

## Chapitre 12

# Estimées uniformes des développements spectraux

### 12.1 La formule de départ

Soit  $Q \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ . On pose

$$Q' = \theta_0^{-1}(Q), \quad Q_0 = Q \cap Q'.$$

Rappelons que l'on a posé

$$Y_{Q_0} = A_{\tilde{G}}(\mathbb{A})Q_0(F) \backslash G(\mathbb{A}).$$

Pour  $S \in \mathcal{P}_{\text{st}}^{Q'}$ , on note  $n^{Q'}(S)$  le nombre de chambres dans  $\alpha_S^{Q'}$ . Pour  $S \in \mathcal{P}_{\text{st}}^{Q'}$ ,  $\sigma \in \Pi_{\text{disc}}(M_S)$  et  $\mu \in \alpha_{Q', \mathbb{C}}^*$ , on a défini en section 7.2 un opérateur

$$\tilde{\rho}_{S, \sigma, \mu}(f, \omega) = \rho_{S, \sigma, \mu}(\delta_0, f, \omega) : \mathcal{A}(X_S, \sigma) \rightarrow \mathcal{A}(X_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma)),$$

et on a fixé une base orthonormale  $\Psi_S(\sigma)$  de l'espace pré-hilbertien  $\mathcal{A}(X_S, \sigma)$ . Pour  $\Psi \in \Psi_S(\sigma)$ , posons

$$\mathfrak{J}_{Q, Q'; \Psi}^T(x, y) = \int_{\mu_S} \Lambda^{T, Q} E^Q(x, \tilde{\rho}_{S, \sigma, \mu}(f, \omega) \Psi, \theta_0 \mu) \overline{E^{Q'}(y, \Psi, \mu)} d\mu$$

et

$$\mathfrak{J}_{Q, Q'; \Psi}^T(y) = \mathfrak{J}_{Q, Q'; \Psi}^T(y, y).$$

La convergence de l'intégrale est claire puisque  $\mu_S$  est compact. Observons que, par définition, on a

$$\sum_{\Psi \in \Psi_S(\sigma)} \mathfrak{J}_{Q, Q'; \Psi}^T(x, y) = \int_{\mu_S} \Lambda_1^{T, Q} K_{Q, Q', \sigma}(x, y; \mu) d\mu.$$

On a la variante suivante de [25, proposition 12.1.1] :

**Proposition 12.1.1.** *Pour  $T \in \alpha_0$  tel que  $d_0(T) \geq c(f)$ , on a*

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^{\tilde{G}, T} &= \sum_{\substack{Q, R \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset R}} \tilde{\eta}(Q, R) \int_{Y_{Q_0}} \tilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T) \\ &\quad \times \left( \sum_{S \in \mathcal{P}_{\text{st}}^{Q'}} \frac{1}{n^{Q'}(S)} \sum_{\sigma \in \Pi_{\text{disc}}(M_S)} \hat{c}_{M_S}(\sigma) \sum_{\Psi \in \Psi_S(\sigma)} \mathfrak{J}_{Q, Q'; \Psi}^T \right) dy. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Elle est identique à celle de *loc. cit.*, compte-tenu de la formule de la proposition 10.2.1 et de l'expression pour le noyau  $K_{\mathcal{Q}, \delta_0, \chi}$ , donnée par la proposition 7.3.2. ■

D'après la proposition 7.3.2, l'ensemble des  $(\sigma, \Psi)$ , tels que  $\tilde{\rho}_{S, \sigma, \mu}(f, \omega)\Psi \neq 0$ , est fini. Donc, seul un nombre fini de termes non nuls apparaissent dans l'expression de  $\mathfrak{F}^{\tilde{G}, T}$ . L'expression  $\mathfrak{F}^{\tilde{G}, T}$  est une combinaison linéaire finie d'intégrales itérées (en  $y$  et en  $\mu$ )

$$(12.1) \quad \int_{Y_{\mathcal{Q}_0}} \tilde{\sigma}_{\mathcal{Q}}^R(\mathbf{H}_{\mathcal{Q}}(y) - T)\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'; \Psi}^T(y) dy.$$

*A priori*, la proposition n'affirme que la convergence des intégrales dans l'ordre indiqué, et pas la convergence absolue de l'intégrale multiple.

Pour  $\Psi \in \mathcal{A}(X_S, \sigma)$  et  $\Phi \in \mathcal{A}(X_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$ , on considérera aussi les expressions suivantes :

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'; \Phi, \Psi}^T(x, y) = \int_{\mu_S} \Lambda^{T, \mathcal{Q}} E^{\mathcal{Q}}(x, \Phi, \theta_0 \mu) \overline{E^{\mathcal{Q}'}(y, \Psi, \mu)} d\mu$$

et

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'; \Phi, \Psi}^T(y) = \mathfrak{F}_{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'; \Phi, \Psi}^T(y, y).$$

À nouveau, la convergence de l'intégrale est claire, puisque  $\mu_S$  est compact.

**Remarque 12.1.2.** On observe que pour  $\Psi \in \mathcal{A}(X_S, \sigma)$ , on peut écrire

$$\tilde{\rho}_{S, \sigma, \mu}(f, \omega)\Psi = \sum_{\Phi \in \mathcal{A}(X_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))} \vartheta_{\Phi, \Psi}(\mu)\Phi,$$

où la somme porte sur un ensemble fini et où les  $\vartheta_{\Phi, \Psi}$  sont des fonctions lisses sur le groupe compact  $\mu_S$ . On voit donc que l'expression  $\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'; \Psi}^T(y)$ , introduite plus haut, est une combinaison linéaire finie d'expressions du type

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'; \Phi, \Psi; \vartheta}^T(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mu_S} \Lambda^{T, \mathcal{Q}} E^{\mathcal{Q}}(y, \Phi, \theta_0 \mu) \overline{E^{\mathcal{Q}'}(y, \Psi, \mu)} \vartheta(\mu) d\mu,$$

où  $\Phi \in \mathcal{A}(X_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$  ne dépend pas de  $\mu$  et où  $\vartheta$  est une fonction lisse sur  $\mu_S$ . Pour l'étude de la convergence des intégrales itérées (12.1), il suffira de considérer celle des

$$(12.2) \quad \int_{Y_{\mathcal{Q}_0}} \tilde{\sigma}_{\mathcal{Q}}^R(\mathbf{H}_{\mathcal{Q}}(y) - T)\mathfrak{F}_{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'; \Phi, \Psi; \vartheta}^T(y) dy.$$

Pour prouver la convergence de (12.2), on peut remplacer la fonction  $\vartheta$  par le sup de sa valeur absolue et, à un scalaire près, on peut supposer que ce sup vaut 1. On est

donc ramené à prouver la convergence des intégrales itérées

$$(12.3) \quad \int_{Y_{Q_0}} \tilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T) \mathfrak{F}_{Q,Q';\Phi,\Psi}^T(y) dy.$$

En revanche pour effectuer le calcul exact de (12.1), il faut effectuer le calcul exact de (12.2) pour n'importe quel  $\vartheta$ .

