MEMOIRS OF THE EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY

Jean-Pierre Labesse
Bertrand Lemaire

La formule des traces tordue pour un corps global de caractéristique $p > 0$

MEMS Vol. 20 / 2025

EMS PRESS

EMS PRESS

Memoirs of the European Mathematical Society

The *Memoirs of the European Mathematical Society* publish outstanding research contributions in individual volumes, in all areas of mathematics and with a particular focus on works that are longer and more comprehensive than usual research articles.

The collection's editorial board consists of the editors-in-chief of the *Journal of the European Mathematical Society* and the *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, along with editors of book series of the publishing house of the EMS as well as other distinguished mathematicians.

All submitted works go through a highly selective peer-review process.

Previously published in this series:

J.-M. Delort, N. Masmoudi, *Long-Time Dispersive Estimates for Perturbations of a Kink Solution of One-Dimensional Cubic Wave Equations*
G. Cotti, *Cyclic Stratum of Frobenius Manifolds, Borel–Laplace (α,β)-Multitransforms, and Integral Representations of Solutions of Quantum Differential Equations*
A. Kostenko, N. Nicolussi, *Laplacians on Infinite Graphs*
A. Carey, F. Gesztesy, G. Levitina, R. Nichols, F. Sukochev, D. Zanin, *The Limiting Absorption Principle for Massless Dirac Operators, Properties of Spectral Shift Functions, and an Application to the Witten Index of Non-Fredholm Operators*
J. Kigami, *Conductive Homogeneity of Compact Metric Spaces and Construction of p-Energy*
A. Buium, L. E. Miller, *Purely Arithmetic PDEs Over a p-Adic Field: δ-Characters and δ-Modular Forms*
M. Duerinckx, A. Gloria, *On Einstein's Effective Viscosity Formula*
R. Willett, G. Yu, *The Universal Coefficient Theorem for C*-Algebras with Finite Complexity*
B. Janssens, K.-H. Neeb, *Positive Energy Representations of Gauge Groups I. Localization*
S.Dipierro, G. Giacomin, E. Valdinoci, *The Lévy Flight Foraging Hypothesis in Bounded Regions*
A. Naor, *Extension, Separation and Isomorphic Reverse Isoperimetry*
N. Lerner, *Integrating the Wigner Distribution on Subsets of the Phase Space, a Survey*
B. Adcock, S. Brugiapaglia, N. Dexter, S. Moraga, *On Efficient Algorithms for Computing Near-Best Polynomial Approximations to High-Dimensional, Hilbert-Valued Functions from Limited Samples*
J. J. Carmona, K. Fedorovskiy, *Carathéodory Sets in the Plane*
D. Abramovich, Q. Chen, M. Gross, B. Siebert, *Punctured Logarithmic Maps*
T. Oh, M. Okamoto, L. Tolomeo, *Stochastic Quantization of the* Φ^3_3*-Model*
H. Sasahira, M. Stoffregen, *Seiberg–Witten Floer Spectra for* $b_1 > 0$
J. Kaad, D. Kyed, *The Quantum Metric Structure of Quantum* SU(2)
B. Zavyalov, *Almost Coherent Modules and Almost Coherent Sheaves*

Jean-Pierre Labesse
Bertrand Lemaire

La formule des traces tordue pour un corps global de caractéristique $p > 0$

EMS PRESS

Authors

Jean-Pierre Labesse
Institut de Mathématique de Marseille
CNRS I2M (UMR 7373)
Aix-Marseille Université
Campus de Luminy
Case postale 907
13288 Marseille, France

Email: jean-pierre.labesse@univ-amu.fr

Bertrand Lemaire
Institut de Mathématique de Marseille
CNRS I2M (UMR 7373)
Aix-Marseille Université
Campus de Luminy
Case postale 907
13288 Marseille, France

Email: bertrand.lemaire@univ-amu.fr

Each volume of the *Memoirs of the European Mathematical Society* is available individually or as part of an annual subscription. It may be ordered from your bookseller, subscription agency, or directly from the publisher via subscriptions@ems.press.

ISSN 2747-9080, eISSN 2747-9099
ISBN 978-3-98547-090-7, eISBN 978-3-98547-590-2, DOI 10.4171/MEMS/20

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available on the Internet at http://dnb.dnb.de.

Published by EMS Press, an imprint of the

European Mathematical Society – EMS – Publishing House GmbH
Institut für Mathematik
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin, Germany

Email: info@ems.press

https://ems.press

Typesetting: Yannis Haralambous, Nantes, France
Printed in Germany
Printed on acid free paper

Résumé

Dans ce travail nous adaptons au cas d'un corps global F de caractéristique positive, c'est-à-dire un corps de fonctions sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, les résultats prouvés pour un corps de nombres dans le livre de Labesse-Waldspurger *La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar*. En d'autres termes, nous établissons la formule des traces pour un G-espace tordu $\widetilde{G}$ où G est un groupe réductif connexe défini sur F. C'est une première étape vers la forme stabilisée de la formule des traces tordue, nécessaire pour la plupart des applications, qui, elle, est l'objet de travaux en cours.

Keywords. corps de fonctions, adèles, formule des traces, séries d'Eisenstein, opérateur de troncature, opérateur d'entrelacement

Mathematics Subject Classification (2020). Primary 11F72; Secondary 20G35, 22E55

Remerciements. Nous remercions J.-L. Waldspurger pour d'utiles critiques et remarques sur une version préliminaire de ce texte. Nous remercions aussi le rapporteur pour sa lecture soigneuse du manuscrit.

Table des matières

Introduction

Un peu d'histoire

Décomposition spectrale et formule des traces

La formule des traces, pour l'action à droite de l'algèbre des fonctions sphériques sur l'espace localement symétrique $\Gamma\backslash\mathfrak{h}$ quotient du demi-plan de Poincaré $\mathfrak{h}$ par le groupe modulaire $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, est devenue depuis l'exposé de Selberg [38] à Bombay en 1956 un des outils fondamentaux de la théorie des formes modulaires.

L'établissement de la formule des traces suppose connu la description de la décomposition spectrale de l'espace de Hilbert $L^2(\Gamma\backslash\mathfrak{h})$ au moyen du prolongement méromorphe des Séries d'Eisenstein. Dès 1964, le cas général de la décomposition spectrale de $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$, où Γ est un sous-groupe arithmétique de $G(\mathbb{Q})$ avec G réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}$, était obtenu par Langlands (ce travail ne fut publié que 12 ans plus tard [28]).

L'étude des opérateurs de Hecke amène à travailler avec des limites projectives de revêtements définis par des sous-groupes de congruence, ce qui revient essentiellement à considérer le quotient $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, où $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. Le cas des groupes arithmétiques qui ne sont pas de congruence relève plus de la géométrie différentielle que de l'arithmétique. Tout ce qui suit est dans le cadre adèlique.

La théorie générale des Séries d'Eisenstein ouvrait la voie à la généralisation de la formule des traces à tous les groupes réductifs mais aussi à la découverte, par Langlands, des fonctions L attachées aux représentations automorphes et à ses conjectures sur la fonctorialité.

La formule des traces d'Arthur-Selberg

Soit G un groupe réductif connexe défini sur un corps de nombres F. On note $\mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F. La formule des traces – dite d'Arthur-Selberg – pour le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ est une identité entre deux expressions pour une « trace renormalisée » de l'opérateur de convolution défini par une fonction $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_F))$ dans $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$. La « trace » doit être « renormalisée » car l'opérateur de convolution n'est à trace que dans le spectre discret et une correction, via des troncatures, est nécessaire pour tenir compte du spectre continu. On aura d'une part un développement géométrique indexé par les classes de conjugaison dans $G(F)$ et d'autre part un développement spectral :

$$J_{\text{géom}}(f) = J_{\text{spec}}(f).$$

L'établissement de la formule des traces peut être divisé en quatre étapes principales : Arthur obtient successivement

(1) la forme grossière (« coarse form ») [1, 13] ;

(2) la forme fine (« fine form ») [2–5] ;

(3) la forme invariante (« invariant form ») [6, 7] ;

(4) la forme stabilisée (« stable form ») [9–11].

Chacune des étapes fournit des développements géométriques et spectraux de plus en plus précis. C'est bien sûr le développement ultime, la formule des traces stabilisée, qui permet le plus d'applications.

La variante tordue

La variante tordue de la formule des traces est apparue dans le travail de Saito et Shintani, immédiatement généralisé par Langlands, pour étudier le changement de base cyclique pour GL(2) [29]. On sait le rôle joué par ce travail dans la preuve du théorème de Fermat. Le cadre général de la *formule des traces tordue* est le suivant : on considère un G-espace tordu $\widetilde{G}$ défini sur F et de plus on tord les représentations par un caractère unitaire ω de $G(\mathbb{A}_F)$ trivial sur $G(F)$. Dans la majorité des applications $\widetilde{G} = G \rtimes \theta$ où θ est un automorphisme d'ordre fini de G et ω est trivial ; par exemple pour le changement de base cyclique $\widetilde{G}(F) = GL(n, E) \rtimes \theta$ où θ est un générateur du groupe de Galois d'une extension finie cyclique E/F. Toutefois le cas de la torsion des représentations par un caractère ω non trivial mais sans torsion sur le groupe (θ trivial) intervient aussi naturellement.

La formule des traces tordue pour les corps de nombres a fait l'objet du *Friday Morning Seminar* de Princeton en 1983–1984. On y donnait le développement spectral fin mais seulement le développement géométrique grossier. Les notes de ce séminaire ont été reprises et complétées dans [25]. La forme fine du développement géométrique a été obtenue plus tard par Arthur en combinant les résultats du *Friday Morning Seminar* avec des résultats d'analyse harmonique locale.

Lemme fondamental et stabilisation

La formule des traces, sous sa forme invariante, est une égalité entre deux sommes de distributions invariantes par conjugaison sous $G(F_S)$ où S est une ensemble fini de places fixé, mais arbitrairement grand. Or, pour établir certains cas de fonctorialité on est amené à comparer des distributions qui ne sont invariantes que sous une forme plus grossière de la conjugaison appelée *conjugaison stable*. La stabilisation consiste en la réécriture, au moyen de *transferts endoscopiques*, de chaque terme de la formule des traces invariante comme une somme de distributions stablement invariantes sur des groupes auxiliaires appelés *groupes endoscopiques*. On en déduit des transferts de représentations automorphes entre groupes différents. Les premiers exemples sont le transfert de Jacquet-Langlands [22, Chapter 16], la formule des traces stable pour SL(2) [23, 24] et le changement de base cyclique pour GL(2) [29]. La stabilisation suppose en particulier connu le *lemme fondamental* aux places en dehors de S. À la suite des travaux de nombreux auteurs, parmi lesquels il faut citer (par ordre alphabétique) Arthur, Kottwitz, Langlands, Laumon, Ngô Báu Châu, Shelstad et Waldspurger, la stabilisation de la formule des traces tordue pour les corps de nombres a été achevée par Mœglin et Waldspurger [33]. Pour une bibliographie complète sur ce sujet nous renvoyons aux deux tomes de cet ouvrage.

C'est au moyen de la *formule des traces tordue stabilisée* qu'Arthur a pu décrire dans [12] les représentations automorphes discrètes des groupes classiques par comparaison avec celles du groupe linéaire, *lorsque F est un corps de nombres*. De fait, les groupes classiques quasi-déployés se réalisent comme des *groupes endoscopiques* de l'espace tordu $\widetilde{G} = \mathrm{GL}(n) \rtimes \theta$ où θ est l'automorphisme $g \mapsto {}^t g^{-1}$.

Le cas des corps globaux de caractéristique $p > 0$

État des lieux

On s'attend à ce qu'un analogue de tout ce qui précède existe aussi lorsque F est un corps global de caractéristique $p > 0$, c'est-à-dire un corps de fonctions sur un corps fini. On espère en déduire des résultats similaires à ceux obtenus pour les représentations automorphes sur les corps de nombres.

Dans toute la suite de ce mémoire nous dirons « corps de fonctions » pour « corps de fonctions sur un corps fini ». Examinons l'état de la littérature sur ce sujet.

La décomposition spectrale pour un groupe réductif connexe général a été étendue au cas des corps de fonctions par Morris [35, 36], en prolongement de travaux de Harder [19–21]. Le livre de Mœglin-Waldspurger [32] en redonne une preuve pour tout corps global.

La formule des traces (sous sa forme fine) pour le groupe GL(2) – et ses formes intérieures – est énoncée dans Jacquet-Langlands [22, Chapter 16] pour les corps globaux *en toute caractéristique* ; toutefois la démonstration en est seulement esquissée. Pour le groupe $\mathrm{GL}(n)$ (ou une forme intérieure), on dispose de plusieurs versions en caractéristique $p > 0$: Drinfeld pour $n = 2$ [17, 18], Laumon [30], Lafforgue [26, 27]. En adaptant la méthode de Lafforgue, Ngô Dac Tuân a obtenu, dans [37], le développement spectral fin de la formule des traces non tordue pour les groupes réductifs connexes déployés.

On ne dispose donc, dans la littérature, que de quelques cas particuliers du développement spectral fin en caractéristique $p > 0$. Et pour le développement géométrique, en dehors de $\mathrm{GL}(n)$, il n'y a que très peu de résultats.

Objet du présent mémoire et perspectives

Notre projet est d'établir une formule des traces tordue stabilisée pour les corps globaux sans restriction sur la caractéristique. Ce mémoire est une première étape où nous suivons pas à pas la preuve donnée dans [25], en l'adaptant au cas d'un corps global de caractéristique $p > 0$. Nous obtenons le développement spectral fin mais, comme dans [25], nous n'obtenons que le développement grossier du côté géométrique.

Pour le développement spectral fin, la caractéristique p ne semble jouer pratiquement aucun rôle et les formules que nous obtenons pour les corps de fonctions sont essentiellement identiques à celles pour les corps de nombres.

Il n'en est pas de même du côté géométrique. Si p est grand par rapport au rang de G, rien de vraiment nouveau n'apparaît, mais le traitement des petites caractéristiques nécessite des idées nouvelles.

Pour le développement géométrique grossier donné ici, la principale différence avec le cas des corps de nombres est que l'on doit remplacer la notion d'élément semi-simple elliptique régulier par celle, plus générale, d'élément primitif. Cette notion englobe, par exemple, des éléments qui deviennent unipotents sur une extension inséparable, mais ne sont contenus dans le radical unipotent d'aucun sous-groupe parabolique propre défini sur F. De tels éléments, qui n'apparaissent que pour des caractéristiques assez petites, ne génèrent toutefois pas de difficulté sérieuse à ce stade.

Des phénomènes nouveaux compliquent, par contre, considérablement la preuve et la structure même du développement géométrique fin si p est petit. Par exemple, pour $G = \mathrm{SL}(2)$, $p = 2$ et v une place de F, le nombre de $G(F_v)$-orbites unipotentes est infini. La forme fine de la contribution unipotente aura donc une expression de nature fort différente de celle donnée par Arthur pour les corps de nombres. L'inséparabilité perturbe aussi violemment la descente centrale à la Harish-Chandra. On espère qu'il sera possible d'en établir une variante permettant de ramener le développement géométrique fin à celui de la contribution unipotente.

L'extension au cas des corps de fonctions des résultats d'Arthur [4,5], nécessaires pour le développement géométrique fin, est l'objet d'un travail en cours du second auteur.

Il restera encore à stabiliser la formule des traces mais nous sommes loin d'avoir une vue claire du travail à faire. Dans la littérature, seuls le transfert de Jacquet-Langlands [22] et la stabilisation pour $\mathrm{SL}(2)$ [23] ont été traités en toute caractéristique.

Structure du texte

Différences techniques

Nos références principales seront [25] et [34] et on supposera que le lecteur a ces deux textes sous la main. L'organisation de cet article suit celle de [25] et on se contentera souvent de citer sans démonstration les résultats de cet ouvrage, pour peu qu'ils passent sans autre forme de procès à la caractéristique positive.

Toutefois, lorsqu'on essaie de remplacer dans [25] le corps de nombres par un corps de fonctions, on rencontre immédiatement une différence technique, analogue à celle qui existe entre les cas archimédiens et non-archimédiens dans les travaux d'Arthur [8] et de Waldspurger [34] sur la formule des traces locale. En effet, pour un corps global F quelconque, on dispose pour chaque sous-groupe parabolique P de G défini sur F, d'un espace vectoriel réel $\mathfrak{a}_P$ et d'un homomorphisme

$$\mathbf{H}_P : P(\mathbb{A}_F) \to \mathfrak{a}_P .$$

On note $\mathcal{A}_P$ son image et $\mathcal{B}_P$ l'image de $A_P(\mathbb{A}_F)$, où A_P est le tore déployé maximal dans le centre de P/U_P. On a les inclusions

$$\mathcal{B}_P \subset \mathcal{A}_P \subset \mathfrak{a}_P .$$

Pour les corps de nombres, ces trois groupes sont égaux et on dispose d'un relèvement canonique $\mathfrak{A}_P$ de $\mathcal{A}_P$ dans $A_P(\mathbb{A}_F)$. Il est usuel de se limiter à traiter l'espace des formes automorphes pour P qui sont invariantes par $\mathfrak{A}_P$; cela ne restreint pas la généralité puisque l'on peut par torsion par un caractère automorphe de $P(\mathbb{A}_F)$ passer à un caractère quelconque sur $\mathfrak{A}_P$. Mais, pour les corps de fonctions, les morphismes $\mathbf{H}_P$ ne sont plus surjectifs : $\mathcal{A}_P$ est un réseau de $\mathfrak{a}_P$ et en général $\mathcal{A}_P \neq \mathcal{B}_P$ de sorte qu'un relèvement central de $\mathcal{A}_P$ n'existe pas. Ceci complique donc certains arguments et a des conséquences sur la présentation des résultats. On prendra garde en particulier à ce que les espaces $\boldsymbol{X}_G$ et $\boldsymbol{Y}_Q$, qui interviennent ici, jouent un rôle analogue, mais ne sont pas identiques aux espaces $\mathbf{X}_G$ et $\mathbf{Y}_Q$ de [25].

L'autre différence technique – venant de ce que des réseaux ont remplacé les espaces vectoriels pour la combinatoire – est que les polynômes en la variable de troncature T, qui jouent un rôle essentiel dans l'établissement de la formule des traces pour les corps de nombres, sont ici remplacés par des fonctions de type « polynômes-exponentielles ». Des passages à la limite sont nécessaires pour les éliminer et pour obtenir, par exemple, le développement spectral fin. Ceci complique encore les preuves. Par contre la compacité du dual de Pontryagin des réseaux simplifie le contrôle des convergences d'intégrales.

Comme dans [25], le texte est divisé en quatre parties. Un appendice corrige des bévues de [25].

Partie I. Géométrie et combinatoire

Dans le chapitre 1, après le rappel des notations usuelles, on adapte à notre cadre le calcul des transformées de Laplace (ou anti-Laplace) des fonctions caractéristiques de polytopes [25, section 1.9], ainsi que les résultats de [25, section 1.10] sur les (G, M)-familles. Les intégrales sur les polytopes qui apparaissent dans [25] doivent ici être remplacées par des sommes sur l'intersection de ces polytopes avec des réseaux. La combinatoire des polytopes est certes identique, mais la manipulation des intersections est plus délicate ; on doit en particulier tenir compte des groupes finis $\mathfrak{c}_P = \mathcal{B}_P \backslash \mathcal{A}_P$. Leur traitement requiert l'utilisation de divers outils techniques empruntés à Arthur [8] et à Waldspurger [34]. Pour les corps de nombres, les (G, M)-familles fournissent des polynômes en la variable de troncature T, qui permettent de contrôler le comportement asymptotique des divers termes de la formule des traces. Ici les (G, M)-familles fournissent, pour les T « rationnels », des expressions du type PolExp c'est-à-dire des combinaisons linéaires de polynômes et d'exponentielles. Par un passage à la limite on définit un polynôme qui est l'analogue du polynôme asymptotique pour les corps de nombres. Dans le chapitre 2, on généralise au cas tordu les relations et propriétés du chapitre 1. L'analogue de l'étude dans le cas tordu de la notion d'élément semi-simple [25, section 2.6] est renvoyée ici au chapitre suivant. Le chapitre 3 contient des rappels sur la théorie de la réduction. Sur un corps global de caractéristique $p > 0$, cette théorie est essentiellement due à Harder [20]. En reprenant les idées de Harder sur la descente galoisienne, Springer [39] a donné un traitement uniforme (valable pour tout corps global) des principaux résultats de cette théorie. Là où c'est nécessaire, on remplace donc par [39] la référence au livre de Borel [14] dans [25, chapitre 3]. Par ailleurs, on définit un ersatz de la décomposition de Jordan (inutilisable ici, car, en général, elle n'est pas rationnelle) : on remplace la notion d'élément quasi semi-simple régulier elliptique par celle d'élément *primitif* (qui d'ailleurs apparaît dans [25, section 3.7]). Toute paire $(\widetilde{M}, \delta)$ formée d'un facteur de Levi $\widetilde{M}$ de $\widetilde{G}$ défini sur F et d'un élément primitif δ de $\widetilde{M}(F)$, définit un sous-ensemble $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$ de $\widetilde{G}(F)$ stable par $G(F)$-conjugaison. Ces ensembles $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$ jouent le rôle des classes de ss-conjugaison de [25].

Partie II. Théorie spectrale, troncatures et noyaux

Le chapitre 4 concerne l'opérateur de troncature $\mathbf{\Lambda}^T$. Ses propriétés sont essentiellement les mêmes que dans le cas des corps de nombres, exceptées les propriétés de décroissance qui sont ici beaucoup plus fortes. On pose

$$\boldsymbol{X}_G = G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F) \quad \text{et} \quad \overline{\boldsymbol{X}}_G = A_G(\mathbb{A}_F) G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F).$$

Pour un corps de fonctions, l'opérateur de troncature $\mathbf{\Lambda}^T$, appliqué à une fonction lisse et K-finie φ sur $\boldsymbol{X}_G$, fournit une fonction $\mathbf{\Lambda}^T \varphi$ sur $\boldsymbol{X}_G$ à support d'image compacte dans $\overline{X}_G$. De plus, la décomposition

$$\mathbf{\Lambda}^T = \mathbf{C}^T + (\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T),$$

où $\mathbf{C}^T$ est la multiplication par la fonction caractéristique d'un domaine de Siegel tronqué, se simplifie ici car, si T est assez régulier, on a $(\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T)\varphi = 0$. Le chapitre 5 introduit les opérateurs d'entrelacement et les séries d'Eisenstein dont les propriétés, en particulier leur prolongement méromorphe, ont été établies par Morris [35, 36] et reprises dans [32, chapitres II, IV]. La preuve de la formule pour le produit scalaire de deux séries d'Eisenstein tronquées reprend celle de [25, théorème 5.4.3]. Dans le cas où les fonctions induisantes sont cuspidales, on obtient une formule exacte essentiellement due à Langlands. Dans le cas où les fonctions ne sont pas cuspidales, on dispose d'une formule asymptotique qui se déduit du cas cuspidal. Cette formule asymptotique fournit une majoration uniforme lorsque les paramètres λ et μ sont imaginaires purs. En effet, ici, les espaces de paramètres sont compacts, ce qui n'était pas le cas pour les corps de nombres. Dans le chapitre 6 est introduit le noyau intégral. Le théorème de factorisation de Dixmier-Malliavin, et la propriété de $\mathcal{A}$-admissibilité, sont trivialement vrais ici. On énonce la principale propriété du noyau tronqué (l'opérateur de troncature agissant sur la première variable) : sa restriction à $\mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^*$ est bornée et à support compact, où $\mathfrak{S}^*$ est un domaine de Siegel pour le quotient $\overline{X}_G$. Dans le chapitre 7 on rappelle la décomposition spectrale de $L^2(X_G)$ due à Langlands pour les corps de nombres [28] et à Morris pour les corps de fonctions [35, 36], puis rédigée pour tout corps global par Mœglin et Waldspurger [32]. On remarquera que si A_G, le tore déployé maximal dans le centre de G, n'est pas trivial, il n'y a pas de spectre discret dans $L^2(X_G)$ et, pour parer ce fait, il est usuel de donner la décomposition spectrale en ayant fixé un caractère unitaire d'un sous-groupe co-compact de $A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A}_F)$. Pour les corps de nombres on se limite aux fonctions sur X_G qui sont invariantes par le relèvement $\mathfrak{A}_G$ de $\mathcal{A}_G$ dans $A_G(\mathbb{A}_F)$. Comme déjà observé ci-dessus, pour les corps de fonctions, un tel relèvement n'existe pas, en général. En l'absence d'un choix naturel, nous ne ferons aucune hypothèse sur le comportement des fonctions sur $A_G(\mathbb{A}_F)$ et la décomposition spectrale comprendra, comme première étape, la décomposition suivant les caractères unitaires de $A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A}_F)$.

Partie III. La formule des traces grossière

Dans le chapitre 8 on donne, à titre d'exemple, la formule des traces dans le cas compact. Comme nous ne faisons aucune hypothèse sur l'action du centre de G, l'intégrale du noyau sur la diagonale porte ici sur

$$Y_G = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F),$$

au lieu de $\mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ dans [25]. Puis on énonce l'identité fondamentale entre les deux troncatures, pour le noyau, qu'il convient de considérer pour traiter le cas général. Le chapitre 9 décrit le développement géométrique dit « grossier ». Le résultat principal est la convergence de l'expression

$$\sum_{\mathfrak{o}} \int_{Y_G} |k_{\mathfrak{o}}^T(x)| \, dx,$$

où $\mathfrak{o}$ parcourt les classes d'équivalence de paires primitives dans $\widetilde{G}(F)$. Il implique en particulier que les intégrales orbitales des éléments primitifs sont absolument convergentes. Comme en [25, section 9.3], on ne donnera des formules explicites que pour les orbites primitives et pour les orbites quasi semi-simples. Le développement géométrique fin qui explicite les contributions unipotentes n'est pas abordé ici. Le chapitre 10 établit la convergence d'une première forme du développement spectral. Il s'agit de montrer la convergence de chaque terme d'une somme indexée par des sous-groupes paraboliques. Les résultats principaux sont les propositions 10.1.2 et 10.2.1, analogues de [25, proposition 10.1.6, corollaire 10.2.3]. Dans le chapitre 11, pour chaque terme des développements géométriques et spectraux, un élément de l'ensemble PolExp est défini, ainsi que le polynôme limite. On obtient la première forme, dite « grossière », de la formule des traces.

Partie IV. Forme fine des termes spectraux

Il reste à exploiter la décomposition spectrale pour obtenir le développement spectral fin. Les preuves des énoncés suivent pas à pas celles des chapitres 12 et 13 de [25] à deux différences (simplificatrices) près : d'une part, il est inutile d'introduire une fonction B car ici les paramètres spectraux évoluent dans un espace compact; d'autre part (comme dit plus haut), la décomposition de l'opérateur de troncature en $\mathbf{\Lambda}^T = \mathbf{C}^T + (\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T)$ devient ici, pour T assez régulier (dépendant de la fonction test φ), $\mathbf{\Lambda}^T\varphi = \mathbf{C}^T\varphi$. Le chapitre 14 contient la combinatoire finale donnant lieu aux formules explicites. La preuve de la proposition 14.2.3 est plus technique que celle de son analogue [25, proposition 14.1.8] et fournit une formule moins simple, à cause d'une inversion de Fourier relative à un accouplement qui n'est pas parfait. C'est un problème déjà présent dans le cas local. On s'inspire du traitement de cela dans [34] pour obtenir les formules finales.

Appendice

On trouvera en appendice un erratum corrigeant les lapsus et erreurs que nous avons pu repérer dans [25].

Partie I

Géométrie et combinatoire

Chapitre 1

Racines, convexes et (G, M)-familles

1.1 Le corps F

Dans tout cet article, F est un corps global et, sauf mention expresse du contraire lorsque nous faisons le parallèle avec le cas des corps de nombres, il est de caractéristique $p > 0$.

Soit $\mathbb{F}_q$ « le » corps fini à q éléments, pour une puissance q du nombre premier p. Soit $\mathcal{V}$ une courbe projective lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$, de corps de fonctions F. L'ensemble $|\mathcal{V}|$ des points fermés de $\mathcal{V}$ est en bijection avec l'ensemble des places de F. Pour $v \in |\mathcal{V}|$, on note F_v le corps complété de F en v, $\mathfrak{o}_v$ l'anneau des entiers de F_v, $\mathfrak{p}_v$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_v$, et κ_v le corps résiduel $\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v$. Ce dernier est une extension finie de $\mathbb{F}_q$, de degré $\deg(v)$ appelé « degré de v », et de cardinal $q_v = q^{\deg(v)}$. Pour $v \in |\mathcal{V}|$, on note encore v la valuation sur F_v normalisée par $v(F_v^\times) = \mathbb{Z}$, c'est-à-dire par $v(\varpi_v) = 1$ pour une uniformisante ϖ_v de F_v, et on note $|\ |_v$ la valeur absolue sur F_v définie par

$$|x|_v = q_v^{-v(x)}, \quad x \in F_v.$$

Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles[1] et $\mathbb{A}^\times$ le groupe des idèles de F. On dispose de l'application degré

$$\deg : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{Z},$$

définie par

$$\deg(a) = \sum_{v \in |\mathcal{V}|} -v(a_v) \deg(v) \qquad \text{pour} \qquad a = (a_v)_{v \in |\mathcal{V}|} \in \mathbb{A}^\times,$$

et on pose $|a| = \prod_v |a_v|_v = q^{\deg(a)}$. Le groupe $F^\times$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{A}^\times$, contenu dans

$$\mathbb{A}^1 = \{a \in \mathbb{A}^\times : \deg(a) = 0\},$$

et le quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}^1$ est un compact.

[1] Le corps F étant fixé dans toute la suite nous allègeons la notation en notant simplement $\mathbb{A}$ l'anneau $\mathbb{A}_F$.

1.2 Espaces vectoriels et réseaux

Soit P un groupe algébrique linéaire connexe défini sur F. On note $X_F(P)$ le groupe des *caractères algébriques* de P définis sur F. Si R est un anneau, on pose

$$\mathfrak{a}_{P,R} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}(X_F(P), R).$$

Le $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}}$ est un réseau de l'espace vectoriel réel

$$\mathfrak{a}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{a}_{P,\mathbb{R}}.$$

Pour $x \in P(\mathbb{A})$, on note $\mathbf{H}_P(x)$ l'élément de $\mathfrak{a}_P$ tel que

$$\langle \chi, \mathbf{H}_P(x)\rangle = \deg \chi(x) \quad \text{pour tout} \quad \chi \in X_F(P).$$

L'application $x \mapsto \mathbf{H}_P(x)$ est un homomorphisme

$$\mathbf{H}_P : P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P,$$

dont l'image – notée $\mathfrak{a}_{P,F}$ dans [8] et dans [34] – sera ici notée $\mathcal{A}_P$:

$$\mathcal{A}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{H}_P(P(\mathbb{A})).$$

Pour un corps de fonctions, $\mathcal{A}_P$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{Z}}$ et donc un réseau de $\mathfrak{a}_P$ (alors que $\mathcal{A}_P = \mathfrak{a}_P$ pour un corps de nombres). Une inclusion de F-groupes algébriques linéaires connexes $P \subset Q$ induit des homomorphismes

$$\mathfrak{a}_{P,\bullet} \to \mathfrak{a}_{Q,\bullet}.$$

On pose

$$\mathfrak{a}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \ker[\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_Q] \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \ker[\mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_Q] = \mathcal{A}_P \cap \mathfrak{a}_P^Q.$$

Pour $H \in \mathcal{A}_P$ on notera $P(\mathbb{A}; H)$ l'image réciproque de H. Le noyau de $\mathbf{H}_P$, usuellement noté $P(\mathbb{A})^1$, n'est autre que $P(\mathbb{A}; 0)$. Le groupe $P(\mathbb{A})^1 = P(\mathbb{A}; 0)$ opère par translations sur $P(\mathbb{A}; H)$ ainsi que le groupe $P(F)$ des points F-rationnels de P qui est un sous-groupe de $P(\mathbb{A})^1$, et donc $P(\mathbb{A})^1$ opère à droite sur le quotient $P(F)\backslash P(\mathbb{A}; H)$.

Supposons que le radical unipotent U_P de P soit défini sur F et qu'il existe une section $\iota : \overline{P} = P/U_P \to P$, elle aussi définie sur F (c'est toujours le cas si P est un F-sous-groupe parabolique d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur F). On note Z_P le centre « schématique » de $\overline{P}$, et $A_P \subset Z_P$ le tore F-déployé maximal de Z_P. On identifie A_P à $\iota(A_P)$. L'homomorphisme naturel

$$\mathcal{A}_{A_P} \to \mathcal{A}_P$$

est bien défini (il ne dépend pas de la section ι). Il est injectif mais non surjectif en général ; son image sera notée

$$\mathcal{B}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{H}_P(A_P(\mathbb{A})).$$

C'est un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{A}_P$; on pose

$$\mathfrak{c}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_P\backslash\mathcal{A}_P \simeq A_P(\mathbb{A})P(\mathbb{A})^1\backslash P(\mathbb{A}).$$

Pour $P \subset Q$ deux F-sous-groupes paraboliques d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur F, l'inclusion $A_P \subset A_Q$ (définie via le choix de sections $\overline{P} \to P$ et $\overline{Q} \to Q$ définies sur F) induit une section $\mathfrak{a}_Q \to \mathfrak{a}_P$ de l'homomorphisme surjectif $\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_Q$ et donc une décomposition

$$\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_P^Q.$$

Pour $X = X_P \in \mathfrak{a}_P$, cette décomposition s'écrit $X = X_Q + X^Q$.

1.3 Dualité et mesures

On appelle *caractère* d'un groupe topologique, un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$, et *caractère unitaire*, un caractère à valeurs dans le groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Le dual de Pontryagin d'un groupe abélien localement compact est le groupe topologique de ses caractères unitaires.

Si $\mathfrak{a}$ est un espace vectoriel réel de dimension finie, on notera $\mathfrak{a}^*$ l'espace vectoriel réel dual, $\langle \Lambda, X\rangle$ le produit scalaire de $X \in \mathfrak{a}$ et $\Lambda \in \mathfrak{a}^*$, et $\widehat{\mathfrak{a}}$ le dual de Pontryagin de $\mathfrak{a}$ que l'on peut identifier, au moyen de l'exponentielle, au sous-espace $i\mathfrak{a}^*$ des vecteurs imaginaires purs dans $\mathfrak{a}^* \otimes \mathbb{C}$. Si $\mathcal{R}$ est un réseau de $\mathfrak{a}$, on notera $\mathcal{R}^\vee$ l'ensemble des $\Lambda \in i\mathfrak{a}^*$ tels que $\langle \Lambda, X\rangle \in 2i\pi Z$ pour tout $X \in \mathcal{R}$. C'est l'orthogonal de $\mathcal{R}$ du point de vue de la dualité de Pontryagin : le groupe compact $\widehat{\mathfrak{a}}/\mathcal{R}^\vee$ s'identifie au dual de Pontryagin de $\mathcal{R}$:

$$\widehat{\mathcal{R}} \simeq \widehat{\mathfrak{a}}/\mathcal{R}^\vee.$$

Pour une fonction à décroissance rapide f sur $\mathcal{R}$, on note $\widehat{f}$ la fonction lisse sur $\widehat{\mathcal{R}}$ définie par

$$\widehat{f}(\Lambda) = \sum_{X\in\mathcal{R}} f(X)e^{\langle\Lambda,X\rangle}, \quad \Lambda \in \widehat{\mathcal{R}}.$$

Si $\widehat{\mathcal{R}}$ est muni de la mesure duale de la mesure de comptage sur $\mathcal{R}$, c'est-à-dire telle que $\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{R}}) = 1$, on a la formule d'inversion

$$f(X) = \int_{\widehat{\mathcal{R}}} \widehat{f}(\Lambda)e^{-\langle\Lambda,X\rangle}\,\mathrm{d}\Lambda, \quad X \in \mathcal{R}.$$

Pour alléger légèrement les notations, pour P comme en section 1.2, on se permettra d'écrire $\widehat{\mathfrak{a}}_P$, $\widehat{\mathcal{A}}_P$, etc., en place de $\widehat{\mathfrak{a}_P}$, $\widehat{\mathcal{A}_P}$, etc. On pose

$$\boldsymbol{\mu}_P \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathcal{A}}_P.$$

Notons $\Xi(P)$, resp. $\Xi(P)^1$, l'ensemble des caractères unitaires de $A_P(\mathbb{A})$, resp. $A_P(\mathbb{A})^1$, qui sont triviaux sur $A_P(F)$. Ce sont deux groupes abéliens localement compacts, et $\Xi(P)^1$ est un quotient discret de $\Xi(P)$. On notera $\Xi(P)^+$ l'ensemble des caractères, non nécessairement unitaires. Le groupe $\Xi(P)$ s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to \widehat{\mathcal{B}}_P \to \Xi(P) \to \Xi(P)^1 \to 0.$$

Convention 1.3.1. Pour les mesures de Haar sur les groupes abéliens localement compacts, on adoptera les normalisations suivantes. On impose la compatibilité aux suites exactes courtes et à la dualité de Pontryagin. Les réseaux de $\mathfrak{a}_P$ sont munis de la mesure de comptage. Cela implique que le groupe fini $\mathfrak{c}_P$ est, lui aussi, muni de la mesure de comptage, et que l'on a[2]

$$\mathrm{vol}(\boldsymbol{\mu}_P) = \mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{B}}_P) = \mathrm{vol}(\widehat{\mathfrak{c}}_P) = 1.$$

On impose aussi que la mesure de Haar sur $A_P(F)\backslash A_P(\mathbb{A})$ vérifie

$$\mathrm{vol}(A_P(F)\backslash A_P(\mathbb{A})^1) = 1.$$

Ceci implique en particulier que le groupe discret $\Xi(P)^1$, dual du groupe compact $A_P(F)\backslash A_P(\mathbb{A})^1$, est muni de la mesure de comptage.

Tout caractère χ de $P(\mathbb{A})$ s'écrit de manière unique

$$\chi = \chi_{\mathrm{u}}|\chi|$$

avec $|\chi|(g) = |\chi(g)|$ et χ_{u} unitaire. Le caractère $|\chi|$ est trivial sur $P(\mathbb{A})^1$. On note $\chi^1 = \chi_{\mathrm{u}}^1$ la restriction de χ à $P(\mathbb{A})^1$. Tout élément $\nu \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ définit un caractère de $P(\mathbb{A})$, trivial sur $P(\mathbb{A})^1$:

$$p \mapsto e^{\langle \nu, \mathbf{H}_P(p)\rangle}, \quad p \in P(\mathbb{A}).$$

Ce caractère ne dépend que de l'image de ν dans $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_P^\vee$ et sa restriction à $A_P(\mathbb{A})$ ne dépend que de l'image de ν dans $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{B}_P^\vee$. La suite exacte courte

$$0 \to \widehat{\mathfrak{c}}_P \to \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_P^\vee \to \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{B}_P^\vee \to 0$$

[2] On observera que cette convention n'est pas celle utilisée dans [8].

correspond à la restriction des caractères de $P(\mathbb{A})$ à $A_P(\mathbb{A})$. Si π est une représentation de $P(\mathbb{A})$, pour $\nu \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_P$ on note π_ν la représentation de $P(\mathbb{A})$ définie par

$$\pi_\nu(p) = \pi(p)e^{\langle \nu, \mathbf{H}_P(p)\rangle}, \quad p \in P(\mathbb{A}).$$

On la notera aussi parfois $\pi \star \nu$. De même, si ξ est un caractère de $A_P(\mathbb{A})$, pour $\nu \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{B}^\vee_P$, on note $\xi_\nu = \xi \star \nu$ le caractère $a \mapsto \xi(a)e^{\langle \nu, \mathbf{H}_P(a)\rangle}$ de $A_P(\mathbb{A})$.

