a|^D |y|^D,$$

si $s \in C_Q$, et $\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x, y) = 0$ sinon.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{K}'$ un sous-groupe ouvert compact distingué de $\boldsymbol{K}$ tel que la fonction ϕ soit invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$. D'après la proposition 4.2.1, il existe un sous-ensemble compact C_Q de $\mathfrak{S}^{L,*}$ tel que pour tout $(a,k) \in \mathfrak{B}_Q^G \times \boldsymbol{K}$ et tout $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, le support de la fonction sur $\mathfrak{S}^{L,*}$

$$h \mapsto \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(ask, \Phi, \theta_0(\mu))$$

soit contenu dans C_Q. D'autre part pour $y \in G(\mathbb{A})$, il existe un $g \in \mathfrak{B}_G Q'(F)$ tel que $gy \in \mathfrak{S}_{Q'}^G$. On procède comme dans la preuve de [25, proposition 12.2.4], en remarquant que puisque la fonction $\boldsymbol{\delta}_{P_0}$ est à croissance lente, $\boldsymbol{\delta}_{P_0}(x)^{1/2}\boldsymbol{\delta}_{P_0}(gy)^{1/2}$ est essentiellement majoré par $|a|^D|y|^D$. ■

A priori nous ne pouvons rien dire ici sur le centre, c'est pourquoi nous nous sommes limités aux

$$x \in \mathfrak{B}_Q^G \mathfrak{S}^{L,*} \boldsymbol{K}.$$

Pour $y = x$, on en déduira en section 12.3 des estimations pour $x \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}} \mathfrak{S}^{L,*} \boldsymbol{K}$.

12.3 Convergence d'une intégrale itérée

On suppose ici que T est un élément régulier de $\mathfrak{a}_0^G$ tel que[1] $\theta_0(T) = T$. On suppose de plus que pour tout $\alpha \in \Delta_0$, on a

$$0 < \alpha(T) \leq \kappa\, \boldsymbol{d}_0(T)$$

pour une constante $\kappa > 0$ assez grande. Dans un tel cône, les fonctions $\boldsymbol{d}_0(T)$, $\|T\|$ et $\alpha(T)$ sont équivalentes, pour tout $\alpha \in \Delta_0$.

Fixons des vecteurs Ψ et Φ, comme ci-dessus. Pour alléger l'écriture, posons

$$\mathfrak{J}(x,y) = \mathfrak{J}_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x,y) \quad \text{et} \quad \mathfrak{J}(y) = \mathfrak{J}(y,y).$$

On veut prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T)|\mathfrak{J}(y)|\,\mathrm{d}y, \tag{12.4}$$

[1] Cette condition peut sembler inadéquate, dès lors qu'on aura *in fine* à évaluer un élément de PolExp en $T_0 \in \mathcal{A}_0^G$ qui n'est *a priori* pas θ_0-invariant. Mais comme l'élément de PolExp à évaluer ne dépend que de l'image de $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G$ dans le sous-espace $a_{\widetilde{M}_0,\mathbb{Q}}^{\widetilde{G}} = (\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G)^{\theta_0}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G$ formé des éléments θ_0-invariants, cette condition n'est pas vraiment gênante.

ou, ce qui est équivalent, de l'expression

$$\sum_{H\in\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}^R_Q(H_Q - T)\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)} |\mathfrak{J}(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{12.5}$$

L'intégration sur $\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)$ se décompose en une intégration sur le produit

$$U_{Q_0}(F)\backslash U_{Q_0}(\mathbb{A}) \times \boldsymbol{X}^{\widetilde{G}}_{L_0}(H) \times \boldsymbol{K},$$

où $\boldsymbol{X}^{\widetilde{G}}_{L_0}(H)$ est l'image de $L_0(\mathbb{A}; H')$ dans $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})L_0(F)\backslash L_0(\mathbb{A})$ pour un relèvement $H' \in \mathcal{A}_{Q_0}$ de $H \in \mathcal{C}^{\widetilde{G}}_{Q_0}$. Par ailleurs, la fonction que l'on intègre est invariante à gauche par le groupe $U_Q(\mathbb{A}) \cap U_{Q'}(\mathbb{A})$. Posons $U^L_{Q_0} = U_Q \cap L$ et $U^{L'}_{Q_0} = U_{Q_0} \cap L'$. L'application naturelle

$$U_{Q_0} \to U^L_{Q_0} \times U^{L'}_{Q_0}$$

induit un isomorphime

$$U_{Q_0}(F)(U_Q(\mathbb{A}) \cap U_{Q'}(\mathbb{A}))\backslash U_{Q_0}(\mathbb{A}) \to U^L_{Q_0}(F)\backslash U^L_{Q_0}(\mathbb{A}) \times U^{L'}_{Q_0}(F)\backslash U^{L'}_{Q_0}(\mathbb{A}).$$