### 12.2 Estimations

Pour  $H \in \mathcal{A}_{Q_0}$ , soit  $M_{Q_0}(\mathbb{A}; H)$  l'ensemble des  $m \in M_{Q_0}(\mathbb{A})$  tels que

$$\mathbf{H}_{Q_0}(m) = H.$$

On note  $Y_{Q_0}(H)$  l'image de  $U_{Q_0}(\mathbb{A}) \times M_{Q_0}(\mathbb{A}; H) \times \mathbf{K}$  dans  $Y_{Q_0}$ . On pose

$$\mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\tilde{G}} \setminus \mathcal{A}_{Q_0}.$$

Observons que  $\mathbf{H}_{Q_0}$  envoie  $Z_{Q_0} = A_{\tilde{G}}(\mathbb{A})A_{Q_0}(F) \setminus A_{Q_0}(\mathbb{A})$  sur un sous-groupe d'indice fini de  $\mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$ . L'intégrale itérée (12.1) est égale à

$$\sum_{H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}} \tilde{\sigma}_Q^R(H_Q - T) \int_{Y_{Q_0}(H)} \mathfrak{F}_{Q,Q';\Psi}^T(y) dy.$$

Les estimations [25, lemme 12.2.1] et [25, proposition 12.2.3] sont valables ici, *mutatis mutandis*. On rappelle que  $\mathfrak{S}^*$  est un domaine de Siegel pour le quotient  $\mathcal{B}_G G(F) \setminus G(\mathbb{A})$ , où  $\mathcal{B}_G$  est l'image d'une section du morphisme  $A_G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathcal{B}_G$ .

**Lemme 12.2.1.** *Soit  $h \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ . Il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $x, y \in \mathfrak{S}^*$ , on ait*

$$\sum_{\delta \in \mathcal{B}_G G(F)} |h(x^{-1}\delta y)| < c \delta_{P_0}(x)^{1/2} \delta_{P_0}(y)^{1/2}.$$

*Démonstration.* Elle est identique à celle de [25, lemme 12.2.1]. Pour passer du groupe  $U_R$  à son algèbre de Lie  $\mathfrak{u}_R$ , on utilise, comme dans la preuve de la proposition de la section 9.1, l'existence d'un  $F$ -isomorphisme de variétés algébriques  $\mathfrak{u}_R \rightarrow U_R$  compatible avec l'action de  $A_R$ . ■

On fixe  $S \in \mathcal{P}_{\text{st}}^{Q'}$ , une représentation automorphe  $\sigma \in \Pi_{\text{disc}}(M_S)$ , et des vecteurs  $\Psi \in \mathcal{A}(X_S, \sigma)$  et  $\Phi \in \mathcal{A}(X_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$ . On pose

$$L = M_Q, \quad L' = M_{Q'}, \quad L_0 = M_{Q_0}.$$

On fixe un domaine de Siegel  $\mathfrak{S}^{L,*}$  pour le quotient  $\mathfrak{B}_Q L(F) \backslash L(\mathbb{A})$ . On suppose que  $\mathfrak{B}_Q \subset A_Q(\mathbb{A})$  est de la forme

$$\mathfrak{B}_Q = \mathfrak{B}_G \mathfrak{B}_Q^G,$$

où  $\mathfrak{B}_Q^G \subset A_Q(\mathbb{A})$  est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_Q(\mathbb{A}) \rightarrow A_G(\mathbb{A}) \backslash A_Q(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{B}_Q^G.$$

On fixe aussi un compact  $\Omega_Q \subset U_Q(\mathbb{A})$  tel que  $U_Q(\mathbb{A}) = U_Q(F)\Omega$  et l'on pose

$$\mathfrak{S}_Q^G = \Omega_Q \mathfrak{B}_Q^G \mathfrak{S}^{L,*} \mathbf{K}.$$

C'est un domaine de Siegel pour le quotient  $\mathfrak{B}_G Q(F) \backslash G(\mathbb{A})$ . On fixe, de la même manière, un domaine de Siegel  $\mathfrak{S}_{Q'}^G = \Omega_{Q'} \mathfrak{B}_{Q'}^G \mathfrak{S}^{L,*} \mathbf{K}$  pour  $\mathfrak{B}_G Q'(F) \backslash G(\mathbb{A})$ .

**Proposition 12.2.2.** *Il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in \mathfrak{S}_Q^G \times \mathfrak{S}_{Q'}^G$ , on ait*

$$\int_{\mu_s} |E^Q(x, \Phi, \theta_0 \mu) \overline{E^{Q'}(y, \Psi, \mu)}| d\mu < c \delta_{P_0}(x)^{1/2} \delta_{P_0}(y)^{1/2}.$$

*Démonstration.* Comme dans [25, proposition 12.2.3] on se ramène à prouver qu'il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $y \in \mathfrak{S}^*$ , on ait

$$\int_{\mu_s} |E^G(y, \Psi, \mu)|^2 d\mu < c \delta_{P_0}(y).$$

On choisit un sous-groupe ouvert compact  $\mathbf{K}'$  de  $G(\mathbb{A})$  tel que la fonction  $\Psi$  soit invariante à droite par  $\mathbf{K}'$ , et on considère le noyau

$$K_G(e_{\mathbf{K}'}; y, y) = \sum_{\delta \in \mathfrak{B}_G G(F)} e_{\mathbf{K}'}(y^{-1} \delta y).$$

Son expression spectrale est une somme de termes tous positifs ou nuls, et l'un d'eux est l'intégrale ci-dessus. On conclut, grâce au lemme 12.2.1. ■

**Corollaire 12.2.3.** *Pour tout  $(x, y) \in G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})$ , l'intégrale définissant*

$$\mathfrak{J}_{Q,Q';\Phi,\Psi}^T(x, y)$$

*est absolument convergente. De plus, il existe  $c, D > 0$  et un sous-ensemble compact  $C_Q$  de  $\mathfrak{S}^{L,*}$  tels que, pour tout  $x \in \mathfrak{B}_Q^G \mathfrak{S}^{L,*} \mathbf{K}$  et tout  $y \in G(\mathbb{A})$ , en écrivant  $x = ask$  avec  $a \in \mathfrak{B}_Q^G$ ,  $s \in \mathfrak{S}^{L,*}$  et  $k \in \mathbf{K}$ , on ait*

$$|\mathfrak{J}_{Q,Q';\Phi,\Psi}^T(x, y)| \leq c |a|^D |y|^D,$$

*si  $s \in C_Q$ , et  $\mathfrak{J}_{Q,Q';\Phi,\Psi}^T(x, y) = 0$  sinon.*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{K}'$  un sous-groupe ouvert compact distingué de  $\mathbf{K}$  tel que la fonction  $\phi$  soit invariante à droite par  $\mathbf{K}'$ . D'après la proposition 4.2.1, il existe un sous-ensemble compact  $C_Q$  de  $\mathfrak{S}^{L,*}$  tel que pour tout  $(a, k) \in \mathfrak{B}_Q^G \times \mathbf{K}$  et tout  $\mu \in \mu_S$ , le support de la fonction sur  $\mathfrak{S}^{L,*}$

$$h \mapsto \Lambda^{T,Q} E^Q(ask, \Phi, \theta_0(\mu))$$

soit contenu dans  $C_Q$ . D'autre part pour  $y \in G(\mathbb{A})$ , il existe un  $g \in \mathfrak{B}_G Q'(F)$  tel que  $gy \in \mathfrak{S}_Q^G$ . On procède comme dans la preuve de [25, proposition 12.2.4], en remarquant que puisque la fonction  $\delta_{P_0}$  est à croissance lente,  $\delta_{P_0}(x)^{1/2} \delta_{P_0}(gy)^{1/2}$  est essentiellement majoré par  $|a|^D |y|^D$ . ■