1.4 Sous-groupes paraboliques

Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. Tous les sous-groupes paraboliques de G considérés dans la suite, ainsi que leurs composantes de Levi, sont supposés définis sur F. On fixe un sous-groupe parabolique minimal P_0 de G et une composante de Levi M_0 de P_0. On note A_0 le tore F-déployé maximal du centre Z_{M_0} de M_0. Ainsi M_0 est le centralisateur de A_0 dans G. Un sous-groupe parabolique de G est dit « standard », resp. « semi-standard », s'il contient P_0, resp. M_0. Un facteur de Levi de G, c'est-à-dire une composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de G, est dit « semi-standard » s'il contient M_0, et il est dit « standard » si c'est la composante de Levi semi-standard d'un sous-groupe parabolique standard. Dans la suite, tous les sous-groupe paraboliques et tous les sous-groupes de Levi seront semi-standards – nous omettrons parfois de le préciser.

On note $\mathcal{P} = \mathcal{P}^G$, resp. $\mathcal{L} = \mathcal{L}^G$, l'ensemble des sous-groupes paraboliques, resp. facteurs de Levi, de G, (semi-standards), et $\mathcal{P}_{\mathrm{st}} = \mathcal{P}^G_{\mathrm{st}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé des éléments standards. Pour $P \in \mathcal{P}$, on note M_P ou simplement M la composante de Levi (semi-standard) de P, et U_P ou simplement U, le radical unipotent de P ; on a les identifications

$$A_P = A_M, \quad \mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_M \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_P = \mathcal{A}_M.$$

On pose

$$a_P = \dim(\mathfrak{a}_P).$$

Pour P, $Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$, on a noté $\mathfrak{a}^Q_P$ le noyau de l'homomorphisme naturel $\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_Q$. On pose

$$a^Q_P = \dim(\mathfrak{a}^Q_P) = a_P - a_Q.$$

Pour $M \in \mathcal{L}$ on note $\mathcal{P}(M)$, resp. $\mathcal{F}(M)$, le sous-ensemble des $Q \in \mathcal{P}$ avec comme composante de Levi $M_Q = M$, resp. $M_Q \supset M$. Pour $Q \in \mathcal{F}(M)$, on pose

$$\mathcal{P}^Q(M) = \{P \in \mathcal{P}(M) : P \subset Q\}, \quad \mathcal{F}^Q(M) = \{P \in \mathcal{F}(M) : P \subset Q\}.$$

On se permettra de remplacer l'indice P par un indice M dans les objets qui ne dépendent pas du choix de $P \in \mathcal{P}(M)$. Par exemple, pour $Q \in \mathcal{F}(M)$ et $P \in \mathcal{P}^Q(M)$, on écrira parfois $\mathfrak{a}_M^Q$ au lieu de $\mathfrak{a}_P^Q$, et X_M^Q au lieu de X_P^Q pour $X \in \mathfrak{a}_{P_0}$. On remplacera souvent l'indice « P_0 » par un indice « 0 » : ainsi on écrira A_0 pour A_{P_0}, $\mathfrak{a}_0$ pour $\mathfrak{a}_{P_0}$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_0^Q$, etc.

On fixe une forme quadratique définie positive $(\cdot,\cdot)$ sur $\mathfrak{a}_0$, invariante par le groupe de Weyl $\mathbf{W} = N^G(A_0)/M_0$, où $N^G(A_0)$ est le normalisateur de A_0 dans G. Pour tout $X \in \mathfrak{a}_0$, on note $\|X\| = (X, X)^{1/2}$ la norme de X. Pour $M \in \mathcal{L}$, la forme $(\cdot,\cdot)$ induit, par restriction, une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{a}_M$, invariante par le groupe de Weyl $\mathbf{W}^M = N^M(A_0)/M_0$. Pour $Q \in \mathcal{F}(M)$, $\mathfrak{a}_M^Q$ n'est autre que l'orthogonal de $\mathfrak{a}_Q$ dans $\mathfrak{a}_M$, pour cette forme.

Pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on dispose des racines de A_0 dans M_P et des coracines, qui sont de éléments de $\mathfrak{a}_0^P$. Pour toute racine α et toute coracine $\check{\beta}$ on a

$$\langle \alpha, \check{\beta} \rangle = N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}.$$

Les coracines appartiennent donc à $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^P$. Soit Δ_0^P l'ensemble des racines simples de A_0 dans M_P pour l'ordre défini par $P_0 \cap M_P$; on note $\check{\Delta}_0^P$ la base de $\mathfrak{a}_0^P$ formée par les coracines simples, et $\hat{\Delta}_0^P$ la base des poids pour M_P, c'est-à-dire la base de $(\mathfrak{a}_0^P)^*$ duale de $\check{\Delta}_0^P$. Lorsque $P = G$, on écrira souvent Δ_0 pour Δ_0^G. On observe que $\Delta_0^P \subset \Delta_0$ et que $\hat{\Delta}_0^P$ est l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de $\hat{\Delta}_0$ au sous-espace $\mathfrak{a}_0^P$ de $\mathfrak{a}_0^G$.

Plus généralement, pour P, $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $P \subset Q$, on note Δ_P^Q l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de Δ_0^Q au sous-espace $\mathfrak{a}_P^Q$ de $\mathfrak{a}_0^Q$. On note $\check{\Delta}_P^Q$ l'ensemble des projections non nulles des éléments de $\check{\Delta}_0^Q$ sur l'espace $\mathfrak{a}_P^Q$ par rapport à la décomposition $\mathfrak{a}_0^Q = \mathfrak{a}_0^P \oplus \mathfrak{a}_P^Q$. On note $\hat{\Delta}_P^Q$ la base de $(\mathfrak{a}_P^Q)^*$ duale de $\check{\Delta}_P^Q$: c'est le sous-ensemble des éléments de $\hat{\Delta}_0^Q$ nuls sur $\mathfrak{a}_0^P$. On considère les éléments de Δ_P^Q et $\hat{\Delta}_P^Q$ comme des formes linéaires sur $\mathfrak{a}_0$, grâce à la décomposition

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^P \oplus \mathfrak{a}_P^Q \oplus \mathfrak{a}_Q.$$

Rappelons que deux réseaux $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie sont dits *commensurables* si leur intersection $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est d'indice fini dans chacun d'eux. En particulier on a le lemme suivant.

Lemme 1.4.1. *Les réseaux $\mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)$ sont commensurables aux $\mathcal{A}_P^Q$.*

Ces définitions s'étendent à toute paire de sous-groupes paraboliques (P, Q) de G tels que $P \subset Q$: on choisit un élément $g \in G(F)$ tel que $g^{-1}Pg \supset P_0$ et, par transport de structures via le F-automorphisme Int_g de G, on définit les analogues des objets ci-dessus ; cela ne dépend pas du choix de g.

On note $\mathfrak{a}_0^+$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{a}_0$ tels que $\langle \alpha, X \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. Un élément de $\mathfrak{a}_0$ est dit *régulier* s'il appartient à $\mathfrak{a}_0^+$. Pour $X \in \mathfrak{a}_0$, on pose

$$\boldsymbol{d}_0(X) = \inf_{\alpha \in \Delta_0} \langle \alpha, X \rangle.$$

Ainsi X est régulier si et seulement si $\boldsymbol{d}_0(X) > 0$.

Soit M un facteur de Levi de G. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, les homomorphismes de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathfrak{a}_M \to \mathfrak{a}_P$ et de $\mathbb{Z}$-modules $\mathcal{A}_M \to \mathcal{A}_P$ sont des isomorphismes. Pour $P, Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$, on a noté $\mathcal{A}_P^Q$ le réseau $\ker[\mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_Q] = \mathcal{A}_P \cap \mathfrak{a}_P^Q$ de $\mathfrak{a}_P^Q$.

Lemme 1.4.2. *On a une suite exacte courte de réseaux :*

$$0 \to \mathcal{A}_P^Q \to \mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_Q \to 0.$$

Démonstration. Il convient d'établir la surjectivité de la flèche $\mathcal{A}_P \to \mathcal{A}_Q$. Pour cela on invoque la décomposition d'Iwasawa (rappelée en section 3.1) : tout $q \in Q(\mathbb{A})$ peut s'écrire $q = pk$ avec $k \in \boldsymbol{K}$, où $\boldsymbol{K}$ est un bon sous-groupe compact maximal dans $G(\mathbb{A})$ et $p \in P(\mathbb{A})$, donc $\mathbf{H}_Q(q) = \mathbf{H}_Q(p) = \mathbf{H}_P(p)$. ∎

On pose dualement

$$\boldsymbol{\mu}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \boldsymbol{\mu}_P/\boldsymbol{\mu}_Q = \widehat{\mathcal{A}}_P^Q.$$

Notons qu'en général il n'y a pas de section canonique relevant $\mathcal{A}_Q$ dans $\mathcal{A}_P$. En revanche, on a toujours l'inclusion

$$\mathcal{B}_Q = \mathbf{H}_Q(A_Q(F)) = \mathbf{H}_P(A_Q(F)) \subset \mathcal{B}_P.$$

Puisque A_Q est un sous-tore de A_P, on a l'égalité :

$$\mathcal{B}_Q = \mathcal{B}_P \cap \mathfrak{a}_Q.$$

En résumé, les inclusions

$$A_Q(\mathbb{A}) \subset A_P(\mathbb{A}) \subset M_P(\mathbb{A}) \subset M_Q(\mathbb{A})$$

donnent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_P \arrow[r] & \mathcal{A}_Q \\ \mathcal{B}_P \arrow[u] & \mathcal{B}_Q, \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale du haut est surjective alors que les trois autres sont injectives. On pose

$$\mathcal{B}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_Q \backslash \mathcal{B}_P \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_P^Q \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_Q \backslash \mathcal{A}_P.$$

On observe que $\mathcal{B}_P^Q$ est un réseau de $\mathfrak{a}_P^Q$ et que $\mathcal{C}_P^Q$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini qui s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{B}_P^Q \to \mathcal{C}_P^Q \to \mathfrak{c}_P \to 0.$$

1.5 Familles orthogonales et (G, M)-familles

Fixons un facteur de Levi $M \in \mathcal{L}$ et considérons une famille

$$\mathfrak{X} = (X_P)_{P \in \mathcal{F}(M)}$$

d'éléments $X_P \in \mathfrak{a}_P$. Une telle famille est dite *M-orthogonale* (ou simplement *orthogonale*) si pour tous P et Q dans $\mathcal{F}(M)$ tels que $P \subset Q$, la projection $(X_P)_Q$ de X_P dans $\mathfrak{a}_Q$ est égale à X_Q. Pour $M' \in \mathcal{L}$ tel que $M \subset M'$, une famille M-orthogonale détermine par restriction une famille M'-orthogonale. Il suffit, pour définir une famille M-orthogonale, de se donner des $X_P \in \mathfrak{a}_M$ pour chaque $P \in \mathcal{P}(M)$ vérifiant la propriété suivante : si P et $P' \in \mathcal{P}(M)$ sont adjacents et si α est l'unique racine de A_M positive pour P et négative pour P', alors $X_P - X_{P'}$ est un multiple de $\check{\alpha}$. La famille est dite *régulière* si les $X_P - X_{P'}$ sont des multiples positifs de $\check{\alpha}$. On dit que la famille est *entière*, resp. *rationnelle*, si $X_P \in \mathcal{A}_M$, resp. $X_P \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{Q}}$, pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$. Dans ce cas $X_Q \in \mathcal{A}_Q$, resp. $X_Q \in \mathfrak{a}_{Q,\mathbb{Q}}$, pour tout $Q \in \mathcal{F}(M)$.

On notera $\mathfrak{H}_{G,M}$ ou simplement $\mathfrak{H}_M$ si aucune confusion n'en résulte, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie formé des familles M-orthogonales, et

$$\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_{G,M} \subset \mathfrak{H}_M$$

le réseau formé des familles qui sont entières. On note

$$\widehat{\mathfrak{H}}_M = i\mathfrak{H}_M^*$$

le dual de Pontryagin de $\mathfrak{H}_M$. Le groupe compact

$$\widehat{\mathcal{H}}_M = \widehat{\mathfrak{H}}_M / \mathcal{H}_M^\vee$$

s'identifie au dual de Pontryagin de $\mathcal{H}_M$. Pour chaque $P \in \mathcal{F}(M)$, on dispose d'une application

$$\pi_P : \mathfrak{H}_M \to \mathfrak{a}_P,\ \mathfrak{X} \mapsto X_P$$

qui est surjective et on note

$$\iota_P : \widehat{\mathfrak{a}}_P \to \widehat{\mathfrak{H}}_M$$

l'application injective transposée de π_P.

Une manière très simple de construire une famille M_0-orthogonale est de fixer un élément $T \in \mathfrak{a}_0$. Pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, si w est l'unique élément de $\mathbf{W}$ tel que ${}^w(P_0) = P$, on pose $[T]_P = wT$. On a donc $[T]_{P_0} = T$ et l'ensemble

$$\mathfrak{T} = ([T]_P)_{P \in \mathcal{P}(M_0)}$$

définit une famille M_0-orthogonale. Pour $Q \in \mathcal{F}(M_0)$, on a $[T]_Q = ([T]_P)_Q$ pour un (i.e. pour tout) $P \in \mathcal{P}^Q(M_0)$. Cette famille est régulière, resp. rationnelle, si et seulement si $T \in \mathfrak{a}_0^+$, resp. $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. Soit $\mathfrak{X} = (X_P)$ une famille M-orthogonale, et soit T un élément de $\mathfrak{a}_0$. On définit une autre famille M-orthogonale en posant :

$$\mathfrak{X}(T) = \mathfrak{X} + \mathfrak{T}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathfrak{X}(T)_P = X_P + [T]_P.$$

Une (G, M)-famille est la donnée d'une famille de fonctions

$$\boldsymbol{c} = (\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}(\Lambda, P) \mid P \in \mathcal{F}(M))$$

à valeurs dans $\mathbb{C}$, ou plus généralement à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finies $\boldsymbol{E}$, vérifiant les conditions :

- pour tout $P \in \mathcal{F}(M)$, la fonction $\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}(\Lambda, P)$ est lisse sur $\widehat{\mathfrak{a}}_P$;
- pour tous $P, Q \in \mathcal{F}(M)$ tels que $P \subset Q$ (i.e. $P \in \mathcal{F}^Q(M)$), on a

$$\boldsymbol{c}(\cdot, P)|_{\widehat{\mathfrak{a}}_Q} = \boldsymbol{c}(\cdot, Q).$$

Pour chaque $P \in \mathcal{F}(M)$, on prolonge $\boldsymbol{c}(\cdot, P)$ en une fonction sur $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ constante sur les fibres de la projection $\widehat{\mathfrak{a}}_0 \to \widehat{\mathfrak{a}}_P$. Comme pour les familles M-orthogonales, il suffit pour définir une (G, M)-famille de se donner des fonctions lisses

$$\boldsymbol{c}(\cdot, P) : \widehat{\mathfrak{a}}_M \to \boldsymbol{E} \qquad \text{pour} \qquad P \in \mathcal{P}(M)$$

qui vérifient la propriété suivante : pour $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ deux éléments adjacents correspondant à des chambres séparées par le mur $\mathfrak{a}_R$, où R est l'élément de $\mathcal{F}(M)$ engendré par P et P', on a l'égalité

$$\boldsymbol{c}(\cdot, P)|_{\widehat{\mathfrak{a}}_R} = \boldsymbol{c}(\cdot, P')|_{\widehat{\mathfrak{a}}_R}.$$

Les fonctions $c(\cdot, Q)$ pour $Q \in \mathcal{F}(M) \smallsetminus \mathcal{P}(M)$ s'en déduisent par restriction.

Une (G, M)-famille $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot, P))$ est dite *périodique* si pour tout $P \in \mathcal{F}(M)$, la fonction $\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}(\Lambda, P)$ est invariante par translation par $\mathcal{A}_P^\vee$, i.e. se factorise par $\boldsymbol{\mu}_P \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\mathcal{A}}_P$. Pour qu'une (G, M)-famille $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot, P))$ soit périodique, il suffit que pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, la fonction $\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}(\Lambda, P)$ soit $\mathcal{A}_M^\vee$-périodique. On notera $\mathcal{D}(G, M)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des (G, M)-familles périodiques.

Soit m une mesure de Radon à décroissance rapide sur $\mathfrak{S}_M$ et à valeurs dans $\boldsymbol{E}$. On lui associe une (G, M)-famille en posant, pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_P$:

$$\boldsymbol{c}(\Lambda, P) = \int_{\mathfrak{S}_M} e^{\langle \Lambda, X_P \rangle} \, \mathrm{d}m(\mathfrak{X}),$$

où $X_P = \pi_P(\mathfrak{X})$. La (G, M)-famille $\boldsymbol{c}$ est périodique si et seulement si la mesure m est le produit d'une fonction à décroissance rapide sur le réseau $\mathcal{H}_M$ par la mesure de comptage. Par abus de notation nous noterons encore m cette fonction. Sa transformée de Fourier

$$\widehat{m}(\mathfrak{L}) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} e^{\langle \mathfrak{L}, \mathfrak{U} \rangle} m(\mathfrak{U}) \quad \text{pour} \quad \mathfrak{L} \in \widehat{\mathfrak{H}}_M$$

se factorise par $\widehat{\mathcal{H}}_M$, c'est-à-dire est invariante par $\mathcal{H}_M^\vee$. On notera $\boldsymbol{c}_m$ la (G, M)-famille périodique définie par

$$\boldsymbol{c}_m(\Lambda, P) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} e^{\langle \Lambda, U_P \rangle} m(\mathfrak{U}) = (\widehat{m} \circ \iota_P)(\Lambda).$$

On munit l'espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{H}_M$ d'une structure euclidienne et on note $\|\mathfrak{X}\|$ la norme du vecteur $\mathfrak{X} \in \mathfrak{H}_M$. L'espace $\mathcal{S}(\mathcal{H}_M)$ des fonctions m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$ est muni d'une structure d'espace de Fréchet au moyen des normes n_d pour $d \in \mathbb{N}$:

$$n_d(m) = \sup_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} (1 + \|\mathfrak{U}\|)^d |m(\mathfrak{U})|.$$

Tout opérateur différentiel à coefficients constants D sur $\widehat{\mathfrak{a}}_M$ permet de définir une semi-norme N_D sur l'espace $\mathcal{D}(G, M)$ en posant

$$N_D(\boldsymbol{c}) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \sup_{\Lambda \in \boldsymbol{\mu}_M} |D\boldsymbol{c}(\Lambda, P)|,$$

munissant ainsi $\mathcal{D}(G, M)$ d'une structure d'espace de Fréchet. L'application linéaire

$$\boldsymbol{S} : \mathcal{S}(\mathcal{H}_M) \to \mathcal{D}(G, M),$$

définie par $m \mapsto \boldsymbol{c}_m$, est continue.

Lemme 1.5.1. *Toutes les (G, M)-familles périodiques sont obtenues de cette manière. En d'autres termes, l'application $\boldsymbol{S}$ est surjective.*

Démonstration. C'est une variante de [25, proposition 1.10.1]. La preuve en est identique, à ceci près que la fonction χ sur $\mathbb{R}$ servant à construire la globalisation sur $\widehat{\mathfrak{H}}_M$ de la (G, M)-famille $\boldsymbol{c}$ donnée, qui ici est périodique, doit être prise périodique au lieu de lui imposer d'être à support compact. Plus précisément, on fixe une base $\mathcal{B}_G$ de $\widehat{\mathfrak{a}}_G = i\mathfrak{a}_G^*$, et pour chaque $P \in \mathcal{F}(M)$, on pose

$$\mathcal{B}_P = \iota_P(\mathcal{B}_G \cup i\widehat{\Delta}_P) \subset \widehat{\mathfrak{H}}_M.$$

On note $\mathcal{B}$ la base de $\widehat{\mathfrak{H}}_M$ formée par l'union de ces ensembles $\mathcal{B}_P$. C'est l'union de $\mathcal{B}_G$ et des $e_Q = \iota_Q(i\varpi_Q)$, où Q parcourt l'ensemble $\mathcal{F}_{\max}(M)$ des sous-groupes paraboliques maximaux propres de G contenant M et ϖ_Q est l'unique élément de $\widehat{\Delta}_Q$. Pour chaque $P \in \mathcal{F}(M)$, on a une partition de $\mathcal{B}$ en

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_P \cup \mathcal{B}^P \quad \text{avec} \quad \mathcal{B}^P = \{e_Q \,|\, Q \in \mathcal{F}_{\max}(M),\ Q \not\supset P\}$$

qui induit une décomposition de $\widehat{\mathfrak{H}}_M$ en somme directe. Pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{H}}_M$, on note $\lambda = \lambda_P + \lambda^P$ la décomposition associée et l'on pose

$$\chi_P(\lambda^P) = \prod_{Q \not\supset P} \chi(x_Q(\lambda)) \quad \text{si} \quad \lambda^P = \sum_{Q \not\supset P} x_Q(\lambda) e_Q.$$

On définit la fonction

$$f(\lambda) = \sum_{P \in \mathcal{F}(M)} (-1)^{a_Q - a_M} \boldsymbol{c}(\lambda_P, P) \chi_P(\lambda^P),$$

où l'on a identifié $\lambda_P \in \iota_P(\widehat{\mathfrak{a}}_P)$ à un élément de $\widehat{\mathfrak{a}}_P$. Notons $\mathcal{Z}$ le réseau de $\mathbb{R}$ engendré par les $x_Q(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathcal{H}_M^\vee$ et $Q \in \mathcal{F}_{\max}(M)$. Il suffit de prendre pour χ une fonction lisse et $\mathcal{Z}$-invariante sur $\mathbb{R}$, telle que $\chi(0) = 1$. N'importe quel caractère de $\mathcal{Z}\backslash\mathbb{R}$ convient – par exemple $\chi = 1$. ■

Ce résultat permet de définir d'autres normes sur l'espace $\mathcal{D}(G, M)$:

Définition 1.5.2. Pour $d \in \mathbb{N}$ on pose

$$N_d(\boldsymbol{c}) = \inf\{n_d(m) \mid \boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{c}\}.$$

1.6 Fonctions caractéristiques de cônes et de convexes

Pour $P, Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$, on note[3] τ_P^Q, resp. $\widehat{\tau}_P^Q$, la fonction caractéristique du cône ouvert dans $\mathfrak{a}_0$ défini par Δ_P^Q, resp. $\hat{\Delta}_P^Q$:

$$\tau_P^Q(X) = 1 \Leftrightarrow \langle \alpha, X \rangle > 0,\ \forall \alpha \in \Delta_P^Q,$$

$$\widehat{\tau}_P^Q(X) = 1 \Leftrightarrow \langle \varpi, X \rangle > 0,\ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P^Q.$$

Pour $Q = G$, on écrira souvent $\tau_P = \tau_P^G$, $\widehat{\tau}_P = \widehat{\tau}_P^G$. La propriété essentielle pour la combinatoire est que les matrices, indexées par les couples de sous-groupes paraboliques standards, $\tau = (\tau_{P,Q})$ et $\widehat{\tau} = (\widehat{\tau}_{P,Q})$ définies par

$$\tau_{P,Q} = \begin{cases} (-1)^{a_P} \tau_P^Q & \text{si } P \subset Q \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\tau}_{P,Q} = \begin{cases} (-1)^{a_P} \widehat{\tau}_P^Q & \text{si } P \subset Q \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

[3] Comme dans [25], toutes les fonctions indexées par P sont des fonctions sur $\mathfrak{a}_0$ qui se factorisent à travers $\mathfrak{a}_0^P \backslash \mathfrak{a}_0$ ($\simeq \mathfrak{a}_P$). Dans [34], elles sont considérées comme des fonctions sur $\mathfrak{a}_P$.

sont inverses l'une de l'autre : $\tau\widehat{\tau} = \widehat{\tau}\tau = 1$ (cf. [25, proposition 1.7.2]).

Soit $M \in \mathcal{L}$. Fixons un élément $Q \in \mathcal{P}(M)$. Cet élément définit un ordre sur l'ensemble des racines de A_M dans G. On écrit $\alpha >_Q 0$, resp. $\alpha <_Q 0$, pour signifier qu'une racine α est positive, resp. négative, pour cet ordre. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, notons $\phi_{P,Q}^G$ la fonction caractéristique des $X \in \mathfrak{a}_P^G$ suivante :

$$\phi_{P,Q}^G(X) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \varpi_\alpha, X\rangle \leq 0 & \text{pour } \alpha \in \Delta_P, \text{ tel que } \alpha >_Q 0, \\ \langle \varpi_\alpha, X\rangle > 0 & \text{pour } \alpha \in \Delta_P, \text{ tel que } \alpha <_Q 0, \end{cases}$$

où $\{\varpi_\alpha : \alpha \in \Delta_P\} = \hat{\Delta}_P$ est la base de $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ duale de $\{\check{\alpha} : \alpha \in \Delta_P\} = \check{\Delta}_P$. On note $a(P, Q)$ le nombre des $\alpha \in \Delta_P$ tels que $\alpha <_Q 0$. Par définition, $\phi_{P,Q}^G$ se factorise par $\mathfrak{a}_P^G$. Observons que $\phi_{P,Q}^G$ est noté $\phi_{M,s}$ dans [25] lorsque $P = s(Q)$ pour un élément s dans le groupe de Weyl. Plus généralement pour $R \in \mathcal{F}(M)$ et $P, Q \in \mathcal{P}^R(M)$, on définit la fonction $\phi_{Q,P}^R$ comme ci-dessus, en remplaçant G par $L = M_R$, P par $P \cap L$, et Q par $Q \cap L$. Nous aurons aussi besoin de ϕ_P^Q, la fonction caractéristique du cône fermé dans $\mathfrak{a}_0$, défini par $-\hat{\Delta}_P^Q$:

$$\phi_P^Q(X) = 1 \Leftrightarrow \langle \varpi, X\rangle \leq 0, \, \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P^Q.$$

On observera que $\phi_P^Q = \phi_{P,P}^Q$.

Nous allons citer des résultats empruntés à la section 1.8 de [25]. Leurs preuves reposent sur le lemme 1.8.1 de [25, page 22], dont la démonstration est incorrecte. Cette erreur a été observée par P.-H. Chaudouard. Une preuve alternative en est donnée dans l'annexe (cf. **Err** (i), lemme A.3).

Pour P et R dans $\mathcal{P}$ tels que $P \subset R$, on définit la fonction Γ_P^R sur $\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0$ par

$$\Gamma_P^R(H, X) = \sum_{\{Q | P \subset Q \subset R\}} (-1)^{a_Q - a_R} \tau_P^Q(H) \widehat{\tau}_Q^R(H - X).$$

D'après [25, lemme 1.8.3] la projection dans $\mathfrak{a}_P^R$ du support de la fonction $H \mapsto \Gamma_P^R(H, X)$ est une union d'ensembles $C(P, Q, R, X)$ et est donc compacte. Précisément, il existe une constante $c > 0$ telle que, si $\Gamma_P^R(H, X) \neq 0$, on a

$$\|H_P^R\| \leq c \|X_P^R\|,$$

où $X \mapsto X_P^R$ est la projection sur l'orthogonal de $\mathfrak{a}_0^P \oplus \mathfrak{a}_R$. De plus, si P est standard et X est régulier, on a

$$\Gamma_P^R(H, X) = \tau_P^R(H) \phi_P^R(H - X).$$

Soit $M \in \mathcal{L}$. Pour une famille M-orthogonale $\mathfrak{X} = (X_P)$ et pour $R \in \mathcal{F}(M)$, on note $\Gamma_M^R(\cdot, \mathfrak{X})$ la fonction sur $\mathfrak{a}_0$ définie par

$$\Gamma_M^R(H, \mathfrak{X}) = \sum_{P \in \mathcal{F}^R(M)} (-1)^{a_P - a_R} \widehat{\tau}_P^R(H - X_P).$$

D'après [25, proposition 1.6.5], si la famille $\mathfrak{X}$ est régulière, alors $\Gamma_M^R(\cdot,\mathfrak{X})$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des $H \in \mathfrak{a}_0$, dont la projection H_M^R dans $\mathfrak{a}_M^R$ appartient à l'enveloppe convexe des points X_P^R pour $P \in \mathcal{P}^R(M)$. En général, la projection du support de la fonction $\Gamma_M^R(\cdot,\mathfrak{X})$ dans $\mathfrak{a}_M^R$ est compacte [25, corollaire 1.8.5]. Précisément, il existe une constante $c > 0$ (indépendante de la famille $\mathfrak{X}$), telle que pour tout $H \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\Gamma_M^R(H,\mathfrak{X}) \neq 0$, on ait

$$\|H_M^R\| \leq c \sup_{P\in\mathcal{P}^R(M)} \|X_P^R\|.$$

On se limite maintenant au cas $R = G$.

Lemme 1.6.1. *Soit $Q \in \mathcal{P}(M)$. On a*

$$\Gamma_M^G(H,\mathfrak{X}) = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} (-1)^{a(P,Q)}\phi_{P,Q}^G(H - X_P).$$

Démonstration. Ceci résulte de [25, proposition 1.8.7 (2)]. ∎

Pour les (nombreuses) autres égalités reliant les fonctions τ_P^Q, $\widehat{\tau}_P^Q$, $\phi_{P,Q}^G$, Γ_P^Q et Γ_M^Q, on renvoie à [25, sections 1.7, 1.8] et à [34, section 1.3].

Pour P, $Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$, les fonctions méromorphes ϵ_P^Q sur $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ sont définies dans [25, section 1.9]. On rappelle leur définition :

Définition 1.6.2. On munit l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_P^Q$ d'une mesure de Haar. Pour $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ en dehors des murs, on pose

$$\epsilon_P^Q(\Lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)) \prod_{\alpha\in\Delta_P^Q} \langle\Lambda,\check{\alpha}\rangle^{-1},$$

où $\mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)$ désigne le réseau de $\mathfrak{a}_P^Q$ engendré par $\check{\Delta}_P^Q$, et $\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)$ est muni de la mesure quotient de la mesure sur $\mathfrak{a}_P^Q$ par la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}(\check{\Delta}_P^Q)$.

On observera que, si $\langle\Re(\Lambda),\alpha\rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$, on a

$$\epsilon_P^Q(\Lambda) = \int_{\mathfrak{a}_P^Q} \phi_P^Q(H)e^{\langle\Lambda,H\rangle}\,\mathrm{d}H.$$

Pour $X_P \in \mathfrak{a}_P$ on pose aussi

$$\epsilon_P^{Q,X_P}(\Lambda) = \int_{\mathfrak{a}_P^Q} \phi_P^Q(H - X_P)e^{\langle\Lambda,H\rangle}\,\mathrm{d}H = e^{\langle\Lambda,X_P^Q\rangle}\epsilon_P^Q(\Lambda).$$

En sommant sur des réseaux au lieu d'espaces vectoriels on définit, comme en [34, section 1.5], des variantes $\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)$ des fonctions ϵ_P^{Q,X_P}. Pour $Z \in \mathcal{A}_Q$, on pose

$$\mathcal{A}_P^Q(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \{H \in \mathcal{A}_P : H_Q = Z\}.$$

Si $Z' \in \mathcal{A}_P$ est tel que $Z'_Q = Z$, on a alors

$$\mathcal{A}_P^Q(Z) = Z' + \mathcal{A}_P^Q.$$

Pour $\Lambda \in \mathfrak{a}^*_{0,\mathbb{C}}$, $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $X_P \in \mathfrak{a}_P$, on pose

$$\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{A}_P^Q(Z)} \phi_P^Q(H - X_P) e^{\langle \Lambda, H\rangle}.$$

Lemme 1.6.3. *La série définissant $\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)$ est absolument convergente si $\langle \Re\Lambda, \check\alpha\rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$. Dans ce domaine, la série ne dépend que de la projection de Λ dans $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{A}_P^\vee$. Pour $X_P \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}$, la fonction*

$$\Lambda \mapsto \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)$$

se prolonge méromorphiquement à tout $\Lambda \in \mathfrak{a}^*_{0,\mathbb{C}}$.

Démonstration. Montrons le prolongement méromorphe, pour $X_P \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}$. La preuve ci-après est classique (cf. [8] et [34]). Pour tout entier $k \geq 1$ on pose

$$\mathcal{D}_k = k^{-1}\mathcal{D}, \qquad \text{où} \qquad \mathcal{D} = \mathbb{Z}(\check\Delta_P^Q) \subset \mathfrak{a}_P^Q.$$

Choisissons k tel que $\mathcal{D}_k$ contienne $\mathcal{A}_P^Q$ et $(X_P - Z')^Q$. Le réseau dual $\mathcal{D}_k^\vee$, formé des $\Lambda \in \mathfrak{a}_P^{Q,*} \otimes \mathbb{C}$ tels que $\langle \Lambda, Y\rangle \in 2i\pi Z$ pour tout $Y \in \mathcal{D}_k$, vérifie l'inclusion

$$\mathcal{D}_k^\vee \subset \mathcal{A}_P^{Q,\vee}.$$

Considérons les fonctions méromorphes[4]

$$\varepsilon_{P,k}^Q(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_P^Q} (1 - e^{-k^{-1}\langle \Lambda, \check\alpha\rangle})^{-1}.$$

L'ensemble des $H \in \mathcal{D}_k$ tels que $\phi_P^Q(H) = 1$ est celui formé des

$$\sum_{\alpha \in \Delta_P^Q} n_\alpha k^{-1}\check\alpha$$

pour des entiers $n_\alpha \leq 0$. Pour $\Lambda \in \mathfrak{a}^*_{0,\mathbb{C}}$ tel que $\langle \Re\Lambda, \check\alpha\rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$, on a donc :

$$\varepsilon_{P,k}^Q(\Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{D}_k} \phi_P^Q(H) e^{\langle \Lambda, H\rangle}.$$

[4]Dans [8], cette fonction est notée $(\theta_{P,k^{-1}}^Q)^{-1}$.

Par inversion de Fourier sur le groupe abélien fini $\mathcal{A}_P^Q \backslash \mathcal{D}_k$, on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) &= \frac{e^{\langle \Lambda, Z' \rangle}}{[\mathcal{D}_k : \mathcal{A}_P^Q]} \sum_{\nu \in \mathcal{A}_P^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee} \sum_{H \in \mathcal{D}_k} \phi_P^Q(H + Z' - X_P) e^{\langle \Lambda + \nu, H \rangle} \\ &= \frac{e^{\langle \Lambda, Z' \rangle}}{[\mathcal{D}_k : \mathcal{A}_P^Q]} \sum_{\nu \in \mathcal{A}_P^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee} \sum_{H \in \mathcal{D}_k} \phi_P^Q(H) e^{\langle \Lambda + \nu, H + (X_P - Z')^Q \rangle}\end{aligned}$$

et donc

$$\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) = \frac{e^{\langle \Lambda, Z' \rangle}}{[\mathcal{D}_k : \mathcal{A}_P^Q]} \sum_{\nu \in \mathcal{A}_P^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee} e^{\langle \Lambda + \nu, (X_P - Z')^Q \rangle} \varepsilon_{P,k}^Q(\Lambda + \nu).$$

Le lemme en résulte. ∎

Lemme 1.6.4. *Le lemme 1.6.3 reste vrai pour tout $X_P \in \mathfrak{a}_P$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{Z}$ le réseau de $\mathbb{R}$ engendré par les $\langle \varpi, H \rangle$ pour $\varpi \in \hat{\Delta}_P^Q$ et $H \in \mathcal{A}_P$. Pour $\varpi \in \hat{\Delta}_P^Q$, $X_P \in \mathfrak{a}_P$ et $H \in \mathcal{A}_P$, posons $x_\varpi = \langle \varpi, X_P \rangle \in \mathbb{R}$ et $h_\varpi = \langle \varpi, H \rangle \in \mathcal{Z}$. Notons $\hat{\Delta}_1$ l'ensemble des $\varpi \in \hat{\Delta}_P^Q$ avec $x_\alpha \in \mathcal{Z}$. Il existe un $Y_P \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{Q}}$ tel que les coordonnées $y_\varpi = \langle \varpi, Y_P \rangle$ vérifient :

- $y_\varpi = x_\varpi$ pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_1$;
- $(y_\varpi - h_\varpi)(x_\varpi - h_\varpi) > 0$ pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_P^Q \smallsetminus \hat{\Delta}_1$ et tout $H \in \mathcal{A}_P$.

Pour un tel Y_P on a

$$\phi_P^Q(H - Y_P) = \phi_P^Q(H - X_P)$$

et donc

$$\varepsilon_P^{Q,Y_P}(Z;\Lambda) = \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda).$$ ∎

Pour P, $Q \in \mathcal{P}(M)$, $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $X_P \in \mathfrak{a}_P$, on pose

$$\varepsilon_{P,Q}^{G,X_P}(Z;\Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{A}_P^G(Z)} \phi_{P,Q}^G(H - X_P) e^{\langle H, \Lambda \rangle},$$

la série étant absolument convergente si $\langle \Re\Lambda, \check{\alpha} \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_Q$. Elle ne dépend que de la projection de Λ dans $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_P^\vee$.

Lemme 1.6.5. *Pour $X_P \in \mathfrak{a}_P$, la fonction $\Lambda \mapsto \varepsilon_{P,Q}^{G,X_P}(Z;\Lambda)$ ne dépend que de l'image de Λ dans $\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_P^\vee$. Elle se prolonge méromorphiquement à tout $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$, et on a l'égalité*

$$\varepsilon_{P,Q}^{G,X_P}(Z;\Lambda) = (-1)^{a(P,Q)} \varepsilon_P^{G,X_P}(Z;\Lambda).$$

Démonstration. Compte tenu du lemme 1.6.4, c'est l'assertion (2) de [34, section 1.5]. ■

Soit $\mathfrak{X} = (X_P)_{P\in\mathcal{F}(M)}$ une famille M-orthogonale. On pose[5]

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z)} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X})e^{\langle\Lambda,H\rangle}.$$

Lemme 1.6.6. *La série*

$$\sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z)} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X})e^{\langle\Lambda,H\rangle}$$

est une somme finie. La fonction $\Lambda \mapsto \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ est une fonction entière de $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$, qui ne dépend que de l'image de Λ dans $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_M^\vee$. Pour Λ en dehors des murs, on a l'identité suivante :

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda).$$

Démonstration. La compacité de la projection sur $\mathfrak{a}_M^Q$ du support de la fonction

$$H \mapsto \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X})$$

([25, corollaire 1.8.5]) implique que la série définissant $\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}$ est une somme finie. Elle définit donc une fonction entière. Pour la seconde assertion on invoque l'expression de Γ_M dans le lemme 1.6.1[6], au moyen des $\phi_{P,Q}$ et du lemme 1.6.5. ■

Pour $P \in \mathcal{P}^Q(M)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$, notons $d(\lambda)$ le cardinal de l'ensemble des $\alpha \in \Delta_P^Q$, tels que $\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle \in 2ik\pi\mathbb{Z}$.

---

[5]L'indice F et la lettre Z indiquent que l'on somme sur le translaté $\mathcal{A}_M^Q(Z) = Z' + \mathcal{A}_M^Q$ du réseau $\mathcal{A}_M^Q$ de $\mathfrak{a}_M^Q$; à ne pas confondre avec l'intégrale $\int_{\mathfrak{a}_M^G} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X})e^{\langle\Lambda,H\rangle}\,\mathrm{d}H$ (cf. [25, lemme 1.9.3]) qui apparaîtra dans la preuve de la proposition 1.7.4. Idem pour l'expression $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$, voir plus loin.