On peut donc remplacer dans (12.5) la variable y par $uu'xk$ avec

$$u \in U^L_{Q_0}(F)\backslash U^L_{Q_0}(\mathbb{A}), \quad u' \in U^{L'}_{Q_0}(F)\backslash U^{L'}_{Q_0}(\mathbb{A}), \quad x \in \boldsymbol{X}^{\widetilde{G}}_{L_0}(H) \quad \text{et} \quad k \in \boldsymbol{K}.$$

La mesure $\mathrm{d}y$ se transforme alors en

$$\delta_{Q_0}(x)^{-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k$$

et on a $\mathbf{H}_{Q_0}(x) = \mathbf{H}_{Q_0}(y) = H$. On obtient

$$\mathfrak{J}(uu'xk) = \mathfrak{J}(uxk, u'xk). \tag{12.6}$$

On a la variante suivante du lemme 12.3.1 de [25] :

Lemme 12.3.1. *Il existe un sous-ensemble fini $\omega \subset \mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_Q$ indépendant de T tel que si $\mathfrak{J}(uu'xk)$ est non nul, alors $q_Q(H) = ((1-\theta_0)H)^{\widetilde{G}}_Q$ appartient à ω.*

Démonstration. Via le choix d'une section de la surjection $\mathcal{A}_M \to \mathcal{A}_{Q'}$, on dispose d'un isomorphisme $\boldsymbol{\mu}_M = \boldsymbol{\mu}_{Q'} \times \boldsymbol{\mu}^{Q'}_S$ et l'intégration sur $\boldsymbol{\mu}_S$ se décompose en une intégrale double :

$$\mathfrak{J}(uu'xk) = \int_{\boldsymbol{\mu}^{Q'}_S}\int_{\boldsymbol{\mu}_{Q'}} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(uxk, \Phi, \theta_0(\mu_{Q'} + \mu^{Q'}))$$
$$\times \overline{E^{Q'}(u'xk, \Psi, \mu_{Q'} + \mu^{Q'})}\,\mathrm{d}\mu_{Q'}\,\mathrm{d}\mu^{Q'}.$$

Soit $\mathfrak{B}_{Q_0} \subset A_{Q_0}(\mathbb{A})$ un sous-groupe de la forme

$$\mathfrak{B}_{Q_0} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q} \mathfrak{B}_{Q} \ (= \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q} \mathfrak{B}_{Q}^{G} \mathfrak{B}_{G}),$$

où $\mathfrak{B}_{Q_0}^{Q} \subset A_{Q_0}(\mathbb{A})$ est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_{Q_0}(\mathbb{A}) \to A_Q(\mathbb{A}) \backslash A_{Q_0}(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_{Q_0}^{Q}.$$

Notons $\mathfrak{S}^{L_0,*} = \mathfrak{E}_{L_0} \mathfrak{S}^{L_0,1}$ un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_{Q_0} L_0(F) \backslash L_0(\mathbb{A})$ (cf. section 3.4).

Fixons de la même manière un sous-groupe $\mathfrak{B}'_{Q_0} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q'} \mathfrak{B}_{Q'} \subset A_{Q_0}(\mathbb{A})$. On ne peut pas en général s'arranger pour que $\mathfrak{B}_{Q_0} = \mathfrak{B}'_{Q_0}$, mais puisque $\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0}$ est d'indice fini dans $\mathfrak{B}_{Q_0}$, quitte à grossir $\mathfrak{E}_{L_0}$, on peut toujours supposer que

$$L_0(\mathbb{A}) = (\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0}) L_0(F) \mathfrak{S}^{L_0,*}.$$

On suppose aussi que $\mathfrak{B}_G$ est de la forme $\mathfrak{B}_G = \mathfrak{B}_G^{\tilde{G}} \mathfrak{B}_{\tilde{G}}$, où $\mathfrak{B}_G^{\tilde{G}} \subset A_G(\mathbb{A})$ est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_G(A) \to A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}) \backslash A_G(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_G^{\tilde{G}} = \mathcal{B}_{\tilde{G}} \backslash \mathcal{B}_G$$

et l'on pose

$$\mathfrak{B}_{Q_0}^{\tilde{G}} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{\tilde{G}} \mathfrak{B}_{Q}^{\tilde{G}} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q} \mathfrak{B}_{Q}^{G} \mathfrak{B}_{G}^{\tilde{G}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}'^{\tilde{G}}_{Q_0} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q'} \mathfrak{B}_{Q'}^{\tilde{G}} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q'} \mathfrak{B}_{Q'}^{G} \mathfrak{B}_{G}^{\tilde{G}}.$$