*A priori* nous ne pouvons rien dire ici sur le centre, c'est pourquoi nous nous sommes limités aux

$$x \in \mathfrak{B}_Q^G \mathfrak{S}^{L,*} \mathbf{K}.$$

Pour  $y = x$ , on en déduira en section 12.3 des estimations pour  $x \in \mathfrak{B}_Q^{\tilde{G}} \mathfrak{S}^{L,*} \mathbf{K}$ .

### 12.3 Convergence d'une intégrale itérée

On suppose ici que  $T$  est un élément régulier de  $\mathfrak{a}_0^G$  tel que<sup>1</sup>  $\theta_0(T) = T$ . On suppose de plus que pour tout  $\alpha \in \Delta_0$ , on a

$$0 < \alpha(T) \leq \kappa \mathbf{d}_0(T)$$

pour une constante  $\kappa > 0$  assez grande. Dans un tel cône, les fonctions  $\mathbf{d}_0(T)$ ,  $\|T\|$  et  $\alpha(T)$  sont équivalentes, pour tout  $\alpha \in \Delta_0$ .

Fixons des vecteurs  $\Psi$  et  $\Phi$ , comme ci-dessus. Pour alléger l'écriture, posons

$$\mathfrak{F}(x, y) = \mathfrak{F}_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x, y) \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}(y) = \mathfrak{F}(y, y).$$

On veut prouver la convergence de l'intégrale

$$(12.4) \quad \int_{\mathbf{Y}_{Q_0}} \tilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T) |\mathfrak{F}(y)| dy,$$

<sup>1</sup>Cette condition peut sembler inadéquate, dès lors qu'on aura *in fine* à évaluer un élément de PolExp en  $T_0 \in \mathcal{A}_0^G$  qui n'est *a priori* pas  $\theta_0$ -invariant. Mais comme l'élément de PolExp à évaluer ne dépend que de l'image de  $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G$  dans le sous-espace  $\mathfrak{a}_{\tilde{M}_0,\mathbb{Q}}^{\tilde{G}} = (\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G)^{\theta_0}$  de  $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G$  formé des éléments  $\theta_0$ -invariants, cette condition n'est pas vraiment gênante.

ou, ce qui est équivalent, de l'expression

$$(12.5) \quad \sum_{H \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}_0}^{\tilde{G}}} \tilde{\sigma}_{\mathcal{Q}}^R(H_{\mathcal{Q}} - T) \int_{Y_{\mathcal{Q}_0}(H)} |\mathfrak{F}(y)| dy.$$

L'intégration sur  $Y_{\mathcal{Q}_0}(H)$  se décompose en une intégration sur le produit

$$U_{\mathcal{Q}_0}(F) \backslash U_{\mathcal{Q}_0}(\mathbb{A}) \times X_{L_0}^{\tilde{G}}(H) \times \mathbf{K},$$

où  $X_{L_0}^{\tilde{G}}(H)$  est l'image de  $L_0(\mathbb{A}; H')$  dans  $A_{\tilde{G}}(\mathbb{A})L_0(F) \backslash L_0(\mathbb{A})$  pour un relèvement  $H' \in \mathcal{A}_{\mathcal{Q}_0}$  de  $H \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}_0}^{\tilde{G}}$ . Par ailleurs, la fonction que l'on intègre est invariante à gauche par le groupe  $U_{\mathcal{Q}}(\mathbb{A}) \cap U_{\mathcal{Q}'}(\mathbb{A})$ . Posons  $U_{\mathcal{Q}_0}^L = U_{\mathcal{Q}} \cap L$  et  $U_{\mathcal{Q}_0}^{L'} = U_{\mathcal{Q}_0} \cap L'$ . L'application naturelle

$$U_{\mathcal{Q}_0} \rightarrow U_{\mathcal{Q}_0}^L \times U_{\mathcal{Q}_0}^{L'}$$

induit un isomorphisme

$$U_{\mathcal{Q}_0}(F)(U_{\mathcal{Q}}(\mathbb{A}) \cap U_{\mathcal{Q}'}(\mathbb{A})) \backslash U_{\mathcal{Q}_0}(\mathbb{A}) \rightarrow U_{\mathcal{Q}_0}^L(F) \backslash U_{\mathcal{Q}_0}^L(\mathbb{A}) \times U_{\mathcal{Q}_0}^{L'}(F) \backslash U_{\mathcal{Q}_0}^{L'}(\mathbb{A}).$$

On peut donc remplacer dans (12.5) la variable  $y$  par  $uu'xk$  avec

$$u \in U_{\mathcal{Q}_0}^L(F) \backslash U_{\mathcal{Q}_0}^L(\mathbb{A}), \quad u' \in U_{\mathcal{Q}_0}^{L'}(F) \backslash U_{\mathcal{Q}_0}^{L'}(\mathbb{A}), \quad x \in X_{L_0}^{\tilde{G}}(H) \quad \text{et} \quad k \in \mathbf{K}.$$

La mesure  $dy$  se transforme alors en

$$\delta_{\mathcal{Q}_0}(x)^{-1} du du' dx dk$$

et on a  $\mathbf{H}_{\mathcal{Q}_0}(x) = \mathbf{H}_{\mathcal{Q}_0}(y) = H$ . On obtient

$$(12.6) \quad \mathfrak{F}(uu'xk) = \mathfrak{F}(uxk, u'xk).$$

On a la variante suivante du lemme 12.3.1 de [25] :

**Lemme 12.3.1.** *Il existe un sous-ensemble fini  $\omega \subset \mathfrak{a}_{\mathcal{Q}}^{\tilde{G}}$  indépendant de  $T$  tel que si  $\mathfrak{F}(uu'xk)$  est non nul, alors  $q_{\mathcal{Q}}(H) = ((1 - \theta_0)H)_{\mathcal{Q}}^{\tilde{G}}$  appartient à  $\omega$ .*

