Chapitre 14

Formules explicites

14.1 Combinatoire finale : étape 1

Soient S, S_0, $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $S_0 = \theta_0(S) \subset Q$. On a donc, comme précédemment, $S \subset \theta_0^{-1}(Q) = Q'$. Soit aussi $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_S, \mathfrak{a}_S)$. D'après [25, lemme 14.1.1], $\widetilde{u}$ s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$\widetilde{u} = u\theta_0, \quad u = t^{-1}s \in \mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_{S_0}, \mathfrak{a}_S)$$

avec $t \in \mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_S, Q)$ et $s \in \mathbf{W}^Q(\mathfrak{a}_{S_0}, t(\mathfrak{a}_S))$. Soit $S'' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $\mathfrak{a}_{S''} = t(\mathfrak{a}_S)$, et soit $S_1 = t^{-1}(S'')$. On a donc $S'' \subset Q$. On considère des paramètres μ et ν dans $\boldsymbol{\mu}_S$, et l'on pose $\Lambda = \widetilde{u}\mu - \nu$. Rappelons que l'on a posé, en section 3.2,

$$Y_u = T_0 - u^{-1}T_0 = \mathbf{H}_0(w_u^{-1}).$$

On introduit une variante tordue :

$$Y_{\widetilde{u}} = \theta_0^{-1}Y_u = \theta_0^{-1}T_0 - \widetilde{u}^{-1}T_0,$$

ainsi que le scalaire

$$a_S(\mu, \widetilde{u}) = e^{\langle \mu + \rho_S, Y_{\widetilde{u}}\rangle} = e^{\langle \theta_0\mu + \rho_{S_0}, Y_u\rangle}.$$

On pose enfin

$$M = M_S, \quad Q_1 = t^{-1}Q = t^{-1}sQ = \widetilde{u}Q' \in \mathcal{F}(M).$$

Soit $H \in \mathcal{A}_{Q_1}$. Pour $S_1 \in \mathcal{P}^{Q_1}(M)$, on a défini en sections 5.3 et 5.4

$$\mathcal{M}(\mathfrak{Y}; S, \mu; \Lambda, S_1) = e^{\langle \Lambda, Y_{S_1}\rangle}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu + \Lambda)$$

et

$$\mathcal{M}_{M,F}^{Q_1,T}(H, \mathfrak{Y}; S, \mu; \Lambda) = \sum_{S_1 \in \mathcal{P}^{Q_1}(M)} \varepsilon_{S_1}^{Q_1,[T]_{S_1}}(H; \Lambda)\mathcal{M}(\mathfrak{Y}; S, \mu; \Lambda, S_1).$$

Pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_{\theta_0(M)}$, on a défini en 13.8.4 l'opérateur

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{s,t}^{T,Q}(tH; S, \sigma; \lambda, \mu) = &\sum_{S'' \in \mathcal{P}^Q({}_tM)} \varepsilon_{S''}^{Q,[T]_{S''}}(tH; s\lambda - t\mu)e^{\langle s\lambda - t\mu, Y_{S''}\rangle}\\ &\times \quad \mathbf{M}(t,\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(t\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(s\lambda)\mathbf{M}(s,\lambda).\end{aligned}$$

Proposition 14.1.1. *Soient $\nu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\Lambda = u\lambda - \mu$. Avec les notations de la définition 7.2.2 on a*

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Omega}^{T,Q}_{s,t}(tH; S,\sigma;\lambda,\mu+\nu)\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\\ &\quad= \frac{a_S(\theta_0^{-1}\lambda,\widetilde{u})}{a_S(\mu,\widetilde{u})}\mathcal{M}^{Q_1,T}_{M,F}(H,\mathfrak{Y}; S,\mu+\nu;\Lambda-\nu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega).\end{aligned}$$

Démonstration. Posons $\mu' = \mu+\nu$ et $\Lambda' = u\lambda - \mu' = \Lambda - \nu$. Puisque

$$\Lambda' = t^{-1}(s\lambda - t\mu'),$$

pour $S'' \in \mathcal{P}^Q({}_tM)$ et $S_1 = t^{-1}(S'') \in \mathcal{P}^{Q_1}(M)$, on a

$$\varepsilon^{Q,[T]_{S''}}_{S''}(tH; s\lambda - t\mu')e^{\langle s\lambda - t\mu', Y_{S''}\rangle} = \varepsilon^{Q_1,t^{-1}[T]_{S''}}_{S_1}(H;\Lambda')e^{\langle\Lambda', t^{-1}Y_{S''}\rangle}.$$

Or, on a $t^{-1}[T]_{S''} = [T]_{S_1}$, et

$$t^{-1}Y_{S''} = Y_{S_1} - Y_{t^{-1}(S)},$$

où $Y_{t^{-1}(S)}$ est la projection de $Y_t = T_0 - t^{-1}T_0$ sur $\mathfrak{a}_M$. Grâce à [25, lemmes 6.1.1 et 14.1.2], on obtient, comme dans la preuve de [25, proposition 14.1.3], que

$$\mathbf{M}(t,\mu')^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(t\mu')^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(s\lambda)\mathbf{M}(s,\lambda)\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)$$

est égal à

$$\frac{a_S(\theta_0^{-1}\lambda,\widetilde{u})}{a_S(\mu,\widetilde{u})}e^{\langle\Lambda', Y_{t^{-1}(S)}\rangle}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu')^{-1}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu'+\Lambda')\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu'+\Lambda')\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega).$$

D'où le résultat. ∎

Pour $\nu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\Lambda = (\widetilde{u}-1)\mu$, on pose

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^{T,Q_1}_M(H;\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)\\ &\quad= \mathfrak{Sp}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\mathcal{M}^{Q_1,T}_{M,F}(H,\mathfrak{Y}; S,\mu+\nu;\Lambda-\nu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big).\end{aligned}$$

Pour $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$, l'espace principal homogène sous $\widehat{\mathfrak{c}}_M$ introduit dans la définition 13.4.1, on a $\nu|_{\mathcal{B}_{\widetilde{G}}} = 0$ et $\Lambda|_{\mathcal{B}_{\widetilde{G}}} = 0$. L'expression

$$\boldsymbol{A}^{T,Q_1}_M(H;\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)$$

ne dépend donc que de l'image de H dans $\mathcal{C}_{Q_1} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{Q_1}$. On pose alors

$$[\boldsymbol{A}]^{T,Q_1}_M(H;\sigma,\widetilde{u},\mu) = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1}\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\boldsymbol{A}^{T,Q_1}_M(H;\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu).$$

Rappelons que S est l'unique élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $M_S = M$.

Lemme 14.1.2.