Choisissons un relèvement de $x \in \boldsymbol{X}_{L_0}^{\tilde{G}}(H)$ dans $L_0(\mathbb{A}; H')$ et écrivons $x = zas$ avec $z \in \mathfrak{B}_{\tilde{G}} L_0(F)$, $a \in (\mathfrak{B}_{Q_0}^{\tilde{G}} \cap \mathfrak{B}'^{\tilde{G}}_{Q_0})$ et $s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}$. On décompose a sous la forme

$$a = a_Q a^Q = a_{Q'} a^{Q'}$$

avec $a_Q \in \mathfrak{B}_{Q}^{\tilde{G}}$, $a^Q \in \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q}$, $a_{Q'} \in \mathfrak{B}_{Q'}^{\tilde{G}}$ et $a^{Q'} \in \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q'}$. Posons $H_0 = \mathbf{H}_{Q_0}(a)$. Comme dans la démonstration de [25, lemme 12.3.1], on obtient que

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(uu'xk) = \delta_Q^{1/2}(a_Q)\delta_{Q'}^{1/2}(a_{Q'}) \int_{\boldsymbol{\mu}_{Q'}} e^{\langle \theta_0(\mu_{Q'}), (H_0)_Q \rangle - \langle \mu_{Q'}, (H_0)_{Q'} \rangle} \, \mathrm{d}\mu_{Q'} \\ \times \int_{\boldsymbol{\mu}_S^{Q'}} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(ua^Q sk, \Phi, \theta_0(\mu^{Q'})) \overline{E^{Q'}(u'a^{Q'}sk, \Psi, \mu^{Q'})} \, \mathrm{d}\mu^{Q'}.\end{aligned}$$

Or

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_{Q'}} e^{\langle \theta_0(\mu_{Q'}), (H_0)_Q \rangle - \langle \mu_{Q'}, (H_0)_{Q'} \rangle} \, \mathrm{d}\mu_{Q'} = \int_{\boldsymbol{\mu}_{Q'}} e^{\langle \mu_{Q'}, \theta_0^{-1}((H_0)_Q) - (H_0)_{Q'} \rangle} \, \mathrm{d}\mu_{Q'}$$

et cette intégrale n'est non nulle que si $\theta_0^{-1}((H_0)_Q) - (H_0)_{Q'} = 0$. Pour que $\mathfrak{J}(uu'xk)$ soit non nul, il faut donc que

$$(\mathbf{H}_Q(x) - \theta_0(\mathbf{H}_{Q'}(x)))^{\widetilde{G}} = (H - \theta_0(H))_Q^{\widetilde{G}} = (\mathbf{H}_Q(s) - \theta_0(\mathbf{H}_{Q'}(s)))^{\widetilde{G}}.$$

Maintenant, on observe que l'ensemble

$$\omega = \{(\mathbf{H}_Q(s) - \theta_0(\mathbf{H}_{Q'}(s)))^{\widetilde{G}} \,|\, s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}\} \subset \mathfrak{a}_Q^{\widetilde{G}}$$

est fini et le lemme en résulte. ∎

Proposition 12.3.2. *Pour $T \in (\mathfrak{a}_0^G)^{\theta_0}$, l'expression*

$$\sum_{H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(H_Q - T) \int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)} |\mathfrak{J}_{Q,Q';\Phi,\Psi}^T(y)| \,\mathrm{d}y$$

est convergente et la somme sur H est finie.

Démonstration. Il s'agit de prouver que pour $H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$, la fonction

$$(u, u', x, k) \mapsto \widetilde{\sigma}_Q^R(H - T)\delta_{Q_0}(x)^{-1}\mathfrak{J}(uu'xk)$$

est absolument intégrable sur

$$U_{Q_0}^L(F)\backslash U_{Q_0}^L(\mathbb{A}) \times U_{Q_0}^{L'}(F)\backslash U_{Q_0}^{L'}(\mathbb{A}) \times \boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H) \times \boldsymbol{K}$$

et qu'elle est nulle, sauf pour un nombre fini de H. On procède comme dans la preuve de [25, proposition 12.3.2]. On commence par découper le domaine de sommation en H, grâce à la partition de [25, lemme 1.7.5] appliquée au couple $(P, R) = (Q_0, Q)$: on peut fixer un $P' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q_0 \subset P' \subset Q$ et imposer que

$$\phi_{Q_0}^{P'}(H - T)\tau_{P'}^Q(H - T) = 1.$$

On s'intéresse donc aux $H \in \mathfrak{a}_{Q_0}$ tels que

$$\widetilde{\sigma}_Q^R(H - T)\phi_{Q_0}^{P'}(H - T)\tau_{P'}^Q(H - T) = 1, \quad q_Q(H) \in \omega. \tag{12.7}$$