*Démonstration.* Via le choix d'une section de la surjection  $\mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{Q}'}$ , on dispose d'un isomorphisme  $\mu_M = \mu_{\mathcal{Q}'} \times \mu_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Q}'}$  et l'intégration sur  $\mu_{\mathcal{S}}$  se décompose en une intégrale double :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(uu'xk) &= \int_{\mu_{\mathcal{S}}^{\mathcal{Q}'}} \int_{\mu_{\mathcal{Q}'}} \Lambda^{T, \mathcal{Q}} E^{\mathcal{Q}}(uxk, \Phi, \theta_0(\mu_{\mathcal{Q}'} + \mu^{\mathcal{Q}'})) \\ &\quad \times \overline{E^{\mathcal{Q}'}(u'xk, \Psi, \mu_{\mathcal{Q}'} + \mu^{\mathcal{Q}'})} d\mu_{\mathcal{Q}'} d\mu^{\mathcal{Q}'}. \end{aligned}$$

Soit  $\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0} \subset A_{\mathcal{Q}_0}(\mathbb{A})$  un sous-groupe de la forme

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0} = \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}} \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}} (= \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}} \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}}^G \mathfrak{B}_G),$$

où  $\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}} \subset A_{\mathcal{Q}_0}(\mathbb{A})$  est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_{\mathcal{Q}_0}(\mathbb{A}) \rightarrow A_{\mathcal{Q}}(\mathbb{A}) \backslash A_{\mathcal{Q}_0}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}}.$$

Notons  $\mathfrak{E}^{L_0, * } = \mathfrak{E}_{L_0} \mathfrak{E}^{L_0, 1}$  un domaine de Siegel pour le quotient  $\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0} L_0(F) \backslash L_0(\mathbb{A})$  (cf. section 3.4).

Fixons de la même manière un sous-groupe  $\mathfrak{B}'_{\mathcal{Q}_0} = \mathfrak{B}'_{\mathcal{Q}_0} \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}'} \subset A_{\mathcal{Q}_0}(\mathbb{A})$ . On ne peut pas en général s'arranger pour que  $\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0} = \mathfrak{B}'_{\mathcal{Q}_0}$ , mais puisque  $\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0} \cap \mathfrak{B}'_{\mathcal{Q}_0}$  est d'indice fini dans  $\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}$ , quitte à grossir  $\mathfrak{E}_{L_0}$ , on peut toujours supposer que

$$L_0(\mathbb{A}) = (\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0} \cap \mathfrak{B}'_{\mathcal{Q}_0}) L_0(F) \mathfrak{E}^{L_0, * }.$$

On suppose aussi que  $\mathfrak{B}_G$  est de la forme  $\mathfrak{B}_G = \mathfrak{B}_{\tilde{G}} \mathfrak{B}_{\tilde{G}}$ , où  $\mathfrak{B}_{\tilde{G}} \subset A_G(\mathbb{A})$  est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_G(A) \rightarrow A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}) \backslash A_G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{B}_{\tilde{G}} = \mathfrak{B}_{\tilde{G}} \backslash \mathfrak{B}_G$$

et l'on pose

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\tilde{G}} = \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\tilde{G}} \mathfrak{B}_{\tilde{G}} = \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}} \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}}^G \mathfrak{B}_{\tilde{G}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}'_{\mathcal{Q}_0} = \mathfrak{B}'_{\mathcal{Q}_0} \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}'} = \mathfrak{B}'_{\mathcal{Q}_0} \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}'}^G \mathfrak{B}_{\tilde{G}}.$$

Choisissons un relèvement de  $x \in X_{L_0}^{\tilde{G}}(H)$  dans  $L_0(\mathbb{A}; H')$  et écrivons  $x = zas$  avec  $z \in \mathfrak{B}_{\tilde{G}} L_0(F)$ ,  $a \in (\mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\tilde{G}} \cap \mathfrak{B}'_{\mathcal{Q}_0})$  et  $s \in \mathfrak{E}^{L_0, * }$ . On décompose  $a$  sous la forme

$$a = a_{\mathcal{Q}} a^{\mathcal{Q}} = a_{\mathcal{Q}'} a^{\mathcal{Q}'}$$

avec  $a_{\mathcal{Q}} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\tilde{G}}$ ,  $a^{\mathcal{Q}} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}}$ ,  $a_{\mathcal{Q}'} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\tilde{G}}$ , et  $a^{\mathcal{Q}'} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}'}$ . Posons  $H_0 = \mathbf{H}_{\mathcal{Q}_0}(a)$ . Comme dans la démonstration de [25, lemme 12.3.1], on obtient que

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(uu'xk) &= \delta_{\mathcal{Q}}^{1/2}(a_{\mathcal{Q}}) \delta_{\mathcal{Q}'}^{1/2}(a_{\mathcal{Q}'}) \int_{\mu_{\mathcal{Q}'}} e^{(\theta_0(\mu_{\mathcal{Q}'}), (H_0)_{\mathcal{Q}}) - (\mu_{\mathcal{Q}'}, (H_0)_{\mathcal{Q}'})} d\mu_{\mathcal{Q}'} \\ &\quad \times \int_{\mu_{\mathcal{Q}'}} \Lambda^{T, \mathcal{Q}} E^{\mathcal{Q}}(ua^{\mathcal{Q}}sk, \Phi, \theta_0(\mu_{\mathcal{Q}'})) \overline{E^{\mathcal{Q}'}(u'a^{\mathcal{Q}'}sk, \Psi, \mu_{\mathcal{Q}'})} d\mu_{\mathcal{Q}'}. \end{aligned}$$

Or

$$\int_{\mu_{\mathcal{Q}'}} e^{(\theta_0(\mu_{\mathcal{Q}'}), (H_0)_{\mathcal{Q}}) - (\mu_{\mathcal{Q}'}, (H_0)_{\mathcal{Q}'})} d\mu_{\mathcal{Q}'} = \int_{\mu_{\mathcal{Q}'}} e^{(\mu_{\mathcal{Q}'}, \theta_0^{-1}((H_0)_{\mathcal{Q}}) - (H_0)_{\mathcal{Q}'})} d\mu_{\mathcal{Q}'}$$

et cette intégrale n'est non nulle que si  $\theta_0^{-1}((H_0)_{Q'}) - (H_0)_{Q'} = 0$ . Pour que  $\mathfrak{F}(uu'xk)$  soit non nul, il faut donc que

$$(\mathbf{H}_Q(x) - \theta_0(\mathbf{H}_{Q'}(x)))^{\tilde{G}} = (H - \theta_0(H))^{\tilde{G}} = (\mathbf{H}_Q(s) - \theta_0(\mathbf{H}_{Q'}(s)))^{\tilde{G}}.$$

Maintenant, on observe que l'ensemble

$$\omega = \{(\mathbf{H}_Q(s) - \theta_0(\mathbf{H}_{Q'}(s)))^{\tilde{G}} \mid s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}\} \subset \alpha_Q^{\tilde{G}}$$

est fini et le lemme en résulte. ■

**Proposition 12.3.2.** *Pour  $T \in (\alpha_0^G)^{\theta_0}$ , l'expression*

$$\sum_{H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}} \tilde{\sigma}_Q^R(H_Q - T) \int_{Y_{Q_0}(H)} |\mathfrak{F}_{Q,Q';\Phi,\Psi}^T(y)| dy$$

est convergente et la somme sur  $H$  est finie.