[6]On observera que l'identité du lemme 1.6.1, qui résulte de [25, proposition 1.8.7], remplace (avantageusement) la décomposition [25, lemme 1.9.3 (3)], dont ni la formulation, ni la preuve, ne s'étendent au cas des corps de fonctions – en effet, les murs peuvent contenir des points du réseau qui donnent alors une contribution non nulle.

Lemme 1.6.7. *On suppose que la famille M-orthogonale $\mathfrak{X}$ est rationnelle. Choisissons un entier k tel que, pour tout $P \in \mathcal{P}^Q(M)$, le réseau $\mathcal{D}_k$ dans $\mathfrak{a}_M^Q$ contienne $\mathcal{A}_M^Q$ et $(X_P - Z')^Q$. La valeur en Λ de la fonction $\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ peut s'écrire*

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} \sum_{\nu} p_{P,\Lambda+\nu}(X_P^Q) e^{\langle \Lambda+\nu, X_P^Q\rangle},$$

où les ν varient dans $\mathcal{A}_M^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee$ et les $p_{P,\lambda}$ sont des polynômes en X_P^Q, de degré $d(\lambda)$.

Démonstration. Pour Λ en dehors des murs, on a

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda).$$

On a vu dans la preuve du lemme 1.6.3 que

$$\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) = \frac{e^{\langle\Lambda,Z'\rangle}}{[\mathcal{D}_k : \mathcal{A}_M^Q]} \sum_{\nu\in\mathcal{A}_M^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee} e^{\langle\Lambda+\nu,(X_P-Z')^Q\rangle}\varepsilon_{P,k}^Q(\Lambda+\nu).$$

Fixons $\lambda = \Lambda + \nu$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et ξ en position générale, on dispose du développement de Laurent au voisinage de $t = 0$ des fonctions $\varepsilon_{P,k}^Q(t\xi + \lambda)$. On rappelle que

$$\varepsilon_{P,k}^Q(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta_P^Q} (1 - e^{-k^{-1}\langle\lambda,\check\alpha\rangle})^{-1}$$

et donc

$$e^{\langle t\xi+\lambda,(X_P-Z')^Q\rangle}\varepsilon_{P,k}^Q(t\xi+\lambda) = t^{-d(\lambda)} e^{\langle t\xi, X_P^Q\rangle} f_P(t,\xi,\lambda) e^{\langle\lambda, X_P^Q\rangle},$$

où $d(\lambda)$ est le nombre de racines $\alpha \in \Delta_P^Q$ telles que $e^{k^{-1}\langle\lambda,\check\alpha\rangle} = 1$, c'est-à-dire $\langle\lambda,\check\alpha\rangle \in 2ik\pi\mathbb{Z}$ et où, pour λ et ξ fixés, $f_P(t,\xi,\lambda)$ est une fonction de t, lisse au voisinage de $t = 0$, indépendante de X_P, et vérifiant $f_P(0,\xi,\lambda) \neq 0$. La dérivée par rapport à t, d'ordre $d(\lambda)$ de

$$e^{\langle t\xi, X_P^Q\rangle} f_P(t,\xi,\lambda),$$

est un polynôme en X_P^Q de degré $d(\lambda)$. Le terme de degré zéro dans le développement de Laurent au voisinage de $t = 0$ de la fonction

$$\frac{e^{\langle t\xi+\lambda,Z'\rangle}}{[\mathcal{D}_k : \mathcal{A}_M^Q]} e^{\langle t\xi+\lambda,(X_P-Z')^Q\rangle}\varepsilon_{P,k}^Q(t\xi+\lambda)$$

est donc de la forme $p_{P,\lambda}(X_P^Q)e^{\langle\lambda,X_P^Q\rangle}$. Comme d'après le lemme 1.6.6 la fonction

$$t \mapsto \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda + t\xi)$$

est lisse, les parties polaires se compensent[7]. ■

Soit $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot, P))$ une (G, M)-famille. Pour $Q \in \mathcal{F}(M)$, $Z \in \mathcal{A}_Q$, et une famille M-orthogonale $\mathfrak{X} = (X_P)$, on note $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; \cdot)$ la fonction définie pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$ en dehors des murs par[8]

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)\boldsymbol{c}(\Lambda, P).$$

Proposition 1.6.8. *Soient $Q \subset R$ deux sous-groupes paraboliques dans $\mathcal{F}(M)$. Considérons une (R, M)-famille périodique $\boldsymbol{c}$ associée à une fonction m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_{R,M}$, et une famille M-othogonale $\mathfrak{X}$. Alors*

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U})\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z + U_Q;\Lambda),$$

et la fonction

$$\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$$

est une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_M$.

Démonstration. On exprime la (R, M)-famille $\boldsymbol{c}$ au moyen de la fonction m : pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\Lambda \in \boldsymbol{\mu}_M$, on a

$$\boldsymbol{c}(\Lambda, P) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{R,M}} e^{\langle \Lambda, U_P \rangle} m(\mathfrak{U}),$$

et donc

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U}) e^{\langle \Lambda, U_P \rangle} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda).$$

Fixons un $P' \in \mathcal{P}(M)$. Pour Λ dans le cône positif associé à P' on a

$$\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda) = (-1)^{a(P,P')} \sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q(Z)} \phi_{P,P'}^Q(H - X_P) e^{\langle \Lambda, H \rangle}.$$

Donc $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ est égal à

$$\sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U}) \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} (-1)^{a(P,P')} \sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q(Z)} \phi_{P,P'}^Q(H - X_P) e^{\langle \Lambda, H + U_P \rangle},$$

[7] On remarquera que, contrairement au cas des corps de nombres, les polynômes obtenus ne sont en général pas homogènes.

[8] Notons que cette fonction ne dépend que de la (Q, M)-famille $(\boldsymbol{c}(\cdot, P))_{P \in \mathcal{F}^Q(M)}$ et de la famille (Q, M)-orthogonale $(X_P)_{P \in \mathcal{F}^Q(M)}$, déduites de $\boldsymbol{c}$ et de $\mathfrak{X}$ par restriction.

qui est encore égal à

$$\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U}) \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} (-1)^{a(P,P')} \sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} \phi_{P,P'}^Q(H-(X_P+U_P))e^{\langle\Lambda,H\rangle}.$$

Donc, vu le lemme 1.6.1,

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{R,M}} m(\mathfrak{U}) \sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}+\mathfrak{U})e^{\langle\Lambda,H\rangle}$$

et on obtient la formule de l'énoncé grâce au lemme 1.6.6. On observe maintenant que pour $\Lambda\in\boldsymbol{\mu}_M$, la fonction sur $\mathcal{H}_{R,M}$

$$\mathfrak{U}\mapsto \gamma_{M,F}^{\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z+U_Q;\Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} \Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}+\mathfrak{U})e^{\langle\Lambda,H\rangle}$$

est majorée par

$$\mathfrak{U}\mapsto \sum_{H\in\mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} |\Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}+\mathfrak{U})|.$$

La fonction

$$H\mapsto|\Gamma_M^Q(H,\mathfrak{X}+\mathfrak{U})| \qquad \text{pour} \qquad H\in\mathcal{A}_M$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs entières, bornées indépendamment de $\mathfrak{U}$. Elle est à support compact inclus dans une boule de rayon majoré par un polynôme en $\mathfrak{U}$. Sa somme sur H est donc bornée par un polynôme en $\mathfrak{U}$. Par ailleurs, m est à décroissance rapide, ce qui prouve la convergence absolue, uniforme en Λ, de la série en $\mathfrak{U}$. L'expression $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ est donc une fonction continue en Λ. Plus généralement, les dérivées en Λ correspondent à des séries analogues, où l'opérateur différentiel sur $\boldsymbol{c}$ se traduit en transformée de Fourier par la multiplication par un polynôme en $\mathfrak{U}$. On a encore la convergence uniforme des séries, vu la décroissance rapide de m, d'où la lissité de la fonction $\Lambda\mapsto\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$. ∎

Lemme 1.6.9. *On reprend les hypothèses du lemme* 1.6.7. *La valeur en Λ de la fonction $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ peut s'écrire*

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}^Q(M)} \sum_{\nu} q_{P,\Lambda+\nu}(X_P^Q)e^{\langle\Lambda+\nu,X_P^Q\rangle},$$

où les ν varient dans $\mathcal{A}_M^{Q,\vee}/\mathcal{D}_k^\vee$, et les $q_{P,\Lambda+\nu}$ sont des polynômes en X_P^Q de degré inférieur ou égal à $d(\Lambda+\nu)$.

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 1.6.7 : les fonctions $f_P(t,\xi,\lambda)$ doivent être remplacées par les

$$g_P(t,\xi,\Lambda+\nu) = f_P(t,\xi,\Lambda+\nu)c(\Lambda+t\xi,P).$$

Il convient ensuite d'observer que là aussi les singularités des $\varepsilon_P^{Q,X_P}(Z;\Lambda)$ se compensent puisque la fonction

$$t \mapsto \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z;\Lambda + t\xi)$$

est lisse d'après la proposition 1.6.8. Mais les degrés des polynômes peuvent s'abaisser là où les $\boldsymbol{c}(\Lambda, P)$ ont des zéros. ■

Pour une (G, M)-famille $\boldsymbol{c}$ (périodique ou non) et une famille M-orthogonale quelconque $\mathfrak{X}$, on pose pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$ en dehors des murs[9],

$$\boldsymbol{c}_M^{Q,\mathfrak{X}}(\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \epsilon_P^{Q,X_P}(\Lambda)\boldsymbol{c}(\Lambda, P).$$

Cela définit une fonction lisse sur $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ (les singularités des fonctions ϵ sur les murs sont compensées par des annulations dues aux propriétés des (G, M)-familles). Si $\mathfrak{X}$ est la famille triviale, on écrit simplement

$$\boldsymbol{c}_M^G(\Lambda) = \boldsymbol{c}_M^{G,\mathfrak{X}=0}(\Lambda).$$

Pour $\mathfrak{U} \in \mathfrak{H}_M$, on note $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U})$ la (G, M)-famille définie par

$$\boldsymbol{c}(\mathfrak{U};\Lambda, P) = e^{\langle \Lambda, U_P\rangle}\boldsymbol{c}(\Lambda, P).$$

Pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$ en dehors des murs, on pose

$$\boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{U};\Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \epsilon_P^Q(\Lambda)\boldsymbol{c}(\mathfrak{U};\Lambda, P).$$

On a[10]

$$\boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{U};\Lambda) = e^{\langle \Lambda, U_Q\rangle}\boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{U}^Q;\Lambda),$$

où $\mathfrak{U}^Q$ est la famille M-orthogonale (U_P^Q) dans M_Q. Plus généralement, pour $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{U}$ deux familles M-orthogonales quelconques, on pose

$$\boldsymbol{c}_M^{Q,\mathfrak{X}}(\mathfrak{U};\Lambda) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \epsilon_P^{Q,X_P}(\Lambda)\boldsymbol{c}(\mathfrak{U};\Lambda, P).$$

Observons que

$$\boldsymbol{c}_M^{Q,\mathfrak{X}}(\mathfrak{U};\Lambda) = \boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{X}^Q + \mathfrak{U};\Lambda).$$

[9]Rappelons que la fonction $\epsilon_P^{Q,X_P}(\Lambda)$ dépend du choix d'une mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_P^Q = \mathfrak{a}_M^Q$. On prend, bien sûr, la même mesure pour tous les $P \in \mathcal{P}^Q(M)$.

[10]Notons que dans [34], c'est la (G, M)-famille $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U}^G)$ qui est notée « $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U})$ ».

Si $\boldsymbol{c}$ est une (G, M)-famille périodique et $\mathfrak{U}$ une famille M-orthogonale rationnelle, la (G, M)-famille $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U})$ est périodique si et seulement si la famille $\mathfrak{U}$ est entière. Auquel cas, si $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_m$ pour une fonction m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$, alors $\boldsymbol{c}(\mathfrak{U}) = \boldsymbol{c}_{m'}$, où

$$m'(\mathfrak{V}) = m(\mathfrak{V} - \mathfrak{U}).$$

Pour $\mathfrak{U}$ entière[11] et $\mathfrak{X}$ quelconque on pose

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z; \Lambda)\boldsymbol{c}(\mathfrak{U}; \Lambda, P).$$

On a

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda) = \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z + U_Q; \Lambda).$$

On pose aussi

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda) \overset{\text{déf}}{=} \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z + U_Q; \Lambda) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \varepsilon_P^{Q,X_P}(Z; \Lambda) e^{\langle \Lambda, U_P \rangle}.$$

Si $\mathfrak{X} = \mathfrak{T}$ pour un $T \in \mathfrak{a}_0$, on remplacera l'exposant $\mathfrak{T}$ par un simple T dans les expressions ci-dessus. Avec cette convention on a le

Corollaire 1.6.10. *Soit $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_m$ une (G, M)-famille périodique donnée par une fonction m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$. Pour $T \in \mathfrak{a}_0$ on a*

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,T}(Z; \Lambda) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} m(\mathfrak{U}) \gamma_{M,F}^{Q,T}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda).$$

Démonstration. C'est un corollaire de la proposition 1.6.8. ■

Soit $\mathfrak{H}_{Q,M}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des familles M-orthogonales dans M_Q, c'est-à-dire qu'on remplace les conditions sur $P \in \mathcal{P}(M)$ par des conditions sur $P \in \mathcal{P}^Q(M)$. Soit $\mathcal{H}_{Q,M} \subset \mathfrak{H}_{Q,M}$ le réseau formé des familles qui sont entières. L'application naturelle (qui n'est *a priori* pas surjective)

$$\mathfrak{H}_M = \mathfrak{H}_{G,M} \to \mathfrak{H}_{Q,M}$$

envoie $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_{G,M}$ dans $\mathcal{H}_{Q,M}$. Elle donne, par dualité, une application

$$\widehat{\mathfrak{H}}_{Q,M} \to \widehat{\mathfrak{H}}_M,$$

qui se factorise en une application

$$\widehat{\mathcal{H}}_{Q,M} \to \widehat{\mathcal{H}}_M.$$

[11] On observera que la famille $\mathfrak{U}^Q$ est *a priori* seulement rationnelle.

Toute fonction lisse h sur $\widehat{\mathfrak{H}}_M = i\mathfrak{H}_M^*$ définit donc par composition une fonction lisse h_Q sur $\widehat{\mathfrak{H}}_{Q,M} = i\mathfrak{H}_{Q,M}^*$, et si h est périodique, alors h_Q l'est aussi. Dans ce cas, $h = \widehat{m}$ pour une (unique) fonction à décroissance rapide m sur le réseau $\mathcal{H}_M$, et on note m_Q la fonction à décroissance rapide sur le réseau $\mathcal{H}_{Q,M}$ définie par $\widehat{m_Q} = h_Q$. Cette fonction vaut 0 en dehors de l'image de l'application $\mathcal{H}_{G,M} \to \mathcal{H}_{Q,M}$, et pour $\mathfrak{U}$ dans cette image on a

$$m_Q(\mathfrak{U}) = \sum_{\mathfrak{V} \in \mathcal{H}_{Q,M}^G(\mathfrak{U})} m(\mathfrak{V}),$$

où $\mathcal{H}_{Q,M}^G(\mathfrak{U}) \subset \mathcal{H}_{G,M}$ est la fibre au-dessus de $\mathfrak{U}$.

Corollaire 1.6.11. *Soit $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_m$ une (G, M)-famille périodique donnée par une fonction m à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_{G,M}$. Pour $T \in \mathfrak{a}_0$ on a*

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,T}(Z; \Lambda) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q,M}} m_Q(\mathfrak{U}) \gamma_{M,F}^{Q,T}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda)$$

où

$$\gamma_{M,F}^{Q,T}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda) = \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{U}(T)}(Z + U_Q; \Lambda).$$

Démonstration. C'est encore un corollaire de la proposition 1.6.8. ■

Par inversion de Fourier, ceci se reformule comme suit :

Lemme 1.6.12. *Soit $\mathfrak{X}$ une famille (Q, M)-orthogonale, et soit $\boldsymbol{c}$ une (Q, M)-famille périodique donnée par une fonction à décroissance rapide m sur $\mathcal{H}_{Q,M}$. Pour $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $V \in \mathcal{A}_M$ on pose*

$$\widehat{\boldsymbol{c}}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; V) = \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; \Lambda) e^{-\langle \Lambda, V \rangle} \, d\Lambda.$$

On a alors

$$\widehat{\boldsymbol{c}}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; V) = \sum_{\substack{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q,M} \\ Z + U_Q = V_Q}} m(\mathfrak{U}) \Gamma_M^Q(V, \mathfrak{X} + \mathfrak{U}).$$

Démonstration. On sait d'après la proposition 1.6.8 que

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; V) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q,M}} m(\mathfrak{U}) \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z + U_Q; V),$$

donc

$$\widehat{\boldsymbol{c}}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}(Z; V) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q,M}} m(\mathfrak{U}) \widehat{\gamma}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z + U_Q; V),$$

et on observe que

$$\widehat{\gamma}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}}(Z+U_Q;V) = \begin{cases} \Gamma_M^Q(V,\mathfrak{X}+\mathfrak{U}) & \text{si } Z+U_Q = V_Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

1.7 L'ensemble PolExp

Nous avons besoin de deux lemmes élémentaires. Faute de référence nous en donnons une preuve.

Lemme 1.7.1. *On considère, pour $k = 1, \dots, m$, des nombres complexes a_k et des nombres complexes b_k deux à deux distincts, de module* 1. *On suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k b_k^n = 0. \tag{1.1}$$

Alors les a_k sont tous nuls.

Démonstration. On le démontre par récurrence sur m. Si $m = 1$, c'est évident. Supposons-le vrai pour $m-1$. En posant $d_k = b_k/b_m$ et $c_k = a_k(1-d_k)$, la condition (1.1) implique

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{m-1} a_k d_k^n - \sum_{k=1}^{m-1} a_k d_k^{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m-1} c_k d_k^n = 0.$$

Les b_k sont tous différents donc les d_k sont tous différents. L'hypothèse de récurrence impose $c_k = 0$ pour $1 \le k \le m-1$. Comme $1 - d_k \neq 0$, les a_k sont nuls pour $1 \le k \le m-1$; ceci implique $a_m = 0$. ■

Soit $\mathfrak{a}$ un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $\mathcal{R}$ un réseau de $\mathfrak{a}$. On considère pour $T \in \mathcal{R}$ une combinaison linéaire de produits de polynômes et d'exponentielles

$$\phi(T) = \sum_{\nu\in E} p_\nu(T) e^{\langle \nu, T\rangle},$$

où E est un sous-ensemble fini de $\widehat{\mathcal{R}} = \widehat{\mathfrak{a}}/\mathcal{R}^\vee$ et les p_ν sont des polynômes sur $\mathfrak{a}$.

Lemme 1.7.2. *Soit C un cône ouvert non vide de $\mathfrak{a}$, et soit $T_\star \in \mathcal{R}$. On suppose que $\phi(T)$ tend vers 0 lorsque $\|T\|$ tend vers l'infini pour T dans $T_\star + (C \cap \mathcal{R})$. Alors $p_\nu = 0$ pour tout ν.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{a}$. Le cas de la dimension zéro est fourni par le lemme 1.7.1. Le réseau $\mathcal{R}$ peut être décomposé en une somme directe $\mathcal{R} = \mathbb{Z}v \oplus \mathcal{R}_1$ avec $v \in C \cap \mathcal{R}$ primitif (c'est-à-dire que $v = nv_1$ avec $v_1 \in \mathcal{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ implique $n = \pm 1$). Considérons $T = nv + T_1 \in \mathcal{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $T_1 \in \mathcal{R}_1$. On peut écrire $\phi(nv + T_1)$ sous la forme

$$\phi(nv + T_1) = \sum_{\mu \in E(v)} q_\mu(n, T_1) b_\mu^n,$$

où les $b_\mu = e^{\langle \mu, v\rangle}$ sont des nombres complexes de module 1, deux à deux distincts et $E(v)$ est le quotient de E défini par la restriction à $\mathbb{Z}v$. Les fonctions q_μ sont de la forme

$$q_\mu(n, T_1) = \sum_{s=0}^{d_\mu} \sum_{\tau \in E_\mu} r_{s,\tau}(T_1) e^{\langle \tau, T_1\rangle} n^s,$$

où les s sont entiers, les $r_{s,\tau}$ sont des polynômes sur $\mathfrak{a}_1$, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{R}_1$, et E_μ est un sous-ensemble fini de $\widehat{\mathcal{R}}_1 = \widehat{\mathfrak{a}}_1/\mathcal{R}_1^\vee$. Soit d le degré maximal des polynômes q_μ en n, et soit $a_\mu(T_1)$ le coefficient de n^d dans q_μ :

$$a_\mu(T_1) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\tau \in E_\mu} r_{d,\tau}(T_1) e^{\langle \tau, T_1\rangle},$$

où, par convention, $r_{d,\tau}(T_1) = 0$, si $d > d_\mu$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n^{-d} \phi(nv + T_1) - \sum_\mu a_\mu(T_1) b_\mu^n \right) = 0. \tag{1.2}$$

On observe que pour T_1 fixé et n assez grand on a

$$nv + T_1 \in T_\star + (C \cap \mathcal{R}).$$

Par hypothèse

$$\lim_{n \to +\infty} \phi(nv + T_1) = 0. \tag{1.3}$$

On déduit de (1.2) et (1.3) que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_\mu a_\mu(T_1) b_\mu^n = 0.$$

D'après le lemme 1.7.1, les $a_\mu(T_1)$ sont tous nul. Par récurrence descendante sur le degré, on obtient que, pour tout entier s et tout $T_1 \in \mathcal{R}_1$,

$$\sum_{\tau \in E_\mu} r_{s,\tau}(T_1) e^{\langle \tau, T_1\rangle} = 0.$$

Par hypothèse de récurrence sur la dimension de $\mathfrak{a}$, cela implique que les $r_{s,\tau}$ sont nuls. On en déduit que les p_ν le sont également. ∎

Nous introduisons maintenant, comme dans [34, section 1.7], l'ensemble PolExp :

Définition 1.7.3. On note PolExp l'espace vectoriel des fonctions $\phi : \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$ telles que, pour tout réseau $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, il existe une famille indexée par les $\nu \in \widehat{\mathcal{R}}$ de polynômes sur $\mathfrak{a}_0$

$$T \mapsto p_{\mathcal{R},\nu}(\phi, T),$$

avec les propriétés suivantes :

- les $\nu \in \widehat{\mathcal{R}}$ tels que $p_{\mathcal{R},\nu} \neq 0$, sont en nombre fini ;
- pour $T \in \mathcal{R}$, on a l'égalité $\phi(T) = \sum_{\nu \in \widehat{\mathcal{R}}} p_{\mathcal{R},\nu}(\phi, T) e^{\langle \nu, T \rangle}$.

D'après le lemme 1.7.2, les $p_{\mathcal{R},\nu}$ sont uniquement déterminés par une approximation de $\phi_{\mathcal{R}} = \phi|_{\mathcal{R}}$ sur l'intersection de $\mathcal{R}$ et d'un cône ouvert non vide de $\mathfrak{a}_0$. Observons que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux réseaux de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ tels que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$, pour $\nu \in \widehat{\mathcal{R}}$ on a

$$p_{\mathcal{R},\nu}(\phi, T) = \sum_{\nu' \in \mathcal{R}^\vee / \mathcal{R}'^\vee} p_{\mathcal{R}',\nu+\nu'}(\phi, T).$$

La famille $(p_{\mathcal{R},\nu})_{\nu \in \widehat{\mathcal{R}}}$ se déduit donc de la famille $(p_{\mathcal{R}',\nu'})_{\nu' \in \widehat{\mathcal{R}'}}$.

Proposition 1.7.4. *Soient $\boldsymbol{c}$ une (Q, M)-famille périodique à valeurs scalaires, $\mathfrak{X}$ une famille M-orthogonale rationnelle, $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_M$. On note μ l'image de Λ^Q dans $\boldsymbol{\mu}_M^Q = \boldsymbol{\mu}_M / \boldsymbol{\mu}_Q$. Soit $\mathcal{R}$ un réseau de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$ soit $\mathcal{R}_k = k^{-1}\mathcal{R}$. Alors,*

(i) *la fonction $T \mapsto \phi(T) = \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z; \Lambda)$ appartient à* PolExp *;*

(ii) *si $\mu \neq 0$, il existe un entier $k_0 \geq 1$, ne dépendant que de $\mathcal{R}$, tel que $p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi, T) = 0$ pour tout entier $k \geq k_0$;*

(iii) *si $\mu = 0$, i.e. $\Lambda \in \Lambda_Q + \mathcal{A}_M^\vee$, alors*

$$\lim_{k \to +\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi, T) = \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q)^{-1} e^{\langle \Lambda_Q, Z \rangle} \boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{X}(T)^Q; \Lambda_Q)$$

et, en particulier, cette limite est indépendante de $\mathcal{R}$. Plus précisément, il existe un réel $b > 0$ ne dépendant que de $\mathcal{R}$, $\mathfrak{X}$ et T, tel que pour tout entier $k \geq 1$, on ait la majoration

$$|p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi, T) - \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q)^{-1} e^{\langle \Lambda_Q, Z \rangle} \boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{X}(T)^Q; \Lambda_Q)| \leq b\, N_d(\boldsymbol{c}) k^{-1},$$

où d est la dimension de $\mathfrak{a}_M^Q$ et N_d est la norme pour les (G, M)-familles périodiques introduite dans la définition 1.5.2.

Démonstration. L'assertion (i) est une conséquence immédiate du lemme 1.6.9. Relevons Z en un élément Z' de $\mathcal{A}_M$ et choisissons un entier k' tel que, pour tout $P \in \mathcal{P}^Q(M)$, le réseau $\mathcal{D}_{k'}$ de $\mathfrak{a}_M^Q$ contienne $\mathcal{A}_M^Q$ et $(X_P - Z')^Q$. Pour $P \in \mathcal{P}^Q(M)$, notons $[\mathcal{R}]_P^Q$ le réseau de $\mathfrak{a}_M^Q$ image de $\mathcal{R}$ par l'application $T \mapsto [T]_P^Q = ([T]_P)^Q$. On suppose k assez grand de sorte que pour tout $P \in \mathcal{P}^Q(M)$ on ait

$$[\mathcal{R}_k]_P^{Q,\vee} \subset \mathcal{D}_{k'}^\vee \subset \mathcal{A}_M^{Q,\vee}.$$

Avec les notations du lemme 1.6.9 on sait que

$$p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi; T) = \sum_{P \in \mathcal{P}^Q(M)} \sum_{\nu \in E_P} q_{P,\Lambda+\nu}([T]_P^Q),$$

où

$$E_P = \{\nu \in \mathcal{A}_M^{Q,\vee}/[\mathcal{R}_k]_P^{Q,\vee} \mid \Lambda^Q + \nu = 0\}.$$

On voit que E_P possède un unique élément si $\Lambda^Q \in \mathcal{A}_M^{Q,\vee}$ c'est-à-dire si $\mu = 0$ et est vide sinon; (ii) en résulte. Lorsque $\mu = 0$ on va esquisser une démonstration de (iii), différente de celle de [34, section 1.7, lemme (ii)]. Pour alléger les notations on commence par traiter le cas $\Lambda_Q = 0$. D'après la proposition 1.6.8 on a

$$\phi(T) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} m(\mathfrak{U}) \gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda)$$

avec m à décroissance rapide sur le réseau $\mathcal{H}_M$ et

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z, \mathfrak{U}; \Lambda) = \gamma_{M,F}^{Q,(\mathfrak{X}+\mathfrak{U})(T)}(Z + U_Q; \Lambda).$$

Fixons $\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M$ et posons $\mathfrak{V} = \mathfrak{X} + \mathfrak{U}$. On rappelle que

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{V}(T)}(Z + U_Q; \Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q(Z+U_Q)} \Gamma_M^Q(H, \mathfrak{V}(T)) e^{\langle \Lambda, H \rangle}.$$

Relevons U_Q en un élément U_Q' de $\mathcal{A}_M$, et posons $Z'' = Z' + U_Q'$. On obtient

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{V}(T)}(Z + U_Q; \Lambda) = e^{\langle \Lambda, Z'' \rangle} \sum_{H \in \mathcal{A}_M^Q} \Gamma_M^Q(Z'' + H, \mathfrak{V}(T)) e^{\langle \Lambda, H \rangle}.$$

Notons $\mathcal{R}_M^Q$ l'image de $\mathcal{R}$ par l'application $H \mapsto H_M^Q$. On suppose $\mathcal{R}$ assez fin de sorte que $\mathcal{R}_M^Q$ contienne $\mathcal{A}_M^Q$ ainsi que l'image $(Z'')^Q$ de Z'' dans $\mathfrak{a}_M^Q$. Par inversion de Fourier sur le groupe fini $\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathcal{R}_M^Q$, on a

$$\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{V}(T)}(Z + U_Q; \Lambda) = \frac{e^{\langle \Lambda, Z'' \rangle}}{[\mathcal{R}_M^Q : \mathcal{A}_M^Q]} \sum_{\nu \in \mathcal{A}_M^{Q,\vee}/\mathcal{R}_M^{Q,\vee}} \sum_{H \in \mathcal{R}_M^Q} \Gamma_M^Q(Z'' + H, \mathfrak{V}(T)) e^{\langle \Lambda+\nu, H \rangle}.$$

Le polynôme en T attaché à $\Lambda = \nu = 0$, que nous noterons $p_{\mathcal{R},0}(\mathfrak{V}, T)$, vaut

$$p_{\mathcal{R},0}(\mathfrak{V}, T) = \frac{1}{[\mathcal{R}_M^Q : \mathcal{A}_M^Q]} \sum_{H \in \mathcal{R}_M^Q} \Gamma_M^Q(Z'' + H, \mathfrak{V}(T)).$$

La restriction à $\mathfrak{a}_M^Q$ de la fonction

$$H \mapsto \Gamma_M^Q(Z'' + H, \mathfrak{V}(T))$$

est, d'après [25, lemmes 1.8.4 (2) et 1.8.3], combinaison linéaire à coefficients dans $\{-1, +1\}$ d'une famille finie de fonctions caractéristiques de polytopes du type $C(P, Q, R, X)$ qui sont convexes, et bornés (mais en général non fermés) ; en particulier elle est à support compact de rayon borné par un polynôme en $\mathfrak{V}(T)$. Lorsque l'on remplace $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}_k = k^{-1}\mathcal{R}$ et que l'on fait tendre k vers l'infini, $p_{\mathcal{R}_k,0}(\mathfrak{V}, T)$ a pour limite une intégrale au sens de Riemann :

$$\lim_{k\to\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(\mathfrak{V}, T) = \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q\backslash\mathfrak{a}_M^Q)^{-1} \int_{H\in\mathfrak{a}_M^Q} \Gamma_M^Q(H, \mathfrak{V}(T))\,\mathrm{d}H,$$

soit encore

$$\lim_{k\to\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(\mathfrak{V}, T) = \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q\backslash\mathfrak{a}_M^Q)^{-1}\gamma_M^Q(\mathfrak{V}(T); 0).$$

Le terme d'erreur est majoré par le volume des hypercubes (les mailles du réseau $k^{-1}\mathcal{R}_M^Q$) rencontrant la frontière des polytopes ; ces hypercubes sont inclus dans un voisinage tubulaire de la frontière des polytopes, de rayon a/k où a est une constante ne dépendant que de la taille des mailles de $\mathcal{R}$. Le voisinage tubulaire a un volume borné par le produit de a/k et de $r(\mathcal{R}, \mathfrak{V}(T))$ qui est la somme des mesures des frontières des polytopes. Donc

$$|p_{\mathcal{R}_k,0}(\mathfrak{V}, T) - \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q\backslash\mathfrak{a}_M^Q)^{-1}\gamma_M^Q(\mathfrak{V}(T); 0)| \leq \frac{a}{k} r(\mathcal{R}, \mathfrak{V}(T)).$$

On passe de $\gamma_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}$ à $\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}}$ en sommant sur $\mathfrak{U}$ cette inégalité contre $m(\mathfrak{U})$, d'où :

$$|p_{\mathcal{R}_k,0}(\phi, T) - \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q\backslash\mathfrak{a}_M^Q)^{-1}\boldsymbol{c}_M^Q(\mathfrak{X}(T)^Q; 0)| \leq \frac{a}{k} \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} r(\mathcal{R}, \mathfrak{U} + \mathfrak{X}(T))|m(\mathfrak{U})|.$$

Comme $r(\mathcal{R}, \mathfrak{V}(T))$ est majoré par un polynôme en $\mathfrak{V}(T)$ on voit (avec les notations de la définition 1.5.2) qu'il existe un entier d et une fonction $b(\mathcal{R}, \mathfrak{X}(T))$ telle que

$$\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} r(\mathcal{R}, \mathfrak{U} + \mathfrak{X}(T))|m(\mathfrak{U})| \leq b(\mathcal{R}, \mathfrak{X}(T))n_d(m).$$

En prenant l'infimum sur les m, on obtient l'assertion souhaitée lorsque $\Lambda_Q = 0$. Maintenant on observe que

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z; \Lambda_Q) = e^{\langle\Lambda_Q, Z\rangle}\boldsymbol{d}_{M,F}^{Q,\mathfrak{X}(T)}(Z; 0),$$

où $\boldsymbol{d}$ est la (Q, M)-famille périodique déduite de $\boldsymbol{c}$ par translation par Λ_Q. Le cas général en résulte. ∎

L'expression

$$\mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q)^{-1} e^{\langle \Lambda_Q, Z \rangle} \boldsymbol{c}_M^{Q,T_1}(\mathfrak{X}^Q; \Lambda)$$

est indépendante du choix de la mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_M^Q$. Dans les applications que nous avons en vue, la normalisation naturelle semble être la suivante : pour chaque $M \in \mathcal{L}$, on munit $\mathfrak{a}_M$ de la mesure de Haar, telle que

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B}_M \backslash \mathfrak{a}_M) = 1$$

et pour $Q \in \mathcal{F}(M)$, on munit $\mathfrak{a}_M^Q$ de la mesure de Haar compatible avec les mesures sur $\mathfrak{a}_M$ et sur $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_{M_Q}$ et avec la décomposition $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_Q \oplus \mathfrak{a}_M^Q$. Alors on a

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q) = 1, \quad \text{et} \quad \mathrm{vol}(\mathcal{A}_M^Q \backslash \mathfrak{a}_M^Q) = |\mathbb{c}_M|^{-1} |\mathbb{c}_Q|.$$

Chapitre 2

Espaces tordus

Tous les résultats de [25, chapitre 2] sont vrais ici, à l'exception de 2.6 et 2.10.

Dans le chapitre précédent, on a décrit la version « corps de fonctions » des résultats de [25, chapitre 1] sur les transformées de Laplace des fonctions caractéristiques de cônes et sur les (G, M)-familles. L'adaptation au cas tordu étant immédiate, nous serons très succincts.

2.1 Hypothèses

Soit $(\widetilde{G}, G)$ un G-espace tordu. On rappelle que $\widetilde{G}$ est une variété algébrique affine, munie d'une action algébrique de G à gauche, qui en fait un G-espace principal homogène, et d'une application

$$\widetilde{G} \to \mathrm{Aut}(G),\ \delta \mapsto \mathrm{Int}_\delta, \qquad \text{telle que} \qquad \mathrm{Int}_{g\delta} = \mathrm{Int}_g \circ \mathrm{Int}_\delta$$

pour tout $g \in G$ et tout $\delta \in \widetilde{G}$. On en déduit une action à droite de G sur $\widetilde{G}$, donnée par

$$\delta g = \mathrm{Int}_\delta(g)\delta.$$

On suppose que $\widetilde{G}$ est défini sur F, c'est-à-dire que les actions à gauche et à droite de G sur $\widetilde{G}$ sont définies sur F, et que $\widetilde{G}(F)$ est non vide. L'ensemble $\widetilde{G}(\mathbb{A})$ des points adéliques de $\widetilde{G}$ est un espace tordu sous $G(\mathbb{A})$, et on a

$$\widetilde{G}(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})\widetilde{G}(F) = \widetilde{G}(F)G(\mathbb{A}).$$

On notera souvent θ l'automorphisme de G défini par Int_δ pour un $\delta \in \widetilde{G}(F)$. On observe que l'automorphisme induit par θ sur $\mathfrak{a}_G$ ne dépend que de $\widetilde{G}$. On pose

$$\mathfrak{a}_{\widetilde{G}} = \mathfrak{a}_G^\theta, \quad \text{et} \quad a_{\widetilde{G}} = \dim \mathfrak{a}_{\widetilde{G}}.$$

On suppose, comme en [25, section 2.5][1], que l'application naturelle

$$\mathfrak{a}_G^\theta \to \mathfrak{a}_G/(1-\theta)\mathfrak{a}_G$$

[1]Dans [34], l'hypothèse est un peu plus forte que celle de [25, section 2.5] : le F-automorphisme θ de Z_G est supposé d'ordre fini, ce qui assure l'existence d'un F-groupe algébrique affine G^+ de composante neutre G, tel que $\widetilde{G}$ soit une composante connexe de G^+.

est un isomorphisme. Dans ce cas on a une décomposition en somme directe

$$\mathfrak{a}_G = \mathfrak{a}_{\widetilde{G}} \oplus \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}, \quad \text{en posant} \quad \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}} = (1-\theta)\mathfrak{a}_G.$$

On observe que

$$\det(\theta - 1|\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}) \neq 0.$$

Notons X le $\mathbb{Z}$-module libre des caractères du tore A_G. Soit X_θ le groupe des co-invariants sous θ dans X, et $\widetilde{X}$ le $\mathbb{Z}$-module libre quotient de X_θ par son sous-groupe de torsion. On notera $A_{\widetilde{G}}$ le tore déployé dont le groupe des caractères est $\widetilde{X}$. C'est aussi le tore déployé dont le groupe des co-caractères est le sous-groupe Y^θ des invariants sous θ du groupe Y des co-caractères de A_G. Le morphisme $X \to \widetilde{X}$ induit un homomorphisme $A_{\widetilde{G}} \to A_G$ qui identifie $A_{\widetilde{G}}$ à la composante neutre du sous-groupe A_G^θ de A_G, formé des points fixes sous θ. En particulier, $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})$ est un sous-groupe d'indice fini de $A_G(\mathbb{A})^\theta = A_G^\theta(\mathbb{A})$. Soit

$$\mathbf{H}_{\widetilde{G}} : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$$

l'application composée de $\mathbf{H}_G : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_G$ et de la projection sur $\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$. On note $\mathcal{A}_{\widetilde{G}}$ l'image de $\mathbf{H}_{\widetilde{G}}$, c'est-à-dire l'image de $\mathcal{A}_G$ par la projection orthogonale par rapport à $\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}$. C'est un réseau de $\mathfrak{a}_{\widetilde{G}}$. Comme dans le cas non tordu, on a un morphisme naturel injectif $\mathcal{A}_{A_{\widetilde{G}}} \to \mathcal{A}_{\widetilde{G}}$. On note $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$ $(= \mathbf{H}_{\widetilde{G}}(A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})))$ son image, qui est un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{A}_{\widetilde{G}}$, et on pose

$$\mathbb{c}_{\widetilde{G}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{A}_{\widetilde{G}}.$$

Notons que d'après ce qui précède, $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$ coïncide avec le sous-groupe $\mathcal{B}_G^\theta$ de $\mathcal{B}_G$, formé des points fixes sous θ : on a

$$\mathcal{B}_{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_G^\theta = \mathcal{B}_G \cap \mathfrak{a}_{\widetilde{G}}.$$

On pose

$$\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{B}_G \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_G^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{A}_G.$$

On observe que $\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}}$ est un réseau de $\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}$, et que $\mathcal{C}_G^{\widetilde{G}}$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini qui s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{B}_G^{\widetilde{G}} \to \mathcal{C}_G^{\widetilde{G}} \to \mathbb{c}_G \to 0.$$

On suppose, ce qui est loisible, que la paire parabolique définie sur F minimale (P_0, A_0) de G a été choisie de telle sorte qu'elle soit stable par Int_{δ_0} pour un élément $\delta_0 \in \widetilde{G}(F)$, déterminé de manière unique modulo $M_0(F)$. On fixe un tel δ_0, et on pose $\theta_0 = \mathrm{Int}_{\delta_0}$, $\widetilde{P}_0 = \delta_0 P_0$ et $\widetilde{M}_0 = \delta_0 M_0$. Alors le F-automorphisme θ_0 de G induit par fonctorialité un automorphisme de $\mathfrak{a}_0$, que l'on note encore θ_0. Puisque le F-automorphisme θ_0 préserve A_0 et P_0, il induit une permutation de l'ensemble fini Δ_0 et donc un automorphisme d'ordre fini de $\mathfrak{a}_0^G$.