(i) *On a l'égalité*

$$[A]_M^{T,Q_1}(H;\sigma,\widetilde{u},\mu) = \mathfrak{S}\mathfrak{p}_\sigma\Big([\mathbf{\Omega}]_{s,t}^{T,Q}(tH;S,\sigma;\mu)\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\Big).$$

(ii) *Cette expression est invariante si l'on remplace M, Q_1, S, $\widetilde{u}$ et H par leurs conjugués sous l'action d'un élément $w \in \mathbf{W}^G$, et simultanément σ et μ par $w\sigma = \sigma \circ \mathrm{Int}_w^{-1}$ et $w\mu = \mu \circ \mathrm{Int}_w^{-1}$.*

Démonstration. Pour (i), puisque $\mathcal{M}_{M,F}^{Q_1,T}(H,\mathfrak{Y};S,\mu;\Lambda)$ est lisse pour les valeurs imaginaires pures de μ et Λ, on peut prendre $\lambda = \theta_0(\mu)$ dans la proposition 14.1.1. Pour (ii), rappelons que w définit un opérateur

$$\boldsymbol{w} : \boldsymbol{\mathcal{A}}(X_S,\sigma) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}(X_{wS}, w\sigma).$$

Cet opérateur est une isométrie et (ii) est une conséquence des équations fonctionnelles satisfaites par les opérateurs d'entrelacement. ∎

On observe que $[T]_{Q_1} = t^{-1}(T_Q)$ puisque $Q_1 = t^{-1}Q$. Soient aussi $R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q' \subset R$, et $R_1 = t^{-1}R$. On pose

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\widetilde{u}) = \sum_{H \in \mathcal{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H - [T]_{Q_1}) \int_{\boldsymbol{\mu}_M} [A]_M^{T,Q_1}(H;\sigma,\widetilde{u},\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

On a défini cette expression pour $M = M_S$ avec $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. Plus généralement, elle est bien définie pour tout $M \in \mathcal{L}$, tout $S \in \mathcal{P}$ tel que $M_S = M$, tout Q_1 et tout R_1 dans $\mathcal{P}$ tels que $M \subset Q_1 \subset R_1$, et tout $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_M)$. On introduit alors l'expression

$$\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u}) = \sum_{\substack{Q_1,R_1 \in \mathcal{P} \\ M \subset Q_1 \subset R_1}} \widetilde{\eta}(Q_1,R_1;u)\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\widetilde{u})$$

et on a l'analogue de la proposition 14.1.5 de [25] :

Proposition 14.1.3. *L'expression $\mathfrak{J}_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{G},T}(f,\omega)$ de la proposition 13.8.6 se réécrit*

$$\mathfrak{J}_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{G},T}(f,\omega) = \sum_{M \in \mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\sigma \in \mathbf{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma) \sum_{\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_M)} \mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u}).$$

Maintenant, on définit une (G,M)-famille $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)$ par

$$\boldsymbol{c}(\Lambda,S_1) = \mathfrak{S}\mathfrak{p}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\,\mathcal{M}(\mathfrak{Y};S,\mu+\nu;\Lambda,S_1)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\nu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big).$$

Elle est périodique car la famille orthogonale $\mathfrak{Y}$ est entière. Pour $\Lambda = (\widetilde{u}-1)\mu$, on a donc

$$\boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H;\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu) = \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q_1,T}(H;\Lambda-\nu).$$

D'après le lemme 1.5.1, il existe une fonction à décroissance rapide

$$\mathfrak{U} \mapsto \varphi(\mathfrak{U}) = \varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})$$

sur $\mathcal{H}_M$ telle que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_\varphi$.

D'après la formule d'inversion de Fourier du corollaire 1.6.10, on a

$$\boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H;\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \varphi(\mathfrak{U})\gamma_{M,F}^{Q_1,T}(H,\mathfrak{U};\Lambda-\nu)$$

avec

$$\gamma_{M,F}^{Q_1,T}(H,\mathfrak{U};\Lambda-\nu) = \gamma_{M,F}^{Q_1,\mathfrak{U}(T)}(H+U_{Q_1};\Lambda-\nu).$$

Lemme 14.1.4. *Le support de φ est contenu dans le réseau*

$$\mathcal{H}_M^G = \mathcal{H}_M \cap \mathfrak{H}_M^G$$

du sous-espace $\mathfrak{H}_M^G$ de $\mathfrak{H}_M$ formé des familles orthogonales $\mathfrak{U} = (U_P)$ telles que $U_G = 0$.

Démonstration. Il suffit de voir que la (G,M)-famille périodique $\boldsymbol{c}$ est invariante par translations par les éléments de $\widehat{\mathfrak{a}}_G$ (en fait, de $\boldsymbol{\mu}_G$). Par définition,

$$\boldsymbol{c}(\Lambda,S_1) = \mathfrak{S}\mathfrak{p}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\,\mathcal{M}(\mathfrak{Y};S,\mu+\nu;\Lambda,S_1)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\nu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big)$$

avec

$$\mathcal{M}(\mathfrak{Y};S,\mu;\Lambda,S_1) = e^{\langle\Lambda,Y_{S_1}\rangle}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu+\Lambda).$$

D'autre part on a

$$\boldsymbol{c}(\Lambda,S_1) = \int_{\boldsymbol{\mu}_G} \boldsymbol{c}(\Lambda+\nu,S_1)\,\mathrm{d}\nu = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\left(\int_{\boldsymbol{\mu}_G} e^{\langle\nu,U_G\rangle}\,\mathrm{d}\nu\right)e^{\langle\Lambda,U_{S_1}\rangle}\varphi(\mathfrak{U}).$$

On en déduit que

$$\varphi(\mathfrak{U}) = \left(\int_{\boldsymbol{\mu}_G} e^{\langle\nu,U_G\rangle}\,\mathrm{d}\nu\right)\varphi(\mathfrak{U}).$$

Cela prouve le lemme. ■

Conformément à nos conventions, on pose $\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_M$. Soit $\widetilde{L} \in \mathcal{L}^{\widetilde{G}}$ le sous-ensemble de Levi minimal contenant $M\widetilde{u}$. En particulier,

$$\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{L}}(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_M).$$

Proposition 14.1.5. *On a l'égalité*

$$\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1} \sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)} \sum_{H\in\mathfrak{C}_M^{\widetilde{G}}} e^{-\langle \nu, Y_{\widetilde{u}}+H\rangle}$$
$$\times \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle(\widetilde{u}-1)\mu, H\rangle} \Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(H, \mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu; \mathfrak{U})\, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. La preuve ci-après reprend, pour l'essentiel, les arguments de [25, proposition 14.1.7]. On rappelle que par définition on a

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1} \sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)} e^{-\langle \nu, Y_{\widetilde{u}}\rangle} \mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u}; \nu)$$

avec

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u}; \nu) = \sum_{H_1\in\mathfrak{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H_1 - [T]_{Q_1}) \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H_1; \sigma, \widetilde{u}, \mu+\nu; \nu)\, \mathrm{d}\mu.$$

Fixons $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$ et posons $\varphi = \varphi(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu)$. Pour $H_1 \in \mathcal{A}_{Q_1}$ et $\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M$, on a (par définition)

$$\gamma_{M,F}^{Q_1,T}(H_1, \mathfrak{U}; \Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \Gamma_M^{Q_1}(H, \mathfrak{U}(T)) e^{\langle\Lambda, H\rangle}.$$

Par conséquent, en rappelant que $\boldsymbol{c}$ est la (G, M)-famille $\boldsymbol{c}_\varphi = \boldsymbol{c}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu)$, on a

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q_1,T}(H_1; \Lambda) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \varphi(\mathfrak{U})\Gamma_M^{Q_1}(H, \mathfrak{U}(T)) e^{\langle\Lambda, H\rangle}. \tag{14.1}$$

Pour $H \in \mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1 + U_{Q_1})$, on a $H_{Q_1} = H_1 + U_{Q_1}$, et il existe une constante $c > 0$ (indépendante de $\mathfrak{U}$) telle que si $\Gamma_M^{Q_1}(H, \mathfrak{U}(T)) \neq 0$, on ait

$$\|H^{Q_1}\| \leq c \sup_{P\in\mathcal{P}^{Q_1}(M)} \|(U_P + [T]_P)^{Q_1}\|.$$

Par conséquent, la somme

$$\sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} |\Gamma_M^{Q_1}(H, \mathfrak{U}(T))|$$

est finie, et puisque φ est à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$, on en déduit que l'expression (14.1) est absolument convergente. En prenant $\Lambda = (\widetilde{u} - 1)\mu - \nu$, on obtient que