D'après [25, lemme 2.13.3] (l'exposant G est ici remplacé par un exposant $\widetilde{G}$, voir section 2.2), pour H vérifiant (12.7), on a

$$\|H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0}\| \ll 1 + \|(H - T)_{P'}^Q\| \tag{12.8}$$

d'où

$$\|H^{\widetilde{G}}\| \ll 1 + \|H_{P'}^Q\|. \tag{12.9}$$

Les constantes implicites dans (12.8) et (12.9) dépendent de T. Au lieu d'intégrer sur $x \in \boldsymbol{X}_{L_0}^{\tilde{G}}(H)$, on peut choisir un relèvement $H' \in \mathcal{A}_{Q_0}$ de $H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$ et intégrer sur $x \in ((\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0})\mathfrak{S}^{L_0,*}) \cap L_0(\mathbb{A}; H')$. De même, on peut faire varier (u, u') dans un compact $\Omega_{Q_0}^{L} \times \Omega_{Q_0}^{L'}$ de $U_{Q_0}^{L}(\mathbb{A}) \times U_{Q_0}^{L'}(\mathbb{A})$. On écrit[2] $x = zas$ avec

$$z \in \mathfrak{B}_{\tilde{G}} L_0(F), \quad a \in (\mathfrak{B}_{Q_0}^{\tilde{G}} \cap \mathfrak{B}'^{\tilde{G}}_{Q_0}) \quad \text{et} \quad s \in \mathfrak{S}^{L_0,*},$$

et on décompose a en $a = a_Q a^Q = a_{Q'} a^{Q'}$ comme dans la preuve du lemme 12.3.1. Pour $u \in \Omega_{Q_0}^{L}$, $u' \in \Omega_{Q_0}^{L'}$ et $k \in \boldsymbol{K}$, en supposant que $a_Q^{-1}\theta_0(a_{Q'})$ appartient à $A_{\tilde{G}}(\mathbb{A})A_Q(\mathbb{A})^1$ – sinon $\mathfrak{J}(uu'xk) = 0$ (cf. la preuve de *loc. cit.*) –, on a

$$\mathfrak{J}(uu'xk) = \boldsymbol{\delta}_Q(a_Q)\mathfrak{J}(ua^Q sk, u'a^{Q'} sk).$$

Quitte à grossir $\mathfrak{E}_Q$, on peut supposer que $L_0(\mathbb{A})^* = \mathfrak{E}_{Q_0} L_0(\mathbb{A})^1$ est contenu dans $L_Q(\mathbb{A})^* = \mathfrak{E}_Q L_Q(\mathbb{A})^1$. Alors pour chaque $u \in \Omega_{Q_0}^{L}$, on peut choisir un $\gamma \in L(F)$ tel que

$$y_1 = \gamma u a^Q s \in \mathfrak{S}^{L,*} = \mathfrak{E}_Q \mathfrak{S}^{L,1}.$$

D'après le corollaire 12.2.3, il existe c, $D > 0$ et un compact C_L dans $\mathfrak{S}^{L,*}$ tel que pour tout $k \in \boldsymbol{K}$, tout $u \in \Omega_{Q_0}^{L}$ et tout $u' \in \Omega_{Q_0}^{L'}$, on ait $\mathfrak{J}(y_1 k, u'a^{Q'} sk) = 0$ si $y_1 \notin C_L$ et

$$|\mathfrak{J}(y_1 k, u'a^{Q'} sk)| \leq c\,|u'a^{Q'} s|^D \quad \text{sinon.}$$

Comme dans la preuve de [25, proposition 12.3.2], on obtient

$$\|H_{P'}^{Q}\| + \|\mathbf{H}_0(s)\| \ll 1 + \|\mathbf{H}_0(y_1)\|. \tag{12.10}$$

Pour $y_1 \in C_L$, d'après (12.9) et (12.10), $\|H^{\tilde{G}}\|$ et $\|\mathbf{H}_0(s)\|$ sont bornés. On en déduit que H varie dans un sous-ensemble fini de $\mathfrak{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$. D'autre part s appartient à $\mathfrak{S}^{L_0,*}$ et $\|\mathbf{H}_0(s)\|$ est borné, par conséquent $|s|$ est borné. On obtient que

$$\boldsymbol{\delta}_{Q_0}(x)^{-1}|\mathfrak{J}(u'uxk)| \ll 1.$$

D'où la proposition, puisque l'ensemble

$$\Omega_{Q_0}^{L} \times \Omega_{Q_0}^{L'} \times ((\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0})\mathfrak{S}^{L_0,*} \cap L_0(\mathbb{A}; H)) \times \boldsymbol{K}$$

est de volume fini. ■

[2] Notons que notre s joue le rôle du x de la démonstration de [25, proposition 12.3.2].