On renvoie à [25, sections 2.7, 2.8] pour la définition des sous-ensembles (ou sous-espaces) paraboliques et sous-ensembles de Levi et l'adaptation des autres notions. En particulier, un sous-groupe parabolique standard P dont le normalisateur dans $\widetilde{G}$ est non vide est θ_0 stable et l'ensemble $\widetilde{P} = P\delta_0$ est un sous-espace parabolique standard.

L'extension au cas tordu de la notion de famille orthogonale, de (G, M)-famille et de la combinatoire des fonctions τ, $\widehat{\tau}$, ϕ et Γ, est immédiate (cf. [25, section 2.9]). On dispose de plus ici de la notion de famille $\widetilde{M}$-orthogonale entière et de $(\widetilde{G}, \widetilde{M})$-famille périodique. Toute famille M-orthogonale $\mathfrak{X} = (X_P)$ définit par projection une famille $\widetilde{M}$-orthogonale $(X_{\widetilde{P}})$, et si $\mathfrak{X}$ est entière alors $(X_{\widetilde{P}})$ l'est aussi. En particulier, tout élément $T \in \mathfrak{a}_0$ définit une famille $\widetilde{M}$-orthogonale $([T]_{\widetilde{P}})$. Toutes les relations de [25, section 1.7, 1.8] et de [34, section 1.3] sont valables pour ces nouvelles fonctions. Par exemple, si $\mathfrak{X} = (X_{\widetilde{P}})$ est une famille $\widetilde{M}$-orthogonale, pour $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$, on pose

$$\gamma_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{H \in \mathcal{A}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(Z)} \Gamma_{\widetilde{M}}^{\widetilde{Q}}(H,\mathfrak{X}) e^{\langle \Lambda, H\rangle}.$$

Comme dans le cas non tordu, $\Lambda \mapsto \gamma_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ est une fonction entière de $\Lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$, et on a la décomposition pour Λ en dehors des murs

$$\gamma_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}^{\widetilde{Q}}(\widetilde{M})} \varepsilon_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z;\Lambda).$$

Pour une $(\widetilde{G}, \widetilde{M})$-famille $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot, \widetilde{P}))$, comme en section 1.6 et modulo le choix d'une mesure de Haar sur l'espace $\mathfrak{a}_{\widetilde{M}}^{\widetilde{Q}}$, on définit pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$ en dehors des murs,

$$\boldsymbol{c}_{\widetilde{M}}^{\widetilde{Q}}(\Lambda) = \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}^{\widetilde{Q}}(\widetilde{M})} \epsilon_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\Lambda)\boldsymbol{c}(\Lambda, \widetilde{P}).$$

De même, si $Z \in \mathcal{A}_{\widetilde{Q}}$ et $\mathfrak{X} = (X_{\widetilde{P}})$ est une famille $\widetilde{M}$-orthogonale, on pose

$$\boldsymbol{c}_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{\widetilde{P} \in \mathcal{P}^{\widetilde{Q}}(\widetilde{M})} \varepsilon_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)\boldsymbol{c}(\Lambda, \widetilde{P}).$$

Ces fonctions vérifient les mêmes propriétés que dans le cas non tordu. En particulier, toute $(\widetilde{G}, \widetilde{M})$-famille périodique $\boldsymbol{c}$ s'écrit $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_m$, pour une fonction à décroissance rapide m sur le réseau $\mathcal{H}_{\widetilde{M}}$ des familles $\widetilde{M}$-orthogonales qui sont entières. On a une formule d'inversion de Fourier analogue de celle de la proposition 1.6.8 dans le cas tordu, et la fonction $\Lambda \mapsto \boldsymbol{c}_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z;\Lambda)$ sur $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ est lisse et invariante par $\mathcal{A}_{\widetilde{M}}^{\vee}$. On a aussi une variante de cette formule d'inversion de Fourier, lorsque $\boldsymbol{c}$ se prolonge en une (G,M)-famille périodique :

Lemme 2.1.1. *Soient $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{L}}$, $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(\widetilde{M})$ et $Z \in \mathcal{A}_{\widetilde{Q}}$. Soit $\mathfrak{X}$ une famille $\widetilde{M}$-orthogonale, et soit $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot,\widetilde{P}))$ une $(\widetilde{G},\widetilde{M})$-famille périodique. Supposons que $\boldsymbol{c}$ se prolonge en une (G,M)-famille périodique $(\boldsymbol{c}(\cdot,P))$, et soit m une fonction à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$ telle que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_m$. Alors*

$$\boldsymbol{c}_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z;\Lambda) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} m(\mathfrak{U})\gamma_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z,\mathfrak{U};\Lambda)$$

avec

$$\gamma_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}}(Z,\mathfrak{U};\Lambda) = \gamma_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{U}'+\mathfrak{X}}(Z+U_{\widetilde{Q}};\Lambda),$$

où $\mathfrak{U}'$ est la famille $\widetilde{M}$-orthogonale entière déduite de $\mathfrak{U}$ par projection.

Démonstration. Notons m' la fonction à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_{\widetilde{M}}$ définie par

$$m'(\mathfrak{U}') = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M(\mathfrak{U}')} m(\mathfrak{U}),$$

où $\mathcal{H}_M(\mathfrak{U}') \subset \mathcal{H}_M$ est la fibre au-dessus de $\mathfrak{U}'$. Il suffit de voir que la $(\widetilde{G},\widetilde{M})$-famille $\boldsymbol{c}$ est associée à m' : on a $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_{m'}$. ∎

La preuve de la proposition 1.7.4 s'étend au cas tordu et fournit le lemme suivant.

Lemme 2.1.2. *Soient $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{L}}$, $\widetilde{Q} \in \mathcal{F}(\widetilde{M})$ et $Z \in \mathcal{A}_{\widetilde{Q}}$. Soit $\mathfrak{X}$ une famille $\widetilde{M}$-orthogonale rationnelle, et soit $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}(\cdot,\widetilde{P}))$ une $(\widetilde{G},\widetilde{M})$-famille périodique. Pour $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_0$, la fonction $T \mapsto \boldsymbol{c}_{\widetilde{M},F}^{\widetilde{Q},\mathfrak{X}(T)}(Z;\Lambda)$ appartient à* PolExp. *On a aussi l'analogue tordu des points* (ii) *et* (iii) *de la proposition* 1.7.4.

Nous aurons besoin d'une variante de ce qui précède. Le $\mathbb{Z}$-module de type fini

$$\mathcal{C}_{\widetilde{M}}^{\widetilde{Q}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{Q}}\backslash\mathcal{A}_{\widetilde{M}}$$

s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{B}_{\widetilde{Q}}\backslash\mathcal{B}_{\widetilde{M}} \to \mathcal{C}_{\widetilde{M}}^{\widetilde{Q}} \to \mathfrak{c}_{\widetilde{M}} \to 0.$$

On note $\mathcal{B}_{\widetilde{M}}^{\widetilde{Q}}(Z) \subset \mathcal{C}_{\widetilde{M}}^{\widetilde{Q}}$ la fibre au-dessus de $Z \in \mathfrak{c}_{\widetilde{M}}$. C'est un espace principal homogène sous $\mathcal{B}_{\widetilde{M}}^{\widetilde{Q}} = \mathcal{B}_{\widetilde{Q}}\backslash\mathcal{B}_{\widetilde{M}}$. Pour $\Lambda \in (\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^{G})^* \oplus \mathcal{B}_{\widetilde{Q}}^{\vee}$, $\widetilde{P} \in \mathcal{P}^{\widetilde{Q}}(\widetilde{M})$, $T \in \mathfrak{a}_0$ et $X \in \mathfrak{a}_0$, on pose

$$\eta_{\widetilde{P},F}^{\widetilde{Q},T}(Z;X,\Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{B}_{\widetilde{M}}^{\widetilde{Q}}(Z)} \Gamma_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(H-X,T)e^{\langle\Lambda,H\rangle}.$$

L'expression

$$\eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(Z;X) = \eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(Z;X,0) \tag{2.1}$$

ne dépend que de l'image de T dans $\mathcal{B}^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}\backslash\mathfrak{a}^{\widetilde{Q}}_{\widetilde{P}}$. La proposition suivante est une variante du lemme 1.6.7 et de la proposition 1.7.4.

Proposition 2.1.3. *Pour $X \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, la fonction*

$$T \mapsto \phi(T) = \eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(Z;X)$$

est un élément de PolExp *: pour tout réseau $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, sa restriction à $\mathcal{R}$ s'écrit*

$$\phi_{\mathcal{R}}(T) = \sum_{\nu\in E} p_{\mathcal{R},\nu}(T)e^{\langle\nu,T\rangle},$$

où E est un sous-ensemble fini de $\widehat{\mathcal{R}}$ et les $p_{\mathcal{R},\nu}$ sont des polynômes de degré majoré par $a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{Q}}$. Les polynômes $p_{\mathcal{R}_k,0}$ ont pour limite, lorsque $k \to \infty$, un polynôme qui est indépendant du réseau $\mathcal{R}$.

Démonstration. Puisque

$$\eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(Z;X) = e^{\langle\Lambda,Z'\rangle}\eta^{\widetilde{Q},T}_{\widetilde{P},F}(0;X-Z'),$$

on peut supposer $Z = 0$, et il suffit de traiter le cas $\widetilde{Q} = \widetilde{G}$. Posons

$$\eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{P},F}(X,\Lambda) = \eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{P},F}(0;X,\Lambda).$$

On rappelle que

$$\Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}(H,T) = \sum_{\{\widetilde{R}\mid\widetilde{P}\subset\widetilde{R}\}} (-1)^{a_{\widetilde{R}}-a_{\widetilde{G}}}\tau^{\widetilde{R}}_{\widetilde{P}}(H)\hat{\tau}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{R}}(H-T), \tag{2.2}$$

et que la projection dans $\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}$ du support de la fonction $H \mapsto \Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}(H,T)$ est compacte. Pour $\Lambda \in \mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{0,\mathbb{C}}$, sa transformée anti-Laplace

$$\eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{P},F}(X,\Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{B}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}} \Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}(H-X,T)e^{\langle\Lambda,H\rangle}$$

est donc une fonction holomorphe de Λ. Comme dans le lemme 1.6.3, on considère un réseau $\mathcal{D}_k$ de $\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}$ assez fin pour que $\mathcal{B}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}$ et les images de X et T dans $\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}$ soient contenus dans ce réseau. On a

$$\eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{P},F}(X,\Lambda) = c^{-1}\sum_{\nu\in\mathfrak{N}}\sum_{H\in\mathcal{D}_k} \Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{P}}(H-X,T)e^{\langle\Lambda+\nu,H\rangle},$$

où ν parcourt le dual $\mathfrak{N} = \mathcal{B}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G},\vee}/\mathcal{D}_k^\vee$ de $\mathcal{B}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{D}_k$ et c est l'indice de $\mathcal{B}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}$ dans $\mathcal{D}_k$. La somme en H peut se calculer au moyen de l'expression (2.2) lorsque $\Re(-\Lambda)$ est régulier :

$$\eta_{\widetilde{P},F}^{\widetilde{G},T}(X,\Lambda) = \sum_{\{\widetilde{R}|\widetilde{P}\subset\widetilde{R}\}} \eta_{\widetilde{P},\widetilde{R}}^{T}(X,\Lambda),$$

avec

$$\eta_{\widetilde{P},\widetilde{R}}^{T}(X,\Lambda) = c^{-1}(-1)^{a_{\widetilde{R}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\nu\in\mathfrak{N}} \sum_{H\in\mathcal{D}_k} \tau_{\widetilde{P}}^{\widetilde{R}}(H-X)\hat{\tau}_{\widetilde{R}}(H-T-X)e^{\langle\Lambda+\nu,H\rangle},$$

qui est une fonction méromorphe en Λ ayant un pôle d'ordre $a_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}} = a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}$ en $\Lambda = 0$. On conclut comme dans le lemme 1.6.7 en considérant les développements de Laurent des $\eta_{\widetilde{P},\widetilde{R}}^{T}(X,\Lambda)$. Pour la dernière assertion, on procède comme dans la preuve de la proposition 1.7.4. ■

2.2 Les fonctions σ et $\widetilde{\sigma}$

D'après [25, lemme 2.11.1], pour $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, il existe un plus petit $\widetilde{Q}^+ \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ et un plus grand $\widetilde{Q}^- \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ tels que

$$Q^- \subset Q \subset Q^+.$$

De plus ([25, lemme 2.11.2]), pour $Q, R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $Q^+ \subset R^-$, on a $(\mathfrak{a}_Q^R)^{\theta_0} = \mathfrak{a}_{\widetilde{Q}^+}^{\widetilde{R}^-}$.

Pour Q, $R \in \mathcal{P}$, tels que $Q \subset R$, on note σ_Q^R la fonction caractéristique de l'ensemble des $H \in \mathfrak{a}_0$ tels que

$$\begin{cases} \langle\alpha,H\rangle > 0 & \text{pour } \alpha \in \Delta_Q^R, \\ \langle\alpha,H\rangle \leq 0 & \text{pour } \alpha \in \Delta_Q \smallsetminus \Delta_Q^R, \\ \langle\varpi,H\rangle > 0 & \text{pour tout } \varpi \in \hat{\Delta}_R. \end{cases}$$

Si de plus $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ et $Q^+ \subset R^-$, il existe un $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ tel que $Q \subset P \subset R$, alors on définit la variante tordue $\widetilde{\sigma}_Q^R$ de la fonction σ_Q^R en remplaçant la troisième condition par

$$\langle\widetilde{\varpi},H\rangle > 0 \quad \text{pour tout} \quad \widetilde{\varpi} \in \hat{\Delta}_{\widetilde{P}}.$$

D'après [25, lemme 2.11.3], la fonction $\widetilde{\sigma}_Q^R$ est indépendante du choix du $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$ avec $Q \subset P \subset R$ utilisé pour la définir, ce qui justifie la notation.

2.3 La fonction q

Pour $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, considérons l'application linéaire[2]

$$q = q_Q : \mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_Q^{\tilde{G}}$$

définie par

$$q(X) = ((1 - \theta_0)X^{\tilde{G}})_Q = ((1 - \theta_0)X)_Q^{\tilde{G}}.$$

Elle se factorise à travers la projection orthogonale $\mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_{Q_0}^{\tilde{G}}$, avec

$$Q_0 = Q \cap \theta_0^{-1}(Q) \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}.$$

Tous les résultats de [25, sections 2.12 et 2.13] sont vrais ici, *mutatis mutandis*.

---

[2]Notons que notre définition de q_Q diffère de celle de [25, section 2.13] puisqu'on projette sur $\mathfrak{a}_Q^{\tilde{G}}$ et non pas sur $\mathfrak{a}_Q^G$. Cela ne change pas grand chose à l'affaire puisque, par hypothèse, l'application $1 - \theta$ est un automorphisme de $\mathfrak{a}_G^{\tilde{G}}$.

Chapitre 3

Théorie de la réduction

3.1 Décomposition d'Iwasawa

Pour $v \in |\mathcal{V}|$, on fixe une paire parabolique définie sur F_v minimale $(P_{v,0}, A_{v,0})$ de $G_v = G \times_F F_v$, et on note $M_{v,0}$ le centralisateur de $A_{v,0}$ dans G_v. On suppose que

$$P_{v,0} \subset P_{0,v} = P_0 \times_F F_v, \quad A_{v,0} \supset A_{0,v} = A_0 \times_F F_v.$$

Un sous-groupe compact de $G(F_v)$ est dit « $M_{v,0}$-admissible » s'il est spécial – donc maximal – et correspond à un sommet de l'immeuble de $G(F_v)$ qui appartient à l'appartement associé à $A_{v,0}$. Rappelons qu'un sous-groupe compact maximal $M_{v,0}$-admissible $\boldsymbol{K}_v$ de $G(F_v)$ vérifie les propriétés suivantes (cf. [25, lemme 3.1.1]) :

- $G(F_v) = P_{v,0}(F_v)\boldsymbol{K}_v$ (décomposition d'Iwasawa);
- tout élément de $N_G(M_{v,0})(F_v)/M_{v,0}(F_v)$ a un représentant dans $\boldsymbol{K}_v$;
- pour tout sous-groupe parabolique P de G contenant $M_{v,0}$ et défini sur F_v, notant M la composante de Levi de P contenant $M_{v,0}$ (elle est définie sur F_v), on a la décomposition $\boldsymbol{K}_v \cap P(F_v) = (\boldsymbol{K}_v \cap M(F_v))(\boldsymbol{K}_v \cap U_P(F_v))$ et $\boldsymbol{K}_v \cap M(F_v)$ est un sous-groupe compact $M_{v,0}$-admissible de $M(F_v)$.

Nous dirons que $\boldsymbol{K}$ est un sous-groupe compact maximal « M_0-admissible » de $G(\mathbb{A})$ s'il est de la forme

$$\boldsymbol{K} = \prod_{v \in |\mathcal{V}|} \boldsymbol{K}_v,$$

où les $\boldsymbol{K}_v$ vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout $v \in |\mathcal{V}|$, $\boldsymbol{K}_v$ est un sous-groupe compact $M_{v,0}$-admissible de $G(F_v)$;
- pour tout F-plongement $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$, on a $\boldsymbol{K}_v = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_v) \cap G(F_v)$ pour presque tout $v \in |\mathcal{V}|$.

Fixons un sous-groupe compact maximal M_0-admissible $\boldsymbol{K} = \prod_{v \in |\mathcal{V}|} \boldsymbol{K}_v$ de $G(\mathbb{A})$. Alors on a la décomposition d'Iwasawa

$$G(\mathbb{A}) = P_0(\mathbb{A})\boldsymbol{K},$$

et tout élément de $N_{G(\mathbb{A})}(M_0)/M_0(\mathbb{A})$ a un représentant dans $\boldsymbol{K}$. Plus généralement, pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})\boldsymbol{K}$.

Pour $P \in \mathcal{P}$, grâce à la décomposition d'Iwasawa, on étend les morphismes $\mathbf{H}_P$ en des fonctions sur $G(\mathbb{A})$ tout entier que, par abus de notation, on note encore $\mathbf{H}_P$:

pour $g \in G(\mathbb{A})$, on écrit $g = pk$ avec $p \in P(\mathbb{A})$ et $k \in \boldsymbol{K}$, et on pose

$$\mathbf{H}_P(g) = \mathbf{H}_P(p).$$

Pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, on note $\widetilde{\mathbf{H}}_P : \widetilde{G}(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$ la fonction définie par

$$\widetilde{\mathbf{H}}_P(\delta_0 g) = \mathbf{H}_P(g).$$

Suivant la convention habituelle, on pose $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{P_0}$ et $\widetilde{\mathbf{H}}_0 = \widetilde{\mathbf{H}}_{P_0}$.

La construction de hauteurs dans [25, section 3.2], qui reprend essentiellement celle de [32, sous-section I.2.2], est valable pour un corps global de caractéristique quelconque. Pour la notion de *hauteur* sur un F-espace vectoriel de dimension finie, on renvoie à *loc. cit*. On suppose donné un F-plongement

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

pour un F-espace vectoriel de dimension finie V. On choisit une *hauteur* $\|\cdot\|$ sur le F-espace vectoriel $\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V)$, et pour $x \in G(\mathbb{A})$, on pose

$$|x| = \|(\rho(x), {}^{\mathrm{t}}\rho(x^{-1}))\|.$$

3.2 Point central

D'après [25, lemme 3.3.3], il existe un point $T_0 \in \mathfrak{a}_0^G$ tel que pour tout élément $s \in \mathbf{W}$, et pour tout représentant w_s de s dans $G(F)$, on ait

$$\mathbf{H}_0(w_s) = T_0 - sT_0, \quad \mathbf{H}_0(w_s^{-1}) = T_0 - s^{-1}T_0.$$

Cet point est donné par

$$T_0 = \sum_{\alpha \in \Delta_0} t_\alpha(1)\check{\varpi}_\alpha,$$

où $\check{\varpi}_\alpha \in \mathfrak{a}_0^G$ est l'élément correspondant à $\alpha \in \Delta_0$ dans la base duale et $t_\alpha(1) \in \mathbb{R}$ est défini par

$$\mathbf{H}_0(w_\alpha) = t_\alpha(1)\check{\alpha},$$

où w_α est un représentant dans $G(F)$ de la symétrie s_α. Puisque les $\check{\varpi}_\alpha$ sont dans $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $T_0 \in k^{-1}\mathcal{A}_0$. Pour $x \in G(\mathbb{A})$, $T \in \mathfrak{a}_0$ et $s \in \mathbf{W}$, on pose[1]

$$Y_{x,T,s} = s^{-1}(T - \mathbf{H}_0(w_s x)).$$

[1]Dans [25, sections 3.3 et 5.3], les éléments $Y_{x,T,s}$, $Y_{T,s}$, Y_s sont notés respectivement $Y_s(x,T)$, $Y_s(T)$, Y_s.

Si $x = 1$, on écrit simplement

$$Y_{T,s} \stackrel{\text{déf}}{=} Y_{1,T,s} = s^{-1}T + (T_0 - s^{-1}T_0),$$

et si $T = 0$, on pose $Y_s = Y_{0,s}$. Pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, et $s \in \mathbf{W}$ tel que $s(P) = P_0$, on pose $Y_{T,P} = Y_{T,s}$. Ceci définit comme en [25, section 3.3] une famille orthogonale

$$\mathfrak{Y}(T) \stackrel{\text{déf}}{=} (Y_{T,P})_{P\in\mathcal{P}}, \quad \text{avec} \quad Y_{T,P} = [T]_P + (T_0 - [T_0]_P).$$

On note $\mathfrak{Y} = (Y_P)$ la famille M_0-orthogonale définie par

$$Y_P \stackrel{\text{déf}}{=} Y_{0,P} = T_0 - [T_0]_P = T_0 - s^{-1}T_0 = Y_s.$$

Puisque $Y_{s(P_0)} = \mathbf{H}_0(w_s^{-1}) \in \mathcal{A}_0$, la famille $\mathfrak{Y}$ est entière et on a $\mathfrak{Y}(T) = \mathfrak{Y} + \mathfrak{T}$.

Plus généralement, pour $x \in G(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_0$, on définit comme en [25, lemme 3.3.2 (iii)] une famille M_0-orthogonale $(Y_{x,T,P})$: pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, et $s \in \mathbf{W}$ tel que $s(P) = P_0$, on pose $Y_{x,T,P} = Y_{x,T,s}$. On a donc $Y_{T,P} = Y_{1,T,P}$. La famille $(Y_{x,T,P})$ est rationnelle si $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. De plus (*loc. cit.*), il existe une constante c telle que si $\boldsymbol{d}_0(T) > c$, alors cette famille est régulière.

3.3 Éléments primitifs

En caractéristique positive, la décomposition de Jordan n'est en général pas définie sur le corps de base; il convient donc ici de remplacer la notion d'élément quasi semi-simple régulier elliptique par celle d'élément primitif [25, section 3.7, page 76] : un élément de $\widetilde{G}(F)$ est dit *primitif* (dans $\widetilde{G}$) s'il n'appartient à aucun sous-espace parabolique propre de $\widetilde{G}$ défini sur F, autrement dit, si son orbite sous $G(F)$ ne rencontre aucun $\widetilde{P}(F)$ pour $\widetilde{P} \neq \widetilde{G}$. On note $\widetilde{G}(F)_{\text{prim}}$ l'ensemble des éléments primitis de $\widetilde{G}(F)$. Pour $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{L}}$, on dispose plus généralement de la notion d'élément primitif de $\widetilde{M}(F)$ et de l'ensemble $\widetilde{M}(F)_{\text{prim}}$.

On appelle *paire primitive* (dans $\widetilde{G}$) une paire $(\widetilde{M}, \delta)$ où $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ et δ est un élément primitif de $\widetilde{M}(F)$. Deux paires primitives $(\widetilde{M}, \delta)$ et $(\widetilde{M}', \delta')$ sont dites équivalentes si elles sont conjuguées i.e. s'il existe un élément $x \in G(F)$ tel que $\widetilde{M}' = \mathrm{Int}_x(\widetilde{M})$ et $\delta' = \mathrm{Int}_x(\delta)$. On note $[\widetilde{M}, \delta]$ la classe d'équivalence de $(\widetilde{M}, \delta)$ et $\mathfrak{D}$ l'ensemble de ces classes.

Pour un élément $\gamma \in \widetilde{G}(F)$, on note $\mathcal{O}(\gamma)$ sa classe de $G(F)$-conjugaison. Considérons un espace parabolique $\widetilde{P} = \widetilde{M}U \in \widetilde{\mathcal{P}}$ tel que $\mathcal{O}(\gamma) \cap \widetilde{P}(F) \neq \emptyset$ avec $\widetilde{P}$ minimal pour cette propriété. On choisit $g \in G(F)$ tel que $g^{-1}\gamma g \in \widetilde{P}(F)$. On peut écrire $g^{-1}\gamma g = \delta u$ avec $\delta \in \widetilde{M}(F)$ et $u \in U(F)$. La condition de minimalité assure que δ est primitif dans $\widetilde{M}(F)$.

Lemme 3.3.1. *La correspondance $\gamma \mapsto (\widetilde{M}, \delta)$ induit une application surjective*

$$\zeta : \widetilde{G}(F) \to \mathfrak{D}.$$

Démonstration. Il convient de montrer que deux paires primitives associées à un même γ sont équivalentes. Soient donc $\widetilde{P} = \widetilde{M}U$ et $\widetilde{P}' = \widetilde{M}'U'$ deux éléments de $\widetilde{\mathcal{P}}$ tels que

$$\gamma = \delta u = \delta' u'$$

pour $\delta \in \widetilde{M}(F)$, $u \in U(F)$, $\delta' \in \widetilde{M}'(F)$ et $u' \in U'(F)$; de plus $\widetilde{P}$ et $\widetilde{P}'$ sont minimaux pour ces conditions. L'ensemble

$$\widetilde{H} = \widetilde{P} \cap \widetilde{P}' = (P \cap P')\gamma = \gamma(P \cap P')$$

est un espace tordu de groupe sous-jacent $H = P \cap P'$. Soit L une composante de Levi de H définie sur F (cf. [16, proposition 4.7]). Puisque $\mathrm{Int}_\gamma(L)$ en est une autre, d'après *loc. cit.* il existe un unique élément $u_H \in U_H(F)$ tel que $\mathrm{Int}_\gamma(L) = \mathrm{Int}_{u_H}(L)$, où U_H est le radical unipotent de H. Ainsi

$$\widetilde{L} = \eta L = L\eta, \quad \text{avec} \quad \eta = u_H^{-1}\gamma \in \widetilde{H}(F),$$

est une composante de Levi de $\widetilde{H}$ définie sur F : on a l'égalité $\widetilde{H} = \widetilde{L} \ltimes U_H$. Comme $\widetilde{H}$ normalise U (resp. U'), d'après [16, proposition 4.4 (b)] $Q = \widetilde{H}U$ (resp. $\widetilde{Q} = \widetilde{H}U'$) est un sous-espace parabolique de $\widetilde{G}$ défini sur F et contenu dans $\widetilde{P}$ (resp. $\widetilde{P}'$). Par construction, $\gamma \in \widetilde{Q}(F)$ (resp. $\gamma \in \widetilde{Q}'(F)$). Par minimalité, on a donc $\widetilde{Q} = \widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}' = \widetilde{P}'$. D'après *loc. cit.*, cela entraîne que $\widetilde{L}$ est une composante de Levi de $\widetilde{P}$ (resp. $\widetilde{P}'$) et $U_H \subset U$ (resp. $U_H \subset U'$). On en déduit qu'il existe un unique $v \in U(F)$ (resp. $v' \in U'(F)$) tel que $\widetilde{L} = \mathrm{Int}_v(\widetilde{M})$ (resp. $\widetilde{L} \subset \mathrm{Int}_{v'}(\widetilde{M})$). On a donc

$$\widetilde{M}' = \mathrm{Int}_y(\widetilde{M}), \quad \text{avec} \quad y = v'^{-1}v.$$

Il reste à montrer que δ et δ' sont conjugués par ce y. Écrivons $\gamma = \delta'' u''$ avec $\delta'' \in \widetilde{L}(F)$ et $u'' \in U_H(F)$. On a donc

$$\gamma = v^{-1}\delta'' v u_1, \quad \text{avec} \quad u_1 = v^{-1}\mathrm{Int}_{\delta''^{-1}}(v)u''.$$

Or $v^{-1}\delta'' v$ appartient à $\widetilde{M}$ et u_1 appartient à $U(F)$. Puisque $\gamma = \delta u$, cela entraîne $v^{-1}\delta'' v = \delta$ et $u_1 = u$. On obtient, de la même manière, l'égalité $v'^{-1}\delta'' v' = \delta'$. On a donc bien $\delta' = \mathrm{Int}_y(\delta)$. ∎

Lemme 3.3.2. *On a les assertions suivantes :*

(i) *L'application ζ fournit une partition de l'ensemble des classes de $G(F)$-conjugaison dans $\widetilde{G}(F)$, et pour $\mathfrak{o} = [\widetilde{M}, \delta] \in \mathfrak{D}$, l'ensemble*

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} = \bigcup_{\widetilde{Q} \in \mathcal{P}(\widetilde{M})} \{g^{-1}\delta u g \mid g \in G(F), u \in U_Q(F)\}$$

est la fibre de ζ au desus de $\mathfrak{o}$.

(ii) *Pour $\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, on a la décomposition*

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{Q}(F) = (\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_Q(F))U_Q(F).$$

Démonstration. Le point (i) est clair. Prouvons (ii). Soit $(\widetilde{M}, \delta)$ une paire primitive dans la classe $\mathfrak{o}$. On distingue deux cas : ou bien il n'existe aucun élément $x \in G(F)$ tel que $\widetilde{M} \subset \mathrm{Int}_x(\widetilde{M}_Q)$, auquel cas les ensembles à gauche et à droite de l'égalité du point (ii) sont vides. Ou bien il existe un tel x et, quitte à remplacer $\widetilde{Q}$ par $\mathrm{Int}_x(\widetilde{Q})$, on peut supposer que $\widetilde{M} \subset \widetilde{M}_Q$. Un $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{Q}(F)$ peut s'écrire $\gamma = \gamma_1 u$ avec $\gamma_1 \in \widetilde{M}_Q(F)$ et $u \in U_Q(F)$. Soient $\widetilde{P}_1$ un F-sous-espace parabolique de $\widetilde{M}_Q$ minimal pour la condition $\gamma_1 \in \widetilde{P}_1(F)$ et $\widetilde{M}_1$ une composante de Levi de $\widetilde{P}_1$ (définie sur F). On a $\gamma_1 = \delta_1 u_1$ avec $\delta_1 \in \widetilde{M}_1(F)$ et $u_1 \in U_{P_1}(F)$. La paire $(\widetilde{M}_1, \delta_1)$ est conjuguée à $(\widetilde{M}, \delta)$ et γ_1 appartient donc à $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_Q(F)$. D'où l'inclusion $\subset$. L'inclusion en sens inverse s'obtient de manière similaire. ■

3.4 Ensembles de Siegel, partitions et lemme de finitude

Rappelons qu'on a noté $G(\mathbb{A})^1$ le noyau de $\mathbf{H}_G$, et $P_0(\mathbb{A})^1 = M_0(\mathbb{A})^1 U_0(\mathbb{A})$, celui de $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{P_0}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $A_0^G(t)$ l'ensemble des $a \in A_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$ tels que

$$\langle \alpha\,, \mathbf{H}_0(a)\rangle > t \quad \text{pour toute racine} \quad \alpha \in \Delta_0.$$

On peut choisir un ensemble fini $\mathfrak{F}$ dans $M_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$, de sorte que

$$(A_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1) M_0(\mathbb{A})^1 \mathfrak{F} = M_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1.$$

D'après [39], on sait que :

(1) le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ est compact si et seulement si G_{der} est anisotrope ;

(2) il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$G(\mathbb{A})^1 = G(F) P_0(\mathbb{A})^1 A_0^G(t) \mathfrak{F} \boldsymbol{K}.$$

Puisque $M_{0,\mathrm{der}}$ est anisotrope, l'assertion (1) montre qu'il existe un sous-ensemble compact Ω_0 de $M_{0,\mathrm{der}}(\mathbb{A})$, tel que $M_{0,\mathrm{der}}(\mathbb{A}) = M_0(F)\Omega_0$. D'après [39, Proposition 1.7], l'ensemble $U_0(F)\backslash U_0(\mathbb{A})$ est compact, il existe donc un sous-ensemble compact Ω_1 de $U_0(\mathbb{A})$, tel que $U_0(F)\Omega_1 = U_0(\mathbb{A})$. Il résulte de l'assertion (2) qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que, en posant $\Omega = \Omega_1\Omega_0 \subset P_0(\mathbb{A})$, on ait

$$G(\mathbb{A})^1 = G(F)\Omega A_0^G(t)\mathfrak{F}\boldsymbol{K}. \tag{3.1}$$

Maintenant considérons une section du morphisme composé

$$A_0(\mathbb{A}) \to A_G(\mathbb{A})\backslash A_0(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_0^G = \mathcal{B}_G\backslash\mathcal{B}_0 \; (= \mathcal{A}_{A_G}\backslash\mathcal{A}_{A_0})$$

et notons $\mathfrak{B}_0^G$ son image. Une telle section s'obtient en choisissant (arbitrairement) des représentants dans l'image réciproque d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{B}_0^G$ et en prenant le sous-groupe engendré[2]. On pose

$$\mathfrak{B}_0^G(t) = \mathfrak{B}_0^G \cap A_0^G(t).$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et Ω un sous-ensemble compact de $P_0(\mathbb{A})^1$, on pose

$$\mathfrak{S}^1_{t,\mathfrak{F},\Omega} = \Omega\mathfrak{B}_0^G(t)\mathfrak{F}\boldsymbol{K}.$$

D'après (3.1), on voit que pour t assez petit et Ω assez gros, on a

$$G(\mathbb{A})^1 = G(F)\mathfrak{S}^1_{t,\mathfrak{F},\Omega}. \tag{3.2}$$

On notera simplement $\mathfrak{S}^1$ un tel domaine $\mathfrak{S}^1_{t,\mathfrak{F},\Omega}$, pour le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$.

La propriété de finitude usuelle pour un corps de nombres, à savoir que si $\mathfrak{S}^1$ est un domaine de Siegel pour le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$, alors l'ensemble des $\gamma \in G(F)$ tels que $\gamma\mathfrak{S}^1 \cap \mathfrak{S}^1 \neq \emptyset$ est fini, n'est plus vraie ici. En effet, pour tout corps global, tout élément unipotent $u \in U_0(\mathbb{A})$ et tout voisinage ouvert relativement compact de l'identité $\mathcal{V}$ dans $U_0(\mathbb{A})$, on a $a^{-1}ua \in \mathcal{V}$ pour $a \in A_0(\mathbb{A})$ avec $\mathbf{H}_0(a)$ assez loin dans la chambre de Weyl positive (*i. e.* pour $\boldsymbol{d}_0(\mathbf{H}_0(a))$ assez grand). Maintenant, pour un corps de fonctions, le sous-groupe compact maximal $\boldsymbol{K}$ est ouvert et nous avons donc $\gamma\mathfrak{S}^1 \cap \mathfrak{S}^1 \neq \emptyset$ pour tout $\gamma \in U_0(F)$; il en résulte que la propriété de finitude est en défaut.

Pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, notons $P(F)_{\text{st-prim}}$ l'ensemble des $\gamma \in P(F)$ tels que $\gamma \notin Q(F)$, pour tout $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q \subsetneq P$. Tout élément primitif de $G(F)$ est contenu dans $G(F)_{\text{st-prim}}$, mais la réciproque est fausse en général.

Pour $\alpha \in \Delta_0$, notons P_α l'unique élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $\Delta_0 \smallsetminus \{\alpha\}$ soit une base du système de racines de M_{P_α}. Un élément $\gamma \in G(F)$ est dans $G(F)_{\text{st-prim}}$ si et seulement s'il n'appartient à aucun $P_\alpha(F)$ pour $\alpha \in \Delta_0$. Soient $\gamma \in G(F)$ et $g,\, g' \in \mathfrak{S}^1$, tels que $g = \gamma g'$. Écrivons $g = yax$ et $g' = y'a'x'$ avec $y,\, y' \in \Omega$, $a,\, a' \in \mathfrak{B}_0^G(t)$ et $x,\, x' \in \mathfrak{F}\boldsymbol{K}$. D'après [39, Proposition 2.6], pour chaque $\alpha \in \Delta_0$, il existe une constante $c_\alpha > t$ telle que si $\log|\alpha(a)| \geq c_\alpha$ ou $\log|\alpha(a')| \geq c_\alpha$, alors $\gamma \in P_\alpha(F)$. On en déduit que l'ensemble des $\gamma \in G(F)_{\text{st-prim}}$, tels que $\gamma\mathfrak{S}^1 \cap \mathfrak{S}^1 \neq \emptyset$, est fini. Le lemme ci-dessous est une simple généralisation de ce résultat. Nous l'énonçons pour un travail ultérieur (il ne sera pas utilisé ici).

[2] *A priori*, $\mathfrak{B}_0^G$ n'est pas invariant sous l'action de $\mathbf{W}$.