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H_1;\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M^G}\ \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})$$
$$\times\,\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))e^{\langle(\widetilde{u}-1)\mu-\nu,H\rangle}\,\mathrm{d}\mu.$$

On a donc

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\widetilde{u};\nu) = \sum_{H_1\in\mathcal{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}}\ \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\ \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H,\mu,\nu,\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu$$

avec

$$\boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H,\mu,\nu,\mathfrak{U}) = e^{\langle(\widetilde{u}-1)\mu-\nu,H\rangle}\widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H-\mathfrak{U}(T))\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U}).$$

L'expression

$$\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\ \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H,\mu,\nu,\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu \tag{14.2}$$

est absolument convergente. Pour chaque $\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M$, puisque $(U_S)_{Q_1} = U_{Q_1}$, on a $\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1}) = \mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1)+U_S$. L'expression (14.2) est donc égale à

$$\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\ \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1)} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H+U_S,\mu,\nu,\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu$$

et $\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\widetilde{u};\nu)$, c'est-à-dire la somme sur $H_1\in\mathcal{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}$ des expressions (14.2), se réécrit

$$\sum_{H\in\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}}\ \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H+U_S,\mu,\nu,\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu. \tag{14.3}$$

Pour cela, il suffit de démontrer la convergence absolue d'une somme itérée de la forme

$$\sum_{H\in\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}}\ \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H-[T]_{Q_1})\Gamma_M^{Q_1}(H+U_S,\mathfrak{U}(T))\psi((\widetilde{u}^*-1)(H+U_S),\mathfrak{U}),$$

où $\widetilde{u}^*$ est le transposé de $\widetilde{u}$ (identifié à $\widetilde{u}^{-1}$) et

$$\psi(X,\mathfrak{U}) = \int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle\mu,X\rangle}\varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu.$$

D'après ce qui précède, c'est-à-dire la convergence absolue de l'expression (14.2), pour $H_1 \in \mathcal{A}_{Q_1}$, l'expression

$$\sum_{H \in \mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1)} \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} \Gamma_M^{Q_1}(H + U_S, \mathfrak{U}(T))\psi((\widetilde{u}^* - 1)(H + U_S), \mathfrak{U})$$

est absolument convergente. De plus sa valeur en H_1 est donnée par $\xi((\widetilde{u}^* - 1)H_1)$ pour une fonction ξ sur $\mathcal{A}_{Q_1}$ qui est la transformée anti-Laplace d'une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_{Q_1} = \widehat{\mathcal{A}}_{Q_1}$. Il suffit donc d'établir la convergence absolue de la somme

$$\sum_{H_1 \in \mathfrak{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H_1 - [T]_{Q_1})\xi((\widetilde{u}^* - 1)H_1),$$

qui résulte de [25, lemme 2.12.2] (cf. aussi section 2.3). On peut donc effectuer le changement de variable $H \mapsto H - U_S$ dans (14.3). On obtient que

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u}; \nu) = \sum_{H \in \mathfrak{C}_M^{\widetilde{G}}} \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M^G} \left(\int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{M,Q_1}^{T,R_1}(H, \mu, \nu, \mathfrak{U}) \, \mathrm{d}\mu \right).$$

On a

$$\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = \sum_{\substack{Q_1, R_1 \in \mathcal{P} \\ M \subset Q_1 \subset R_1}} \widetilde{\eta}(Q_1, R_1; u)\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u})$$

avec

$$\widetilde{\eta}(Q_1, R_1; u)\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u}) = \sum_{\substack{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{P}} \\ Q_1 \subset P \subset R_1}} (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}} \mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1} \sum_{\nu \in \widehat{\mathfrak{C}}_M} e^{-\langle \nu, Y_{\widetilde{u}} \rangle} \sum_{H \in \mathfrak{C}_M^{\widetilde{G}}} \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M^G} \sum_{\substack{Q_1, R_1 \in \mathcal{P} \\ M \subset Q_1 \subset R_1}} \\
\times \sum_{\substack{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{P}} \\ Q_1 \subset P \subset R_1}} (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H - \mathfrak{U}(T)_{Q_1})\Gamma_M^{Q_1}(H, \mathfrak{U}(T)) \\
\times \int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle (\widetilde{u} - 1)\mu - \nu, H \rangle} \varphi(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu; \mathfrak{U}) \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

La double somme

$$\sum_{\substack{Q_1, R_1 \in \mathcal{P} \\ M \subset Q_1 \subset R_1}} \sum_{\substack{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{P}} \\ Q_1 \subset P \subset R_1}}$$

s'écrit aussi

$$\sum_{\substack{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{u}\in\mathbf{W}^{\widetilde{P}}\\ M\subset P}}\ \sum_{\substack{Q_1,R_1\in\mathcal{P}\\ M\subset Q_1\subset P\subset R_1}} = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(\widetilde{L})}\ \sum_{\substack{Q_1,R_1\in\mathcal{P}\\ M\subset Q_1\subset P\subset R_1}}$$

et d'après [25, lemme 2.11.5], la double somme

$$\sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(\widetilde{L})}\ \sum_{\substack{Q_1,R_1\in\mathcal{P}\\ M\subset Q_1\subset P\subset R_1}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}}\widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H-\mathfrak{U}(T)_{Q_1})\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))$$

est égale à

(14.4)

$$\sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(\widetilde{L})}\ \sum_{\substack{Q_1\in\mathcal{P}\\ M\subset Q_1\subset P}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}}\hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H-\mathfrak{U}(T)_P)\tau_{Q_1}^{P}(H-\mathfrak{U}(T)_{Q_1})\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T)).$$

D'après [25, lemme 1.8.4 (3)] et [25, proposition 2.9.3], cette double somme (14.4) est égale à

$$\sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(\widetilde{L})} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}}\hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H-\mathfrak{U}(T)_P) = \Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(H,\mathfrak{U}(T)).$$

Cela achève la preuve la proposition. ∎

14.2 Combinatoire finale : étape 2

Ce paragraphe n'a pas d'équivalent pour les corps de nombres : il s'agit, à l'aide du lemme d'inversion de Fourier du lemme 14.2.2, de remplacer la somme sur les $H\in\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}$ dans la proposition 14.1.5 par une somme sur les $\widetilde{Z}\in\widehat{\mathfrak{C}}_G$.