12.4 Transformation de l'opérateur de troncature

Pour calculer l'expression

$$\sum_{H\in\mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(H_Q-T)\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)} \mathfrak{J}_{Q,Q';\Phi,\Psi;\vartheta}^T(y)\,\mathrm{d}y, \tag{12.11}$$

où ϑ est une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_S$, on décompose l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)$ comme en section 12.3. On peut permuter l'intégrale sur le groupe compact

$$U_{Q_0^L}(F)\backslash U_{Q_0^L}(\mathbb{A})\times U_{Q_0^{L'}}(F)\backslash U_{Q_0^{L'}}(\mathbb{A})$$

avec celle sur le groupe (lui aussi compact) $\boldsymbol{\mu}_S$. Pour $(x,k)\in \boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)\times\boldsymbol{K}$, la composée de ces deux intégrales est égale à

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} (\boldsymbol{\Lambda}^{T,Q}E^Q)_{Q_0}(xk,\Phi,\theta_0(\mu))\overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu, \tag{12.12}$$

où l'indice Q_0 signifie que l'on prend le terme constant le long de Q_0. D'après [25, lemme 4.1.1], cette expression (12.12) n'est non nulle que si

$$\phi_{Q_0}^Q(H-T)=1.$$

Cela entraîne que dans le découpage suivant les $P'\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q_0\subset P'\subset Q$ dans la preuve de la proposition 12.3.2, seul le domaine correspondant à $P'=Q$ donne une contribution non nulle. D'après (12.8), il existe $c>0$ tel que pour les H vérifiant

$$\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T)=1,\quad q_Q(H)\in\omega$$

on ait

$$\|H^{\widetilde{G}}-T_{Q_0}\|\leq c. \tag{12.13}$$

Le point est qu'ici la constante c est indépendante de T (d'après [25, lemme 2.13.3] et le lemme 12.3.1). En particulier, puisque $T_{Q_0}\in\mathfrak{a}_{Q_0}^G$, on a

$$H^{\widetilde{G}}-T_{Q_0}=H_G^{\widetilde{G}}+(H^G-T_{Q_0})$$

et $\|H_G^{\widetilde{G}}\|$ est borné par une constante indépendante de T. Fixons un réel η tel que $0<\eta<1$. Si T est assez régulier, la condition (12.13) entraîne

$$\|H^Q-T_{Q_0}^Q\|\leq\|\eta T\|. \tag{12.14}$$

Pour $T \in \mathfrak{a}_0$, on note[3] κ^T la fonction caractéristique du sous-ensemble des $X \in \mathfrak{a}_0$ tels que $\|X\| \leq \|T\|$. D'après [25, lemme 4.2.2] il existe $c' > 0$, tel que si

$$\boldsymbol{d}_0(T) \geq c'(c+1),$$

l'expression (12.12) multipliée par $\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)$ vaut[4]

$$\kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q)\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T)$$
$$\times \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^Q(xk,\Phi,\theta_0(\mu))\overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu$$

si $\|H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0}\| \leq c$, et elle est nulle sinon. Ce dernier point résulte de l'analogue de la preuve de (12.8) pour l'expression ci-dessus. Notons que pour H vérifiant $\phi_{Q_0}^G(H-T) = 1$, l'élément

$$T[\![H^Q]\!] = T[\![H^Q]\!]^{Q_0} \in \mathfrak{a}_{P_0}^{Q_0}$$

est « plus régulier » que T^{Q_0} : en effet, d'après [25, lemme 4.2.1], on a

$$\boldsymbol{d}_{P_0\cap L_0}^{L_0}(T[\![H^Q]\!]) \geq \boldsymbol{d}_{P_0\cap L_0}^{L_0}(T^{Q_0}) \geq \boldsymbol{d}_0(T).$$

On a donc prouvé la proposition suivante.