Lemme 3.4.1. *Soit $P = MU \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. Pour $\gamma \in P(F)$, on note γ_M la projection de γ sur $M(F) = U(F)\backslash P(F)$. Alors l'ensemble des projections γ_M des éléments $\gamma \in P(F)_{\text{st-prim}}$, tels que $\gamma\mathfrak{S}^1 \cap \mathfrak{S}^1 \neq \emptyset$, est fini.*

Démonstration. Soient $\gamma \in P(F)$ et $g, g' \in \mathfrak{S}^1$ tel que $g = \gamma g'$. Comme plus haut, on écrit $g = yax$, $g' = y'a'x'$. Alors $l = xx'^{-1} \in P(\mathbb{A})$. Pour $p \in P(\mathbb{A})$, écrivons $p = p_U p_M$ avec $p_U \in U(\mathbb{A})$ et $p_M \in M(\mathbb{A})$. L'équation $g = \gamma g'$ se réécrit

$$y_U \mathrm{Int}_{y_M a}(l_U) y_M a\, l_M = \gamma_U \mathrm{Int}_{\gamma_M}(y'_U)\gamma_M y'_M a',$$

soit encore

$$y_U \mathrm{Int}_{y_M a}(l_U) = \gamma_U \mathrm{Int}_{\gamma_M}(y'_U) \quad \text{et} \quad y_M a\, l_M = \gamma_M y'_M a'.$$

Puisque l_M appartient au compact $(P(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{F}\boldsymbol{K}\mathfrak{F}^{-1})_M$ de $M(\mathbb{A})$ et γ_M appartient à $M(F)_{\text{st-prim}}$, l'équation $y_M a\, l_M = \gamma_M y'_M a'$ assure que les projections γ_M sont dans un ensemble fini. ■

Fixons comme ci-dessus une section du morphisme $A_G(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_G$ et notons $\mathfrak{B}_G$ son image. Puisque le groupe $\mathfrak{B}_G G(\mathbb{A})^1\backslash G(\mathbb{A}) = \mathfrak{B}_G(M_0(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1)\backslash M_0(\mathbb{A})$ est fini, on peut également fixer un sous-ensemble fini $\mathfrak{E}_G \subset M_0(\mathbb{A})$, tel que

$$G(\mathbb{A}) = \mathfrak{B}_G G(\mathbb{A})^1 \mathfrak{E}_G = \mathfrak{B}_G \mathfrak{E}_G G(\mathbb{A})^1.$$

Posons

$$\mathfrak{S}^* = \mathfrak{E}_G \mathfrak{S}^1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{B}_G \mathfrak{S}^* = \mathfrak{B}_G \mathfrak{E}_G \mathfrak{S}^1.$$

Ainsi $\mathfrak{S}^*$ est un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, et $\mathfrak{S}$ est un domaine de Siegel pour le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$. Les résultats vrais pour $\mathfrak{S}^1$ s'étendent, sans difficulté, à $\mathfrak{S}^*$.

Pour $L \in \mathcal{L}$, on peut définir de la même manière des domaines de Siegel $\mathfrak{S}^{L,1}$, $\mathfrak{S}^{L,*} = \mathfrak{E}_L \mathfrak{S}^{L,1}$ et $\mathfrak{S}^L = \mathfrak{B}_L \mathfrak{S}^{L,*}$. On peut, bien sûr, imposer, même si ce n'est pas vraiment nécessaire, que ces domaines soient compatibles avec la conjugaison : si $L, L' \in \mathcal{L}$ sont tels que $A_{L'} = \mathrm{Int}_g(A_L)$ pour un $g \in G(F)$, on demande que $\mathfrak{S}^{L',1} = \mathrm{Int}_g(\mathfrak{S}^{L,1})$, $\mathfrak{E}_{L'} = \mathrm{Int}_g(\mathfrak{E}_L)$, et $\mathfrak{B}_{L'} = \mathrm{Int}_g(\mathfrak{B}_L)$.

Fixons un élément $T_1 \in \mathfrak{a}_0$. Fixons aussi une section du morphisme $A_0(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_0$, et notons $\mathfrak{B}_0$ son image (on peut prendre $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_G \times \mathfrak{B}_0^G$). Pour $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ et $T \in \mathfrak{a}_0$, on note

$$\mathfrak{S}_{P_0}^Q(T_1, T)$$

l'ensemble des $x = uac \in G(\mathbb{A})$, avec $u \in U_Q(\mathbb{A})$, $a \in \mathfrak{B}_0$, et $c \in C_Q$, où C_Q est un sous-ensemble compact de $G(\mathbb{A})$, tels que

$$\begin{cases} \langle \alpha, \mathbf{H}_0(x) - T_1 \rangle > 0 & \text{pour tout } \alpha \in \Delta_0^Q, \\ \langle \varpi, \mathbf{H}_0(x) - T \rangle \leq 0 & \text{pour tout } \varpi \in \hat{\Delta}_0^Q. \end{cases}$$

D'après [25, lemme 1.8.3], si $T - T_1$ est régulier (ce que l'on suppose), la condition ci-dessus est équivalente à $\Gamma_{P_0}^Q(\mathbf{H}_0(x) - T_1, T - T_1) = 1$. On note

$$F_{P_0}^Q(\cdot, T)$$

la fonction caractéristique de l'ensemble $Q(F)\mathfrak{S}_{P_0}^Q(T_1, T)$. Elle dépend du compact C_Q et aussi de l'élément $T_1 \in \mathfrak{a}_0$. En pratique, on prendra C_Q assez gros, et $-T_1$ et T assez réguliers. En particulier, on supposera toujours que $F_{P_0}^Q(\cdot, T)$ est invariante à gauche par $\mathfrak{B}_Q Q(F)$, où $\mathfrak{B}_Q$ est l'image d'une section du morphisme $A_Q(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_Q$. Observons que puisque $A_Q(F)\mathfrak{B}_Q\backslash A_Q(\mathbb{A}) = A_Q(F)\backslash A_Q(\mathbb{A})^1$ est compact, quitte à grossir le compact C_Q, on peut même la supposer invariante à gauche par $A_Q(\mathbb{A})$. On la supposera aussi invariante à droite par $\boldsymbol{K}$.

Tous les résultats de [25, section 3.6] sont vrais ici, en particulier [25, proposition 3.6.3] qui est l'analogue pour $M_P(F)U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ de la partition [25, lemme 1.7.5] de $\mathfrak{a}_0$.

Les lemmes 3.7.1, 3.7.2 et 3.7.3 de [25] sont vrais ici. Quant au lemme 3.7.4 de [25], il suffit d'en modifier l'énoncé de la manière suivante :

Lemme 3.4.2. *Soit Ω un compact de $\widetilde{G}(\mathbb{A})$, et soit $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$. L'ensemble des éléments $\delta \in \widetilde{M}_P(F)$, tels que δ soit $M_P(F)$-conjugué à un élément $\delta_1 \in \widetilde{M}_{P_1}(F)_{\mathrm{prim}}$ pour un $\widetilde{P}_1 \in \widetilde{\mathcal{P}}$ tel que $\widetilde{P}_1 \subset \widetilde{P}$ (i.e. $P_1 \subset P$), et $x^{-1}\delta u x \in \Omega$ pour des éléments $x \in G(\mathbb{A})$ et $u \in U_P(\mathbb{A})$, appartient à un ensemble fini de classes de $M_P(F)$-conjugaison.*

Partie II

Théorie spectrale, troncatures et noyaux

Chapitre 4

L'opérateur de troncature

4.1 Terme constant

Une fonction $\varphi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ est dite *à croissance lente* s'il existe des réels $c, r > 0$ tels que pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on ait

$$|\varphi(g)| \leq c|g|^r.$$

On écrit aussi « $|\varphi(g)| \ll |g|^r$ pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ ».

Soit $P \in \mathcal{P}$, et soit φ une fonction sur $U_P(F)\backslash G(\mathbb{A})$, mesurable et localement L^1. On définit le terme constant $\varphi_P = \Pi_P \varphi$ de φ le long de P par

$$\varphi_P(x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \varphi(ux)\,\mathrm{d}u, \quad x \in G(\mathbb{A}),$$

où $\mathrm{d}u$ est la mesure de Tamagawa sur $U_P(\mathbb{A})$ – i.e. celle qui donne le volume 1 au quotient $U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})$. Alors φ_P est une fonction sur $U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ mesurable et localement L^1. De plus, si φ est à croissance lente, resp. lisse, alors φ_P est à croissance lente, resp. lisse.

Pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on note $\mathcal{R}_0^{P,+}$ l'ensemble des racines de T_0 dans M_P qui sont positives par rapport à Δ_0^P. Rappelons que l'on a fixé en section 3.4 un domaine de Siegel $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_G \mathfrak{S}^*$ pour le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$. Fixons aussi un sous-groupe ouvert compact $\boldsymbol{K}'$ de $G(\mathbb{A})^1$.

Le lemme suivant [32, lemme I.2.7] est le résultat technique clef pour l'étude du terme constant dans le cas des corps de fonctions.

Lemme 4.1.1. *Soit $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. Il existe une constante $c_P > 0$ telle que si $g \in \mathfrak{S}$ vérifie $\langle \mathbf{H}_0(g), \alpha \rangle > c_P$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}_0^{G,+} \smallsetminus \mathcal{R}_0^{P,+}$, alors, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, on a $\varphi_P(g) = \varphi(g)$.*

Ce lemme se généralise aux fonctions φ sur $U_{P'}(\mathbb{A})M_{P'}(F)\backslash G(\mathbb{A})$, pour $P' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $P \subset P'$: en remplaçant $\mathcal{R}_0^{G,+}$ par $\mathcal{R}_0^{P',+}$ dans la condition sur g, on obtient, de même, $\varphi_P(g) = \varphi(g)$. On a aussi la variante suivante [32, corollaire I.2.8] :

Lemme 4.1.2. *Il existe une constante $c' > 0$ telle que pour tout $T' \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\boldsymbol{d}_0(T') > c'$, la propriété suivante soit vérifiée : pour tout $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, tout $g \in \mathfrak{S}$ tel que*

$$\begin{cases} \langle \alpha, \mathbf{H}_0(g) - T' \rangle > 0 & \text{pour tout } \alpha \in \Delta_P, \\ \langle \varpi, \mathbf{H}_0(g) - T' \rangle \leq 0 & \text{pour tout } \varpi \in \hat{\Delta}_0^P, \end{cases}$$

et toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, on a $\varphi_P(g) = \varphi(g)$.

Pour Q, $R \in \mathcal{P}$ tels que $Q \subset R$, et ψ une fonction sur $U_Q(F)\backslash G(\mathbb{A})$ mesurable et localement L^1, on pose[1]

$$\Pi_{Q,R}\psi = \sum_{\{P\in\mathcal{P}|Q\subset P\subset R\}} (-1)^{a_P-a_R}\psi_P.$$

C'est encore une fonction sur $U_Q(F)\backslash G(\mathbb{A})$, mesurable et localement L^1.

Lemme 4.1.3. *Il existe une constante $c'' > 0$ telle que pour tous les couples de sous-groupes paraboliques Q, $R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ avec $Q \subsetneq R$, tout $g \in \mathfrak{S}$ vérifiant*

$$\langle \alpha, \mathbf{H}_0(g)\rangle > c'', \qquad \textit{pour tout} \qquad \alpha \in \Delta_Q^R,$$

et toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, invariante à droite par K', on ait

$$\Pi_{Q,R}\varphi(g) = 0.$$

Démonstration. Il suffit d'adapter la démonstration de [32, corollaire I.2.9]. Par définition de $\mathfrak{S}$, il existe une constante $c_1 < 0$, telle que $\langle \mathbf{H}_0(g), \delta\rangle > c_1$ pour tout $g \in \mathfrak{S}$ et tout $\delta \in \mathcal{R}_0^{G,+}$. Fixons aussi une constante $c_2 > 0$, telle que pour tous P, $P' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $P \subset P'$, on ait la version généralisée du lemme 4.1.1 : pour tout $g \in \mathfrak{S}$ tel que $\langle \mathbf{H}_0(g), \alpha\rangle > c_2$, pour tout $\alpha \in \mathcal{R}_0^{P',+} \smallsetminus \mathcal{R}_0^{P,+}$, et pour toute fonction ψ sur $U_{P'}(\mathbb{A})M_{P'}(F)\backslash G(\mathbb{A})$, invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, on a $\psi_{P'}(g) = \varphi(g)$. Posons $c'' = c_2 - c_1$.

Soient Q, $R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $Q \subsetneq R$, et soit $g \in \mathfrak{S}$. Posons

$$\Delta_Q^R(g) = \{\alpha \in \Delta_Q^R : \langle \alpha, \mathbf{H}_0(g)\rangle \le c''\}.$$

L'ensemble des $P \in \mathcal{P}$ tels que $Q \subset P \subset R$ est en bijection avec l'ensemble des couples (Θ, Θ') avec $\Theta \subset \Delta_Q^R(g)$ et $\Theta' \subset \Delta_Q^R \smallsetminus \Delta_Q^R(g)$. Pour un tel couple (Θ, Θ'), on note $P(\Theta, \Theta')$ l'élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q \subset P(\Theta, \Theta') \subset R$, défini par

$$\Delta_Q^{P(\Theta,\Theta')} = \Theta \cup \Theta'.$$

Puisque

$$a_{P(\Theta,\Theta')} - a_R = a_Q - a_R - (|\Theta| + |\Theta'|),$$

on a

$$\Pi_{Q,R}\varphi(g) = (-1)^{a_Q-a_R} \sum_{(\Theta,\Theta')} (-1)^{|\Theta|+|\Theta'|}\varphi_{P(\Theta,\Theta')}(g),$$

[1] Dans [25, section 4.3], cette fonction est notée $\Theta\psi$.

où (Θ, Θ') parcourt les couples comme ci-dessus. Fixé un tel couple, toute racine $\alpha \in \mathcal{R}^{P(\Theta,\Theta'),+} \smallsetminus \mathcal{R}^{P(\Theta,\emptyset),+}$ s'écrit $\alpha = \beta + \delta$ avec $\beta \in \Theta'$ et $\delta \in \mathcal{R}^{P(\Theta,\Theta'),+} \cup \{0\}$, et l'on a

$$\langle \alpha, \mathbf{H}_0(g) \rangle = \langle \beta, \mathbf{H}_0(g) \rangle + \langle \delta, \mathbf{H}_0(g) \rangle > c'' + \inf\{c_1, 0\} \geq c_2.$$

Par conséquent, $\varphi_{P(\Theta,\Theta')}(g) = \varphi_{(\Theta,\emptyset)}(g)$. On a donc

$$\Pi_{Q,R}\varphi(g) = (-1)^{a_Q - a_R} \Bigg(\sum_{\Theta' \subset \Delta_Q^R \smallsetminus \Delta_Q^R(g)} (-1)^{|\Theta'|} \Bigg) \sum_{\Theta \subset \Delta_Q^R(g)} (-1)^{|\Theta|} \varphi_{P(\theta,\emptyset)}(g).$$

Or, la somme sur Θ' est nulle si $\Delta_Q^G(g) \neq \Delta_Q^R$, ce qui prouve le lemme. ■

Pour $Q = P_0$ et $R = G$, puisque l'ensemble des $g \in \mathfrak{S}^*$, tels que $\langle \mathbf{H}_0(g), \alpha \rangle \leq c''$, est compact, on a, en particulier [32, corollaire I.2.9] :

Lemme 4.1.4. *Il existe un sous-ensemble compact $C = C_{K'}$ de $\mathfrak{S}^*$ tel que, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, le support de*

$$\Pi_{P_0,G}\varphi|_{\mathfrak{S}^*}$$

soit contenu dans C.

Soit $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. Pour $T \in \mathfrak{a}_0$, on définit un opérateur de troncature $\boldsymbol{\Lambda}^{T,Q}$ pour une fonction $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ par

$$\boldsymbol{\Lambda}^{T,Q}\varphi(x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}, P \subset Q} (-1)^{a_P - a_Q} \sum_{\xi \in P(F)\backslash Q(F)} \widehat{\tau}_P^Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)\varphi_P(\xi x).$$

D'après [25, lemme 3.7.1], la somme sur ξ est finie. Notons que l'opérateur $\boldsymbol{\Lambda}^{T,Q}$ ne dépend que de la projection T^Q de T sur $\mathfrak{a}_0^Q$. On pose

$$\boldsymbol{\Lambda}^T = \boldsymbol{\Lambda}^{T,G}.$$

Les résultats de [25, section 4.1] sur les propriétés de $\boldsymbol{\Lambda}^T$ sont vrais ici. En particulier, pour T assez régulier (i.e. tel que $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$ pour une constante c dépendant de G), l'opérateur $\boldsymbol{\Lambda}^T$ est un idempotent [25, corollaire 4.1.3] : on a $\boldsymbol{\Lambda}^T \circ \boldsymbol{\Lambda}^T\varphi = \boldsymbol{\Lambda}^T\varphi$.

Définition 4.1.5. Pour $X \in \mathfrak{a}_Q^G$ et $T \in \mathfrak{a}_0^G$, on définit[2]

$$T[\![X]\!] = T[\![X]\!]^Q \in \mathfrak{a}_0^Q$$

[2] On a utilisé les doubles crochets pour éviter les confusions avec la famille M_0-orthogonale $([T]_P)$ définie par un élément $T \in \mathfrak{a}_0$.

en posant

$$T - X = \sum_{\alpha \in \Delta_0} x_\alpha \check{\alpha} \qquad \text{et} \qquad T[\![X]\!] = \sum_{\alpha \in \Delta_0^Q} x_\alpha \check{\alpha}.$$

Le raffinement [25, lemme 4.2.2] des propriétés de $\mathbf{\Lambda}^{T,Q}$ est encore vrai ici.

4.2 Troncature et support

Cette section adapte au cas des corps de fonctions les résultats de [25, section 4.3]. On fixe un $T \in \mathfrak{a}_0$, assez régulier. La proposition suivante joue ici le rôle de [25, proposition 4.3.2]. Elle est très simple à prouver et fournit cependant des décroissances beaucoup plus radicales.

Proposition 4.2.1. *Soit $\boldsymbol{K}'$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$. Il existe un sous-ensemble fermé $\Omega = \Omega_{T,\boldsymbol{K}'}$ de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ d'image compacte dans*

$$\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}),$$

tel que, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, le support de la fonction tronquée $\mathbf{\Lambda}^T\varphi$ soit contenu dans Ω.

Démonstration. On reprend la démonstration de l'assertion (2) du lemme I.2.16 de [32]. Fixons un élément $T' \in \mathfrak{a}_0$ assez régulier : on demande que la conclusion du lemme 4.1.2 soit vérifiée pour $\boldsymbol{K}'$. Pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, notons $G(\mathbb{A})_{P,T'}$ l'ensemble des $x \in G(\mathbb{A})$ vérifiant

$$\begin{cases} \langle \alpha, \mathbf{H}_0(x) - T' \rangle > 0 & \text{pour tout } \alpha \in \Delta_P, \\ \langle \varpi, \mathbf{H}_0(x) - T' \rangle \leq 0 & \text{pour tout } \varpi \in \hat{\Delta}_0^P, \end{cases}$$

et posons

$$\mathfrak{S}^*_{P,T'} = \mathfrak{S}^* \cap G(\mathbb{A})_{P,T'}.$$

D'après [25, lemme 4.1.1], pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ et $x \in G(\mathbb{A})$, si $(\mathbf{\Lambda}^T\varphi)_P(x) \neq 0$, alors

$$\langle \varpi, \mathbf{H}_0(x) - T \rangle \leq 0, \quad \text{pour tout} \quad \varpi \in \hat{\Delta}_P.$$

Grâce à [25, lemme 1.2.8], on en déduit que le support de $(\mathbf{\Lambda}^T\varphi)_P|_{\mathfrak{S}^*_{P,T'}}$ est contenu dans un compact de $\mathfrak{S}^*$ indépendant de φ. En appliquant le lemme 4.1.2 à la fonction $\mathbf{\Lambda}^T\varphi$, on obtient que le support de $\mathbf{\Lambda}^T\varphi|_{\mathfrak{S}^*_{P,T'}}$ est contenu dans un compact de $\mathfrak{S}^*$ indépendant de φ. Puisque ([25, lemme 1.7.5])

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}} \phi_{P_0}^P \tau_P^G = 1,$$

on a $G(\mathbb{A}) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}} G(\mathbb{A})_{P,T'}$. D'où la proposition. ∎

Pour démontrer la proposition 4.2.1, on a utilisé la partition [25, lemme 1.7.5] de $\mathfrak{a}_0$. On observe aussi que, d'après [25, lemme 3.6.4], on a

$$\mathbf{\Lambda}^T\varphi(x) = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset R}} A^T_{Q,R}\varphi(x), \tag{4.1}$$

avec

$$A^T_{Q,R}\varphi(x) = \sum_{\xi\in Q(F)\backslash G(F)} F^Q_{P_0}(\xi x, T)\sigma^R_Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)\Pi_{Q,R}\varphi(\xi x). \tag{4.2}$$

Si $Q = R$, alors $\sigma^R_Q = 0$, sauf si $Q = R = G$, auquel cas

$$A^T_{G,G}\varphi(x) = F^G_{P_0}(x, T)\varphi(x).$$

On note $\mathbf{C}^T$ l'opérateur $A^T_{G,G}$. Puisque la fonction $F^G_{P_0}(\cdot, T)$ est invariante à gauche par $\mathfrak{B}_G G(F)$ et que son support est d'image compacte dans $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, il existe un sous-ensemble fermé $\Omega^* = \Omega^*_{T,\boldsymbol{K}'}$ de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, d'image compacte dans $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, tel que, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, le support de $(\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T)\varphi$ soit contenu dans Ω^*. On a aussi la variante de [25, proposition 4.3.3] :

Proposition 4.2.2. *Soit $\boldsymbol{K}'$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$. Il existe une constante $c = c_{\boldsymbol{K}'}$ (qui ne dépend pas de T) telle que, si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$, alors pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, on a*

$$(\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T)\varphi = 0.$$

Démonstration. Pour étudier $(\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T)\varphi(x)$, on traite séparément chaque terme $A^T_{Q,R}\varphi(x)$, avec $Q \neq R$ dans (4.1). On peut prendre x dans $\mathfrak{S}$. Pour $\xi \in Q(F)\backslash G(F)$, il s'agit de contrôler $\Pi_{Q,R}\varphi(\xi x)$, sous la condition

$$F^Q_{P_0}(\xi x, T)\sigma^R_Q(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) = 1.$$

D'après [25, lemme 3.6.1], pour x fixé, il y a au plus un ξ modulo $Q(F)$ tel que l'expression ci-dessus soit non nulle. Puisqu'on est libre de multiplier ξx par un élément de $Q(F)$, on peut supposer que $\xi x = uay \in \mathfrak{S}^Q_{P_0}(T_1, T)$ avec $u \in U_Q(\mathbb{A})$, $a \in \mathfrak{B}_0$ et $y \in C_Q$ (cf. section 3.4). On peut même supposer que $u \in \Omega_Q$ pour un compact $\Omega_Q \subset U_Q(\mathbb{A})$, tel que $U_Q(F)\Omega_Q = U_Q(\mathbb{A})$. Rappelons que C_Q est un compact fixé (assez gros, mais indépendant de T) de $G(\mathbb{A})$, et que $H = \mathbf{H}_0(\xi x)$ vérifie

$$\begin{cases} \langle\alpha, H - T_1\rangle > 0 & \forall\alpha \in \Delta^Q_0, \\ \langle\varpi, H - T\rangle \leq 0 & \forall\varpi \in \hat{\Delta}^Q_0. \end{cases}$$

Puisque $\sigma_Q^R(H-T)=1$, on a $\langle\alpha,H\rangle > \langle\alpha,T\rangle$ pour tout $\alpha\in\Delta_Q^R$. Comme l'élément $T-T_1$ est régulier, il existe $c_1\in\mathbb{R}$ (indépendant de T) tel que $\langle\alpha,H\rangle > c_1$ pour tout $\alpha\in\mathcal{R}^{R,+}$. D'après le lemme 4.1.3, il existe $c''>0$ tel que, pour $g\in\mathfrak{S}$ tel que $\langle\mathbf{H}_0(g),\alpha\rangle > c''$, pour tout $\alpha\in\Delta_Q^R$, on ait $\Pi_{Q,R}\varphi(g)=0$, pour toute fonction φ sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$, invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$. Ici l'élément $\xi x = uay$ n'appartient pas à $\mathfrak{S}$, mais $H=\mathbf{H}_0(a)+\mathbf{H}_0(y)$, et y reste dans un compact fixé, par conséquent il existe $c_1'\in\mathbb{R}$ (indépendant de T) tel que $\log|\alpha(a)| > c_1'$ pour tout $\alpha\in\mathcal{R}^{R,+}$. Puisque u reste dans un compact fixé de $U_Q(\mathbb{A})$, pour tout $P'\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}^R$, la version généralisée du lemme 4.1.1 s'applique encore à ξx (cf. la preuve du lemme I.2.7 de [32]), et quitte à modifier la constante c'', la conclusion du lemme 4.1.3 s'applique encore à ξx. D'où la proposition. ■

La différence par rapport au cas des corps de nombres est ici spectaculaire : sur un corps de nombres F, pour toute fonction lisse à croissance uniformément lente φ sur $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, la fonction $\mathbf{\Lambda}^T\varphi$ est seulement à décroissance rapide. Par ailleurs la décomposition

$$\mathbf{\Lambda}^T = \mathbf{C}^T + (\mathbf{\Lambda}^T - \mathbf{C}^T),$$

qui joue un rôle crucial dans les estimées de [25, chapitres 12 et 13], est bien plus simple à contrôler, car ici, pour toute fonction $\boldsymbol{K}'$-invariante à droite sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, non seulement $\mathbf{\Lambda}^T\varphi$ est à support d'image compacte dans $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, mais si T est assez régulier, la troncature est encore plus brutale : on a $\mathbf{\Lambda}^T\varphi = \mathbf{C}^T\varphi$. Cela simplifiera, plus loin, la preuve des estimées à établir.

Chapitre 5

Formes automorphes et produits scalaires

5.1 Formes automorphes

On fixe une mesure de Haar $\mathrm{d}g$ sur $G(\mathbb{A})$. On note $\mathrm{d}k$ la mesure de Haar sur $\boldsymbol{K}$, telle que $\mathrm{vol}(\boldsymbol{K}) = 1$. Pour $P \in \mathcal{P}$, on note $\mathrm{d}u_P$, ou simplement $\mathrm{d}u$, la mesure de Tamagawa sur $U_P(\mathbb{A})$. Par quotient par la mesure de comptage sur $U_P(F)$, on obtient une mesure sur $U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})$ qui vérifie

$$\mathrm{vol}(U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})) = 1.$$

Posons $M = M_P$. La mesure de Haar $\mathrm{d}m$ sur $M(\mathbb{A})$ est choisie de sorte que l'on ait la formule d'intégration

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(g)\,\mathrm{d}g = \int_{U_P(\mathbb{A})\times M(\mathbb{A})\times \boldsymbol{K}} f(umk)e^{-\langle 2\rho_P, \mathbf{H}_P(m)\rangle}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k,$$

où ρ_P désigne la demi-somme des racines positives de A_P. La fonction

$$m \mapsto \boldsymbol{\delta}_P(m) = e^{\langle 2\rho_P, \mathbf{H}_P(m)\rangle}$$

est le module de $P(\mathbb{A})$:

$$\mathrm{d}(mum^{-1}) = \boldsymbol{\delta}_P(m)\,\mathrm{d}u.$$

On pose[1]

$$\boldsymbol{X}_P = P(F)U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\boldsymbol{X}}_P = A_P(\mathbb{A})P(F)U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}).$$

En particulier

$$\boldsymbol{X}_G = G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\boldsymbol{X}}_G = A_G(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

Les groupes $G(\mathbb{A})$ et $P(F)U_P(\mathbb{A})$ sont unimodulaires ; on dispose donc d'une mesure quotient invariante à droite sur $\boldsymbol{X}_P$. Pour ϕ localement intégrable et à support compact sur $\boldsymbol{X}_P$, on a la formule d'intégration :

$$\int_{\boldsymbol{X}_P} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{X}_M\times\boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_P(m)^{-1}\phi(mk)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k, \tag{5.1}$$

[1] On prendra garde à ce que l'espace noté ici $\boldsymbol{X}_G$ ne coïncide pas avec l'espace ainsi noté dans [25], car dans cette référence il y a, en plus, un quotient par $\mathfrak{B}_G$. Son usage correspond plutôt à celui de notre $\overline{\boldsymbol{X}}_G$, sans toutefois lui être égal.

où $\mathrm{d}x$ est la mesure quotient. Par contre, si $P \neq G$, il n'y a pas de mesure $G(\mathbb{A})$-invariante à droite sur $\overline{\boldsymbol{X}}_P$. Toutefois, il existe une fonctionnelle invariante à droite $r_{\overline{\boldsymbol{X}}_P}$ sur l'espace des sections du fibré en droites sur $\overline{\boldsymbol{X}}_P$, défini par $\boldsymbol{\delta}_P$. Ces sections sont représentables par les fonctions sur $\boldsymbol{X}_P$, vérifiant

$$\phi(px) = \boldsymbol{\delta}_P(p)\phi(x) \quad \text{pour} \quad p \in A_P(\mathbb{A})P(F)U_P(\mathbb{A}).$$

La fonctionnelle est définie par :

$$r_{\overline{\boldsymbol{X}}_P}(\phi) = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_P(m)^{-1}\phi(mk)\,\mathrm{d}\dot{m}\,\mathrm{d}k,$$

où $\mathrm{d}\dot{m}$ est la mesure quotient.

Rappelons que l'on a noté $\Xi(P)$ le groupe des caractères unitaires de $A_P(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur $A_P(F)$. Soit $\xi \in \Xi(P)$. On dit qu'une fonction φ sur $\boldsymbol{X}_P$ « se transforme à gauche suivant ξ », si pour tout $x \in G(\mathbb{A})$ on a

$$\varphi(ax) = \xi(a)\varphi(x) \quad \text{pour} \quad a \in A_P(\mathbb{A}).$$

On note $L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ l'espace de Hilbert formé des fonctions φ sur $\boldsymbol{X}_M$ qui se transforment à gauche suivant ξ et sont de carré intégrable sur $\overline{\boldsymbol{X}}_M$. Le groupe $M(\mathbb{A})$ agit sur $L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ par translations à droite. Considérons deux fonctions φ et ψ localement intégrables sur $\boldsymbol{X}_P$ qui se transforment à gauche suivant le même caractère $\xi \in \Xi(P)$. On pose (si l'intégrale converge)

$$\langle \varphi, \psi \rangle_P = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K}} \varphi(mk)\overline{\psi(mk)}\,\mathrm{d}\dot{m}\,\mathrm{d}k. \tag{5.2}$$

Ce produit scalaire définit l'espace de Hilbert $L^2(\boldsymbol{X}_P)_\xi$, siège de la représentation unitaire « induite parabolique »

$$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})} L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi,$$

définie par

$$(\boldsymbol{\rho}(y)\varphi)(x) = \boldsymbol{\delta}_P^{-1/2}(x)\boldsymbol{\delta}_P^{1/2}(xy)\varphi(xy).$$

Pour la notion générale de forme automorphe, nous renvoyons le lecteur à [32, sous-section I.2.17]. Soit $M \in \mathcal{L}$. Un caractère de $A_M(\mathbb{A})$ est automorphe, s'il est trivial sur $A_M(F)$. Ainsi $\Xi(M)$ est le groupe des caractères unitaires automorphes de $A_M(\mathbb{A})$. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, une forme automorphe φ sur $\boldsymbol{X}_P$ est une fonction $\boldsymbol{K}$-finie à droite telle que la fonction $m \mapsto \varphi(mx)$ sur $\boldsymbol{X}_M$ est automorphe. Elle est dite cuspidale, si pour tout $Q \in \mathcal{P}$ tel que $Q \subsetneq P$, le terme constant φ_Q est nul – ou, ce qui revient au même, si pour tout x, la fonction $m \mapsto \varphi(mx)$ sur $\boldsymbol{X}_M$ est cuspidale. Notons $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)$ l'espace des formes automorphes cuspidales sur $\boldsymbol{X}_P$. Pour $\xi \in \Xi(P)$, notons

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi \subset \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P),$$

le sous-espace formé des fonctions qui se transforment à gauche suivant ξ.

Définition 5.1.1. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$. On appelle *représentation automorphe discrète modulo le centre* – ou simplement *discrète* – de $M(\mathbb{A})$, une sous-représentation irréductible de $M(\mathbb{A})$ dans l'espace $L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ pour un $\xi \in \Xi(M)$. On note $L^2_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ le sous-espace fermé de $L^2(\boldsymbol{X}_M)_\xi$ engendré par ces représentations.

On appelle *forme automorphe discrète pour P* une fonction $\boldsymbol{K}$-finie sur $\boldsymbol{X}_P$ telle que, pour tout x, la fonction $m \mapsto \varphi(mx)$ sur $M(\mathbb{A})$ soit un vecteur d'une représentation automorphe discrète modulo le centre de M.

Une représentation automorphe irréductible de $M(\mathbb{A})$ est discrète modulo le centre si et seulement si sa restriction à $M(\mathbb{A})^1$ est une somme finie de représentations irréductibles dans

$$L^2(M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1).$$

Pour $\xi \in \Xi(P)$, on note $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ l'espace engendré par les formes automorphes discrètes qui se transforment à gauche suivant ξ sur $\boldsymbol{X}_P$. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ munit $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ d'une structure d'espace pré-hilbertien. On sait (grâce à la proposition 4.2.1 pour les corps de fonctions) que

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi \subset \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi.$$

Ainsi, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ est lui aussi muni d'une structure d'espace pré-hilbertien.

5.2 Opérateurs d'entrelacement et séries d'Eisenstein

Soient $P, Q \in \mathcal{P}$ deux sous-groupes parabolique associés, i.e. tels que M_P et M_Q soient conjugués dans $G(F)$. Considérons une fonction Φ lisse sur $\boldsymbol{X}_P$ se transformant à gauche suivant un caractère unitaire automorphe ξ de $A_M(\mathbb{A})$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ et $x \in G(\mathbb{A})$, posons

$$\Phi(x, \lambda) = e^{\langle \lambda + \rho_P, \mathbf{H}_P(x) \rangle} \Phi(x).$$

La fonction $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$ ne dépend que de l'image de λ dans $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_P$. Pour $s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$ et pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ « assez régulier »[2] dans la chambre associée à P dans $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$, on a une expression définie par une intégrale convergente :

$$(\mathbf{M}_{Q|P}(s, \lambda)\Phi)(x, s\lambda) = \int_{U_{s,P,Q}(\mathbb{A})} \Phi(w_s^{-1} n x, \lambda) \, \mathrm{d}n,$$

[2] En notant $\mathcal{R}_P$ l'ensemble des racines de A_P dans P, on demande ici l'inégalité stricte $\langle \check{\alpha}, \Re\lambda - \rho_P \rangle > 0$, pour toute racine $\alpha \in \mathcal{R}_P$ telle que $s\alpha \in -\mathcal{R}_Q$.

où l'on a posé

$$U_{s,P,Q} = (U_Q \cap w_s U_P w_s^{-1}) \backslash U_Q.$$

On obtient ainsi un opérateur

$$\mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda) : \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi \to \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_Q)_{s\xi}.$$

Pour P et Q standards et P fixé, Q est déterminé par s, et l'on pose

$$\mathbf{M}(s,\lambda) = \mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda).$$

Pour $s = 1$, on écrira

$$\mathbf{M}_{Q|P}(\lambda) = \mathbf{M}_{Q|P}(1,\lambda).$$

Dans le cas particulier où $Q = s(P)$, on a (cf. [25, lemme 5.2.1]) :

$$\mathbf{M}_{s(P)|P}(s,\lambda) = e^{\langle \lambda+\rho_P, Y_s\rangle}\boldsymbol{s}, \qquad \text{où} \qquad Y_s = \mathbf{H}_0(w_s^{-1}) = T_0 - s^{-1}T_0$$

et

$$\boldsymbol{s} : \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi \to \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_Q)_{s\xi} \quad \text{est défini par} \quad \boldsymbol{s}\Phi(x) = \Phi(w_s^{-1}x).$$

Définition 5.2.1. Pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_P$, on pose

$$\varphi_\mu(x) = e^{\langle \mu, \mathbf{H}_P(x)\rangle}\varphi(x),$$

et on note $\mathbf{D}_\mu$ l'opérateur $\varphi \mapsto \varphi_\mu$, i.e. $\mathbf{D}_\mu\varphi = \varphi_\mu$.

Lemme 5.2.2. *Pour P, $Q \in \mathcal{P}$ associés, $s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_Q)$, $\mu \in \boldsymbol{\mu}_P$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ assez régulier, l'opérateur $\mathbf{D}_\mu$ vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda)\mathbf{D}_\mu = \mathbf{D}_{s\mu}\mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda+\mu).$$

Démonstration. Il suffit d'observer que $(\mathbf{D}_\mu\Phi)(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda+\mu)$. ■

Soient P, $Q \in \mathcal{P}$ tels que $P \subset Q$. Pour $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ assez régulier, on définit une série d'Eisenstein sur $\boldsymbol{X}_Q$, par la formule :

$$E^Q(x,\Phi,\lambda) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash Q(F)} \Phi(\gamma x,\lambda).$$

Pour $Q = G$, on pose $E(\cdot,\Phi,\lambda) = E^G(\cdot,\Phi,\lambda)$. Le théorème 5.2.2 de [25] est vrai ici (*mutatis mutandis*)[3] : pour $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ et $x \in \boldsymbol{X}_Q$, les fonctions

$$\lambda \mapsto (\mathbf{M}_{Q|P}(s,\lambda)\Phi)(x) \quad \text{et} \quad \lambda \mapsto E(x,\Phi,\lambda)$$

admettent un prolongement méromorphe définissant des fonctions rationnelles sur le cylindre $\mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}/\mathcal{A}_P^\vee = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_P, \mathbb{C}^\times)$.

[3] Les propriétés de rationalité dans le cas cuspidal sont établies dans [32, section IV.4]. Le cas général est traité dans [32, appendice II].

5.3 La (G, M)-famille spectrale

Soient $M \in \mathcal{L}$, $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$. On définit une (G, M)-famille périodique à valeurs opérateurs [25, corollaire 5.3.2] : pour $Q \in \mathcal{P}(M)$ et $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_M$, on pose

$$\mathcal{M}(P, \lambda; \Lambda, Q) = \mathbf{M}_{Q|P}(\lambda)^{-1}\mathbf{M}_{Q|P}(\lambda + \Lambda).$$

Soit $T \in \mathfrak{a}_0$. Rappelons que l'on a défini en section 3.2 une famille M_0-orthogonale, qui est rationnelle si $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$:

$$\mathfrak{Y}(T) = (Y_{T,P}),$$

où, pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, on a posé

$$Y_{T,P} = [T]_P + Y_P, \qquad \text{et} \qquad Y_P = T_0 - [T_0]_P.$$

Suivant la convention habituelle, pour $Q \in \mathcal{P}$ et $P \in \mathcal{P}(M_0)$ tels que $P \subset Q$, on pose $Y_{T,Q} = (Y_{T,P})_Q$ et $Y_Q = (Y_P)_Q$. Rappelons que pour $P \in \mathcal{P}(M_0)$, l'élément Y_P appartient à $\mathcal{A}_0$. En particulier, la famille M_0-orthogonale (Y_P) est entière. On peut donc définir une autre (G, M)-famille périodique à valeurs opérateurs : pour $Q \in \mathcal{P}(M)$ et $\Lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_M$, on pose

$$\mathcal{M}(\mathfrak{Y}; P, \lambda; \Lambda, Q) = e^{\langle \Lambda, Y_Q \rangle}\mathcal{M}(P, \lambda; \Lambda, Q).$$

Le lemme suivant résulte de la proposition 1.6.8 :

Lemme 5.3.1. *Fixons un élément $Z \in \mathcal{A}_G$. Les fonctions méromorphes de λ et Λ à valeurs opérateurs*[4]

$$\mathcal{M}_{M,F}^{G,T}(Z, \mathfrak{Y}; P, \lambda; \Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(M)} \varepsilon_Q^{G,[T]_Q}(Z; \Lambda)\mathcal{M}(\mathfrak{Y}; P, \lambda; \Lambda, Q)$$

sont lisses pour les valeurs imaginaires pures de λ et Λ.

Observons que l'expression $\mathcal{M}_{M,F}^{G,T}(Z, \mathfrak{Y}; P, \lambda; \Lambda)$ est égale à

$$\mathcal{M}_{M,F}^{G,T}(Z; P, \lambda; \Lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(M)} \varepsilon_Q^{G,[T]_Q}(Z; \Lambda)\mathcal{M}(P, \lambda; \Lambda, Q)$$

si $\mathfrak{Y} = 0$, et donc, par exemple, si G est déployé.