Rappelons que $\widetilde{L}\in\mathcal{L}^{\widetilde{G}}$ est le sous-espace de Levi minimal (dans $\widetilde{G}$) contenant $M\widetilde{u}$. L'espace $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$ est le sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ formé des points fixes sous $\widetilde{u}=u\theta_0$. On note $\mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$ dans $\mathfrak{a}_M$:

$$\mathfrak{a}_M=\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}\oplus\mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}}\quad\text{et l'on a}\quad \mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}}=(\widetilde{u}-1)\mathfrak{a}_M.$$

Par définition, $\mathcal{A}_{\widetilde{L}}$ est l'image et $\mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}$ le noyau de la projection de $\mathcal{A}_M$ sur $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$. On a donc une suite exacte

$$0\to\mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}\to\mathcal{A}_M\to\mathcal{A}_{\widetilde{L}}\to 0.$$

La dualité de Pontryagin fournit alors la suite exacte

$$0\to\mu_{\widetilde{L}}\to\mu_M\to\mu_M^{\widetilde{L}}\to 0.$$

Conformément à nos conventions, les groupes compacts $\boldsymbol{\mu}_M$, $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$ et $\boldsymbol{\mu}_M^{\widetilde{L}}$ sont munis de la mesure de Haar, qui leur donne le volume 1. Considérons le morphisme entre groupes de Lie abéliens compacts connexes

$$\phi : \boldsymbol{\mu}_M^{\widetilde{L}} \times \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}} \to \boldsymbol{\mu}_M, \quad \text{défini par} \quad \phi(\dot{\mu}, \lambda) = (\widetilde{u} - 1)\mu - \lambda,$$

où $\mu \in \boldsymbol{\mu}_M$ est un relèvement de $\dot{\mu} \in \boldsymbol{\mu}_M^{\widetilde{L}}$.

Lemme 14.2.1. *Le morphisme ϕ est surjectif et son noyau $\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}$ est un groupe fini dont le cardinal est égal à la valeur absolue du jacobien de ϕ :*

$$|\mathrm{Jac}(\phi)| = |\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}| = |\det(\widetilde{u} - 1 \mid \mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}})|.$$

Démonstration. Le morphisme ϕ induit un isomorphisme pour les algèbres de Lie, car les espaces tangents, à l'origine, de l'image de $(\widetilde{u} - 1)$ et de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$, sont des supplémentaires orthogonaux (on identifie $\widetilde{u}$ et son transposé inverse, et on utilise l'égalité $\widetilde{u}^{-1}(\widetilde{u} - 1) = -(\widetilde{u} - 1)$). ∎

Pour $\nu \in \boldsymbol{\mu}_M$, on note

$$\xi_{\widetilde{u},\nu} : \boldsymbol{\mu}_M \to \boldsymbol{\mu}_M \qquad \text{l'application} \qquad \mu \mapsto (\widetilde{u} - 1)\mu - \nu.$$

Considérons le sous-ensemble des $\mu \in \boldsymbol{\mu}_M$ dont l'image par $\xi_{\widetilde{u},\nu}$ appartient à $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$:

$$\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu) = \{\mu \in \boldsymbol{\mu}_M \mid (\widetilde{u} - 1)\mu - \nu \in \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}\}.$$

C'est une union finie de translatés de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$. En effet, son quotient

$$\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{L}}(\nu) = \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)/\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$$

est un espace principal homogène sous le groupe $\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{L}}(0) \simeq \mathfrak{K}_{\widetilde{u}}$. On a donc

$$|\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{L}}(\nu)| = |\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|.$$

On munit $\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$ de la mesure $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$-invariante induite par celle sur $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$.

Lemme 14.2.2. *Pour $X \in \mathcal{A}_{\widetilde{L}}$, on note $\mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}(X)$ l'ensemble des $H \in \mathcal{A}_M$ tels que $H_{\widetilde{L}} = X$. Soient $\nu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et ψ une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_M$. On a l'identité*

$$\sum_{H \in \mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}(X)} \left(\int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle (\widetilde{u}-1)\mu - \nu, H \rangle} \psi(\mu)\, \mathrm{d}\mu \right) = |\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|^{-1} \int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)} e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu), X \rangle} \psi(\mu)\, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. C'est immédiat, par inversion de Fourier (cf. [34, section 3.20]). ∎

Rappelons que

$$\mathcal{E}(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\nu \in \boldsymbol{\mu}_M \,|\, \xi_{\widetilde{u}(\omega\otimes\sigma)} \star \nu|_{\mathcal{B}_M} = \xi_\sigma\}.$$

En particulier, tout $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$ est trivial sur $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$, et donc, pour tout $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$, le caractère $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)$ de $\mathcal{A}_{\widetilde{L}}$ est, lui aussi, trivial sur $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$. Soit $\widetilde{Z} \in \mathcal{A}_{\widetilde{G}}$. Pour $\nu, \mu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\Lambda = (\widetilde{u}-1)\mu$, on pose

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{T,\widetilde{G}}(\widetilde{Z};\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu) \\ &\qquad = \mathfrak{Sp}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\,\mathcal{M}_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},T}(\widetilde{Z},\mathfrak{Y};S,\mu+\nu;\Lambda-\nu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big). \end{aligned}$$

Pour $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$, puisque $\Lambda - \nu$ est trivial sur $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$, cette expression ne dépend que de l'image de $\widetilde{Z}$ dans $\mathfrak{c}_{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{\widetilde{G}}$.

Proposition 14.2.3. *On a*

$$\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1}|\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|^{-1}\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\sum_{\widetilde{Z}\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}}\int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)}\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{T,\widetilde{G}}(\widetilde{Z};\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. D'après la proposition 14.1.5,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1}&\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\sum_{H\in\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}} e^{-\langle\nu,Y_{\widetilde{u}}+H\rangle} \\ &\times\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle(\widetilde{u}-1)\mu,H\rangle}\Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(H,\mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

On décompose la somme sur les $H \in \mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}$ en une double somme sur $X \in \mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$, précédée de la somme en $H \in \mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}(X)$, où $\mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{\widetilde{L}}$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1}&\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\sum_{X\in\mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}}\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \\ &\times\sum_{H\in\mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}(X)}\int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle(\widetilde{u}-1)\mu-\nu,H\rangle}\Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(H,\mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 14.2.2, on voit que

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1}|\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|^{-1}&\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\sum_{X\in\mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}} \\ &\times\int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)}\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} e^{\langle\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu),X\rangle}\Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(X,\mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

On décompose la somme sur $X \in \mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$ en une double somme sur $\widetilde{Z} \in \mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$, précédée de la somme sur $X \in \mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\widetilde{Z})$. Pour $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$, $\widetilde{Z} \in \mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$ et $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$, on a

$$\sum_{X \in \mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\widetilde{Z})} e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu), X\rangle} \Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(X; \mathfrak{U}(T)) = \gamma_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},\mathfrak{U}(T)}(\widetilde{Z}; \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)).$$

Rappelons que la somme sur $\mathcal{H}_M$ est en fait une somme sur $\mathcal{H}_M^G$ (cf. lemme 14.1.4). D'après la formule d'inversion de Fourier pour les $(\widetilde{G}, \widetilde{L})$-familles (2.1), pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$, on a

$$\sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M^G} \gamma_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},\mathfrak{U}(T)}(\widetilde{Z}; \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)) \varphi(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu; \mathfrak{U}) = \boldsymbol{c}_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},T}(\widetilde{Z}; \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)),$$

où $\boldsymbol{c}$ est la (G, M)-famille définie par la fonction à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M : \mathfrak{U} \mapsto \varphi(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu; \mathfrak{U})$. Puisque $\Lambda - \nu = \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)$ le terme $\boldsymbol{c}_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},T}(\widetilde{Z}; \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu))$ est égal à l'expression $\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{T,\widetilde{G}}(\widetilde{Z}; \sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu)$. ■

On rappelle que l'on est parti de la formule de la proposition 10.2.1 pour $\mathfrak{J}_{\text{spec}}^{\widetilde{G},T}(f, \omega)$ réécrite sous la forme de la proposition 12.1.1. Puis on a introduit une variante $\boldsymbol{\mathfrak{J}}_{\text{spec}}^{\widetilde{G},T}(f, \omega)$ dans la proposition 13.8.6 (i) que l'on a décomposé en une somme de termes $\boldsymbol{\mathfrak{J}}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u})$ (cf. proposition 14.1.3) pour lesquels on obtient une nouvelle expression dans la proposition 14.2.3. Ces formules ont été obtenues pour $T \in \mathfrak{a}_0$ dans le translaté d'un cône ouvert non vide. Pour $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, nous pouvons maintenant les comparer.