*Démonstration.* Il s'agit de prouver que pour  $H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$ , la fonction

$$(u, u', x, k) \mapsto \tilde{\sigma}_Q^R(H - T) \delta_{Q_0}(x)^{-1} \mathfrak{F}(uu'xk)$$

est absolument intégrable sur

$$U_{Q_0}^L(F) \backslash U_{Q_0}^L(\mathbb{A}) \times U_{Q_0}^{L'}(F) \backslash U_{Q_0}^{L'}(\mathbb{A}) \times X_{L_0}^{\tilde{G}}(H) \times \mathbf{K}$$

et qu'elle est nulle, sauf pour un nombre fini de  $H$ . On procède comme dans la preuve de [25, proposition 12.3.2]. On commence par découper le domaine de sommation en  $H$ , grâce à la partition de [25, lemme 1.7.5] appliquée au couple  $(P, R) = (Q_0, Q)$  : on peut fixer un  $P' \in \mathcal{P}_{\text{st}}$  tel que  $Q_0 \subset P' \subset Q$  et imposer que

$$\phi_{Q_0}^{P'}(H - T) \tau_{P'}^Q(H - T) = 1.$$

On s'intéresse donc aux  $H \in \alpha_{Q_0}$  tels que

$$(12.7) \quad \tilde{\sigma}_Q^R(H - T) \phi_{Q_0}^{P'}(H - T) \tau_{P'}^Q(H - T) = 1, \quad q_Q(H) \in \omega.$$

D'après [25, lemme 2.13.3] (l'exposant  $G$  est ici remplacé par un exposant  $\tilde{G}$ , voir section 2.2), pour  $H$  vérifiant (12.7), on a

$$(12.8) \quad \|H^{\tilde{G}} - T_{Q_0}\| \ll 1 + \|(H - T)_{P'}^Q\|$$

d'où

$$(12.9) \quad \|H^{\tilde{G}}\| \ll 1 + \|H_{P'}^Q\|.$$

Les constantes implicites dans (12.8) et (12.9) dépendent de  $T$ . Au lieu d'intégrer sur  $x \in X_{L_0}^{\tilde{G}}(H)$ , on peut choisir un relèvement  $H' \in \mathcal{A}_{Q_0}$  de  $H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$  et intégrer sur  $x \in ((\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0})\mathfrak{E}^{L_0,*}) \cap L_0(\mathbb{A}; H')$ . De même, on peut faire varier  $(u, u')$  dans un compact  $\Omega_{Q_0}^L \times \Omega_{Q_0}^{L'}$  de  $U_{Q_0}^L(\mathbb{A}) \times U_{Q_0}^{L'}(\mathbb{A})$ . On écrit<sup>2</sup>  $x = zas$  avec

$$z \in \mathfrak{B}_{\tilde{G}}L_0(F), \quad a \in (\mathfrak{B}_{Q_0}^{\tilde{G}} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0}^{\tilde{G}}) \quad \text{et} \quad s \in \mathfrak{E}^{L_0,*},$$

et on décompose  $a$  en  $a = a_Q a^{\mathcal{Q}} = a_{Q'} a^{\mathcal{Q}'}$  comme dans la preuve du lemme 12.3.1. Pour  $u \in \Omega_{Q_0}^L$ ,  $u' \in \Omega_{Q_0}^{L'}$  et  $k \in \mathbf{K}$ , en supposant que  $a_Q^{-1}\theta_0(a_{Q'})$  appartient à  $A_{\tilde{G}}(\mathbb{A})A_Q(\mathbb{A})^1$  – sinon  $\mathfrak{F}(uu'xk) = 0$  (cf. la preuve de *loc. cit.*) –, on a

$$\mathfrak{F}(uu'xk) = \delta_Q(a_Q)\mathfrak{F}(ua^{\mathcal{Q}}sk, u'a^{\mathcal{Q}'}sk).$$

Quitte à grossir  $\mathfrak{E}_Q$ , on peut supposer que  $L_0(\mathbb{A})^* = \mathfrak{E}_{Q_0}L_0(\mathbb{A})^1$  est contenu dans  $L_Q(\mathbb{A})^* = \mathfrak{E}_QL_Q(\mathbb{A})^1$ . Alors pour chaque  $u \in \Omega_{Q_0}^L$ , on peut choisir un  $\gamma \in L(F)$  tel que

$$y_1 = \gamma ua^{\mathcal{Q}}s \in \mathfrak{E}^{L,*} = \mathfrak{E}_Q\mathfrak{E}^{L,1}.$$

D'après le corollaire 12.2.3, il existe  $c, D > 0$  et un compact  $C_L$  dans  $\mathfrak{E}^{L,*}$  tel que pour tout  $k \in \mathbf{K}$ , tout  $u \in \Omega_{Q_0}^L$  et tout  $u' \in \Omega_{Q_0}^{L'}$ , on ait  $\mathfrak{F}(y_1k, u'a^{\mathcal{Q}'}sk) = 0$  si  $y_1 \notin C_L$  et

$$|\mathfrak{F}(y_1k, u'a^{\mathcal{Q}'}sk)| \leq c |u'a^{\mathcal{Q}'}s|^D \quad \text{sinon.}$$

Comme dans la preuve de [25, proposition 12.3.2], on obtient

$$(12.10) \quad \|H_P^{\mathcal{Q}}\| + \|\mathbf{H}_0(s)\| \ll 1 + \|\mathbf{H}_0(y_1)\|.$$

Pour  $y_1 \in C_L$ , d'après (12.9) et (12.10),  $\|H^{\tilde{G}}\|$  et  $\|\mathbf{H}_0(s)\|$  sont bornés. On en déduit que  $H$  varie dans un sous-ensemble fini de  $\mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$ . D'autre part  $s$  appartient à  $\mathfrak{E}^{L_0,*}$  et  $\|\mathbf{H}_0(s)\|$  est borné, par conséquent  $|s|$  est borné. On obtient que

$$\delta_{Q_0}(x)^{-1}|\mathfrak{F}(u'uxk)| \ll 1.$$

D'où la proposition, puisque l'ensemble

$$\Omega_{Q_0}^L \times \Omega_{Q_0}^{L'} \times ((\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0})\mathfrak{E}^{L_0,*} \cap L_0(\mathbb{A}; H)) \times \mathbf{K}$$

est de volume fini. ■

---

<sup>2</sup>Notons que notre  $s$  joue le rôle du  $x$  de la démonstration de [25, proposition 12.3.2].