Proposition 12.4.1. *Il existe $c, c' > 0$ tel que pour tout $T \in (\mathfrak{a}_0^G)^{\theta_0}$ vérifiant $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c'(c+1)$, l'expression (12.11) soit égale à*

$$\sum_{H\in\mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q)\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T)e^{-\langle 2\rho_{Q_0},H\rangle}$$
$$\times \int_{\boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)\times\boldsymbol{K}} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^Q(xk,\Phi,\theta_0(\mu))\overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k.$$

La somme sur $\mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$ ne fait intervenir que des H tels que $\|H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0}\| \leq c$.

On a aussi l'analogue de [25, proposition 12.5.1] :

[3]Observons que la fonction κ^T utilisée ici n'est pas tout-à-fait la même que celle de [25], puisque nous ne passons pas au quotient par le centre.

[4]Il faut supprimer le signe $(-1)^{a_Q - a_G}$ dans la formule du lemme 4.2.2 de [25]. Voir **Err** (iii) de l'annexe.

Proposition 12.4.2. *Pour $H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$, on considère l'expression*
(12.15)
$$\int_{\boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)\times\boldsymbol{K}} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} |\boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^{Q}(xk,\Phi,\theta_0(\mu)) \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)} \vartheta(\mu)|\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k.$$

On suppose que T est dans le cône introduit en section 12.3 et que $\boldsymbol{d}_0(T)$ est assez grand. On a les assertions suivantes :

(i) *Si $\phi_{Q_0}^{Q}(H-T)=1$, l'expression (12.15) est convergente.*

(ii) *Il existe η_0 avec $0<\eta_0<1$ tel que si $0<\eta<\eta_0$, alors il existe $c>0$ tel que, pour tout $T\in(\mathfrak{a}_0^G)^{\theta_0}$ et tout $H\in\mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$ vérifiant*

$$\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T)\kappa^{\eta T}(H^Q-T_{Q_0}^Q)=1,$$

l'expression (12.15) soit majorée par $c\,e^{\langle 2\rho_{Q_0},H\rangle}\boldsymbol{d}_0(T)^{\dim(\mathfrak{a}_0^{Q_0})}$.

Démonstration. On reprend celle de *loc. cit.* On veut majorer l'intégrale intérieure dans (12.15). Pour cela on peut supposer $\vartheta\equiv 1$ (cf. la remarque 12.1.2). Comme dans la preuve de [25, proposition 12.2.3], on se ramène grâce à l'inégalité de Schwartz à majorer deux types d'intégrales :

$$(12.16)\qquad \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^{Q}(xk,\Phi,\theta_0(\mu)) \overline{\boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^{Q}(xk,\Phi,\theta_0(\mu))}\,\mathrm{d}\mu$$

et

$$(12.17)\qquad \int_{\boldsymbol{\mu}_S} E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)\overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu.$$

Commençons par majorer l'intégrale (12.17). Rappelons que l'on a fixé en section 12.2 un domaine de Siegel $\mathfrak{S}_{Q'}^G=\Omega_{Q'}\mathfrak{B}_{Q'}^G\mathfrak{S}^{L',*}\boldsymbol{K}$ pour le quotient $\mathfrak{B}_G Q'(F)\backslash G(\mathbb{A})$. Soit $h^{Q'}$ la fonction sur $Q'(F)\backslash G(\mathbb{A})/\boldsymbol{K}$ définie par

$$h^{Q'}(y)=\sum_{\delta\in Q'(F)} \boldsymbol{\delta}_{P_0}(\delta y)^{1/2}\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{Q'}^G}(\delta y).$$

On a

$$h^{Q'}(y)\ll\boldsymbol{\delta}_{P_0}(y)^{1/2}\ll h^{Q'}(y)\quad\text{pour}\quad y\in\mathfrak{S}_{Q'}^G.$$

D'après la proposition 12.2.2, pour $b\in\mathfrak{B}_G$ et $y,\,y'\in Q'(F)\mathfrak{S}_{Q'}^G$, l'intégrale
(12.18)
$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} E^{Q'}(by,\Psi,\mu)\overline{E^{Q'}(by',\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu=\int_{\boldsymbol{\mu}_S} E^{Q'}(y,\Psi,\mu)\overline{E^{Q'}(y',\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu$$

est essentiellement majorée par $h^{Q'}(y)h^{Q'}(y')$. Ensuite on prend le terme constant en chacune des variables $y,\,y'$. Cette opération, qui consiste à intégrer sur un compact, commute à l'intégrale sur $\boldsymbol{\mu}_S$. Puis on prend $y=y'=a^G sk$ avec $k\in\boldsymbol{K}$,