[4] La notion de méromorphie invoquée pour un opérateur, disons $A(\lambda)$, est entendue au sens faible, il s'agit de la méromorphie pour les fonctions $\lambda \mapsto A(\lambda)\Phi$, pour Φ dans un espace de Banach.

Soit $Z \in \mathcal{A}_G$. Pour $Q,\ R \in \mathcal{P}_{\rm st}$, on introduit la fonction méromorphe de $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{R,\mathbb{C}}$, à valeurs opérateurs,

$$\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu) = \sum_{S,s,t} \varepsilon_S^{G,T_S}(Z; s\lambda - t\mu)\mathbf{M}(t,\mu)^{-1}\mathbf{M}(s,\lambda),$$

où S parcourt les éléments de $\mathcal{P}_{\rm st}$ qui sont associés à Q, s parcourt les éléments de $\mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_S)$, et t parcourt les éléments de $\mathbf{W}(\mathfrak{a}_R,\mathfrak{a}_S)$. Notons que $\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)$ ne dépend que des images de λ dans $\mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_Q$ et de μ dans $\mathfrak{a}^*_{R,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_R$, et que l'on a $\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu) = 0$ si R et Q ne sont pas associés.

Le lemme 5.3.4 de [25] est vrai ici. Il entraîne la variante suivante de [25, lemme 5.3.5][5] : en posant $M = M_R$, le changement de variables $s \mapsto u = t^{-1}s$, $S \mapsto S' = t^{-1}S$ et $s\lambda - t\mu \mapsto \Lambda_u = u\lambda - \mu$, donne

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)\\
&\quad= \sum_{u\in\mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_R)} \sum_{S'\in\mathcal{P}(M)} e^{\langle \Lambda_u, Y_{S'}\rangle}\varepsilon_{S'}^{G,[T]_{S'}}(Z;\Lambda_u)\mathcal{M}(R,\mu;\Lambda_u,S')\mathbf{M}_{R|Q}(u,\lambda)\\
&\quad= \sum_{u\in\mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_R)} \mathcal{M}^{G,T}_{M,F}(Z,\mathfrak{Y};R,\mu;\Lambda_u)\mathbf{M}_{R|Q}(u,\lambda).
\end{aligned}$$

Puisque, pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{a}}_Q$, l'opérateur $\mathbf{M}_{R|Q}(u,\lambda)$ est une isométrie [25, théorème 5.2.2 (2)], on en déduit que la fonction à valeurs opérateurs

$$(\lambda,\mu) \mapsto \mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)$$

est lisse pour les valeurs imaginaires pures de λ et μ. L'opérateur

$$\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)$$

entrelace les représentation de $G(\mathbb{A})$ dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\rm disc}(\boldsymbol{X}_Q)_\xi$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\rm disc}(\boldsymbol{X}_R)_{\xi'}$, où ξ et ξ' sont des caractères unitaires automorphes de $A_Q(\mathbb{A})$ et $A_R(\mathbb{A})$ respectivement, tels que pour un (i.e. pour tout) $u \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_R)$, on ait $\xi' = u\xi$.

Définition 5.3.2. On pose

$$[\mathbf{\Omega}]^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu) = |\widehat{\mathfrak{C}}_R|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathfrak{C}}_R} \mathbf{D}_\nu\, \mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu+\nu).$$

La fonction à valeurs opérateurs $(\lambda,\mu) \mapsto [\mathbf{\Omega}]^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu)$ est lisse pour les valeurs imaginaires pures de λ et μ.

---

[5] Dans l'énoncé de *loc. cit.*, M est la composante de Levi standard de Q.

5.4 Séries d'Eisenstein et troncature

Soit $M \in \mathcal{L}$. Pour $Z \in \mathcal{A}_G$ et $H \in \mathcal{A}_M$, on pose

$$\boldsymbol{X}_G(Z) = G(F)\backslash G(\mathbb{A}; Z), \quad \boldsymbol{X}_M(H) = M(F)\backslash M(\mathbb{A}; H)$$

et

$$\overline{\boldsymbol{X}}_M = A_M(\mathbb{A})M(F)\backslash M(\mathbb{A}).$$

Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, soient Φ et Ψ deux fonctions sur $\boldsymbol{X}_P$ qui se transforment à gauche suivant le même caractère unitaire automorphe de $A_M(\mathbb{A})$. On a défini un produit scalaire

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_P = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K}} \Phi(mk)\overline{\Psi(mk)}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k.$$

Lemme 5.4.1. *Pour $H \in \mathcal{A}_M$, on pose*

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{P,H} = \int_{\boldsymbol{X}_M(H) \times \boldsymbol{K}} \Phi(mk)\overline{\Psi(mk)}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k.$$

On a alors

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{P,H} = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1} \sum_{\nu \in \widehat{\mathfrak{c}}_M} e^{-\langle \nu, H \rangle} \langle \mathbf{D}_\nu \Phi, \Psi \rangle_P.$$

Démonstration. On observe que puisque

$$\Phi(amk)\overline{\Psi(amk)} = \Phi(mk)\overline{\Psi(mk)}$$

pour tout $a \in A_M(\mathbb{A})$, le produit scalaire $\langle \Phi, \Psi \rangle_{P,H}$ ne dépend que de l'image de H dans $\mathfrak{c}_M$. On conclut par transformée de Fourier sur le groupe fini $\mathfrak{c}_M$. ∎

Soit $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(P(F)\backslash G(\mathbb{A}; Z))$. On pose, si la série converge,

$$E(x,\varphi) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \varphi(\gamma x).$$

Soit $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K})$, c'est-à-dire que ψ est une fonction localement intégrable sur $\boldsymbol{X}_M \times \boldsymbol{K}$ qui est invariante à gauche sous $A_M(\mathbb{A})$. On pose, si l'intégrale a un sens, pour $\nu \in \widehat{\mathfrak{c}}_M$,

$$\widehat{\psi}(\nu) = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K}} e^{\langle \nu, \mathbf{H}_M(m) \rangle} \psi(m,k)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k.$$

Nous aurons besoin du calcul formel suivant.

Lemme 5.4.2. *Notons $\mathcal{A}_M(Z)$ l'image réciproque dans $\mathcal{A}_M$ de $Z \in \mathcal{A}_G$. Soit φ comme ci-dessus et supposons que*

$$\varphi_P(x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \varphi(ux)\,\mathrm{d}u$$

soit de la forme

$$\varphi_P(mk) = \boldsymbol{\delta}_P(m) e^{\langle \xi, \mathbf{H}_P(m)\rangle} \psi(m,k) \tag{5.3}$$

pour $m \in M(\mathbb{A})$, $k \in \boldsymbol{K}$, $\xi \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\boldsymbol{X}}_M \times \boldsymbol{K})$. On a l'égalité suivante :

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} E(x,\varphi)\,\mathrm{d}x = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1} \sum_{\nu\in\widehat{\mathfrak{c}}_M} \sum_{H\in\mathcal{A}_M(Z)} e^{\langle \xi-\nu, H\rangle} \widehat{\psi}(\nu).$$

Démonstration. Tout d'abord, il est classique d'observer que

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} E(x,\varphi)\,\mathrm{d}x = \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A};Z)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{P(F)U_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A};Z)} \varphi_P(x)\,\mathrm{d}x.$$

La formule d'intégration (5.1) montre alors que

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} E(x,\varphi)\,\mathrm{d}x = \sum_{H\in\mathcal{A}_M(Z)} \int_{\boldsymbol{X}_M(H)\times\boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_P(m)^{-1}\varphi_P(mk)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k,$$

soit encore, compte tenu de l'hypothèse (5.3),

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} E(x,\varphi)\,\mathrm{d}x = \sum_{H\in\mathcal{A}_M(Z)} e^{\langle\xi,H\rangle} \int_{\boldsymbol{X}_M(H)\times\boldsymbol{K}} \psi(mk)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k,$$

et il suffit pour conclure d'observer que

$$\int_{\boldsymbol{X}_M(H)\times\boldsymbol{K}} \psi(mk)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1} \sum_{\nu\in\widehat{\mathfrak{c}}_M} e^{\langle -\nu, H\rangle}\widehat{\psi}(\nu). \qquad \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant établir l'analogue, dans notre cadre, de [25, théorème 5.4.3]. Soient Φ et Ψ des formes automorphes associées à des sous-groupes paraboliques standards, vérifiant les conditions suivantes :

Hypothèses 5.4.3. On suppose que :

(i) $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_Q)_\xi$ et $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_R)_{\xi'}$ pour des sous-groupes paraboliques associés Q, $R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, où ξ, resp. ξ', est un caractère unitaire automorphe de $A_Q(\mathbb{A})$, resp. de $A_R(\mathbb{A})$;

(ii) $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_Q$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{R,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_R$;

(iii) $\xi' = w\xi$ pour un (i.e. pour tout) $w \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)$.

Théorème 5.4.4. *Soit $Z \in \mathcal{A}_G$. Sous les hypothèses 5.4.3, on a les assertions suivantes :*

(i) *On suppose que Φ et Ψ sont cuspidales. On a l'égalité entre fonctions méromorphes de λ et μ :*

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} \boldsymbol{\Lambda}^T E(x,\Phi,\lambda)\overline{E(x,\Psi,-\bar{\mu})}\,\mathrm{d}x = \langle [\boldsymbol{\Omega}]_{R|Q}^T(Z;\lambda,\mu)\Phi,\Psi\rangle_R.$$

(ii) *On suppose que Φ et Ψ sont discrètes mais non nécessairement cuspidales. Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_Q$ et tout $\mu \in \boldsymbol{\mu}_R$, on ait :*

$$\left|\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)} \boldsymbol{\Lambda}^T E(x,\Phi,\lambda)\overline{E(x,\Psi,-\bar{\mu})}\,\mathrm{d}x - \langle [\boldsymbol{\Omega}]_{R|Q}^T(Z;\lambda,\mu)\Phi,\Psi\rangle_R\right| \ll e^{-c\boldsymbol{d}_0(T)}.$$

Démonstration. Prouvons (i). Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{Q,\mathbb{C}}^*$ dans le domaine de convergence de la série d'Eisenstein $E(x,\Phi,\lambda)$, et puisque Φ est cuspidale, on a ([25, proposition 5.4.1])

$$\boldsymbol{\Lambda}^T E(x,\Phi,\lambda) = \sum_{S,s,\gamma} (-1)^{a(s)}\phi_{M,s}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(\gamma x)-T))(\mathbf{M}(s,\lambda)(\gamma x, s\lambda)),$$

où la somme porte sur les $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ associés à Q, $s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a}_S)$, $\gamma \in S(F)\backslash G(F)$, et $M = M_Q$. On déduit du lemme 5.4.2 que pour λ dans le domaine de convergence de $E(x,\Phi,\lambda)$, et $-\bar{\mu}$ dans celui de $E(x,\Psi,-\bar{\mu})$, l'intégrale de (i) est égale à

$$\sum_{S,s}\int_{\boldsymbol{X}_S(Z)} (-1)^{a(s)}\phi_{M,s}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(x)-T))\mathbf{A}(x,s)\,\mathrm{d}x \tag{5.4}$$

avec

$$\boldsymbol{X}_S(Z) = S(F)U_S(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A};Z)$$

($\boldsymbol{X}_S(Z)$ est l'image de $\left(\coprod_{H\in\mathcal{A}_M(Z)} \boldsymbol{X}_M(H)\right)\times \boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{X}_S$), et

$$\mathbf{A}(x,s) = (\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi)(x,s\lambda)\Pi_S\overline{E(x,\Psi,-\bar{\mu})},$$

où $\Pi_S E$ est le terme constant de E le long de S. Notons que $\phi_{M,s}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(x)-T))$ ne dépend que de l'image $(\mathbf{H}_S(x)^G - T_S^G)$ de $(\mathbf{H}_0(x)-T)$ dans $\mathfrak{a}_S^G$. D'après [25, théorème 5.2.2 (5)], on a

$$\mathbf{A}(x,s) = \sum_{t\in\mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_R,\mathfrak{a}_S)} e^{\langle s\lambda - t\mu + 2\rho_S,\mathbf{H}_S(x)\rangle}(\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi)(x)\overline{(\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi)(x)}.$$

La fonction $\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi$ appartient à $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_S)_{s\xi}$ et la fonction $\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi$ appartient à $\mathcal{A}_{\text{cusp}}(X_S)_{t\xi'}$. Il résulte des lemmes 5.4.1 et 5.4.2 que l'expression (5.4) est égale à la somme sur S, s et t de

$$|\widehat{\mathfrak{C}}_S|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathfrak{C}}_S}\sum_{H\in\mathcal{A}_S(Z)}(-1)^{a(s)}\phi_{M,s}(H-T_S)e^{\langle s\lambda-t\mu-\nu,H\rangle}\langle\mathbf{D}_\nu\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi\rangle_S.$$

Fixons un triplet (S,s,t) comme ci-dessus. En tenant compte du lemme 1.6.5 on a pour λ assez régulier et μ fixé,

$$\sum_{H\in\mathcal{A}_S(Z)}(-1)^{a(s)}\phi_{M,s}(H-T_S)e^{\langle s\lambda-t\mu-\nu,H\rangle}=\varepsilon_S^{G,T_S}(Z;s\lambda-t\mu-\nu).$$

On obtient que l'expression (5.4) est égale à la somme sur S, s et t, de

$$\text{(5.5)}\qquad |\widehat{\mathfrak{C}}_S|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathfrak{C}}_S}\varepsilon_S^{G,T_S}(Z;s\lambda-t\mu-\nu)\langle\mathbf{D}_\nu\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi\rangle_S,$$

soit encore

$$\text{(5.6)}\qquad |\widehat{\mathfrak{C}}_R|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathfrak{C}}_R}\varepsilon_S^{G,T_S}(Z;s\lambda-t(\mu+\nu))\langle\mathbf{D}_{t\nu}\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\mathbf{M}(t,-\bar{\mu})\Psi\rangle_S,$$

et, grâce à l'équation fonctionnelle du lemme 5.2.2, on obtient que (5.6) est égal à

$$\text{(5.7)}\quad |\widehat{\mathfrak{C}}_R|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathfrak{C}}_R}\varepsilon_S^{G,T_S}(Z;s\lambda-t(\mu+\nu))\langle\mathbf{D}_\nu\mathbf{M}(t,-(\mu+\nu))^{-1}\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\Psi\rangle_R.$$

On voit apparaître la (G,M)-famille spectrale à valeurs opérateurs pour $M=M_R$ et l'intégrale de (i) est donc égale à

$$|\widehat{\mathfrak{C}}_R|^{-1}\sum_{\nu\in\widehat{\mathfrak{C}}_R}\langle\mathbf{D}_\nu\mathbf{\Omega}^T_{R|Q}(Z;\lambda,\mu+\nu)\Phi,\Psi\rangle_R.$$

L'assertion (i) en résulte. Le cas général (ii), dans le cas des corps de nombres, est dû à Arthur [3]. La preuve consiste à se ramener au cas cuspidal, c'est-à-dire à la formule de Langlands [25, théorème 5.4.2 (i)]. Dans le cas des corps de fonctions, on prouve, de la même manière, (ii) à partir de (i). Notons qu'ici les groupes $\boldsymbol{\mu}_Q$ et $\boldsymbol{\mu}_R$ sont compacts, d'où la borne uniforme en λ et μ. ∎

Sous les hypothèses 5.4.3 (i) et 5.4.3 (ii), pour que l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{X}_G(Z)}\mathbf{\Lambda}^T E(x,\Phi,\lambda)\overline{E(x,\Psi,-\bar{\mu})}\,\mathrm{d}x$$

soit non nulle, il faut que $w\xi$ et ξ' coïncident sur $A_R(F)\backslash A_R(\mathbb{A})^1$ pour un (et donc pour tout) $w \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)$. Cette condition équivaut à l'existence d'un $\tau \in \boldsymbol{\mu}_R$, tel que

$$(w\xi) \star \tau = \xi'.$$

Son image dans $\widehat{\mathcal{B}}_R$ est uniquement déterminée.

Proposition 5.4.5. *Notons $\mathcal{E}(\xi, \xi')$ l'ensemble des $\tau \in \boldsymbol{\mu}_R$ vérifiant l'équation*

$$(w\xi) \star \tau = \xi',$$

pour un $w \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_R)$. S'il est non vide, c'est un espace principal homogène sous $\widehat{\mathfrak{C}}_R$, indépendant du choix de w. Sous les hypothèses 5.4.3 (i) *et* 5.4.3 (ii)*, le théorème* 5.4.4 *reste vrai sans l'hypothèse* 5.4.3 (iii)*, à condition de remplacer $[\boldsymbol{\Omega}]^T_{R|Q}(Z; \lambda, \mu)$ par l'opérateur*

$$[\boldsymbol{\Omega}]^T_{R|Q}(Z, \xi, \xi'; \lambda, \mu) \stackrel{\text{déf}}{=} |\widehat{\mathfrak{C}}_R|^{-1} \sum_{\nu \in \mathcal{E}(\xi, \xi')} \mathbf{D}_\nu \, \boldsymbol{\Omega}^T_{R|Q}(Z; \lambda, \mu + \nu).$$

Par convention, $[\boldsymbol{\Omega}]^T_{R|Q}(Z, \xi, \xi'; \lambda, \mu) = 0$ si $\mathcal{E}(\xi, \xi')$ est vide. Si $(\lambda - \mu - \nu) \in \widehat{\mathfrak{C}}_G$ pour $\nu \in \mathcal{E}(\xi, \xi')$, chacun des membres de l'égalité ne dépend que de l'image de Z dans $\mathfrak{c}_G$.

Démonstration. Il suffit d'observer que $E(x, \mathbf{D}_\nu \Psi, \mu) = E(x, \Psi, \mu + \nu)$. ∎

Chapitre 6

Le noyau intégral

6.1 Opérateurs et noyaux

Notons $C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ l'espace des fonctions lisses et à support compact sur $\widetilde{G}(\mathbb{A})$. On notera $\mathrm{d}y$ la mesure $G(\mathbb{A})$-invariante à droite et à gauche sur $\widetilde{G}(\mathbb{A})$ déduite de la mesure de Haar $\mathrm{d}x$ sur $G(\mathbb{A})$ en posant :

$$\int_{\widetilde{G}(\mathbb{A})} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{G(\mathbb{A})} f(\delta x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad \delta \in \widetilde{G}(F).$$

La mesure ainsi définie est indépendante du choix de δ. L'espace tordu localement compact $\widetilde{G}(\mathbb{A})$ est unimodulaire, au sens de [25, section 2.1]. Il agit sur $\boldsymbol{X}_G$ de la manière suivante : pour $x \in \boldsymbol{X}_G$ et $y \in \widetilde{G}(\mathbb{A})$, on choisit un représentant $\dot{x}$ de x dans $G(\mathbb{A})$ et un élément δ dans $\widetilde{G}(F)$. Alors $\dot{x}' = \delta^{-1}\dot{x}y$ est un élément de $G(\mathbb{A})$, dont l'image x' dans $\boldsymbol{X}_G$ ne dépend pas des choix de $\dot{x}$ et de δ. On pose $x * y = x'$.

On fixe, dans toute la suite, un caractère unitaire ω de $G(\mathbb{A})$ trivial sur le groupe $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G(F)$. La représentation régulière droite $\boldsymbol{\rho}$ de $G(\mathbb{A})$ dans $L^2(\boldsymbol{X}_G)$ se prolonge naturellement en une représentation unitaire $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}$ de $(\widetilde{G}(\mathbb{A}), \omega)$, au sens de [25, section 2.3] : pour $\varphi \in L^2(\boldsymbol{X}_G)$, et x et y comme ci-dessus, on pose

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(y,\omega)\varphi(x) = (\omega\varphi)(x * y) = \omega(\delta^{-1}\dot{x}y)\varphi(\delta^{-1}\dot{x}y).$$

Par intégration contre une fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$, on définit l'opérateur

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega) = \int_{\widetilde{G}(\mathbb{A})} f(y)\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(y,\omega)\,\mathrm{d}y.$$

Il est représenté par le noyau intégral sur $\boldsymbol{X}_G \times \boldsymbol{X}_G$

$$K_{\widetilde{G}}(f,\omega;x,y) = \sum_{\delta\in\widetilde{G}(F)} \omega(y) f(x^{-1}\delta y),$$

c'est-à-dire que nous avons

$$(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)\varphi)(x) = \int_{\boldsymbol{X}_G} K_{\widetilde{G}}(f,\omega;x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Le noyau $K_{\widetilde{G}}(f,\omega;x,y)$ sera noté $K(f,\omega;x,y)$ si aucune confusion n'est à craindre. D'après [25, lemme 6.2.1] on a le

Lemme 6.1.1. *Il existe des constantes $c(f)$ et N telles que, pour tout x et tout y dans $G(\mathbb{A})$, on ait*

$$|K(f,\omega;x,y)| \leq c(f)|x|^N|y|^N.$$

6.2 Factorisation du noyau

Pour $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ et $h \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, on note $f \star h \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ la fonction définie par

$$(f \star h)(x) = \int_{G(\mathbb{A})} f(xy^{-1})h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Le noyau intégral de l'opérateur $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f * h, \omega)$ sur $\boldsymbol{X}_G$ est donné par

$$K(f \star h, \omega; x, y) = \int_{\boldsymbol{X}_G} K(f, \omega; x, z) K_G(\omega h; z, y)\,\mathrm{d}z.$$

Toute fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ est $\boldsymbol{K}'$-bi-invariante, c'est-à-dire invariante à droite et à gauche, par $\boldsymbol{K}'$, un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$, que l'on peut choisir distingué dans $\boldsymbol{K}$. Si on suppose que le caractère ω est trivial sur $\boldsymbol{K}'$, la fonction

$$\boldsymbol{X}_G \times \boldsymbol{X}_G \to \mathbb{C},\ (x, y) \mapsto K(f, \omega; x, y)$$

est $(\boldsymbol{K}' \times \boldsymbol{K}')$-invariante (pour l'action à droite) et le noyau $K(f, \omega; x, y)$ est $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-*admissible* au sens de [25, section 6.3]. Le théorème de factorisation de Dixmier-Malliavin [25, théorème 6.3.1] est trivialement vrai ici : notons $e_{\boldsymbol{K}'}$ la fonction caractéristique de $\boldsymbol{K}'$ divisée par $\mathrm{vol}(\boldsymbol{K}')$. C'est un idempotent de $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ et l'on a

$$f = f \star e_{\boldsymbol{K}'} = e_{\boldsymbol{K}'} \star f \ = e_{\boldsymbol{K}'} \star f \star e_{\boldsymbol{K}'}.$$

Puisque $\omega|_{\boldsymbol{K}'} = 1$, le noyau $K(f, \omega; x, y)$ s'écrit

$$K(f, \omega; x, y) = \int_{\boldsymbol{X}_G} K(f, \omega; x, z) K_G(e_{\boldsymbol{K}'}; z, y)\,\mathrm{d}z.$$

6.3 Propriétés du noyau tronqué

On a défini en section 3.4 un domaine de Siegel $\boldsymbol{\mathfrak{S}}^* = \mathfrak{E}_G \boldsymbol{\mathfrak{S}}^1$ pour le quotient

$$\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A}),$$

et on pose $G(\mathbb{A})^* = \mathfrak{E}_G G(\mathbb{A})^1$. On note $\boldsymbol{\Lambda}_1^T$ l'opérateur de troncature agissant sur la première variable d'un noyau $K(f, \omega; x, y)$. On a, dans [32], la variante IV.2.5(b) des lemmes 6.4.1 et 6.4.2 de [25] :

Lemme 6.3.1. (i) *Il existe un sous-ensemble compact Ω_1 de $\boldsymbol{\mathfrak{S}}^*$ tel que pour tout $y \in G(\mathbb{A})^*$, la fonction*

$$\boldsymbol{\mathfrak{S}}^* \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \boldsymbol{\Lambda}_1^T K(f, \omega; x, y)$$

soit à support dans Ω_1. *De plus, la fonction*

$$\mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^* \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \mathbf{\Lambda}_1^T K(f, \omega; x, y)$$

est à support compact, donc bornée.

(ii) *Soit* $\boldsymbol{K}'$ *un sous-groupe ouvert compact de* $G(\mathbb{A})$. *Il existe un sous-ensemble compact* Ω_2 *de* $\mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^*$ *tel que pour toute fonction* $\boldsymbol{K}'$*-bi-invariante* f *dans* $C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$, *le support de la restriction à* $\mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^*$ *du noyau tronqué* $(x, y) \mapsto \mathbf{\Lambda}_1^T K(f, \omega; x, y)$ *soit contenu dans* Ω_2.

Démonstration. La fonction $(x, y) \mapsto K(f, \omega; x, y)$ sur $\boldsymbol{X}_G \times \boldsymbol{X}_G$ est $(\boldsymbol{K}' \times \boldsymbol{K}')$-invariante pour un sous-groupe ouvert compact $\boldsymbol{K}'$ de $G(\mathbb{A})$. On peut donc appliquer la proposition 4.2.1 : il existe un sous-ensemble compact Ω_1 de $\mathfrak{S}^*$ tel que pour tout $y \in G(\mathbb{A})^*$, le support de la fonction $x \mapsto \mathbf{\Lambda}_1^T K(f, \omega; x, y)$ soit contenu dans Ω_1. On procède ensuite comme dans la preuve de [32, assertion IV.2.5 (b)]. La dernière assertion résulte de la proposition 4.2.1 et de la preuve de [32, assertion IV.2.5 (b)]. ■

Chapitre 7

Décomposition spectrale

Les sorites de [25, section 7.1] sont valables ici. La décomposition spectrale de $L^2(X_G)$ a été obtenue par Langlands pour les corps de nombres [28] et par Morris pour les corps de fonctions [35, 36], puis rédigée pour tout corps global par Mœglin et Waldspurger [32].

7.1 Un résultat de finitude

Soit $P \in \mathcal{P}$. On observe qu'une fonction $\boldsymbol{K}$-finie sur $\boldsymbol{X}_P$ est forcément $\boldsymbol{K}'$-invariante à droite pour un sous-groupe ouvert $\boldsymbol{K}'$ de $\boldsymbol{K}$. Pour $\xi \in \Xi(P)$, on note $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ le sous-espace de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$, formé des fonctions qui sont $\boldsymbol{K}'$-invariantes. On définit de la même manière les espaces $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$. Sur un corps de fonctions on a le résultat de finitude suivant :

Théorème 7.1.1. *La représentation de $G(\mathbb{A})$ dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ est admissible : pour tout sous-groupe ouvert compact $\boldsymbol{K}'$ de $G(\mathbb{A})$, l'espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ est de dimension finie.*

Démonstration. D'après le lemme 4.1.2, il existe un sous-ensemble compact Ω de $\boldsymbol{X}_P$ tel que toute forme automorphe cuspidale $\boldsymbol{K}'$-invariante sur $\boldsymbol{X}_P$ soit à support contenu dans Ω. On en déduit que l'espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ est de dimension finie. En d'autres termes, la représentation de $G(\mathbb{A})$ dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ est admissible. D'après la décomposition spectrale de Langlands, les formes automorphes discrètes

$$\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$$

s'obtiennent comme résidus de séries d'Eisenstein $E^P(x,\Phi',\lambda)$ construites à partir de formes automorphes cuspidales $\Phi' \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_Q)_{\xi'}$ pour un $Q \in \mathcal{P}$ tel que $Q \subset P$, $\xi' \in \Xi(Q)$ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_Q^+ \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{a}_{Q,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_Q^\vee$; avec la condition que l'élément $\xi' \star \lambda$ de $\Xi(Q)^+$ défini par $(\xi' \star \lambda)(a) = \xi'(a)e^{\langle\lambda,\mathbf{H}_Q(a)\rangle}$ pour tout $a \in A_Q(\mathbb{A})$, prolonge ξ. Observons que $\xi' \star \lambda$ ne dépend que de la projection de λ sur $\mathfrak{a}_{Q,\mathbb{C}}^*/\mathcal{B}_Q^\vee = \ker[\Xi(Q)^+ \to \Xi(Q)^1]$. Pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_Q$ $(= \widehat{\mathcal{A}}_Q)$, la fonction $\mathbf{D}_\mu\Phi'$ appartient à $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(\boldsymbol{X}_Q)_{\xi'\star\mu}$ et

$$E^P(x,\mathbf{D}_\mu\Phi',\lambda-\mu) = E^P(x,\Phi',\lambda) \qquad \text{pour tout} \qquad \lambda \in \boldsymbol{\mu}_Q^+.$$

Soit $\Xi(Q) \times^{\widehat{\mathcal{B}}_Q} \boldsymbol{\mu}_Q^+$ le quotient de $\Xi(Q) \times \boldsymbol{\mu}_Q^+$ par la relation d'équivalence définie comme suit : deux couples (ξ_1', λ_1) et (ξ_2', λ_2) sont équivalents si et seulement s'il existe un $\mu \in \boldsymbol{\mu}_Q$ tel que $(\xi'_2, \lambda_2) = (\xi'_1 \star \mu, \lambda_1 - \mu)$; auquel cas $\xi'_2 \star \lambda_2 = \xi'_1 \star \lambda_1$. Puisque $\widehat{\mathfrak{c}}_Q = \ker[\boldsymbol{\mu}_Q^+ \to \mathfrak{a}^*_{Q,\mathbb{C}}/\mathcal{B}_Q^\vee]$ est fini, l'application (surjective)

$$\Xi(Q) \times^{\widehat{\mathcal{B}}_Q} \boldsymbol{\mu}_Q^+ \to \Xi(Q)^+,\ (\xi', \lambda) \mapsto \xi' \star \lambda$$

est à fibres fines. Comme l'espace $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(X_Q)_{\xi'}$ est de dimension finie, il suffit de voir que les éléments de $\Xi(Q)^+$ de la forme $\xi' \star \lambda$ avec $(\xi', \lambda) \in \Xi(Q) \times \boldsymbol{\mu}_Q^+$, tels qu'il existe une forme $\Phi' \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp},\boldsymbol{K}'}(X_Q)_{\xi'}$ pouvant donner naissance par résidu de la série d'Eisenstein $E^P(x, \Phi', \cdot)$ en λ à une forme dans $\mathcal{A}_{\mathrm{disc},\boldsymbol{K}'}(X_P)_\xi$, appartiennent à un ensemble fini. La projection $(\xi' \star \lambda)^1 = \xi' \star \lambda|_{A_Q(\mathbb{A})^1}$ de $\xi' \star \lambda$ sur $\Xi(Q)^1$ coïncide avec la projection de ξ', qui est un caractère du groupe fini $A_Q(F)(\boldsymbol{K}' \cap A_Q(\mathbb{A})^1)\backslash A_Q(\mathbb{A})^1$. Par conséquent, les classes $\xi' + \widehat{\mathcal{B}}_Q$ varient dans un sous-ensemble fini de $\Xi(Q)/\widehat{\mathcal{B}}_Q$. On peut donc fixer ξ' et se contenter de faire varier λ. Écrivons $\lambda = \lambda_{\mathrm{u}} + \lambda^+$ avec $\lambda_{\mathrm{u}} \in \boldsymbol{\mu}_Q$ et $\lambda^+ \in \mathfrak{a}_Q^*$. La projection $(\lambda^+)_P$ de λ sur $\mathfrak{a}_P^*$ est nulle (car $\xi' \star \lambda|_{A_P(\mathbb{A})} = \xi$) et la projection $(\lambda^+)_Q^P$ de λ sur $\mathfrak{a}_Q^{P,*}$ varie dans un compact de $\mathfrak{a}_Q^{P,*}$. La compacité de $\boldsymbol{\mu}_Q$ assure que λ varie dans un compact du cylindre $\boldsymbol{\mu}_Q^+$. L'intersection d'un ensemble compact et d'un ensemble discret (les pôles d'une série d'Eisenstein) est finie, ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Ce théorème rend inutile le découpage suivant les données cuspidales utilisé par Arthur (et repris dans [25]) dans le développement spectral de la formule des traces, puisqu'il règle immédiatement les éventuelles questions de convergence.

7.2 Données discrètes et décomposition spectrale

Pour $M \in \mathcal{L}$, notons $\mathbf{W}^G(M)$ le quotient de l'ensemble des éléments $w \in \mathbf{W}^G$ tels que $w(M) = M$ par $\mathbf{W}^M$. C'est un groupe et on note $w^G(M)$ son ordre. Rappelons que pour σ une représentation de $M(\mathbb{A})$ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_M$, on a noté $\sigma_\lambda = \sigma \star \lambda$ la représentation définie par les opérateurs

$$\sigma \star \lambda : x \mapsto e^{\langle \lambda, \mathbf{H}_M(x) \rangle} \sigma(x).$$

Définition 7.2.1. On appelle *donnée discrète* pour G un couple (M, σ), où σ est une représentation automorphe irréductible de $M(\mathbb{A})$ discrète modulo le centre, c'est-à-dire apparaissant comme composant de $L^2_{\mathrm{disc}}(X_M)_\xi$ – l'espace de Hilbert engendré par les sous-représentations irréductibles de $L^2(X_M)_\xi$ – pour un caractère unitaire automorphe ξ de $A_M(\mathbb{A})$. Deux données discrètes (M, σ) et (M', σ') de G sont dites *équivalentes* s'il existe un couple $(w, \lambda) \in \mathbf{W}^G \times \boldsymbol{\mu}_M$ tel que

$$wMw^{-1} = M' \quad \text{et} \quad w(\sigma \star \lambda) \simeq \sigma'.$$

Nous noterons $\mathrm{Stab}_M(\sigma)$ le sous-groupe de $\widehat{\mathfrak{c}}_M$ formé des λ tels que $\sigma \star \lambda \simeq \sigma$, et $\widehat{c}_M(\sigma)$ son indice :

$$\widehat{c}_M(\sigma) = \frac{|\ \widehat{\mathfrak{c}}_M\ |}{|\mathrm{Stab}_M(\sigma)|}.$$

Soit (M,σ) une donnée discrète pour G et soit $P \in \mathcal{P}(M)$. Soit ξ la restriction à $A_M(\mathbb{A})$ du caractère central de σ. On notera

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P,\sigma) \subset \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$$

le sous-espace des formes automorphes φ sur $\boldsymbol{X}_P$ telles que, pour tout $x \in G(\mathbb{A})$, la fonction $m \mapsto \varphi(mx)$ sur $\boldsymbol{X}_M$ soit un vecteur de la composante isotypique de σ dans $L^2_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_M)_\xi$. C'est l'espace des fonctions $\boldsymbol{K}$-finies à droite dans l'espace de la représentation induite parabolique de $P(\mathbb{A})$ à $G(\mathbb{A})$ de la composante isotypique de σ dans $L^2_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_M)_\xi$.

Considérons $x \in \boldsymbol{X}_P$, $y \in \widetilde{G}(\mathbb{A})$, $\theta = \mathrm{Int}_\delta$ avec $\delta \in \widetilde{G}(F)$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$. Rappelons que l'on a posé

$$\varphi(x,\mu) = e^{\langle \mu+\rho_P, \mathbf{H}_P(x)\rangle}\varphi(x). \tag{7.1}$$

Définition 7.2.2. Pour une représentation automorphe irréductible σ de $M_P(\mathbb{A})$ discrète modulo le centre, on définit pour $Q = \theta(P)$ un opérateur unitaire[1]

$$\boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta,y,\omega) : \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P,\sigma) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_Q,\theta(\omega\otimes\sigma)), \tag{7.2}$$

en posant

$$(\boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta,y,\omega)\varphi)(x,\theta(\mu)) = (\omega\varphi)(\delta^{-1}xy,\mu). \tag{7.3}$$

Cet opérateur réalise un avatar tordu par δ et ω de la représentation induite parabolique

$$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\sigma \star \mu).$$

Différentes réalisations peuvent apparaître et doivent être comparées :

Lemme 7.2.3. *Pour μ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_M$, les avatars tordus*

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\lambda+\mu}(\delta,y,\omega) \qquad \textit{et} \qquad \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma\star\lambda,\mu}(\delta,y,\omega)$$

[1] On prendra garde à ce que, contrairement au cas des corps de nombres, on ne dispose pas d'un représentant canonique dans l'orbite de σ sous les décalages par les $\mu \in \boldsymbol{\mu}_M$.

sont équivalents et l'entrelacement est donné par les opérateurs $\mathbf{D}_\lambda$ et $\mathbf{D}_{\theta(\lambda)}$ (définition 5.2.1). En d'autres termes, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P,\sigma) & \xrightarrow{\boldsymbol{\rho}_1} & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_Q,\theta(\omega\otimes\sigma)) \\ {\scriptstyle \mathbf{D}_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{D}_{\theta(\lambda)}} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P,\sigma\star\lambda) & \xrightarrow{\boldsymbol{\rho}_2} & \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_Q,\theta(\omega\otimes\sigma\star\lambda)) \end{array}$$

est commutatif, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbf{D}_{\theta(\lambda)} \circ \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\lambda+\mu}(\delta, y, \omega) = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma\star\lambda,\mu}(\delta, y, \omega) \circ \mathbf{D}_\lambda. \tag{7.4}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des équations (7.1) et (7.3). ■

Par intégration contre une fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$, on définit l'opérateur

$$\boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta, f, \omega)$$

et on pose

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{P,\sigma,\mu}(y,\omega) = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta_0, y, \omega), \quad \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{P,\sigma,\mu}(f,\omega) = \boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta_0, f, \omega).$$

Soit $\varphi : \boldsymbol{X}_G \to \mathbb{C}$ une fonction continue et à support compact. Pour $P \in \mathcal{P}$, $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)$ et $\mu \in \boldsymbol{\mu}_P$, on pose

$$\widehat{\varphi}(\Psi,\mu) = \int_{\boldsymbol{X}_G} \varphi(x)\overline{E(x,\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}x.$$

Pour deux fonctions $\phi, \varphi : \boldsymbol{X}_G \to \mathbb{C}$ continues et à support compact, on pose

$$\langle \phi, \varphi\rangle_{\boldsymbol{X}_G} = \int_{\boldsymbol{X}_G} \phi(x)\overline{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $M \in \mathcal{L}$, notons

- $\Pi_{\mathrm{disc}}(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations automorphes irréductibles de $M(\mathbb{A})$ discrètes modulo le centre ;
- $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)$ le quotient de $\Pi_{\mathrm{disc}}(M)$ par la relation d'équivalence donnée par la torsion par les caractères unitaires de $\mathcal{A}_M$;
- $\boldsymbol{\Psi}_P(\sigma)$ une base orthonormale de l'espace vectoriel pré-hilbertien $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_P,\sigma)$.

D'après [32, chapitre VI] avec les conventions 1.3.1 pour la normalisation des mesures ($\mathrm{vol}(\boldsymbol{\mu}_M) = 1$) et les notations de la définition 7.2.1, on a le théorème suivant.