Proposition 14.2.4. *On a l'égalité de fonctions dans* PolExp *:*

$$\mathfrak{J}_{\text{spec}}^{\widetilde{G},T}(f, \omega) = \sum_{M \in \mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\sigma \in \boldsymbol{\Pi}_{\text{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma) \sum_{\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_M)} \boldsymbol{\mathfrak{J}}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}).$$

Démonstration. Les deux membres de cette équation sont, comme fonctions de $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, des éléments de PolExp : on invoque le théorème 11.1.1 pour $\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}$ et le lemme 5.3.1 pour les $\boldsymbol{\mathfrak{J}}_M^{\widetilde{G},T}$, vu leur définition dans la proposition 14.2.3. Compte tenu de la décomposition de la proposition 14.1.3, la majoration du point (ii) de la proposition 13.8.6 montre que les deux membres ne diffèrent que par une quantité qui tend vers zéro lorsque T tend vers l'infini dans un cône ouvert. Leur égalité résulte alors du lemme 1.7.2. ■

Cette proposition peut être vue comme l'analogue de [25, proposition 14.1.11] (raffiné en [25, théorème 14.2.1]). Toutefois, c'est une égalité de fonctions dans PolExp et non une égalité de polynômes, et, par ailleurs, les sommes sur ν et $\widetilde{Z}$

viennent compliquer l'expression de la proposition 14.2.3 ; une nouvelle étape est nécessaire ici.

14.3 Le polynôme limite au point central

Les preuves dans cette section sont inspirées de celle du lemme de [34, section 3.23]. Pour $S \in \mathcal{P}(M)$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, rappelons que $\mathcal{M}(S,\mu)$ est la (G,M)-famille spectrale à valeurs opérateurs définie par

$$\mathcal{M}(S,\mu;\Lambda,S_1) = \mathbf{M}_{S_1|S}(\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu+\Lambda)$$

et qu'on lui a associé l'opérateur

$$\mathcal{M}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}(S,\mu;\Lambda) = \sum_{\widetilde{S}_1 \in \widetilde{\mathcal{P}}(\widetilde{L})} \epsilon^{\widetilde{G}}_{\widetilde{S}_1}(\Lambda)\mathcal{M}(S,\mu;\Lambda,S_1).$$

C'est une variante de l'opérateur $\mathcal{M}^{G,T}_{M,F}(Z,\mathfrak{Y};P,\lambda;\Lambda)$ introduit dans le lemme 5.3.1. Ici, comme dans le cas des corps de nombres, on intègre les fonctions caractéristiques de cônes sur l'espace vectoriel, plutôt que de sommer sur le réseau (cf. définition 1.6.2). Les fonctions $\epsilon^{\widetilde{G}}_{\widetilde{S}_1}(\Lambda)$ sont définies via le choix d'une mesure de Haar sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}$, mais le produit

$$\mathrm{vol}(\mathcal{A}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}\backslash\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}})^{-1}\mathcal{M}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}(S,\mu;\Lambda)$$

est indépendant de ce choix. Pour alléger l'écriture, posons (comme dans [25, section 14.1])

$$\mathcal{M}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}(S,\mu) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{M}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}(S,\mu;0).$$

Définition 14.3.1. On pose

$$\boldsymbol{A}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu,\Lambda) = \mathfrak{Sp}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\,\mathcal{M}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}(S,\mu+\nu;\Lambda)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\nu)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big).$$

Fixons $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$, $\widetilde{Z} \in \mathcal{A}_{\widetilde{G}}$ et $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$. Considérons la fonction (introduite juste avant la proposition 14.2.3)

$$T \mapsto a_{\widetilde{Z},\mu}(T) = \boldsymbol{A}^{T,\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}(\widetilde{Z};\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)$$

sur $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. D'après l'analogue tordu de la proposition 1.7.4, cette fonction appartient à PolExp. Pour tout réseau $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, on peut écrire

$$a_{\widetilde{Z},\mu}(T) = \sum_\tau e^{\langle\tau,T\rangle}p_{\mathcal{R},\tau}(a_{\widetilde{Z},\mu},T) \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{R},$$

où la somme porte sur un sous-ensemble fini de caractères $\tau \in \widehat{\mathcal{R}}$. D'après l'analogue tordu de la proposition 1.7.4, la limite

$$\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(a_{\widetilde{Z},\mu}, T_0)$$

existe et est indépendante du réseau $\mathcal{R}$.

Lemme 14.3.2. *On a*

$$\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu} = \begin{cases} \operatorname{vol}\left(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\backslash\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\right)^{-1} e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu),\widetilde{Z}\rangle} \boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu,\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)) & \textit{si } \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)\in\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}, \\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. La (G,M)-famille périodique $\boldsymbol{c}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)$, introduite en section 14.1, est de la forme $\boldsymbol{c}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)=\boldsymbol{d}(\mathfrak{Y})$, pour une (G,M)-famille périodique $\boldsymbol{d}$ donnée par

$$\boldsymbol{d}(\Lambda,S_1) = \mathfrak{S}\mathfrak{p}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\,\mathcal{M}(S,\mu+\nu;\Lambda,S_1)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\nu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big)$$

et

$$\boldsymbol{d}(\mathfrak{Y};\Lambda,S_1) = e^{\langle\Lambda,Y_{S_1}\rangle}\boldsymbol{d}(\Lambda,S_1).$$

On a donc

$$a_{\widetilde{Z},\mu}(T) = \boldsymbol{d}_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},T}(\mathfrak{Y};\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)).$$

Rappelons que $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)$ est un élément de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$, et, plus précisément, un caractère de $\mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}=\mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{\widetilde{L}}$. Le dual de Pontryagin $\widehat{\mathcal{C}}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$ s'insère dans la suite exacte courte

$$0\to\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}\to\widehat{\mathcal{C}}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\to\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\to 0.$$

L'image de $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)$ dans $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$ est nulle si et seulement si $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)\in\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}$. On déduit alors de la proposition 1.7.4 que

$$\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu} = \begin{cases} \operatorname{vol}\left(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\backslash\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\right)^{-1} e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu),\widetilde{Z}\rangle} \boldsymbol{d}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{Y}+\mathfrak{T}_0;\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)) & \text{si } \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)\in\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}, \\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

où, pour $\Lambda\in\widehat{\mathfrak{a}}_{\widetilde{L}}$ en dehors des murs,

$$\boldsymbol{d}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{Y}+\mathfrak{T}_0;\Lambda) = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(\widetilde{L})} e^{\langle\Lambda,Y_{\widetilde{P}}+[T_0]_{\widetilde{P}}\rangle}\epsilon_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}(\Lambda)\boldsymbol{d}(\Lambda,\widetilde{P}).$$

Puisque $Y_{\widetilde{P}}+[T_0]_{\widetilde{P}}$ est égal à l'image $T_{0,\widetilde{L}}$ de T_0 dans $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$, on a

$$\begin{aligned} e^{\langle\Lambda,Y_{\widetilde{P}}+[T_0]_{\widetilde{P}}\rangle}\boldsymbol{d}(\Lambda,\widetilde{P}) &= e^{\langle\Lambda,T_{0,\widetilde{L}}\rangle} \\ &\times\mathfrak{S}\mathfrak{p}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\,\mathcal{M}(S,\mu+\nu;\Lambda,\widetilde{P})\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\nu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big).\end{aligned}$$