## 12.4 Transformation de l'opérateur de troncature

Pour calculer l'expression

$$(12.11) \quad \sum_{H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}} \tilde{\sigma}_Q^R(H_Q - T) \int_{Y_{Q_0}(H)} \mathfrak{F}_{Q, Q'; \Phi, \Psi; \vartheta}^T(y) dy,$$

où  $\vartheta$  est une fonction lisse sur  $\mu_S$ , on décompose l'intégrale sur  $Y_{Q_0}(H)$  comme en section 12.3. On peut permuter l'intégrale sur le groupe compact

$$U_{Q_0^L}(F) \backslash U_{Q_0^L}(\mathbb{A}) \times U_{Q_0^{L'}}(F) \backslash U_{Q_0^{L'}}(\mathbb{A})$$

avec celle sur le groupe (lui aussi compact)  $\mu_S$ . Pour  $(x, k) \in X_{L_0}^{\tilde{G}}(H) \times \mathbf{K}$ , la composée de ces deux intégrales est égale à

$$(12.12) \quad \int_{\mu_S} (\Lambda^{T, Q} E^Q)_{Q_0}(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk, \Psi, \mu)} \vartheta(\mu) d\mu,$$

où l'indice  $Q_0$  signifie que l'on prend le terme constant le long de  $Q_0$ . D'après [25, lemme 4.1.1], cette expression (12.12) n'est non nulle que si

$$\phi_{Q_0}^Q(H - T) = 1.$$

Cela entraîne que dans le découpage suivant les  $P' \in \mathcal{P}_{\text{st}}$  tel que  $Q_0 \subset P' \subset Q$  dans la preuve de la proposition 12.3.2, seul le domaine correspondant à  $P' = Q$  donne une contribution non nulle. D'après (12.8), il existe  $c > 0$  tel que pour les  $H$  vérifiant

$$\tilde{\sigma}_Q^R(H - T) \phi_{Q_0}^Q(H - T) = 1, \quad q_Q(H) \in w$$

on ait

$$(12.13) \quad \|H^{\tilde{G}} - T_{Q_0}\| \leq c.$$

Le point est qu'ici la constante  $c$  est indépendante de  $T$  (d'après [25, lemme 2.13.3] et le lemme 12.3.1). En particulier, puisque  $T_{Q_0} \in \alpha_{Q_0}^G$ , on a

$$H^{\tilde{G}} - T_{Q_0} = H_G^{\tilde{G}} + (H^G - T_{Q_0})$$

et  $\|H_G^{\tilde{G}}\|$  est borné par une constante indépendante de  $T$ . Fixons un réel  $\eta$  tel que  $0 < \eta < 1$ . Si  $T$  est assez régulier, la condition (12.13) entraîne

$$(12.14) \quad \|H^Q - T_{Q_0}^Q\| \leq \|\eta T\|.$$

Pour  $T \in \alpha_0$ , on note<sup>3</sup>  $\kappa^T$  la fonction caractéristique du sous-ensemble des  $X \in \alpha_0$  tels que  $\|X\| \leq \|T\|$ . D'après [25, lemme 4.2.2] il existe  $c' > 0$ , tel que si

$$\mathbf{d}_0(T) \geq c'(c + 1),$$

l'expression (12.12) multipliée par  $\widetilde{\sigma}_Q^R(H - T)$  vaut<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} & \kappa^{\eta T} (H^Q - T_{Q_0}^Q) \widetilde{\sigma}_Q^R(H - T) \phi_{Q_0}^Q(H - T) \\ & \quad \times \int_{\mu_S} \Lambda^{T[[H^Q]], Q_0} E_{Q_0}^Q(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk, \Psi, \mu) \vartheta(\mu)} d\mu \end{aligned}$$

si  $\|H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0}\| \leq c$ , et elle est nulle sinon. Ce dernier point résulte de l'analogue de la preuve de (12.8) pour l'expression ci-dessus. Notons que pour  $H$  vérifiant  $\phi_{Q_0}^G(H - T) = 1$ , l'élément

$$T[[H^Q]] = T[[H^Q]]^{Q_0} \in \alpha_{P_0}^{Q_0}$$

est « plus régulier » que  $T^{Q_0}$  : en effet, d'après [25, lemme 4.2.1], on a

$$\mathbf{d}_{P_0 \cap L_0}^{L_0}(T[[H^Q]]) \geq \mathbf{d}_{P_0 \cap L_0}^{L_0}(T^{Q_0}) \geq \mathbf{d}_0(T).$$

On a donc prouvé la proposition suivante.

**Proposition 12.4.1.** *Il existe  $c, c' > 0$  tel que pour tout  $T \in (\alpha_0^G)^{\theta_0}$  vérifiant  $\mathbf{d}_0(T) \geq c'(c + 1)$ , l'expression (12.11) soit égale à*

$$\begin{aligned} & \sum_{H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \kappa^{\eta T} (H^Q - T_{Q_0}^Q) \widetilde{\sigma}_Q^R(H - T) \phi_{Q_0}^Q(H - T) e^{-(2\rho_{Q_0}, H)} \\ & \times \int_{X_{L_0}^{\widetilde{G}}(H) \times \mathbf{K}} \int_{\mu_S} \Lambda^{T[[H^Q]], Q_0} E_{Q_0}^Q(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk, \Psi, \mu) \vartheta(\mu)} d\mu dx dk. \end{aligned}$$

La somme sur  $\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$  ne fait intervenir que des  $H$  tels que  $\|H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0}\| \leq c$ .

On a aussi l'analogue de [25, proposition 12.5.1] :

<sup>3</sup>Observons que la fonction  $\kappa^T$  utilisée ici n'est pas tout-à-fait la même que celle de [25], puisque nous ne passons pas au quotient par le centre.

<sup>4</sup>Il faut supprimer le signe  $(-1)^{a_Q - a_G}$  dans la formule du lemme 4.2.2 de [25]. Voir **Err** (iii) de l'annexe.

**Proposition 12.4.2.** Pour  $H \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}_0}^{\tilde{G}}$ , on considère l'expression  
(12.15)

$$\int_{X_{L_0}^{\tilde{G}}(H) \times \mathbf{K}} \int_{\mu_S} |\Lambda^{T\llbracket H^{\mathcal{Q}} \rrbracket, \mathcal{Q}_0} E_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}}(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \overline{\Lambda^{T\llbracket H^{\mathcal{Q}} \rrbracket, \mathcal{Q}_0} E_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}'}(xk, \Psi, \mu)} \vartheta(\mu)| d\mu dx dk.$$

On suppose que  $T$  est dans le cône introduit en section 12.3 et que  $\mathbf{d}_0(T)$  est assez grand. On a les assertions suivantes :

- (i) Si  $\phi_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}}(H - T) = 1$ , l'expression (12.15) est convergente.
- (ii) Il existe  $\eta_0$  avec  $0 < \eta_0 < 1$  tel que si  $0 < \eta < \eta_0$ , alors il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $T \in (\alpha_{\mathcal{Q}_0}^G)^{\theta_0}$  et tout  $H \in \mathcal{C}_{\mathcal{Q}_0}^{\tilde{G}}$  vérifiant

$$\tilde{\sigma}_{\mathcal{Q}}^R(H - T) \phi_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}}(H - T) \kappa^{\eta T} (H^{\mathcal{Q}} - T_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}}) = 1,$$

l'expression (12.15) soit majorée par  $c e^{(2\rho_{\mathcal{Q}_0}, H)} \mathbf{d}_0(T)^{\dim(\alpha_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}_0})}$ .