Théorème 7.2.4. *Le produit scalaire $\langle\phi,\varphi\rangle_{\boldsymbol{X}_G}$ admet la décomposition spectrale*

$$\langle\phi,\varphi\rangle_{\boldsymbol{X}_G} = \sum_{M\in\mathcal{L}/\mathbf{W}} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma) \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \sum_{\Psi\in\boldsymbol{\Psi}_P(\sigma)} \widehat{\phi}(\Psi,\mu)\overline{\widehat{\varphi}(\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu,$$

où l'on a identifié $\mathcal{L}/\mathbf{W}$ à un ensemble de représentants dans $\mathcal{L}$, et où, pour chaque classe $\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)$, on a choisi un représentant $\sigma\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M)$ dans la classe $\boldsymbol{\sigma}$.[2]

7.3 Décomposition spectrale d'un noyau

La proposition 7.2.2 de [25] est vraie ici, *mutatis mutandis*[3]. Plus précisément, soient $P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ et θ un F-automorphisme de G. Soit $H(x,y)$ un noyau intégral sur $\boldsymbol{X}_{\theta(P)}\times\boldsymbol{X}_P$, de la forme $H=K_1K_2^*$:

$$H(x,y)=\int_{\boldsymbol{X}_P} K_1(x,z)K_2^*(z,y)\,\mathrm{d}z,$$

où K_1 (resp. K_2) est un noyau $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-admissible sur $\boldsymbol{X}_{\theta(P)}\times\boldsymbol{X}_P$ (resp. $\boldsymbol{X}_P\times\boldsymbol{X}_P$). On suppose que pour $S\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}^P$, $\sigma\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$ et $\mu\in\boldsymbol{\mu}_S$, on a des opérateurs de rang fini et, plus précisément, qui s'annulent en dehors d'un ensemble fini de vecteurs de $\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$:

$$A_{1,\sigma,\mu}\in\mathrm{Hom}(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma),\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta(S)},\theta(\sigma)))$$

et

$$A_{2,\sigma,\mu}\in\mathrm{Hom}(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma),\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma)),$$

vérifiant

$$\int_{\boldsymbol{X}_P} K_1(x,y)E^P(y,\Psi,\mu)\,\mathrm{d}y = E^{\theta(P)}(x,A_{1,\sigma,\mu}\Psi,\theta(\mu))$$

et

$$\int_{\boldsymbol{X}_P} K_2(x,y)E^P(y,\Psi,\mu)\,\mathrm{d}y = E^P(x,A_{2,\sigma,\mu}\Psi,\mu).$$

Posons

$$B_{\sigma,\mu}=A_{1,\sigma,\mu}A_{2,\sigma,\mu}^*\in\mathrm{Hom}(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma),\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta(S)},\theta(\sigma)))$$

---

[2] On observera que pour chaque facteur de Levi $M\in\mathcal{L}/\mathbf{W}$, on a choisi un sous-groupe parabolique P de composante de Levi M. Le choix de ces sous-groupes paraboliques P est indifférent. Il en est de même pour les formules des propositions 7.3.1 et 7.3.2 ci-dessous.

[3] On observera que, dans [25], la définition des espaces $\boldsymbol{X}_P$ diffère de la nôtre par un quotient par $\mathfrak{B}_P$; il en résulte que, pour que la formule [25, proposition 7.2.2 (1)] soit correcte, il faut la modifier comme indiqué en **Err** (viii) dans l'annexe.

et

$$H_\sigma(x,y;\mu) = \sum_{\Psi\in\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} E^{\theta(P)}(x, B_{\sigma,\mu}\Psi, \theta(\mu))\overline{E^P(y,\Psi,\mu)}.$$

Proposition 7.3.1. *Le noyau $H(x,y)$ admet la décomposition spectrale*

$$H(x,y) = \sum_{M\in\mathcal{L}/\mathbf{W}} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} H_\sigma(x,y;\mu)\,\mathrm{d}\mu. \tag{7.5}$$

De plus, la somme sur Ψ dans l'expression $H_\sigma(x,y;\mu)$ est finie, et en posant

$$h(x,y) = \sum_{M\in\mathcal{L}/\mathbf{W}} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} |H_\sigma(x,y;\mu)|\,\mathrm{d}\mu,$$

on a la majoration (inégalité de Schwartz)

$$|H(x,y)| \le h(x,y) \le K_1K_1^*(x,x)^{1/2}K_2K_2^*(y,y)^{1/2}. \tag{7.6}$$

Démonstration. Comme dans la preuve de [25, proposition 7.2.2], cela résulte des généralités sur la décomposition spectrale des noyaux produits [25, proposition 7.1.1 (1)] et de la forme explicite de la décomposition spectrale automorphe (théorème 7.2.4). ∎

Pour $\delta \in \widetilde{G}(F)$, posons $\theta = \mathrm{Int}_\delta$ et $Q = \theta(P)$. On considère l'opérateur

$$\boldsymbol{\rho}(\delta, f, \omega) : L^2(\boldsymbol{X}_P) \to L^2(\boldsymbol{X}_Q),$$

défini par

$$\boldsymbol{\rho}(\delta, f,\omega)\phi(x) = \int_{\widetilde{G}(\mathbb{A})} f(y)(\omega\phi)(\delta^{-1}xy)\,\mathrm{d}y.$$

Il est donné par le noyau intégral

$$K_{Q,\delta}(x,y) = \int_{U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})} \omega(x) \sum_{\eta\in Q(F)} f(x^{-1}u^{-1}\eta^{-1}\delta y)\,\mathrm{d}u.$$

Soit $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^P$, et soit σ une représentation automorphe de $M_S(\mathbb{A})$. Pour $\mu \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ et $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$, on a défini en section 7.2 un opérateur

$$\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta, f,\omega) : \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta(S)}, \theta(\omega\otimes\sigma)).$$

Pour $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma)$ et $x \in \boldsymbol{X}_Q$, on a

$$\boldsymbol{\rho}(\delta, f,\omega)E^P(x,\Psi,\mu) = E^Q(x, \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta, f,\omega)\Psi, \theta(\mu)),$$

d'où

$$\int_{\boldsymbol{X}_P} K_{Q,\delta}(x,y)E^P(y,\Psi,\mu)\,\mathrm{d}y = E^Q(x,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta,f,\omega)\Psi,\theta(\mu)).$$

Rappelons que l'on a fixé une base orthonormale $\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$ de l'espace pré-hilbertien $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma)$. Pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, on pose

$$K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu) = \sum_{\Psi\in\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} E^Q(x,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta,f,\omega)\Psi,\theta(\mu))\overline{E^P(y,\Psi,\mu)}.$$

On a les variantes de la proposition 7.3.1 de [25] et de son corollaire 7.3.2 :

Proposition 7.3.2. *La fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ étant fixée, alors*

(i) *le noyau $K_{Q,\delta}(x,y)$ admet la décomposition spectrale suivante :*

$$K_{Q,\delta}(x,y) = \sum_{M\in\mathcal{L}^P/\mathbf{W}^P} \frac{1}{w^P(M)} \sum_{\sigma\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu)\,\mathrm{d}\mu\,;$$

(ii) *la restriction à $\mathfrak{S}\times G(\mathbb{A})$ de la fonction*

$$(x,y)\mapsto \sum_{M\in\mathcal{L}^P/\mathbf{W}^P} \frac{1}{w^P(M)} \sum_{\sigma\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} |\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu)|\,\mathrm{d}\mu$$

est bornée et à support compact en x, et à croissance lente en y.

Démonstration. Le point (i) est une conséquence de la proposition 7.3.1 et de la section 6.2 : on choisit un sous-groupe ouvert compact $\boldsymbol{K}'$ de $G(\mathbb{A})$ tel que $e_{\boldsymbol{K}'} * f * e_{\boldsymbol{K}'} = f$ et $\omega|_{\boldsymbol{K}'} = 1$; pour $S\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}^P$, $\sigma\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$ et $\mu\in\boldsymbol{\mu}_S$, on considère les opérateurs

$$A_{1,\sigma,\mu} = \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta,f,\omega) \quad \text{et} \quad A_{2,\sigma,\mu} = \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(e_{\boldsymbol{K}'}),$$

puis on pose $B_{\sigma,\mu} = A_{1,\sigma,\mu}A_{2,\sigma,\mu}^*$.

On en déduit que le noyau tronqué $\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,\delta}(x,y)$ est égal à

$$\sum_{M\in\mathcal{L}^P/\mathbf{W}} \frac{1}{w^P(M)} \sum_{\sigma\in\Pi_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma)\int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

On observe que, grâce à la factorisation de la section 6.2, on a

$$\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,P,\sigma}(x,y;\mu) = \int_{\boldsymbol{X}_G} \boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q}K_{Q,P,\sigma}(x,z;\mu)K_{P,P,\sigma}^*(e_{\boldsymbol{K}'};z,y;\mu)\,\mathrm{d}z$$

avec

$$K_{P,P,\sigma}^*(e_{\boldsymbol{K}'};z,y;\mu) = \sum_{\Psi\in\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} E^P(z,\Psi,\mu)\overline{E^P(y,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(e_{\boldsymbol{K}'})\Psi,\mu)}.$$

On en déduit le point (ii), comme dans la preuve de [25, proposition 7.3.1 (ii)], grâce à l'inégalité de Schwarz (7.6), au lemme 6.3.1 (i), et à l'inégalité du lemme 6.1.1. ■

Corollaire 7.3.3. *La restriction à $\mathfrak{S} \times G(\mathbb{A})$ de la fonction*

$$(x, y) \mapsto |\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(x, y)|$$

est bornée et à support compact en x, et à croissance lente en y.

Partie III

La formule des traces grossière

Chapitre 8

Formule des traces : état zéro

8.1 Le cas compact

Dans cette section nous établissons la formule des traces tordue dans le cas où G_{der} est anisotrope, c'est-à-dire où

$$\overline{\boldsymbol{X}}_G = A_G(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A})$$

est compact. On pose

$$\boldsymbol{Y}_G \stackrel{\text{déf}}{=} A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

Rappelons que l'on a fixé un caractère unitaire ω de $G(\mathbb{A})$ qui soit trivial sur le groupe $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G(F)$. Pour $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ on considère l'intégrale

$$J(f,\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} K(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}x,$$

avec

$$K(f,\omega;x,y) = \sum_{\delta\in\widetilde{G}(F)} f(x^{-1}\delta y)\omega(y).$$

Il est facile de montrer que l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_G$ est absolument convergente. Indiquons rapidement comment on en déduit la formule des traces. Pour plus de détails on renvoie aux chapitres suivants, où les résultats de ce paragraphe seront établis dans un cadre plus général.

On peut développer l'intégrale suivant les classes de conjugaison. On note $\widetilde{\Gamma}$ un système de représentants des classes de $G(F)$-conjugaison dans $\widetilde{G}(F)$ et $G^\delta(F)$ le groupe des points F-rationnels du centralisateur G^δ de δ dans G. Pour $\delta \in \widetilde{G}(F)$, on choisit une mesure de Haar sur $G^\delta(\mathbb{A})$ et on pose

$$a^G(\delta) = \mathrm{vol}(A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^\delta(F)\backslash G^\delta(\mathbb{A})).$$

Si $G^\delta(\mathbb{A}) \not\subset \ker(\omega)$ on pose

$$\mathcal{O}_\delta(f,\omega) = 0$$

et, si $G^\delta(\mathbb{A}) \subset \ker(\omega)$, on pose

$$\mathcal{O}_\delta(f,\omega) = \int_{G^\delta(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \omega(g)f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}\dot{g},$$

où $\mathrm{d}\dot{g}$ est la mesure quotient.

Proposition 8.1.1. *Si G_{der} est anisotrope, on a le développement géométrique*

$$J(f,\omega)=\sum_{\delta\in\widetilde{\Gamma}}a^G(\delta)\mathcal{O}_\delta(f,\omega).$$

Seul un nombre fini de δ (dépendant du support de f) donne une contribution non nulle à la somme.

Nous allons maintenant considérer le développement spectral. En général, $J(f,\omega)$ n'est pas une trace car, sauf si A_G est trivial, l'opérateur $\widetilde{\rho}(f,\omega)$ opérant dans $L^2(\boldsymbol{X}_G)$ n'est pas un opérateur à trace.

Rappelons qu'on a noté $\Xi(G)$ le groupe des caractères unitaires automorphes de $A_G(\mathbb{A})$. On note

$$\Xi(G,\widetilde{G})\subset\Xi(G)$$

le sous-groupe des caractères triviaux sur $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})$. Les groupes $\Xi(G)$ et $\Xi(G,\widetilde{G})$ sont munis de mesures de Haar en suivant les conventions 1.3.1 : elles donnent le volume 1 à $\widehat{\mathcal{B}}_G$ et $\widehat{\mathcal{B}}_G^{\widetilde{G}}$ respectivement[1]. Soit

$$\Xi(G,\theta,\omega)\subset\Xi(G)$$

le sous-ensemble formé des caractères ξ tels que, en notant ω_{A_G} la restriction de ω à $A_G(\mathbb{A})$, on ait

$$\xi\circ\theta=\omega_{A_G}\otimes\xi.$$

Si $\Xi(G,\theta,\omega)$ est non vide, c'est un espace tordu sous le groupe $\Xi(G)^\theta$ des points fixes sous θ dans $\Xi(G)$. On observe que $\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta$ est un sous-groupe ouvert de $\Xi(G)^\theta$. On munit $\Xi(G)^\theta$ de la mesure de Haar telle que $\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta)=1$ ce qui fournit une mesure $\Xi(G)^\theta$-invariante sur $\Xi(G,\theta,\omega)$.

Considérons un caractère $\xi\in\Xi(G)$ et posons pour x et y dans $G(\mathbb{A})$,

$$K_\xi(f,\omega;x,y)=\sum_{\delta\in A_G(F)\backslash\widetilde{G}(F)}\int_{A_G(\mathbb{A})}\overline{\xi(z)}\,f(z^{-1}x^{-1}\delta y)\omega(y)\,\mathrm{d}z,$$

soit encore

$$K_\xi(f,\omega;x,y)=\int_{A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A})}\overline{\xi(z)}K(f,\omega;zx,y)\,\mathrm{d}z.$$

Par inversion de Fourier, on voit que

$$K(f,\omega;x,y)=\int_{\xi\in\Xi(G)}K_\xi(f,\omega;x,y)\,\mathrm{d}\xi,$$

[1]Rappelons que $\widehat{\mathcal{B}}_G^{\widetilde{G}}$ est le dual de Pontryagin du réseau $\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}}=\mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{B}_G$ de $\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}$.

et on observe que

$$K_\xi(f,\omega;zx,zy)=\zeta_\xi(z)K_\xi(f,\omega;x,y),\tag{8.1}$$

où

$$\zeta_\xi=(\xi\circ\theta)^{-1}\cdot(\omega_{A_G}\otimes\xi)=\omega_{A_G}\otimes\xi^{1-\theta}$$

est un élément du groupe $\Xi(G,\widetilde{G})$. On observe aussi que, par définition,

$$\zeta_\xi=1\quad\text{équivaut à}\quad\xi\in\Xi(G,\theta,\omega).$$

Pour $\xi\in\Xi(G)$, on note $L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi$ l'espace de Hilbert des fonctions sur $\boldsymbol{X}_G$ qui se transforment suivant ξ sur $A_G(\mathbb{A})$. Lorsque $\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)$, c'est-à-dire si $\zeta_\xi=1$, l'opérateur $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)$ induit un endomorphisme de $L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi$. D'après le théorème 7.1.1, c'est un opérateur de rang fini. On pose

$$J(f,\omega,\xi)\overset{\text{déf}}{=}\int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G}K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}x$$

et on a

$$J(f,\omega,\xi)=\operatorname{trace}\big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi\big).\tag{8.2}$$

On note

$$\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations automorphes irréductibles de $G(\mathbb{A})$ discrètes modulo le centre, qui admettent un prolongement à $(\widetilde{G}(\mathbb{A}),\omega)$. Pour $\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)$, on note $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_\xi$ le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)$, formé des représentations dont le caractère central restreint à $A_G(\mathbb{A})$ est égal à ξ. Enfin pour $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(\Pi,\omega)_\xi$, on note

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi)$$

la composante isotypique de π dans

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G)_\xi\subset L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi.$$

Lemme 8.1.2. *Pour $\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)$, on a*

$$J(f,\omega,\xi)=\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_\xi}\operatorname{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi)\Big).$$

Démonstration. On observe que les représentations π qui n'admettent pas de prolongement à $(\widetilde{G}(\mathbb{A}),\omega)$ contribuent par zéro à la trace de l'opérateur $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)$. ∎

On choisit, pour chaque $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G}, \omega)$, un prolongement $\widetilde{\pi}$ à $(\widetilde{G}(\mathbb{A}), \omega)$ de π (plus correctement, d'un représentant (π, V_π) de la classe π) et on note $m(\pi, \widetilde{\pi})$ la multiplicité tordue de $(\pi, \widetilde{\pi})$ dans $L^2(X_G)_{\xi_\pi}$, définie dans [25, section 2.4], où ξ_π est la restriction à $A_G(\mathbb{A})$ du caractère central de π. Le nombre

$$m(\pi, \widetilde{\pi})\mathrm{trace}(\widetilde{\pi}(f, \omega)|V_\pi)$$

ne dépend pas du choix de $\widetilde{\pi}$. Ceci fournit une nouvelle expression :

$$J(f, \omega, \xi) = \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G}, \omega)_\xi} m(\pi, \widetilde{\pi})\mathrm{trace}(\widetilde{\pi}(f, \omega)|V_\pi).$$

Lemme 8.1.3. *On suppose que l'ensemble $\Xi(G, \theta, \omega)$ est non vide. Si $\{\psi\}$ est une famille de fonctions sur $\Xi(G, \widetilde{G})$ qui tend, au sens des distributions, vers la masse de Dirac à l'origine, alors pour tout fonction κ lisse sur $\Xi(G)$, on a*

$$\lim_{\psi} \int_{\xi \in \Xi(G)} \psi(\omega_{A_G} \otimes \xi^{1-\theta})\kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\xi \in \Xi(G, \theta, \omega)} \kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe $\xi_0 \in \Xi(G, \theta, \omega)$. En écrivant ξ sous la forme $\xi = \xi_0\xi_1\xi_2$ avec $\xi_2 \in \Xi(G)^\theta$, on a

$$\omega_{A_G} \otimes \xi^{1-\theta} = \xi_1^{1-\theta}.$$

On observe alors qu'en posant $\Xi(G)_1 = \Xi(G)/\Xi(G)^\theta$, on a

$$\int_{\xi \in \Xi(G)} \psi(\omega_{A_G} \otimes \xi^{1-\theta})k(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\xi_1 \in \Xi(G)_1} \psi(\xi_1^{1-\theta})\left(\int_{\xi_2 \in \Xi(G)^\theta} k(\xi_0\xi_1\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_2\right)\mathrm{d}\xi_1.$$

On peut supposer que ψ est à support dans le tore compact

$$\widehat{\mathcal{B}}_G^{\widetilde{G}} = (1-\theta)\widehat{\mathcal{B}}_G \ (\subset \Xi(G, \widetilde{G})).$$

Puisque les mesures sont compatibles avec la suite exacte courte

$$0 \to \widehat{\mathcal{B}}_G^\theta \to \widehat{\mathcal{B}}_G \xrightarrow{1-\theta} \widehat{\mathcal{B}}_G^{\widetilde{G}} \to 0,$$

le lemme en résulte. ∎

Proposition 8.1.4. *Si G_{der} est anisotrope, on a l'identité :*

$$J(f, \omega) = \int_{\xi \in \Xi(G, \theta, \omega)} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f, \omega)|L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi\Big)\,\mathrm{d}\xi,$$

soit encore

$$J(f, \omega) = \int_{\xi \in \Xi(G, \theta, \omega)} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G}, \omega)_\xi} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f, \omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G, \pi)\Big).$$

Démonstration. Par définition,

$$J(f,\omega)=\int_{\boldsymbol{Y}_G}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x,$$

soit encore

$$J(f,\omega)=\int_{\dot{x}\in\overline{\boldsymbol{X}}_G}\int_{z\in A_G(F)A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_G(\mathbb{A})}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}K_\xi(f,\omega;zx,zx)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x}.$$

Considérons une famille $\{\phi\}$ de fonctions à support compact sur le groupe abélien localement compact

$$A_G(F)A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_G(\mathbb{A})$$

et tendant vers la fonction 1, de sorte que la famille $\{\widehat{\phi}\}$ de leurs transformées de Fourier tende vers la masse de Dirac sur $\Xi(G,\widetilde{G})$ à l'origine. Alors $J(f,\omega)$ est égal à

$$\lim_{\phi\to 1}\int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G}\int_{A_G(F)A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_G(\mathbb{A})}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}K_\xi(f,\omega;zx,zx)\,\mathrm{d}\xi\right)\phi(z^{-1})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x},$$

soit encore, en utilisant l'équation (8.1), à

$$\lim_{\phi\to 1}\int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G}\int_{A_G(F)A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_G(\mathbb{A})}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}\phi(z^{-1})\zeta_\xi(z)K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{x}.$$

Comme ϕ est à support compact, on peut intervertir les intégrations en z et ξ, et on a

$$J(f,\omega)=\lim_{\phi\to 1}\int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G}\left(\int_{\xi\in\Xi(G)}\widehat{\phi}(\zeta_\xi)K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\dot{x}.$$

Compte tenu du lemme 8.1.3, cette limite s'écrit

$$\int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G}\left(\int_{\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)}K_\xi(f,\omega;x,x)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\dot{x}.$$

Comme $\overline{\boldsymbol{X}}_G$ est compact, on peut encore intervertir, et on obtient

$$J(f,\omega)=\int_{\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)}J(f,\omega,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

On conclut en invoquant l'equation (8.2). ∎

On pose

$$\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}\overset{\text{déf}}{=}\widehat{\mathcal{A}}_{\widetilde{G}}$$

et on note $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)$ le quotient de $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)$ par la relation d'équivalence donnée par la torsion par les éléments de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}$. Pour $\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)$, on pose

$$\widehat{c}_{\widetilde{G}}(\pi)=\frac{|\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}|}{|\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}}(\pi)|},$$

où $\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}}(\pi)\subset\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}$ est le stabilisateur de π dans $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}$.

Lemme 8.1.5. *Le morphisme*

$$\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta \to \widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{G}} = \widehat{\mathcal{B}_G^\theta},$$

induit par $\xi \mapsto \xi|_{\mathcal{B}_{\widetilde{G}}}$, *est surjectif et son noyau est fini, de cardinal*

$$j(\widetilde{G}) = |\det(1-\theta|\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}})|.$$

Démonstration. Le groupe $\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta$ est le dual de Pontryagin du groupe $(1-\theta)\mathcal{B}_G\backslash\mathcal{B}_G$. Le morphisme composé

$$\mathcal{B}_{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_G^\theta \to \mathcal{B}_G \to (1-\theta)\mathcal{B}_G\backslash\mathcal{B}_G$$

est injectif et son conoyau est égal à

$$\big((1-\theta)\mathcal{B}_G + \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\big)\backslash\mathcal{B}_G = (1-\theta)\mathcal{B}_G\backslash\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}}.$$

Or, l'indice $[\mathcal{B}_G^{\widetilde{G}} : (1-\theta)\mathcal{B}_G]$ est égal à $|\det(1-\theta|\mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}})|$. D'où le lemme, par dualité de Pontryagin. ■

Avec les conventions 1.3.1 pour la normalisation des mesures ($\mathrm{vol}(\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}) = 1$), la proposition 8.1.4 s'écrit aussi :

Proposition 8.1.6. *Si* G_{der} *est anisotrope on a l'identité*

$$J(f,\omega) = j(\widetilde{G})^{-1} \sum_{\boldsymbol{\pi}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)} \hat{c}_{\widetilde{G}}(\pi) \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}} \mathrm{trace}\big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi_\lambda)\big)\,\mathrm{d}\lambda,$$

où, pour chaque classe $\boldsymbol{\pi}$, *on a choisi un représentant* π *dans* $\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)$. *Seul un nombre fini de* $\boldsymbol{\pi}$ *(dépendant de* f *) donne une contribution non triviale à la somme.*

Démonstration. On peut écrire

$$\int_{\Xi(G,\theta,\omega)}^{\oplus} L^2(\boldsymbol{X}_G)_\xi\,\mathrm{d}\xi = \bigoplus_{\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)^1} \int_{\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta}^{\oplus} L^2(\boldsymbol{X}_G)_{\xi\star\mu}\,\mathrm{d}\mu,$$

où $\Xi(G,\theta,\omega)^1 \subset \Xi(G)^1$ est l'ensemble des restrictions à $A_G(\mathbb{A})^1$ des éléments de $\Xi(G,\theta,\omega)$. On a donc

$$J(f,\omega) = \sum_{\xi\in\Xi(G,\theta,\omega)^1} \int_{\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta} \mathrm{trace}\big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|L^2(\boldsymbol{X}_G)_{\xi\star\mu}\big)\,\mathrm{d}\mu$$

et

$$\mathrm{trace}\big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|L^2(\boldsymbol{X}_G)_{\xi\star\mu}\big) = \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_{\xi\star\mu}} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi)\Big).$$

En remarquant que, pour tout $\nu \in \widehat{\mathfrak{C}}_{\widetilde{G}}$,

$$\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_{\xi\star\mu} \quad \text{équivaut à} \quad \pi \star \nu \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)_{\xi\star\mu},$$

puis en passant aux classes d'équivalence modulo torsion par les éléments de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}$, on obtient l'expression de l'énoncé, grâce au lemme 8.1.5. ∎

Corollaire 8.1.7. *Si G_{der} est anisotrope, la formule des traces tordue est l'identité*

$$\sum_{\delta\in\widetilde{\Gamma}} a^G(\delta)\mathcal{O}_\delta(f,\omega) = j(\widetilde{G})^{-1} \sum_{\pi\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(\widetilde{G},\omega)} \widehat{c}_{\widetilde{G}}(\pi)\int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}} \mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_G,\pi_\lambda)\Big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Ce sont les identités des propositions 8.1.1, 8.1.4 et 8.1.6 que nous devons généraliser lorsque G_{der} n'est plus nécessairement anisotrope. Il conviendra d'intégrer sur $\boldsymbol{Y}_G$ des avatars tronqués du noyau. La première étape est fournie par le paragraphe suivant.

8.2 L'identité fondamentale

Soit $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$. Pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, on pose

$$K_{\widetilde{P}}(x,y) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in\widetilde{P}(F)} \omega(y) f(x^{-1}\delta u y)\,\mathrm{d}u.$$

C'est le noyau de la représentation naturelle de $(\widetilde{G}(\mathbb{A}),\omega)$ dans $L^2(\boldsymbol{X}_P)$. Pour $Q \in \mathcal{P}$ tel que $Q \subset P$, on note $\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q} K_{\widetilde{P}}(x,y)$ l'opérateur de troncature $\boldsymbol{\Lambda}^{T,Q}$ appliqué à la fonction $x \mapsto K_{\widetilde{P}}(x,y)$, pour y fixé. Le lemme 8.2.1 de [25] est vrai ici.

On pose

$$k_{\mathrm{géom}}^T(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} k_{\widetilde{P},\mathrm{géom}}^T(\xi x)$$

avec

$$k_{\widetilde{P},\mathrm{géom}}^T(x) = \hat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(x)-T)K_{\widetilde{P}}(x,x)$$

et

$$k_{\mathrm{spec}}^T(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} k_{\widetilde{P},\mathrm{spec}}^T(\xi x)$$

avec

$$k_{\widetilde{P},\mathrm{spec}}^T(x) = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset P\subset R}} \sum_{\xi\in Q(F)\backslash P(F)} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(\xi x)-T)\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q} K_{\widetilde{P}}(\xi x,\xi x).$$

On a donc

$$k^T_{\mathrm{spec}}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset P\subset R}} \sum_{\xi\in Q(F)\backslash G(F)} \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(\xi x)-T)\mathbf{\Lambda}^{T,Q}_1 K_{\widetilde{P}}(\xi x,\xi x).$$

Tous ces termes ne dépendent que de la projection de T dans

$$\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_0 = \mathfrak{a}^G_0 \oplus \mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_G$$

et on a les identités

$$k^T_{\widetilde{P},\mathrm{géom}} = k^T_{\widetilde{P},\mathrm{spec}}, \qquad \text{pour tout} \qquad \widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}.$$

On en déduit l'identité fondamentale suivante.

Proposition 8.2.1. *On a l'identité* $k^T_{\mathrm{géom}} = k^T_{\mathrm{spec}}$.

Ce résultat, qui est une conséquence immédiate de la combinatoire des cônes, est le point de départ pour la formule des traces dans le cas non compact.

Chacune des expressions $k^T_{\mathrm{géom}}$ et k^T_{spec} possède un développement : la première suivant les classes d'équivalence de paires primitives et la seconde suivant la décomposition spectrale. Pour obtenir la formule des traces on intègre sur $\boldsymbol{Y}_G$ les fonctions $k^T_{\mathrm{géom}}$ et k^T_{spec}. On montrera que la convergence des intégrales (pour T suffisamment régulier) est compatible avec les développements de chacune de ces expressions. Ainsi, l'égalité de

$$\mathfrak{J}^T_{\mathrm{géom}}(f,\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\mathrm{géom}}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et de} \qquad \mathfrak{J}^T_{\mathrm{spec}}(f,\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\mathrm{spec}}(x)\,\mathrm{d}x$$

fournira la formule des traces, c'est-à-dire l'égalité du développement géométrique et du développement spectral. Précisons que l'égalité

$$\mathfrak{J}^T_{\mathrm{géom}}(f,\omega) = \mathfrak{J}^T_{\mathrm{spec}}(f,\omega)$$

est une égalité de fonctions dans PolExp : les intégrales convergent et sont égales pour $T\in\mathfrak{a}_0$ suffisamment régulier et elles définissent un même élément de PolExp (d'après le lemme 1.7.2).

Chapitre 9

Développement géométrique

9.1 Convergence : côté géométrique

Rappelons qu'on a introduit en section 3.3 l'ensemble $\mathfrak{O}$ des classes d'équivalence de paires primitives dans $\widetilde{G}(F)$ et que pour chaque $\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}$ on a défini un ensemble $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$ de classes de conjugaison de $\widetilde{G}(F)$. Compte tenu du lemme 3.3.2 on peut décomposer $k^T_{\text{géom}}(x)$ en

$$k^T_{\text{géom}}(x) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} k^T_{\mathfrak{o}}(x)$$

où $k^T_{\mathfrak{o}}$ ne comporte que la contribution des éléments $\delta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$:

$$k^T_{\mathfrak{o}}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} k^T_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(\xi x)$$

avec

$$k^T_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x) = \hat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(x) - T)K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x,x),$$

où

$$K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x,x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}\cap\widetilde{P}(F)} \omega(x) f(x^{-1}\delta u x)\, \mathrm{d}u.$$

On rappelle que d'après le lemme 3.3.2 (ii), on a la décomposition

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{P}(F) = (\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_P(F))U_P(F),$$

ce qui donne un sens à l'expression ci-dessus.

On considère Q, $R \in \mathcal{P}_{\text{st}}$. Rappelons que d'après [25, lemme 2.11.1] il existe un $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\text{st}}$ tel que $Q \subset P \subset R$ si et seulement si on a $Q^+ \subset R^-$. On a défini en section 3.4 un ensemble $\mathfrak{S}^Q_{P_0}(T_1, T)$ dépendant d'un compact $C_Q \subset G(\mathbb{A})$, et on a noté $F^Q_{P_0}(\cdot, T)$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$Q(F)\mathfrak{S}^Q_{P_0}(T_1, T).$$

Comme en [25, proposition 3.6.3], on suppose que C_Q est assez gros, et que T et $-T_1$ sont assez réguliers.

On pose[1]

$$\boldsymbol{Y}_Q = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})Q(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

[1]Le lecteur prendra garde que dans [25] on passe au quotient par $\mathfrak{B}_G$, qui, dans le cas des corps de nombres, est identifié à un sous-groupe du centre, car f a été intégrée sur le centre.

Le point clef pour la convergence du côté géométrique (théorème 9.1.2 ci-dessous) est le résultat suivant [25, proposition 9.1.1] :

Proposition 9.1.1. *Supposons T assez régulier, c'est-à-dire $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$ où c est une constante dépendant du support de f. L'intégrale*

$$\int_{\boldsymbol{Y}_Q} F^Q_{P_0}(x,T)\widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(x)-T)\left| \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}},\widetilde{Q}^+\subset\widetilde{P}\subset\widetilde{R}^-} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x,x)\right| \mathrm{d}x$$

est convergente.

Démonstration. Notons Ω_f le support de f. C'est un compact de $\widetilde{G}(\mathbb{A})$, et pour $x \in G(\mathbb{A})$ tel que $K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x,x) \neq 0$, on a $x^{-1}\delta u x \in \Omega_f$ pour des éléments $\delta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{P}(F)$ et $u \in U_P(\mathbb{A})$. Puisque $\mathbf{H}_G(x^{-1}\delta u x) = 0$ et $\Omega_f \cap G(\mathbb{A})^1$ est compact, on peut appliquer [25, corollaire 3.6.7] : si T est assez régulier, précisément si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$ où c est une constante dépendant de Ω_f, les $\delta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{P}(F)$ qui donnent une contribution non nulle à l'expression de l'énoncé appartiennent à $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{Q}^+(F)$. En utilisant la décomposition (point (ii) du lemme 3.3.2)

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{Q}^+(F) = (\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_{Q^+}(F))U_{Q^+}(F),$$

on peut donc comme dans la preuve de [25, proposition 9.1.1] remplacer $K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x,x)$ par une expression $\Phi_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x)$ qui s'écrit $\Phi_{\widetilde{P},\mathfrak{o}} = \sum_{\eta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}\cap\widetilde{M}_{Q^+}} \Phi_{\widetilde{P},\eta,\mathfrak{o}}(x)$ avec

$$\Phi_{\widetilde{P},\eta,\mathfrak{o}}(x) = \int_{U_P(F)\backslash U_P(\mathbb{A})} \sum_{\nu\in U_{Q^+}(F)} f(x^{-1}\eta\nu u x)\,\mathrm{d}u.$$

Posons

$$\Xi^R_Q(x) = \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(x)-T) \sum_{\eta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}\cap\widetilde{M}_{Q^+}} \left| \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}},Q\subset P\subset R} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \Phi_{\widetilde{P},\eta,\mathfrak{o}}(x)\right|.$$

Il s'agit de montrer que l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{Y}_Q} F^Q_{P_0}(x,T)\ \Xi^R_Q(x)\ \mathrm{d}x$$

est convergente. Posons

$$\boldsymbol{Z}_Q = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})A_Q(F)\backslash A_Q(\mathbb{A}) \subset \boldsymbol{Y}_Q.$$

On commence par estimer, pour $v \in U_Q(\mathbb{A})$ et $x \in G(\mathbb{A})$, l'intégrale

$$\Theta^R_Q(v,x) = \int_{\boldsymbol{Z}_Q} \Xi^R_Q(vax)\boldsymbol{\delta}_Q(a)^{-1}\,\mathrm{d}a,$$

de façon uniforme lorsque x reste dans un compact fixé. Notons que la somme sur η dans l'expression $\Xi_Q^R(vax)$ porte sur un ensemble fini, dépendant *a priori* de x et a. Comme dans la preuve de [25, proposition 9.1.1], on montre que pour x dans un compact fixé, l'ensemble des $a \in \boldsymbol{Z}_Q$ donnant une contribution non triviale à l'expression $\Theta_Q^R(v,x)$ est contenu dans un compact ; par conséquent la somme sur η dans l'expression $\Xi_Q^R(vax)$ porte sur un ensemble fini (indépendant de a et x dans un compact fixé). Il reste à estimer la somme sur a dans l'expression $\Theta_Q^R(v,x)$. Notons $\boldsymbol{Z}_Q^{R-}$ l'image de

$$A_Q(\mathbb{A}) \cap A_{R^-}(\mathbb{A})^1 = \{a \in A_Q(\mathbb{A}) : \mathbf{H}_{R^-}(a) = 0\}$$

dans $\boldsymbol{Z}_Q$. Le morphisme

$$1 - \theta_0 : \boldsymbol{Z}_Q \to \boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{Z}_{P_0}, \quad a \mapsto a\theta_0(a^{-1})$$

a pour noyau le sous-groupe $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_Q^{R-}$ de $\boldsymbol{Z}_{Q+}^{R-}$ formé des éléments θ_0-invariants. D'après la preuve [25, proposition 9.1.1], il suffit de considérer les $a \in \widetilde{\boldsymbol{Z}}_Q^{R-}$.

Soit $\mathfrak{u}$ l'algèbre de Lie de U_{Q+}. On n'a pas ici d'application exponentielle mais on peut fixer un F-isomorphisme de varietés algébriques $j : \mathfrak{u} \to U_{Q+}$ compatible avec l'action de A_{Q+}, i.e. tel que

$$j \circ \mathrm{Ad}_a = \mathrm{Int}_a \circ j$$

pour tout $a \in A_{Q+}$. On obtient j par restriction à partir d'un F-isomorphisme de variétés algébriques $j_0 : \mathfrak{u}_0 \to U_0$ compatible avec l'action de $A_0 = A_{P_0}$, où $\mathfrak{u}_0$ est l'algèbre de Lie de $U_0 = U_{P_0}$. Pour toute racine α de A_0 dans U_0, on pose $\alpha = \{\alpha, 2\alpha\}$ si 2α est une racine et $(\alpha) = \{\alpha\}$ sinon. On note $U_{(\alpha)}$ le F-sous-groupe de U_0 correspondant à (α) et $\mathfrak{u}_{(\alpha)}$ son algèbre de Lie. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines primitives (c'est-à-dire non divisibles) de A_0 dans U_0, ordonnées arbitrairement. On a la décomposition en produit direct $U_0 = U_{(\alpha_1)} \cdots U_{(\alpha_r)}$, resp. en somme directe $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}_{(\alpha_1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}_{(\alpha_r)}$, et il suffit de prouver que pour $i = 1, \dots, r$, il existe un F-isomorphisme de variétés algébriques $\xi_i : \mathfrak{u}_{(\alpha_i)} \to U_{(\alpha_i)}$ compatible avec l'action de A_0. Alors pour $X \in \mathfrak{u}_0$, on écrit $X = \sum_{i=1}^r X_i$ avec $X_i \in \mathfrak{u}_{(\alpha_i)}$ et on pose $j_0(X) = \xi_1(X_1) \cdots \xi_r(X_r)$. Fixons un indice i et prouvons l'existence de ξ_i. Supposons tout d'abord $(\alpha_i) = \{\alpha_i\}$. D'après [15, Lemma 21.17, Theorem 21.20], $U_{(\alpha_i)}$ est F-isomorphe, en tant que variété algébrique, à un espace affine V_i, la conjugaison par $a \in A_0$ sur $U_{(\alpha_i)}$ correspondant à la translation par $\alpha_i(a)$ sur V_i. Si maintenant $(\alpha_i) = \{\alpha_i, 2\alpha_i\}$, d'après [15, Lemma 21.19] et la preuve de [15, Theorem 21.20], il existe un F-isomorphisme de variétés algébriques

$$(U_{(\alpha_i)}/U_{(2\alpha_i)}) \times U_{(2\alpha_i)} \to U_{(\alpha_i)}$$

compatible avec l'action de A_0 et l'argument précédent s'applique à chacun des deux groupes unipotents $U_{(\alpha_i)}/U_{(2\alpha_i)}$ et $U_{(2\alpha_i)}$. Cela prouve l'existence de ξ_i en général, et donc celle de j_0. La restriction de j_0 à $\mathfrak{u}$ donne le F-isomorphisme $j : \mathfrak{u} \to U_{Q+}$ cherché ; il est compatible avec l'action de A_0. Observons que j induit une bijection $\mathfrak{u}(\mathbb{A}) \to U_{Q+}(\mathbb{A})$ qui se restreint en une bijection $\mathfrak{u}(F) \to U_{Q+}(F)$.