Comme $T_{0,\widetilde{L}}$ appartient à $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$, si $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu) \in \widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}$ alors $e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu), T_{0,\widetilde{L}}\rangle} = 1$ et, compte tenu de de la définition 14.3.1,

$$\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu} = \mathrm{vol}\Big(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} \backslash \mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1} e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu), \widetilde{Z}\rangle} \boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu, \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)). \qquad \blacksquare$$

Définition 14.3.3. Introduisons les notations suivantes :

$$v_{\widetilde{L}} = \mathrm{vol}\Big(\mathcal{B}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} \backslash \mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big), \quad V_M(\widetilde{u}) = v_{\widetilde{L}}^{-1} |\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{L}}| |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1} |\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|^{-1}$$

et

$$\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu, 0) = \{\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu) \mid \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu) = 0\}.$$

L'ensemble $\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu, 0)$ est stable par translations par $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$ et muni de la mesure $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$-invariante induite par celle sur $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$. On pose

$$\boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}; \nu) = V_M(\widetilde{u}) \int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0)} \boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu)\, \mathrm{d}\mu$$

avec

$$\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu) = \boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu, 0),$$

c'est-à-dire,

$$\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu) = \mathfrak{S}\mathfrak{p}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu \mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S, \mu + \nu) \mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu + \nu) \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u}, f, \omega)\Big).$$

Enfin, on pose

$$\boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = \sum_{\nu \in \mathcal{E}(\sigma)} \boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}; \nu).$$

Proposition 14.3.4. *La fonction*

$$T \mapsto h(T) = \mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u})$$

est dans PolExp *et pour tout réseau* $\mathcal{R}$ *de* $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$*, on a l'égalité*

$$\lim_{k \to +\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(h, T_0) = \boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}).$$

Démonstration. Rappelons que pour $\widetilde{Z} \in \mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$, la fonction $T \mapsto a_{\widetilde{Z},\mu}(T)$, introduite avant le lemme 14.3.2, appartient à PolExp et que $\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu}$ en est le polynôme limite en $T = T_0$. Comme l'expression $a_{\widetilde{Z},\mu}(T)$ est lisse en μ lorsque μ varie dans le compact $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$, on en déduit que la fonction

$$h_{\widetilde{Z},\nu} : T \mapsto \int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)} a_{\widetilde{Z},\mu}(T)\, \mathrm{d}\mu$$

appartient, elle aussi, à PolExp. Le contrôle du terme d'erreur dans le passage à la limite (cf. proposition 1.7.4) montre qu'il est uniforme et on obtient que

$$\lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(h_{\widetilde{Z},\nu},T_0)=\int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)}\lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(a_{\widetilde{Z},\mu},T_0)\,\mathrm{d}\mu=\int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)}\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu}\,\mathrm{d}\mu.$$

La somme sur les $\widetilde{Z}\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$ de l'expression ci-dessus étant finie, on peut permuter la somme et l'intégrale. Mais la somme sur $\widetilde{Z}\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$ des $e^{\langle\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu),\widetilde{Z}\rangle}$ vaut $|\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}|$ si $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)=0$, et 0 sinon. On a donc montré que

$$\sum_{\widetilde{Z}\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}}\lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(h_{\widetilde{Z},\nu},T_0)$$

est égal à

$$|\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}|\mathrm{vol}\Big(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\backslash\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1}\int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0)}\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)\,\mathrm{d}\mu.$$

Compte tenu de la définition 14.3.3, on a

$$|\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}|\mathrm{vol}\Big(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\backslash\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1}=|\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{L}}|\mathrm{vol}\Big(\mathcal{B}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\backslash\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1}=|\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{L}}|v_{\widetilde{L}}^{-1}.$$

D'où le lemme, puisque d'après la proposition 14.2.3, on a

$$h(T)=|\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1}|\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|^{-1}\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\sum_{\widetilde{Z}\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}}h_{\widetilde{Z},\nu}(T).\qquad\blacksquare$$

14.4 Développement spectral fin

Soient $\nu\in\boldsymbol{\mu}_M$ et $\mu\in\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$ tels que $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)=0$. Puisque $\nu=(\widetilde{u}-1)\mu$ on a

$$\mathbf{D}_\nu=\mathbf{D}_{-\mu}\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}.$$

D'après l'équation fonctionnelle du lemme 5.2.2, on a

$$\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}\mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S,\widetilde{u}\mu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\widetilde{u}\mu)=\mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S,0)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{D}_\nu\mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S,\mu+\nu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\nu)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\tag{14.5}$$

est égale à

$$\mathbf{D}_{-\mu}\mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S,0)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}\,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega).$$

Puisque, d'après le lemme 7.2.3 on a

$$\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}\,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)=\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma\star\mu,0}(\widetilde{u},f,\omega)\mathbf{D}_{\mu},$$

l'expression (14.5) est encore égale à

$$\mathbf{D}_{\mu}^{-1}\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)\,\mathbf{D}_{\mu},$$

où l'on a posé

$$\boldsymbol{A}(\sigma,\widetilde{u},\mu)=\mathcal{M}_{L}^{\widetilde{G}}(S,\mu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega).$$

En observant que

$$\mathfrak{S}\mathfrak{p}_{\sigma}\Big(\mathbf{D}_{\mu}^{-1}\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)\,\mathbf{D}_{\mu}\Big)=\mathfrak{S}\mathfrak{p}_{\sigma\star\mu}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)),$$

l'expression de $\boldsymbol{J}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u})$, donnée dans la définition 14.3.3, peut donc encore s'écrire

$$\boldsymbol{J}_{M}^{\widetilde{G}}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u})=V_{M}(\widetilde{u})\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0)}\mathfrak{S}\mathfrak{p}_{\sigma\star\mu}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0))\,\mathrm{d}\mu.$$

Lemme 14.4.1. *Pour que l'expression* $\mathfrak{S}\mathfrak{p}_{\sigma\star\mu}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0))$ *soit non nulle, il faut que*

$$\widetilde{u}(\omega\otimes(\sigma\star\mu))\simeq\sigma\star\mu, \tag{14.6}$$

c'est-à-dire que $\sigma\star\mu$ *se prolonge en une représentation de* $(M\widetilde{u},\omega)$*. Dans ce cas, on a*

$$\mathfrak{S}\mathfrak{p}_{\sigma\star\mu}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0))=\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)).$$

Démonstration. L'opérateur $\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)$ envoie l'espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}(X_S,\sigma\star\mu)$ dans l'espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}(X_S,\widetilde{u}(\omega\otimes(\sigma\star\mu)))$ et pour que ces deux espaces soient d'intersection non nulle, il faut qu'ils soient égaux, c'est-à-dire que la condition (14.6) soit vérifiée. ∎