$s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}$, $x = as \in L_0(\mathbb{A}; H')$ pour un relèvement $H' \in \mathcal{A}_{Q_0}$ de $H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$ et $a = a_G a^G \in \mathfrak{B}_G \mathfrak{B}_{Q_0}^G$ (on peut même supposer $a^G \in \mathfrak{B}_{Q_0}^G \cap \mathfrak{B}_{Q_0}'^G$ comme dans la démonstration de la proposition 12.3.2). L'intégrale (12.17) est donc essentiellement majorée par

$$h_{Q_0}^{Q'}(y)^2 = h_{Q_0}^{Q'}(a^G s)^2.$$

Comme la fonction $h^{Q'}$ est à croissance lente, son terme constant $h_{Q_0}^{Q'}$ l'est aussi. L'intégrale (12.17) est donc essentiellement majorée par $|a^G s|^D$ pour $D > 0$ assez grand. L'intégrale (12.16) se déduit, elle aussi, de (12.18) en prenant les termes constants le long de Q_0, puis en appliquant l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0}$, et enfin en posant $y = y' = a^G sk$. Quand on prend les termes constants, on obtient une expression essentiellement majorée par

$$h_{Q_0}^{Q}(y) h_{Q_0}^{Q}(y').$$

Rappelons que l'hypothèse $\phi_{Q_0}^{Q}(H - T) = 1$ assure que l'élément $T[\![H^Q]\!] \in \mathfrak{a}_{P_0}^{Q_0}$ est régulier. D'après la proposition 4.2.1, il existe un sous-ensemble compact Ω de $\mathfrak{S}^{L_0,*}$ tel que si $\mathbf{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} h_{Q_0}^{Q}(a^G sk) \neq 0$, alors $s \in \Omega$. Comme

$$\mathbf{H}_{Q_0}(x)^G = \mathbf{H}_{Q_0}(a^G) + \mathbf{H}_{Q_0}(s)^G = H^G$$

et que H est fixé, a^G reste dans un ensemble fini de $\mathfrak{B}_{Q_0}^G$. D'où le point (i). Prouvons (ii). On suppose que l'hypothèse

$$\widetilde{\sigma}_Q^R(H - T)\phi_{Q_0}^Q(H - T)\kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q) = 1 \tag{12.19}$$

est vérifiée[5]. On peut prendre x dans un domaine de Siegel $\mathfrak{S}^{L_0} = \mathfrak{B}_{L_0}\mathfrak{S}^{L_0,*}$. On écrit $x = as$ avec $a \in \mathfrak{B}_{Q_0}$ et $s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}$. Si η est assez petit, l'hypothèse (12.19) implique, comme dans la preuve de [25, proposition 12.5.1] (majoration (4), page 170), qu'il existe une constante $D > 0$, telle que

$$h_{Q_0}^{Q}(a^G s) \ll \delta_{Q_0}(a)^{\frac{1}{2}} |s|^D.$$

Mais cette majoration est inutile ici, on peut directement passer à la page 172. Notons $\mathbf{C}$ l'opérateur qui multiplie une fonction sur $\boldsymbol{Y}_{Q_0}$ par la fonction

$$x \mapsto F_{P_0}^{Q_0}(x, T[\![H^Q]\!])$$

[5] Si η est assez petit, l'hypothèse (12.19) implique $\tau_{Q_0}^{P}(H) = 1$, où $\widetilde{P}$ est l'unique élément de $\widetilde{\mathcal{P}}_{\rm st}$ vérifiant la double inclusion $Q' \subset P \subset R$ (cf. [25, page 171]). En particulier, cela entraîne $\tau_{Q_0}^{Q'}(H) = 1$ et $\tau_{Q_0}^{Q}(H) = 1$.

et décomposons l'opérateur $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0}$ en

$$(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{C}) + \mathbf{C}.$$

Rappelons que $T[\![H^Q]\!]$ est « plus régulier » que T. D'après la proposition 4.2.2, si T est assez régulier, on peut remplacer l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0}$ par $\mathbf{C}$ dans l'intégrale intérieure de l'expression (12.15). Il nous faut donc majorer l'intégrale

$$I_{\mathbf{C}}(xk) = \int_{\boldsymbol{\mu}_S} F_{P_0}^{Q_0}(ask, T[\![H^Q]\!]) E_{Q_0}^Q(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \overline{E_{Q_0}^Q(xk, \Phi, \theta_0(\mu))} \, \mathrm{d}\mu$$

sous les hypothèses (12.19) et

$$F_{P_0}^{Q_0}(xk, T[\![H^Q]\!]) = F_{P_0}^{Q_0}(s, T[\![H^Q]\!]) = 1. \tag{12.20}$$