*Démonstration.* On reprend celle de loc. cit. On veut majorer l'intégrale intérieure dans (12.15). Pour cela on peut supposer  $\vartheta \equiv 1$  (cf. la remarque 12.1.2). Comme dans la preuve de [25, proposition 12.2.3], on se ramène grâce à l'inégalité de Schwartz à majorer deux types d'intégrales :

$$(12.16) \quad \int_{\mu_S} \Lambda^{T\llbracket H^{\mathcal{Q}} \rrbracket, \mathcal{Q}_0} E_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}}(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \overline{\Lambda^{T\llbracket H^{\mathcal{Q}} \rrbracket, \mathcal{Q}_0} E_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}}(xk, \Phi, \theta_0(\mu))} d\mu$$

et

$$(12.17) \quad \int_{\mu_S} E_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}'}(xk, \Psi, \mu) \overline{E_{\mathcal{Q}_0}^{\mathcal{Q}'}(xk, \Psi, \mu)} d\mu.$$

Commençons par majorer l'intégrale (12.17). Rappelons que l'on a fixé en section 12.2 un domaine de Siegel  $\mathfrak{S}_{\mathcal{Q}'}^G = \Omega_{\mathcal{Q}'} \mathfrak{B}_{\mathcal{Q}'}^G \mathfrak{S}^{L', * \mathbf{K}}$  pour le quotient  $\mathfrak{B}_G \mathcal{Q}'(F) \backslash G(\mathbb{A})$ . Soit  $h^{\mathcal{Q}'}$  la fonction sur  $\mathcal{Q}'(F) \backslash G(\mathbb{A}) / \mathbf{K}$  définie par

$$h^{\mathcal{Q}'}(y) = \sum_{\delta \in \mathcal{Q}'(F)} \delta_{P_0}(\delta y)^{1/2} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{\mathcal{Q}'}^G}(\delta y).$$

On a

$$h^{\mathcal{Q}'}(y) \ll \delta_{P_0}(y)^{1/2} \ll h^{\mathcal{Q}'}(y) \quad \text{pour } y \in \mathfrak{S}_{\mathcal{Q}'}^G.$$

D'après la proposition 12.2.2, pour  $b \in \mathfrak{B}_G$  et  $y, y' \in \mathcal{Q}'(F) \mathfrak{S}_{\mathcal{Q}'}^G$ , l'intégrale  
(12.18)

$$\int_{\mu_S} E^{\mathcal{Q}'}(by, \Psi, \mu) \overline{E^{\mathcal{Q}'}(by', \Psi, \mu)} d\mu = \int_{\mu_S} E^{\mathcal{Q}'}(y, \Psi, \mu) \overline{E^{\mathcal{Q}'}(y', \Psi, \mu)} d\mu$$

est essentiellement majorée par  $h^{\mathcal{Q}'}(y) h^{\mathcal{Q}'}(y')$ . Ensuite on prend le terme constant en chacune des variables  $y, y'$ . Cette opération, qui consiste à intégrer sur un compact, commute à l'intégrale sur  $\mu_S$ . Puis on prend  $y = y' = a^G sk$  avec  $k \in \mathbf{K}$ ,

$s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}$ ,  $x = as \in L_0(\mathbb{A}; H')$  pour un relèvement  $H' \in \mathcal{A}_{Q_0}$  de  $H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$  et  $a = a_G a^G \in \mathfrak{B}_G \mathfrak{B}_{Q_0}^G$  (on peut même supposer  $a^G \in \mathfrak{B}_{Q_0}^G \cap \mathfrak{B}'_{Q_0}{}^G$  comme dans la démonstration de la proposition 12.3.2). L'intégrale (12.17) est donc essentiellement majorée par

$$h_{Q_0}^{Q'}(y)^2 = h_{Q_0}^{Q'}(a^G s)^2.$$

Comme la fonction  $h^{Q'}$  est à croissance lente, son terme constant  $h_{Q_0}^{Q'}$  l'est aussi. L'intégrale (12.17) est donc essentiellement majorée par  $|a^G s|^D$  pour  $D > 0$  assez grand. L'intégrale (12.16) se déduit, elle aussi, de (12.18) en prenant les termes constants le long de  $Q_0$ , puis en appliquant l'opérateur  $\Lambda^{T[[H^Q]], Q_0}$ , et enfin en posant  $y = y' = a^G s k$ . Quand on prend les termes constants, on obtient une expression essentiellement majorée par

$$h_{Q_0}^Q(y) h_{Q_0}^Q(y').$$

Rappelons que l'hypothèse  $\phi_{Q_0}^Q(H - T) = 1$  assure que l'élément  $T[[H^Q]] \in \mathfrak{a}_{P_0}^{Q_0}$  est régulier. D'après la proposition 4.2.1, il existe un sous-ensemble compact  $\Omega$  de  $\mathfrak{S}^{L_0,*}$  tel que si  $\Lambda^{T[[H^Q]], Q_0} h_{Q_0}^Q(a^G s k) \neq 0$ , alors  $s \in \Omega$ . Comme

$$\mathbf{H}_{Q_0}(x)^G = \mathbf{H}_{Q_0}(a^G) + \mathbf{H}_{Q_0}(s)^G = H^G$$

et que  $H$  est fixé,  $a^G$  reste dans un ensemble fini de  $\mathfrak{B}_{Q_0}^G$ . D'où le point (i). Prouvons (ii). On suppose que l'hypothèse

$$(12.19) \quad \tilde{\sigma}_Q^R(H - T) \phi_{Q_0}^Q(H - T) \kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q) = 1$$

est vérifiée<sup>5</sup>. On peut prendre  $x$  dans un domaine de Siegel  $\mathfrak{S}^{L_0} = \mathfrak{B}_{L_0} \mathfrak{S}^{L_0,*}$ . On écrit  $x = as$  avec  $a \in \mathfrak{B}_{Q_0}$  et  $s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}$ . Si  $\eta$  est assez petit, l'hypothèse (12.19) implique, comme dans la preuve de [25, proposition 12.5.1] (majoration (4), page 170), qu'il existe une constante  $D > 0$ , telle que

$$h_{Q_0}^Q(a^G s) \ll \delta_{Q_0}(a)^{\frac{1}{2}} |s|^D.$$

Mais cette majoration est inutile ici, on peut directement passer à la page 172. Notons  $\mathbf{C}$  l'opérateur qui multiplie une fonction sur  $Y_{Q_0}$  par la fonction

$$x \mapsto F_{P_0}^{Q_0}(x, T[[H^Q]])$$

---

<sup>5</sup>Si  $\eta$  est assez petit, l'hypothèse (12.19) implique  $\tau_{Q_0}^P(H) = 1$ , où  $\tilde{P}$  est l'unique élément de  $\tilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}$  vérifiant la double inclusion  $Q' \subset P \subset R$  (cf. [25, page 171]). En particulier, cela entraîne  $\tau_{Q_0}^{Q'}(H) = 1$  et  $\tau_{Q_0}^Q(H) = 1$ .