D'après le lemme 14.4.1, la contribution de $\boldsymbol{\sigma}$ (l'orbite de σ sous torsion par $\boldsymbol{\mu}_M$) est nulle, sauf peut-être si

$$\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M;\widetilde{u},\omega)\subset\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M),$$

où $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M;\widetilde{u},\omega)$ est le sous-ensemble des $\boldsymbol{\sigma}$ ayant un représentant σ vérifiant la condition

$$\widetilde{u}(\omega\otimes\sigma)\simeq\sigma. \tag{14.7}$$

On supposera désormais que σ est un tel représentant[1]. Considérons l'ensemble

$$\mathfrak{L}(\sigma,\widetilde{u}) \overset{\text{déf}}{=} \{\lambda \in \boldsymbol{\mu}_M \mid \widetilde{u}(\omega \otimes (\sigma \star \lambda)) \simeq \sigma \star \lambda\}$$

qui, compte tenu de (14.7), est égal à

$$\{\lambda \in \boldsymbol{\mu}_M \mid (\widetilde{u}-1)\lambda \in \mathrm{Stab}_M(\sigma)\}\,.$$

On observe que $\mathrm{Stab}_M(\sigma) \subset \mathcal{E}(\sigma)$. On a donc une injection

$$\mathfrak{L}(\sigma,\widetilde{u}) \to \bigcup_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)} \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0).$$

On note $\mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})$ l'ensemble fini quotient de $\mathfrak{L}(\sigma,\widetilde{u})$ par l'action de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$. En choisissant des représentants λ dans $\mathfrak{L}(\sigma,\widetilde{u}) \subset \boldsymbol{\mu}_M$ pour les éléments $\dot{\lambda} \in \mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})$, on définit une injection

$$\mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u}) \times \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}} \to \bigcup_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)} \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0) \quad \text{par} \quad (\dot{\lambda},\mu) \mapsto \lambda+\mu.$$

Dans la définition 14.3.3 de $\boldsymbol{J}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u})$ et compte tenu du lemme 14.4.1, on peut donc remplacer la somme sur les $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$ précédée de l'intégrale sur les $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0)$ par la somme sur les $\dot{\lambda} \in \mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})$ précédée de l'intégrale sur $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$:

$$\boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = V_M(\widetilde{u}) \sum_{\dot{\lambda}\in\mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})} \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}} \mathrm{trace}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\lambda,\widetilde{u},\mu))\,\mathrm{d}\mu. \tag{14.8}$$

L'expression ne dépend pas du choix des relèvements puisque, d'après (14.5) et le lemme 7.2.3, pour $\mu,\ \mu' \in \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$, on a

$$\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu',\widetilde{u},\mu) = \mathbf{D}_{\mu'}\boldsymbol{A}(\sigma,\widetilde{u},\mu+\mu')\mathbf{D}_{\mu'}^{-1}$$

et donc

$$\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu',\widetilde{u},\mu)) = \mathrm{trace}(\boldsymbol{A}(\sigma,\widetilde{u},\mu+\mu')).$$

Pour chaque classe $\boldsymbol{\sigma}$ on a choisi un représentant σ vérifiant la condition (14.7). D'après (14.8) et compte tenu de la définition 14.3.1 on a

$$\boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = V_M(\widetilde{u}) \sum_{\dot{\lambda}\in\mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})} \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}} \mathrm{trace}\Big(\mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S,\mu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma\star\lambda,\mu}(\widetilde{u}, f, \omega)\Big)\,\mathrm{d}\mu.$$

[1]Observons que l'existence d'un tel représentant exige que le caractère ω soit trivial sur le groupe $A_{M\widetilde{u}}(\mathbb{A}) = A_{\widetilde{L}}(\mathbb{A})$. En général, il n'est pas possible de réaliser la condition (14.7) pour tous les $\widetilde{u}$ simultanément.

Cette expression ne dépend pas du choix de $S \in \mathcal{P}(M)$, ni du choix du représentant σ de $\boldsymbol{\sigma}$.

On rappelle que $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M;\widetilde{u},\omega)$ est l'ensemble des classes modulo torsion par les éléments de $\boldsymbol{\mu}_M$ des (classes d'isomorphisme de) représentations σ vérifiant la condition (14.5). Notons $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M\widetilde{u},\omega)$ l'ensemble des classes modulo torsion par les éléments de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$ des (classes d'isomorphisme de) représentations verifiant (14.5). On pose

$$\boldsymbol{J}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M;\widetilde{u},\omega)} \widehat{c}_M(\sigma)\boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u})$$

et

$$\widehat{c}_{\widetilde{L}}(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{|\widehat{\mathbb{C}}_{\widetilde{L}}|}{|\mathrm{Stab}_{\widetilde{L}}(\sigma)|}.$$

Proposition 14.4.2. *L'expression $\boldsymbol{J}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{G}}(f,\omega)$ se réécrit*

$$\boldsymbol{J}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = v_{\widetilde{L}}^{-1} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M\widetilde{u},\omega)} \widehat{c}_{\widetilde{L}}(\sigma)|\det(\widetilde{u}-1|\mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}})|^{-1}$$
$$\times \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}} \mathrm{trace}\Big(\mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S,\mu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big)\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. L'application naturelle

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M\widetilde{u},\omega) \to \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M;\widetilde{u},\omega)$$

est surjective. On peut donc remplacer, dans l'expression $\boldsymbol{J}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{G}}(f,\omega)$, la somme sur les $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Pi}(M;\widetilde{u},\omega)$ suivie de la somme sur les $\lambda \in \mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})$ par une simple somme sur les $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Pi}(M\widetilde{u},\omega)$ multipliée par le cardinal de l'image dans $\boldsymbol{\mu}_M^{\widetilde{L}}$ du stabilisateur $\mathrm{Stab}_M(\sigma)$. Cette image est le groupe quotient

$$\mathrm{Stab}_M(\sigma)/\mathrm{Stab}_{\widetilde{L}}(\sigma) \quad \text{où} \quad \mathrm{Stab}_{\widetilde{L}}(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Stab}_M(\sigma) \cap \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}.$$

Compte tenu de la définition 14.3.3 et du lemme 14.2.1, on a

$$V_M(\widetilde{u})\frac{|\mathrm{Stab}_M(\sigma)|}{|\mathrm{Stab}_{\widetilde{L}}(\sigma)|} = v_{\widetilde{L}}^{-1}\widehat{c}_{\widetilde{L}}(\sigma)\widehat{c}_M(\sigma)^{-1}|\det(\widetilde{u}-1|\mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}})|^{-1}.$$

On observe enfin que pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$, on a

$$\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu) = \mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0). \qquad \blacksquare$$

Rappelons que $\mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_M)$ est l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}_M$ des éléments $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^{\widetilde{G}}$ tels que $\widetilde{u}(\mathfrak{a}_M) = \mathfrak{a}_M$. C'est aussi le quotient

$$\mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M) = N^{\widetilde{\mathbf{W}}}(M)/\mathbf{W}^M$$

de l'ensemble $N^{\widetilde{\mathbf{W}}}(M)$ des $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathbf{W}}$ tels que $\widetilde{u}(M) = M$ par le groupe de Weyl de M: $\mathbf{W}^M = N^M(M_0)/M_0$.