Cela conduit à majorer (12.17) et l'analogue de (12.17) où Q remplace Q'. Sous (12.19) et (12.20), on obtient comme dans la preuve de [25, proposition 12.5.1] que $h^{Q'}(a^G s)$ est essentiellement majoré par $\boldsymbol{\delta}_{P_0}(x)^{1/2}$. Donc (12.17) est essentiellement majoré par $\boldsymbol{\delta}_{P_0}(x)$. Il en est de même de l'analogue de (12.17) relatif à Q, et donc aussi de $I_{\mathbf{C}}(xk)$. On obtient que l'expression (12.15) est essentiellement majorée par

$$\int_{\boldsymbol{X}_{L_0}(H)} F_{P_0}^{Q_0}(x, T[\![H^Q]\!]) \boldsymbol{\delta}_{P_0}(x) \, \mathrm{d}x,$$

ou, ce qui revient au même, par

$$e^{\langle 2\rho_{Q_0}, H\rangle} \int_{\mathfrak{S}^{L_0,*}} F_{P_0}^{Q_0}(s, T[\![H^Q]\!]) \boldsymbol{\delta}_{P_0}(s) \, \mathrm{d}s.$$

Rappelons que

$$\mathfrak{S}^{L_0,*} = \mathfrak{E}_{L_0} \mathfrak{S}^{L_0,1} = \mathfrak{E}_{L_0} \Omega_{L_0} \mathfrak{B}_0^{L_0}(t) \mathfrak{F}_{L_0} \boldsymbol{K}_{L_0}$$

avec $\mathfrak{B}_0^{L_0}(t) = \mathfrak{B}_0(t) \cap L_0(\mathbb{A})^1$. On décompose s en $s = vbk$ avec $v \in \mathfrak{E}_{L_0}\Omega_{L_0}$, $b \in \mathfrak{B}_0^{L_0}(t)$ et $k \in \mathfrak{F}_{L_0}\boldsymbol{K}_{L_0}$. La décomposition des mesures introduit un facteur $\boldsymbol{\delta}_{P_0 \cap L_0}^{L_0}(b)^{-1} = \boldsymbol{\delta}_{P_0}(b)^{-1}$, et l'intégrale sur $\mathfrak{S}^{L_0,*}$ est essentiellement majorée par le cardinal de l'ensemble

$$\{b \in \mathfrak{B}_0^{L_0}(t) : F_{P_0}^{Q_0}(b, T[\![H^Q]\!]) = 1\}.$$

En écrivant $Y = \mathbf{H}_0(b) \in \mathfrak{a}_0^{L_0}$, on conclut, comme à la fin de la démonstration de [25, proposition 12.5.1]. ■

12.5 Retour à la formule de départ

On suppose désormais que $0 < \eta < \eta_0$, où η_0 vérifie les conditions de la proposition 12.4.2.

L'expression pour $\mathfrak{J}^{G,T}$ de la proposition de 12.1.1 est une combinaison linéaire finie d'intégrales itérées (12.1) (ou, ce qui revient au même, d'expressions (12.2)) dont la convergence est assurée par la proposition 12.3.2.

Proposition 12.5.1. *Il existe une constante absolue $c' > 0$ et une constante $c(f) > 0$ telles que, si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c'(c(f)+1)$, on a*

$$\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T} = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset R}} \widetilde{\eta}(Q,R) \sum_{S\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}} \frac{1}{n^{Q'}(S)} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M_S)} \widehat{c}_{M_S}(\sigma) \times \sum_{\Psi\in\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} \sum_{H\in\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} A^T(H;\Psi)$$

avec

$$\begin{aligned} A^T(H;\Psi) = \kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q)\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T) \\ \times e^{-\langle 2\rho_{Q_0},H\rangle} \int_{\boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)\times \boldsymbol{K}} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^Q(xk, \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\Psi, \theta_0(\mu)) \\ \times \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k. \end{aligned}$$

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 12.4.1 et de la remarque 12.1.2. ∎

Définition 12.5.2. Pour $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma)$ et $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)},\theta_0(\sigma))$, et pour ϑ une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_S$, on pose

$$\begin{aligned} A^T(H;\Phi,\Psi;\vartheta) = \kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q)\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T) \\ \times e^{-\langle 2\rho_{Q_0},H\rangle} \int_{\boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)\times \boldsymbol{K}} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^Q(xk,\Phi,\theta_0(\mu)) \\ \times \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k. \end{aligned}$$

On écrira simplement $A^T(H)$ pour $A^T(H;\Phi,\Psi;\vartheta)$ lorsque les fonctions Φ, Ψ et φ sont fixées, et on pose

$$A^T = \sum_{H\in\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} A^T(H).$$