et décomposons l'opérateur  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{T[[H^Q]], Q_0}$  en

$$(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{C}) + \mathbf{C}.$$

Rappelons que  $T[[H^Q]]$  est « plus régulier » que  $T$ . D'après la proposition 4.2.2, si  $T$  est assez régulier, on peut remplacer l'opérateur  $\mathbf{\Lambda}^{T[[H^Q]], Q_0}$  par  $\mathbf{C}$  dans l'intégrale intérieure de l'expression (12.15). Il nous faut donc majorer l'intégrale

$$I_{\mathbf{C}}(xk) = \int_{\mu_s} F_{P_0}^{Q_0}(ask, T[[H^Q]]) E_{Q_0}^Q(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \overline{E_{Q_0}^Q(xk, \Phi, \theta_0(\mu))} d\mu$$

sous les hypothèses (12.19) et

$$(12.20) \quad F_{P_0}^{Q_0}(xk, T[[H^Q]]) = F_{P_0}^{Q_0}(s, T[[H^Q]]) = 1.$$

Cela conduit à majorer (12.17) et l'analogue de (12.17) où  $Q$  remplace  $Q'$ . Sous (12.19) et (12.20), on obtient comme dans la preuve de [25, proposition 12.5.1] que  $h^{Q'}(a^G s)$  est essentiellement majoré par  $\delta_{P_0}(x)^{1/2}$ . Donc (12.17) est essentiellement majoré par  $\delta_{P_0}(x)$ . Il en est de même de l'analogue de (12.17) relatif à  $Q$ , et donc aussi de  $I_{\mathbf{C}}(xk)$ . On obtient que l'expression (12.15) est essentiellement majorée par

$$\int_{X_{L_0}(H)} F_{P_0}^{Q_0}(x, T[[H^Q]]) \delta_{P_0}(x) dx,$$

ou, ce qui revient au même, par

$$e^{\langle 2\rho_{Q_0}, H \rangle} \int_{\mathfrak{S}^{L_0, *}} F_{P_0}^{Q_0}(s, T[[H^Q]]) \delta_{P_0}(s) ds.$$

Rappelons que

$$\mathfrak{S}^{L_0, *} = \mathfrak{S}_{L_0} \mathfrak{S}^{L_0, 1} = \mathfrak{S}_{L_0} \Omega_{L_0} \mathfrak{B}_0^{L_0}(t) \mathfrak{F}_{L_0} \mathbf{K}_{L_0}$$

avec  $\mathfrak{B}_0^{L_0}(t) = \mathfrak{B}_0(t) \cap L_0(\mathbb{A})^1$ . On décompose  $s$  en  $s = vbk$  avec  $v \in \mathfrak{S}_{L_0} \Omega_{L_0}$ ,  $b \in \mathfrak{B}_0^{L_0}(t)$  et  $k \in \mathfrak{F}_{L_0} \mathbf{K}_{L_0}$ . La décomposition des mesures introduit un facteur  $\delta_{P_0 \cap L_0}^{L_0}(b)^{-1} = \delta_{P_0}(b)^{-1}$ , et l'intégrale sur  $\mathfrak{S}^{L_0, *}$  est essentiellement majorée par le cardinal de l'ensemble

$$\{b \in \mathfrak{B}_0^{L_0}(t) : F_{P_0}^{Q_0}(b, T[[H^Q]]) = 1\}.$$

En écrivant  $Y = \mathbf{H}_0(b) \in \alpha_0^{L_0}$ , on conclut, comme à la fin de la démonstration de [25, proposition 12.5.1]. ■

## 12.5 Retour à la formule de départ

On suppose désormais que  $0 < \eta < \eta_0$ , où  $\eta_0$  vérifie les conditions de la proposition 12.4.2.

L'expression pour  $\mathfrak{J}^{G,T}$  de la proposition de 12.1.1 est une combinaison linéaire finie d'intégrales itérées (12.1) (ou, ce qui revient au même, d'expressions (12.2)) dont la convergence est assurée par la proposition 12.3.2.

**Proposition 12.5.1.** *Il existe une constante absolue  $c' > 0$  et une constante  $c(f) > 0$  telles que, si  $\mathbf{d}_0(T) \geq c'(c(f) + 1)$ , on a*

$$\mathfrak{J}^{\tilde{G},T} = \sum_{\substack{Q,R \in \mathcal{P}_{\text{st}} \\ Q \subset R}} \tilde{\eta}(Q, R) \sum_{S \in \mathcal{P}_{\text{st}}^{Q'}} \frac{1}{n^{Q'}(S)} \sum_{\sigma \in \Pi_{\text{disc}}(M_S)} \widehat{c}_{M_S}(\sigma) \times \sum_{\Psi \in \Psi_S(\sigma)} \sum_{H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}} A^T(H; \Psi)$$

avec

$$\begin{aligned} A^T(H; \Psi) &= \kappa^{\eta T} (H^Q - T_{Q_0}^Q) \widetilde{\sigma}_Q^R(H - T) \phi_{Q_0}^Q(H - T) \\ &\quad \times e^{-(2\rho_{Q_0}, H)} \int_{X_{L_0}^{\tilde{G}}(H) \times \mathbf{K}} \int_{\mu_S} \Lambda^{T\llbracket H^Q \rrbracket, Q_0} E_{Q_0}^Q(xk, \widetilde{\rho}_{S,\sigma,\mu}(f, \omega)\Psi, \theta_0(\mu)) \\ &\quad \times \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk, \Psi, \mu)} d\mu dx dk. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Ceci résulte de la proposition 12.4.1 et de la remarque 12.1.2. ■

**Définition 12.5.2.** Pour  $\Psi \in \mathcal{A}(X_S, \sigma)$  et  $\Phi \in \mathcal{A}(X_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$ , et pour  $\vartheta$  une fonction lisse sur  $\mu_S$ , on pose

$$\begin{aligned} A^T(H; \Phi, \Psi; \vartheta) &= \kappa^{\eta T} (H^Q - T_{Q_0}^Q) \widetilde{\sigma}_Q^R(H - T) \phi_{Q_0}^Q(H - T) \\ &\quad \times e^{-(2\rho_{Q_0}, H)} \int_{X_{L_0}^{\tilde{G}}(H) \times \mathbf{K}} \int_{\mu_S} \Lambda^{T\llbracket H^Q \rrbracket, Q_0} E_{Q_0}^Q(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \\ &\quad \times \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk, \Psi, \mu)} \vartheta(\mu) d\mu dx dk. \end{aligned}$$

On écrira simplement  $A^T(H)$  pour  $A^T(H; \Phi, \Psi; \vartheta)$  lorsque les fonctions  $\Phi$ ,  $\Psi$  et  $\vartheta$  sont fixées, et on pose

$$A^T = \sum_{H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}} A^T(H).$$