Proposition 14.4.3. *La valeur en T_0 du polynôme limite introduite dans le théorème 11.3.1 vérifie l'identité*

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{\mathrm{spec}}(f,\omega) = \sum_{M \in \mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)} \boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega).$$

Démonstration. Par passage à la limite, la proposition 14.2.4 fournit l'identité

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{\mathrm{spec}}(f,\omega) = \sum_{M \in \mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\sigma \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma) \sum_{\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)} \boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_M(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}),$$

puis on invoque la proposition 14.4.2. ∎

Pour $\widetilde{L} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ et $M \in \mathcal{L}^L$, un élément $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{L}}(M)$ est dit *régulier* si l'espace de Levi (dans $\widetilde{L}$), qui lui est associé, est lui-même $\widetilde{L}$. Ceci équivaut à demander que

$$\det(\widetilde{u} - 1 | \mathfrak{a}^L_M) \neq 0.$$

On note $\boldsymbol{W}^{\widetilde{L}}(M)_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{L}}(M)$ qui sont réguliers. Observons que pour $\widetilde{u} \in \boldsymbol{W}^{\widetilde{L}}(M)_{\mathrm{reg}}$, $\widetilde{L}$ est le sous-espace de Levi (dans $\widetilde{G}$) associé à $\widetilde{u}$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace de Levi contenant $M\widetilde{u}$; par conséquent, d'après le lemme 14.2.1, on a aussi

$$\det(\widetilde{u} - 1 | \mathfrak{a}^{\widetilde{L}}_M) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}^{\widetilde{L}}_M = (\widetilde{u} - 1)\mathfrak{a}_M,$$

où $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$ est le sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ formé des points fixes sous $\widetilde{u}$, et $\mathfrak{a}^{\widetilde{L}}_M$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$ dans $\mathfrak{a}_M$.

L'expression $J^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega)$ a déjà été définie pour $M \in \mathcal{L}$ et $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)$. Pour $\widetilde{L} \in \widetilde{\mathcal{L}}$, posons

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}(f,\omega) = \sum_{M \in \mathcal{L}^L} \frac{|\mathbf{W}^M|}{|\mathbf{W}^L|} \sum_{\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{L}}(M)_{\mathrm{reg}}} \boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega).$$

Notons $\widetilde{\mathbf{W}}^L = N_L(\widetilde{M}_0)/M_0$ le quotient du normalisateur de $\widetilde{M}_0$ dans L par M_0. Avec ces notations, on a la forme finale du développement spectral :

Théorème 14.4.4. *On a*

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{\mathrm{spec}}(f,\omega) = \sum_{\widetilde{L} \in \widetilde{\mathcal{L}}} \frac{|\widetilde{\mathbf{W}}^L|}{|\widetilde{\mathbf{W}}^G|} \boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{L}}(f,\omega).$$

Démonstration. Pour tout $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)$ il existe un $\widetilde{L}$ tel que $\widetilde{u}$ appartienne à $W^{\widetilde{L}}(M)_{\text{reg}}$ et $\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega)$ est donné par la proposition 14.4.2. On invoque enfin la proposition 14.4.3. ∎

14.5 Partie discrète modulo le centre

Pour $M \in \mathcal{L}$, on s'intéresse à la partie discrète (modulo le centre), c'est-à-dire aux contributions $\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega)$ avec $\widetilde{L} = \widetilde{G}$.

On pose

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\text{disc}}(f,\omega) = \sum_{\widetilde{u}\in\mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)_{\text{reg}}} \boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega).$$

Pour $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)_{\text{reg}}$, on a

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega) = \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\text{disc}}(M\widetilde{u},\omega)} \widehat{c}_{\widetilde{G}}(\sigma)|\det(\widetilde{u}-1|\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_M)|^{-1}$$
$$\times \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}} \operatorname{trace}\Big(\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big)\,\mathrm{d}\mu.$$

On souhaite permuter la somme et l'intégrale dans l'expression $\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega)$ ci-dessus. On commence par regrouper les termes suivant le groupe $\Xi(\widetilde{G})$ des caractères unitaires automorphes de $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})$. On le munit d'une mesure de Haar suivant les conventions 1.3.1 ; elle vérifie $\operatorname{vol}(\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{G}}) = 1$. Pour $\xi \in \Xi(\widetilde{G})$, on note

$$\Pi_{\text{disc}}(M\widetilde{u},\omega)_\xi,$$

le sous-ensemble de $\Pi_{\text{disc}}(M\widetilde{u},\omega)$ formé de des σ tels que $\xi_\sigma|_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})} = \xi$, et on pose

$$\operatorname{trace}\Big(\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\boldsymbol{\rho}_{S,\text{disc},\xi}(\widetilde{u},f,\omega)\Big) = \sum_{\sigma\in\Pi_{\text{disc}}(M\widetilde{u},\omega)_\xi} \operatorname{trace}\Big(\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,0}(\widetilde{u},f,\omega)\Big).$$

Ici encore, l'expression est indépendante du choix de $S \in \mathcal{P}(M)$. Posons

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega,\xi) = |\det(\widetilde{u}-1;\mathfrak{a}^G_M)|^{-1}\operatorname{trace}\Big(\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\boldsymbol{\rho}_{S,\text{disc},\xi}(\widetilde{u},f,\omega)\Big).$$

Puisque

$$|\det(\widetilde{u}-1;\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_M)| = j(\widetilde{G})\,|\det(\widetilde{u}-1;\mathfrak{a}^G_M)|,$$

on obtient le lemme suivant.

Lemme 14.5.1. *Pour $M \in \mathcal{L}$ et $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)_{\text{reg}}$, on a*

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega) = j(\widetilde{G})^{-1}\int_{\Xi(\widetilde{G})} \boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Rappelons qu'on a noté $\Xi(G,\theta,\omega)$ le sous-ensemble de $\Xi(G)$ formé des caractères ξ tels que, en notant ω_{A_G} la restriction de ω à $A_G(\mathbb{A})$, on ait

$$\xi \circ \theta = \omega_{A_G} \otimes \xi.$$

Si $\Xi(G,\theta,\omega)$ est non vide, on le munit, comme en section 8.1, de la mesure $\Xi(G)^\theta$-invariante déduite de la mesure de Haar sur $\Xi(G)^\theta$, telle que $\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta) = 1$.

Lemme 14.5.2. *Pour $M \in \mathcal{L}$ et $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)_{\mathrm{reg}}$, on a*

$$\boldsymbol{J}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \int_{\Xi(G,\theta,\omega)} \boldsymbol{J}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{G}}(f,\omega,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Démonstration. Cela résulte des lemmes 14.5.1 et 8.1.5. ∎

On peut reformuler ce qui précède sous la forme de la proposition suivante.

Proposition 14.5.3. *La partie « discrète modulo le centre » de la formule des traces est donnée par*

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{disc}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \sum_{M\in\mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G} \frac{1}{w^G(M)} \boldsymbol{J}_{M,\mathrm{disc}}^{\widetilde{G}}(f,\omega)$$

avec

$$\boldsymbol{J}_{M,\mathrm{disc}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \sum_{\widetilde{u}\in\mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)_{\mathrm{reg}}} \int_{\Xi(G,\theta,\omega)} \boldsymbol{J}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{G}}(f,\omega,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Cela s'écrit aussi

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{disc}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \sum_{M\in\mathcal{L}^G} \frac{|\mathbf{W}^M|}{|\mathbf{W}^G|} \boldsymbol{J}_{M,\mathrm{disc}}^{\widetilde{G}}(f,\omega).$$

En particulier, pour $M = G$, on a

$$\boldsymbol{J}_{G,\mathrm{disc}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \int_{\Xi(G,\theta,\omega)} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|L^2_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_G)_\xi\Big)\,\mathrm{d}\xi$$

et on retrouve la formule de la proposition 8.1.4 si G_{der} est anisotrope. On observera que $\boldsymbol{J}_{\mathrm{disc}}^{\widetilde{G}}(f,\omega)$ n'est autre que $\boldsymbol{J}_{\widetilde{G}}^{\widetilde{G}}(f,\omega)$.