Soit $\mathfrak{u}^*$ le dual de $\mathfrak{u}$. Fixons un caractère non trivial ψ de $F\backslash\mathbb{A}$, et notons $\mathfrak{u}^\vee$ l'orthogonal de $\mathfrak{u}(F)$ dans $\mathfrak{u}^*(\mathbb{A})$ pour ce caractère. Pour $\Lambda \in \mathfrak{u}^*(\mathbb{A})$ et $u \in U_P(\mathbb{A})$, posons

$$g(x, \Lambda, \delta, u) = \int_{\mathfrak{u}(\mathbb{A})} \psi(\langle \Lambda, X\rangle) f(x^{-1}\delta j(X) u x)\, \mathrm{d}X.$$

Comme dans la preuve de [25, proposition 9.1.1], la formule de Poisson permet d'écrire

$$\Xi_Q^R(x) = \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T) \sum_{\eta} \left| \sum_{\Lambda \in \mathfrak{u}^\vee(Q,R)} g(x, \Lambda, \eta, 1) \right|,$$

où $\mathfrak{u}^\vee(Q, R)$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{u}^\vee$ défini en *loc. cit*. Observons qu'ici g est à support compact en Λ comme transformée de Fourier d'une fonction lisse à support compact. La suite de la démonstration est identique à celle de *loc. cit.* : via l'étude de l'action coadjointe de $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_Q^{R-}$ sur $\mathfrak{u}^\vee$, on obtient que la somme définissant $\Theta_Q^R(v, x)$ est absolument convergente, uniformément lorsque x reste dans un compact. On conclut comme à la fin de la preuve de *loc. cit.* ■

Rappelons que si le compact C_Q est assez gros, et si T et $-T_1$ sont assez réguliers, on a la partition [25, proposition 3.6.3]

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}, Q \subset P} \sum_{\xi \in Q(F)\backslash P(F)} F_{P_0}^Q(\xi x, T) \tau_Q^P(\mathbf{H}_0(\xi x) - T) = 1.$$

On en déduit un analogue de [25, théorème 9.1.2] :

Théorème 9.1.2. *Si T est assez régulier, précisément si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$ où c est une constante ne dépendant que du support de f, l'expression*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}} \int_{\boldsymbol{Y}_G} |k_{\mathfrak{o}}^T(x)|\, \mathrm{d}x$$

est convergente. De plus, seul un ensemble fini de classes $\mathfrak{o}$ (dépendant du support de f) donne une contribution non triviale à la somme.

L'intégrale étant absolument convergente, il est loisible de poser

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{o}}^T \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\mathfrak{o}}^T(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{J}_{\text{géom}}^T \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\text{géom}}^T(x)\, \mathrm{d}x.$$

On obtient alors le développement géométrique de la formule des traces :

Corollaire 9.1.3. *On a*

$$\mathfrak{J}_{\text{géom}}^T = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}} \mathfrak{J}_{\mathfrak{o}}^T.$$

Il ne s'agit ici que de la forme dite « grossière » du développement géométrique. Nous allons donner une forme plus explicite pour certains termes. La théorie des intégrales orbitales pour les corps de fonctions est encore à écrire. Elle sera bien sûr nécessaire pour un développement géométrique « fin » au sens de Langlands. Il est toutefois possible de traiter les termes primitifs (cf. section 9.2) et les termes quasi semi-simples comme pour les corps de nombres (cf. section 9.4). Pour les autres termes, on tombe sur des difficultés que nous n'essaierons pas de résoudre ici (cf. section 9.3). Il est raisonnable d'espérer que pour $p \gg 1$ ces difficultés disparaissent (cf. section 9.5).

9.2 Contribution des classes primitives

Notons $\mathfrak{O}_{\mathrm{prim}} \subset \mathfrak{O}$ l'ensemble des classes de $G(F)$-conjugaison d'éléments primitifs dans $\widetilde{G}(F)$. Pour $\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}_{\mathrm{prim}}$, l'expression

$$k_{\mathfrak{o}}^T(x) = \sum_{\delta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{o}}} \omega(x) f(x^{-1}\delta x)$$

ne dépend pas de T. On la note aussi $k_{\mathfrak{o}}(x)$. Avec les notations de la section 8.2, on a donc

$$k_{\mathrm{prim}}(f, \omega; x) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}_{\mathrm{prim}}} k_{\mathfrak{o}}(x)$$

et l'intégrale

$$J_{\mathrm{prim}}^{\widetilde{G}}(f, \omega) = \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\mathrm{prim}}(f, \omega; x)\,\mathrm{d}x \tag{9.1}$$

est absolument convergente. Elle définit une distribution sur $\widetilde{G}(\mathbb{A})$, donnée par

$$J_{\mathrm{prim}}^{\widetilde{G}}(f, \omega) = \sum_{\delta \in \widetilde{\Gamma}_{\mathrm{prim}}} \int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G(\mathbb{A})} \omega(g) f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}g \tag{9.2}$$

où $\widetilde{\Gamma}_{\mathrm{prim}}$ est un système de représentants des classes de $G(F)$-conjugaison dans $\widetilde{G}(F)_{\mathrm{prim}}$. Ici $G^{\delta}(F)$ est le groupe des points F-rationnels du centralisateur[2] G^{δ} de δ dans G, et $\mathrm{d}g$ est le quotient de la mesure de Haar sur $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ par la mesure de comptage sur $A_{\widetilde{G}}(F)\backslash G^{\delta}(F)$. Seul un nombre fini de δ (dépendant du support de f) donne une contribution non triviale à la somme.

[2]Vu comme F-schéma en groupes, G^{δ} n'est *a priori* ni lisse, ni connexe.

Corollaire 9.2.1. *Pour $\delta \in \widetilde{G}(F)_{\text{prim}}$, l'intégrale orbitale*

$$\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G(\mathbb{A})} \omega(g) f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}g$$

est absolument convergente.

Corollaire 9.2.2. *Pour $\delta \in \widetilde{G}(F)_{\text{prim}}$, le groupe (localement compact) $G^{\delta}(\mathbb{A})$ est unimodulaire et le quotient*

$$A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G^{\delta}(\mathbb{A})$$

est de volume fini.

Démonstration. Considérons le cas $\omega = 1$ et f positive. L'intégrale orbitale

$$\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G(\mathbb{A})} f(x^{-1}\delta x)\,\mathrm{d}x$$

étant convergente, il en résulte que pour toute fonction lisse φ et à support compact sur

$$Y = G^{\delta}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}),$$

l'intégrale

$$\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G(\mathbb{A})} \varphi(x) f(x^{-1}\delta x)\,\mathrm{d}x$$

est convergente et définit une fonctionnelle $G(\mathbb{A})$-invariante à droite sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions ψ sur Y de la forme $\psi(\dot{x}) = \varphi(\dot{x}) f(x^{-1}\delta x)$. Mais, en variant f et φ, on obtient ainsi toutes les fonctions lisses et à support compact sur Y. Il existe donc une mesure $G(\mathbb{A})$-invariante à droite sur Y, ce qui implique que le groupe $G^{\delta}(\mathbb{A})$ est unimodulaire, puisque $G(\mathbb{A})$ l'est. La convergence de l'intégrale orbitale implique que le volume de $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G^{\delta}(\mathbb{A})$ est fini. ∎

Pour $\delta \in \widetilde{G}(\mathbb{A})_{\text{prim}}$, on choisit une mesure de Haar sur $G^{\delta}(\mathbb{A})$ et on pose

$$a^{G}(\delta) = \mathrm{vol}(A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})G^{\delta}(F)\backslash G^{\delta}(\mathbb{A})),$$

où le volume est calculé en prenant la mesure quotient de la mesure de Haar sur $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash G^{\delta}(\mathbb{A})$ par la mesure de comptage sur $A_{\widetilde{G}}(F)\backslash G^{\delta}(F)$. Si $G^{\delta}(\mathbb{A}) \not\subset \ker(\omega)$, on pose

$$\mathcal{O}_{\delta}(f, \omega) = 0,$$

et si $G^{\delta}(\mathbb{A}) \subset \ker(\omega)$, on pose

$$\mathcal{O}_{\delta}(f, \omega) = \int_{G^{\delta}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \omega(g) f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}\dot{g},$$

où $\mathrm{d}\dot{g}$ est la mesure quotient de la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ par la mesure de Haar sur $G^\delta(\mathbb{A})$.

On fixe un système de représentants $\widetilde{\Gamma} \subset \widetilde{G}(F)$ des classes de $G(F)$-conjugaison dans $\widetilde{G}(F)$, et on note $\widetilde{\Gamma}_{\mathrm{prim}} \subset \widetilde{\Gamma}$ le sous-ensemble formé des éléments primitifs.

Proposition 9.2.3. *L'intégrale* (9.1) *est absolument convergente et définit une distribution invariante sur* $\widetilde{G}(\mathbb{A})$. *On a*

$$J^{\widetilde{G}}_{\mathrm{prim}}(f,\omega) = \sum_{\delta \in \widetilde{\Gamma}_{\mathrm{prim}}} a^G(\delta)\mathcal{O}_\delta(f,\omega), \tag{9.3}$$

où la somme porte sur un ensemble fini (dépendant du support de f*).*

Démonstration. Un calcul élémentaire fournit l'égalité (9.3). La finitude résulte du lemme 3.4.2. ∎

9.3 Sur la descente centrale

Dans [25, section 9.2], en vue de l'utilisation de la descente centrale de Harish Chandra, qui est une technique essentielle dans les travaux d'Arthur sur le développement géométrique fin, l'expression $k^T_{\mathfrak{o}}(x)$ est remplacée par une expression $j^T_{\mathfrak{o}}(x)$, de même intégrale sur $\boldsymbol{Y}_G$.[3] En caractéristique positive, le lemme 9.2.1 de [25], qui permet de faire ce remplacement, n'est plus vrai, même dans le cas non tordu. En effet considérons une paire primitive (M,δ) dans G et $P = MU$. Notons U^δ le centralisateur de δ dans U.[4] On considère le F-morphisme π_δ de variétés algébriques

$$\pi_\delta : U_P \times U_P^\delta \rightarrow U_P \qquad \text{défini par} \qquad (u,v) \mapsto u^{-1}v\,\mathrm{Int}_\delta(u).$$

En général l'inclusion $\pi_\delta(U_P \times U^\delta) \subset U_P$ est stricte et donc le lemme 9.2.2 de [25] est en défaut, comme le montre l'exemple ci-dessous.

---

[3]Rappelons qu'ici $\boldsymbol{Y}_G$ joue le rôle de l'espace $\mathbf{X}_G = \mathfrak{A}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ de [25]. Observons aussi que la définition de l'expression $j^T_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x)$ donnée dans [25, section 9.2] est incorrecte et doit être remplacée par celle donnée par **Err** (xi) dans l'annexe.

[4]Notons $(1-\delta)U$ l'image du F-endomorphisme $u \mapsto u.\mathrm{Int}_\delta(u)^{-1}$. Ce morphisme se factorise en un F-morphisme bijectif de variétés algébriques $U^\delta\backslash U \rightarrow (1-\delta)U$, qui n'est en général pas un isomorphisme. Au F-schéma en groupes (affine) U^δ, correspond un sous-groupe algébrique *F-fermé* (au sens de Borel [15]) de G, noté de la même manière. Le F-morphisme en question est un isomorphisme si et seulement s'il est séparable, auquel cas le F-schéma en groupes U^δ est géométriquement réduit (donc lisse) et correspond à un groupe algébrique défini sur F.

Supposons F de caractéristique $p > 0$. Soit γ un élément de $\mathrm{GL}_p(F)$ qui engendre une extension radicielle non triviale $E = F[\gamma]$ de F. Cette extension est de degré p et γ est primitif dans $\mathrm{GL}_p(F)$. Plongeons $M = \mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_p$ diagonalement dans GL_{2p} et notons δ l'élément (γ, γ) de $M(F)$. Alors (M, δ) est une paire primitive dans $G = \mathrm{GL}_{2p}$ et si P le sous-groupe parabolique standard de G de composante de Levi M, on a $U^\delta(F) \simeq E$. On identifie $U(F)$ à $M_p(F)$ et $U^\delta(F)$ à $E \subset M_p(F)$. On voit que dans ce cas l'application π_δ est donnée par

$$(x, y) \mapsto n(x) + y \qquad \text{où} \qquad n(x) \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Ad}(\gamma) - 1)x.$$

On peut choisir γ tel que γ^p soit scalaire et donc $(\mathrm{Ad}(\gamma) - 1)^p = 0$. Il en résulte que π_δ ne peut pas être surjective. Par exemple si $p = 2$, on a $\gamma n(x)\gamma^{-1} = n(x)$ et donc $n(x) \in E$ pour tout $x \in M_2(F)$, ce qui implique $n(x) + y \in E$ pour tout couple $(x, y) \in M_2(F) \times E$.

Cet exemple montre que pour les paires primitives $(\widetilde{M}, \delta)$ dans $\widetilde{G}$ avec $\widetilde{M} \neq \widetilde{G}$ et δ inséparable, la descente centrale ne fonctionne plus sans modification. C'est l'une des principales difficultés à résoudre du côté géométrique.

9.4 Contribution des classes quasi semi-simples

Un élément δ de $\widetilde{G}$ est dit *quasi semi-simple* si l'automorphisme $\tau = \mathrm{Int}_\delta$ de G est quasi semi-simple, c'est-à-dire s'il stabilise une paire de Borel (B, T) de G. Pour l'étude des automorphismes quasi semi-simples sur un corps quelconque, on renvoie à [31, chapitres 2 et 3]. Un automorphisme τ de G est quasi semi-simple si et seulement l'automorphisme τ_{der} de G_{der} est quasi semi-simple. La composante neutre $G_\tau = (G^\tau)^0$ du centralisateur d'un automorphisme quasi semi-simple τ de G est un groupe algébrique linéaire réductif (connexe)[5]. On prendra garde à ce que si F est de caractéristique $p > 0$, un automorphisme non trivial de G peut être quasi semi-simple et unipotent ; toutefois, un tel automorphisme est forcément quasi-central[6].

[5] Le théorème 4.6.3 de [31] affirme que ce groupe est défini sur F, ce qui n'est pas toujours vrai (la preuve de *loc. cit.* utilise le lemme 4.5.2 de [31] qui est faux en général). Pour un énoncé correct, on renvoie aux travaux récents de Adler-Lansky-Spice sur la question (https://www.arxiv.org/pdf/2503.00183). Nous nous limiterons ici aux éléments quasi-simples vérifiant la conclusion de [31, théorème 4.6.3].

[6] En caractéristique $p > 0$, un automorphisme τ de G est dit *unipotent* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\tau^{p^k} = \mathrm{Id}$. Par exemple pour $p = 2$, l'automorphisme $\tau : t \mapsto t^{-1}$ du tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est quasi semi-simple et unipotent. De plus le morphisme $1 - \tau : t \mapsto t^2$ de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ n'est pas séparable. Un automorphisme quasi semi-simple τ de G est dit *quasi-central* si $\dim(G_{\tau'}) \leq \dim(G_\tau)$ pour tout automorphisme quasi semi-simple τ' de G de la forme $\tau' = \mathrm{Int}_g \circ \tau$ avec $g \in G$.

Pour $\delta \in \widetilde{G}$ et $\tau = \mathrm{Int}_\delta$, notons $(1-\tau)G$ l'image du morphisme de G dans G :

$$1 - \tau : g \mapsto g\tau(g)^{-1}.$$

On dit que δ est *séparable* si le morphisme $1-\tau$ est séparable, c'est-à-dire s'il induit un isomorphisme de variétés algébriques

$$G^\delta \backslash G \to (1-\tau)G.$$

Si $\delta \in \widetilde{G}(F)$ est séparable, le F-schéma en groupes G^δ est lisse et correspond à un sous-groupe algébrique fermé de G défini sur F.

Soit $\delta \in \widetilde{G}(F)$ un élément quasi semi-simple. En général, δ n'est pas séparable, mais on sait que la composante neutre $G_\delta = (G^\delta)^0$ de son centralisateur est un groupe algébrique réductif (connexe). On suppose de plus qu'il est défini sur F. On peut alors, comme sur un corps de nombres, définir son *centralisateur stable* I_δ (cf. [25, section 2.6][7]) :

$$G_\delta \overset{\text{déf}}{=} G^{\delta,0} \subset I_\delta \subset G^\delta.$$

Considérons le tore déployé maximal A_δ dans le centre de I_δ, ou, ce qui revient au même, de G_δ, et notons M_δ le centralisateur de A_δ dans G. C'est un facteur de Levi de G, et δ est elliptique (mais pas nécessairement régulier) dans $\widetilde{M}_\delta = \delta M_\delta$, en d'autres termes[8] :

$$A_\delta = A_{\widetilde{M}_\delta}.$$

Notons $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}(\delta)$ le sous-ensemble de $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ formé des $\widetilde{P}$ tel que $\widetilde{M}_P$ contienne un conjugué de $\widetilde{M}_\delta$ dans $G(F)$. Soit $\mathfrak{o} = [\widetilde{M}, \delta]$ une paire primitive dans $\widetilde{G}$ et soit $\mathfrak{c}$ la classe de $G(F)$-conjugaison de δ dans $\widetilde{G}(F)$. La contribution de $\mathfrak{c}$ à $k_{\mathfrak{o}}^T(x)$ est donnée par

$$k_{\mathfrak{c}}^T(x) = \sum_{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}(\delta)} (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi \in P(F)\backslash G(F)} k_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}^T(\xi x)$$

avec

$$k_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}^T(x) = \hat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(x) - T) K_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(x,x),$$

[7] Le centre « schématique » Z_G n'est en général pas réduit. On considère le centre « réduit » $\mathfrak{Z}_G$ de G, c'est-à-dire le centre, au sens de Borel [15]. C'est un groupe algébrique diagonalisable, *a priori* seulement F-fermé, mais qui est en fait défini sur F : d'après [15, Theorem 18.2] il existe un tore maximal T de G défini sur F ; un tel tore se déploie sur une extension algébrique séparable E de F, par suite le sous-groupe fermé $\mathfrak{Z}_G \subset T$ est défini sur E, donc sur F, puisqu'il est F-fermé. Le centre « réduit » $\mathfrak{Z}_{\widetilde{G}} = \mathfrak{Z}_G^\theta$ de $\widetilde{G}$ est, lui aussi, un groupe algébrique diagonalisable, défini sur F. On prend pour I_δ le sous-groupe algébrique fermé de G, engendré par G_δ et $\mathfrak{Z}_{\widetilde{G}}$.

[8] Observons qu'un élément quasi semi-simple δ est primitif si et seulement s'il est elliptique régulier, c'est-à-dire que G_δ est un tore et le sous-tore déployé maximal de G_δ est égal à $A_{\widetilde{G}}$.

où

$$K_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(x,x) = \int_{U_P(\mathbb{A})} \sum_{\delta \in \mathfrak{c} \cap \widetilde{M}_P(F)} \omega(x) f(x^{-1}\delta u x)\, \mathrm{d}u.$$

Quitte à remplacer δ par un conjugué dans $G(F)$, on peut supposer que $\widetilde{M}_\delta$ est un facteur de Levi standard. Pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$, on définit l'ensemble

$$\mathbf{W}(\mathfrak{a}_{\widetilde{M}_\delta}, \widetilde{P}),$$

comme en [25, section 9.3] et on pose

$$j_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(x) = \iota(\delta)^{-1} \sum_{s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_{\widetilde{M}_\delta}, \widetilde{P})} \sum_{\eta \in I_{s(\delta)}(F) \backslash P(F)} \omega(x) f(x^{-1}\eta^{-1} s(\delta) \eta x),$$

où

$$s(\delta) = w_s \delta w_s^{-1} \quad \text{et} \quad \iota(\delta) = |I_\delta(F) \backslash G^\delta(F)|.$$

Enfin on pose

$$j_{\mathfrak{c}}^T(x) = \sum_{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi \in P(F) \backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)\, j_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(\xi x).$$

Observons que la somme sur $\widetilde{P}$ porte en fait sur le sous-ensemble $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}(\delta)$.

Lemme 9.4.1. *On a l'égalité des intégrales*

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\mathfrak{c}}^T(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{Y}_G} j_{\mathfrak{c}}^T(x)\, \mathrm{d}x.$$

Démonstration. Pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}(\delta)$ tel que l'orbite $\mathfrak{c}$ rencontre $\widetilde{P}(F)$, pour $\widetilde{M}_1 \subset \widetilde{M}_P$ un conjugué de $\widetilde{M}_\delta$, et pour $s \in \mathbf{W}(\mathfrak{a}_{\widetilde{M}_\delta}, \mathfrak{a}_{\widetilde{M}_1})$, d'après [31, proposition 3.7.6] le morphime

$$U_P \to U_P, \quad u \mapsto u^{-1} \mathrm{Int}_{s(\delta)}(u)$$

est séparable. Puisque le centralisateur $U_P^{s(\delta)} = U_P \cap G^{s(\delta)}$ est trivial, ce morphisme est un isomorphisme qui induit une application bijective $U_P(\mathbb{A}) \to U_P(\mathbb{A})$. On en déduit l'égalité

$$K_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(x,x) = \int_{U_P(F) \backslash U_P(\mathbb{A})} j_{\widetilde{P},\mathfrak{c}}(ux)\, \mathrm{d}u$$

et le lemme en résulte. ■

Posons

$$\mathcal{A}_{I_\delta} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{H}_{\widetilde{M}_\delta}(I_\delta(\mathbb{A})) \subset \mathcal{A}_{\widetilde{M}_\delta} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{A}_{I_\delta} \subset \mathcal{C}_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}.$$

Si le caractère ω de $G(\mathbb{A})$ est trivial sur $I_\delta(\mathbb{A})^1 = \ker(I_\delta(\mathbb{A}) \to \mathcal{A}_{I_\delta})$, il définit, par restriction à $I_\delta(\mathbb{A})$, un caractère de $\mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}}$ de la forme $H \mapsto e^{\langle \mu_\delta, H\rangle}$ pour un élément

$$\mu_\delta \in \ker(\boldsymbol{\mu}_{I_\delta} \to \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}) \subset \boldsymbol{\mu}_{I_\delta} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathcal{A}}_{I_\delta}.$$

On a introduit en section 3.2 la famille orthogonale $\mathfrak{Y}(x,T)$ et on pose

$$\boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x) = \omega(x) \sum_{H \in \mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}}} \Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(H, \mathfrak{Y}(x,T)) e^{\langle \mu_\delta, H\rangle}.$$

Lemme 9.4.2. *La fonction $T \mapsto \boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x)$ est dans* PolExp.

Démonstration. On a la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{B}_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}} \to \mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}} \to \mathbb{c}_{I_\delta} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{M}_\delta} \backslash \mathcal{A}_{I_\delta} \to 0.$$

On note $\mathcal{B}_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(Z) \subset \mathcal{C}_{I_\delta}^{\widetilde{G}}$ la fibre au-dessus de $Z \in \mathbb{c}_{I_\delta}$ et on pose

$$\eta_{\widetilde{M}_\delta, F}^{\widetilde{G}, \mathfrak{Y}(x,T)}(Z; \mu_\delta) = \sum_{H \in \mathcal{B}_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(Z)} \Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(H, \mathfrak{Y}(x,T)) e^{\langle \boldsymbol{\mu}_\delta, H\rangle}.$$

On a donc

$$\boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x) = \omega(x) \sum_{Z \in \mathbb{c}_{I_\delta}} \eta_{\widetilde{M}_\delta, F}^{\widetilde{G}, \mathfrak{Y}(x,T)}(Z; \mu_\delta).$$

L'assertion résulte alors de la proposition 2.1.3. ∎

Observons que pour $M \in \mathcal{L}$, $Q \in \mathcal{F}(M)$ et $m \in M(\mathbb{A})$ on a

$$Y_{mx,T,Q} = Y_{x,T,Q} - \mathbf{H}_Q(m)$$

et donc

$$\Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(H, \mathfrak{Y}(mx,T)) = \Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(H + \mathbf{H}_{M_\delta}(m), \mathfrak{Y}(x,T))$$

pour $m \in M_\delta(\mathbb{A})$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x)$ est invariante par translation à gauche par $h \in I_\delta(\mathbb{A})$.

Proposition 9.4.3. *Si $I_\delta(\mathbb{A})^1 \subset \ker(\omega)$, on a l'identité*

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} j_c^T(x)\,\mathrm{d}x = \iota(\delta)^{-1} \mathrm{vol}\Big(I_\delta(F) \backslash I_\delta(\mathbb{A})^1\Big) \int_{I_\delta(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} \boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega, x) f(x^{-1}\delta x)\,\mathrm{d}\dot{x}.$$

L'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_G$ est nulle sinon.

Démonstration. Posons

$$e_{\widetilde{M}_\delta}(x,T) = \sum_{s\in\mathbf{W}(\mathfrak{a}_{\widetilde{M}_\delta})} \sum_{\widetilde{Q}\in\mathcal{F}_s(\widetilde{M}_\delta)} (-1)^{a_{\widetilde{Q}}-a_{\widetilde{G}}}\, \widehat{\tau}_{\widetilde{Q}}(s^{-1}(\mathbf{H}_0(w_s x)-T)).$$

Comme dans la preuve de [25, proposition 9.3.1] on a

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} j_{\mathrm{c}}^T(x)\,\mathrm{d}x = \iota(\delta)^{-1}\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})I_\delta(F)\backslash G(\mathbb{A})} \omega(x) e_{\widetilde{M}_\delta}(x,T) f(x^{-1}\delta x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour que l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_G$ soit non nulle, il faut que $I_\delta(\mathbb{A})^1$ soit inclus dans $\ker(\omega)$. Si tel est le cas, on observe que pour $h\in M_\delta(\mathbb{A})$ on a

$$e_{\widetilde{M}_\delta}(hx,T) = \Gamma_{\widetilde{M}_\delta}^{\widetilde{G}}(\mathbf{H}_{M_\delta}(h), \mathfrak{Y}(x,T))$$

et donc que

$$\int_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})I_\delta(F)\backslash I_\delta(\mathbb{A})} \omega(hx) e_{\widetilde{M}_\delta}(hx,T)\,\mathrm{d}h = \mathrm{vol}(I_\delta(F)\backslash I_\delta(\mathbb{A})^1)\, \boldsymbol{v}_{\widetilde{M}_\delta}^T(\omega,x). \qquad \blacksquare$$

9.5 Sur le développement géométrique fin

Le développement géométrique fin consiste en l'expression des termes du développement géométrique du corollaire 9.1.3 au moyen d'intégrales orbitales pondérées. Les propositions 9.2.3 et 9.4.3 fournissent une telle expression pour les termes primitifs ou quasi semi-simples.

Les autres termes font intervenir des contributions unipotentes et, comme on a vu en section 9.3, la descente centrale ne peut plus être utilisée en général sans modification. On ne peut donc pas espérer pouvoir reprendre sans efforts les travaux d'Arthur, à moins d'imposer à p d'être « suffisament grand » par rapport au rang de G de sorte que[9] :

- pour toute paire primitive $(\widetilde{M},\delta)$, l'élément δ est quasi semi-simple ;
- pour tout $\delta\in\widetilde{G}(F)$, l'automorphisme Int_δ de G est séparable ;
- pour tout $\delta\in\widetilde{G}(F)$ on a une décomposition de Jordan

  $$\delta = \delta_{\mathrm{s}}\delta_{\mathrm{u}} = \delta_{\mathrm{u}}\delta_{\mathrm{s}},$$

  en partie quasi semi-simple δ_s et partie unipotente δ_{u} définie sur F ;

[9] Les hypothèses sont probablement redondantes : il s'agit d'une liste de propriétés toujours vraies pour un corps de nombres mais, en général, fausses pour un corps de fonctions.

- pour tout $\delta \in \widetilde{G}(F)$ quasi semi-simple et tout ensemble fini S de places de F, il n'y a qu'un nombre fini de classes de $G_\delta(F_S)$-conjugaison unipotentes.

Observons que si, comme le fait Arthur, on se limite au cas où un (et donc tout) $\delta \in \widetilde{G}(F)$ induit un automorphisme extérieur d'ordre fini de G, on peut alors demander que le centre schématique Z_G soit réduit et que $\widetilde{G}$ induise un automorphisme de Z_G d'ordre fini premier à p.

Une hypothèse plus forte que les précédentes, mais aussi plus facile à vérifier, est la suivante. On considère $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)$ comme un espace tordu c'est-à-dire que GL_n agit sur lui même par conjugaison. On demande qu'il existe un entier $n < p$ et un F-morphisme d'espaces tordus algébriques

$$\iota : (\widetilde{G}, G) \to (\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n)$$

d'image fermée et qui soit un isomorphisme sur son image. Sous ces hypothèses, il doit être possible de reprendre, sans grands changements, les travaux d'Arthur sur le développement géométrique fin : on commence par traiter les contributions unipotentes, c'est-à-dire les paires primitives $(\widetilde{M}, \delta)$ avec δ quasi semi-simple et unipotent ; puis on traite le cas général par descente centrale. Toutefois, cela reste à faire.

Chapitre 10

Première forme du développement spectral

10.1 Convergence : côté spectral

On commence par réécrire l'expression pour $k^T_{\mathrm{spec}}(x)$ définie en section 8.2. Pour $Q,\ R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on pose

$$k^T_{\mathrm{spec}}(Q,R,x) = \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(x)-T) \sum_{\substack{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}\\ \widetilde{Q}^+\subset\widetilde{P}\subset\widetilde{R}^-}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \mathbf{\Lambda}^{T,Q}_1 K_{\widetilde{P}}(x,x).$$

On a donc

$$k^T_{\mathrm{spec}}(x) = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset R}} \sum_{\xi\in Q(F)\backslash G(F)} k^T_{\mathrm{spec}}(Q,R,\xi x).$$

On pose

$$\widetilde{\epsilon}(Q,R) = \begin{cases} (-1)^{a_{\widetilde{R}}-a_{\widetilde{G}}} & \text{si } Q^+\subset R^-,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

et on note $\widetilde{G}(Q,R)$ l'ensemble des $\delta\in\widetilde{G}(F)$ tels que $\delta\in\widetilde{P}(F)$ pour un seul $\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ tel que $\widetilde{Q}^+\subset\widetilde{P}\subset\widetilde{R}^-$ (autrement dit l'ensemble des $\delta\in\widetilde{R}^-(F)$, tels que $\delta\notin\widetilde{P}(F)$ pour tout $\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$, tel que $\widetilde{Q}^+\subset\widetilde{P}\subsetneq\widetilde{R}^-$). On pose

$$K_{Q,R}(x,y) = \int_{U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in\widetilde{G}(Q,R)} \omega(y) f(x^{-1}u_Q^{-1}\delta y)\,\mathrm{d}u_Q.$$

D'après [25, lemme 10.1.1], on a

(10.1)
$$k^T_{\mathrm{spec}}(x) = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset R}} \widetilde{\epsilon}(Q,R) \sum_{\xi\in Q(F)\backslash G(F)} \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(\xi x)-T)\mathbf{\Lambda}^{T,Q}_1 K_{Q,R}(x,\xi x).$$

Pour $\delta\in\widetilde{G}(F)$, on a défini $K_{Q,\delta}(x,y)$ dans la proposition 7.3.2, et on pose

$$Q_\delta = Q\cap \mathrm{Int}_\delta^{-1}(Q)\in\mathcal{P}^Q_{\mathrm{st}}.$$

On a donc

$$K_{Q,R}(x,x) = \sum_{\delta\in\widetilde{\mathbf{W}}(Q,R)} \sum_{\xi\in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} K_{Q,\delta}(x,\xi x), \tag{10.2}$$

où $\widetilde{\mathbf{W}}(Q,R)$ est un ensemble de représentants de $\widetilde{G}(Q,R)$ modulo $Q(F)$ à droite et à gauche, i.e. des doubles classes $Q(F)\backslash\widetilde{G}(Q,R)/Q(F)$. Rappelons que l'on a posé

$$\boldsymbol{Y}_{Q_\delta} = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})Q_\delta(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

Rappelons aussi que l'on a fixé en section 3.4 un sous-ensemble fini $\mathfrak{C}_Q$ de $M_0(\mathbb{A})$ tel que $M_Q(\mathbb{A}) = \mathfrak{B}_Q\mathfrak{C}_Q M_Q(\mathbb{A})^1$ où $\mathfrak{B}_Q \subset A_Q(\mathbb{A})$ est l'image d'une section du morphisme $A_Q(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_Q$. On pose

$$M_Q(\mathbb{A})^* \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{C}_Q M_Q(\mathbb{A})^1 = M_Q(\mathbb{A})^1\mathfrak{C}_Q.$$

On a donc $M_Q(\mathbb{A}) = \mathfrak{B}_Q M_Q(\mathbb{A})^*$. On suppose de plus, ce qui est loisible, que $\mathfrak{B}_Q$ est de la forme

$$\mathfrak{B}_Q = \mathfrak{B}_{\widetilde{G}}\mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}},$$

où $\mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}$ est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_Q(\mathbb{A}) \to A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_Q(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_Q^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{B}_Q$$

et $\mathfrak{B}_{\widetilde{G}}$ est l'image d'une section du morphisme $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_{\widetilde{G}}$. Les lemmes 10.1.2 à 10.1.4 de [25] sont vrais ici, et on a la variante de [25, lemme 10.1.5] :

Lemme 10.1.1. *Soient $\delta \in Q(F)\backslash\widetilde{G}(Q,R)$, $u \in U_Q(\mathbb{A})$, $a \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}$, $k_1, k_2 \in \boldsymbol{K}$ et $m_1, m_2 \in M_Q(\mathbb{A})^*$. Supposons que, pour un $\xi \in Q(F)$, on ait*

$$K_{Q,\delta}(am_1k_1, \xi uam_2k_2) \neq 0 \quad \textit{et} \quad \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(a)) = 1.$$

Alors on a

$$\|\mathbf{H}_0(a)\| \leq c(1 + \|\mathbf{H}_0(m_2)\|)$$

pour une constante $c > 0$ ne dépendant que du support de f.

Démonstration. On reprend, en la modifiant, celle de [25, lemme 10.1.5]. On commence par modifier δ et ξ, comme au début de la preuve de *loc. cit.* : on suppose que $\delta = w_{s_0}\delta_0$, où $w_{s_0} \in M_{R^-}(F)$ représente un élément s_0 du groupe de Weyl $\mathbf{W}^{M_{R^-}}$ de M_{R^-} tel que $s_0^{-1}\alpha > 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta_0^Q$, et $\xi \in U_0(F)$. Pour $i = 1, 2$, on écrit $m_i = m_i'x_i$ avec $m_i' \in M_Q(\mathbb{A})^1$ et $x_i \in \mathfrak{C}_Q$. Rappelons que

$$K_{Q,\delta}(x,y) = \int_{U_Q(\mathbb{A})} \omega(x) \sum_{\mu \in M_Q(F)} f(x^{-1}u_Q^{-1}\mu\delta y)\,\mathrm{d}u_Q.$$

On a supposé

$$K_{Q,\delta}(am_1k_1, \xi uam_2k_2) \neq 0,$$

ce qui n'est possible que s'il existe un $u_Q \in U_Q(\mathbb{A})$ et un $\mu \in M_Q(F)$ tels que

$$k_1^{-1}x_1^{-1}m_1'^{-1}a^{-1}u_Q^{-1}\mu\delta\xi uam_2'x_2k_2$$

appartient au support de f. On en déduit qu'il existe un compact Ω de $G(\mathbb{A})$, ne dépendant que du support de f, tel que

$$m_1'^{-1}a^{-1}u_Q^{-1}\mu\delta\xi uam_2' \in \Omega.$$

On décompose $H = \mathbf{H}_0(a)$ suivant la décomposition

$$\mathfrak{a}_Q^{\widetilde{G}} = \mathfrak{a}_Q^{R^-} \oplus \mathfrak{b}_{R^-}^G \oplus \mathfrak{a}_{\widetilde{R}^-}^{\widetilde{G}} \oplus \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}},$$

où $\mathfrak{b}_{R^-}^G$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\widetilde{R}}^{\widetilde{G}}$ dans $\mathfrak{a}_{R^-}^G$. On rappelle que $\theta - 1 : \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}} \to \mathfrak{a}_G^{\widetilde{G}}$ est un automorphisme. Comme dans la preuve de *loc. cit.*, il suffit de considérer les $a \in \mathfrak{B}_Q$ tels que $H \in \mathfrak{a}_Q^{R^-}$ et la suite de la démonstration est identique. ■

Proposition 10.1.2. *Supposons T assez régulier, c'est-à-dire $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c$, où c est une constante dépendant du support de f. Alors pour tous Q, $R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $Q \subset R$ et tout $\delta \in \widetilde{G}(Q, R)$, l'intégrale*

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_\delta}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T)|\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(x,x)|\,\mathrm{d}x$$

est convergente.

Démonstration. C'est l'analogue de [25, proposition 10.1.6]. Rappelons que

$$G(\mathbb{A}) = U_Q(\mathbb{A})M_Q(\mathbb{A})\boldsymbol{K}.$$

Puisque $U_Q(F)\backslash U_Q(\mathbb{A})$ est compact, il existe un compact $\Omega \subset U_Q(\mathbb{A})$ tel que $U_Q(\mathbb{A}) = U_Q(F)\Omega$. On a donc

$$G(\mathbb{A}) = Q(F)\Omega\mathfrak{S}^{M_Q}\boldsymbol{K},$$

où

$$\mathfrak{S}^{M_Q} = \mathfrak{B}_Q\mathfrak{S}^{M_Q,*} = (\mathfrak{B}_{\widetilde{G}}\mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}})(\mathfrak{E}_Q\mathfrak{S}^{M_Q,1})$$

est un domaine de Siegel pour le quotient $M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})$. On pose $\mathfrak{S}_Q^* = \mathfrak{S}^{M_Q,*}$. Alors $\Omega\,\mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}\,\mathfrak{S}_Q^*\boldsymbol{K}$ est un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_{\widetilde{G}}Q(F)\backslash G(\mathbb{A})$. On est donc ramené à estimer, pour $\delta \in \widetilde{G}(Q, R)$, l'expression

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}} \int_{\Omega \times \mathfrak{S}_Q^* \times \boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_Q(am)^{-1}\widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T)\Xi_{Q,\delta}(uamk)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k \tag{10.3}$$

avec

$$\Xi_{Q,\delta}(x) = \sum_{\xi \in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} \left|\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(\xi x, \xi x)\right|.$$

D'après [25, lemme 10.1.2], on a

$$\Xi_{Q,\delta}(uamk) = \sum_{\xi \in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} \left|\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(amk, \xi uamk)\right|.$$

On déduit (d'après la définition de $K_{Q,\delta}$) que l'expression (10.3) est égale à

$$\sum_{a \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}} \int_{\Omega \times \mathfrak{S}_Q^* \times \boldsymbol{K}} \boldsymbol{\delta}_Q(am)^{-1} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T)$$
$$\times \sum_{\xi \in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} \left|\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(mk, \xi a^{1-\delta}(a^{-1}ua)mk)\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}m \, \mathrm{d}k,$$

avec $a^{1-\delta} = a\mathrm{Int}_\delta^{-1}(a^{-1})$. Notons que $\widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T)$ ne dépend que de la projection $\mathbf{H}_0(a) + \mathbf{H}_Q(m) + T_Q$ de $\mathbf{H}_0(am) - T$ dans $\mathfrak{a}_Q$. Puisque $\mathbf{H}_Q(M_Q(\mathbb{A})^1) = 1$ et $\mathfrak{E}_Q$ est fini, $\mathbf{H}_Q(m)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On en déduit qu'il existe une constante $c_1 > 0$ (ne dépendant que de $\mathfrak{E}_Q$) telle que si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c_1$, alors la condition $\widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(am) - T) = 1$ pour un $m \in \mathfrak{S}_Q^*$ entraîne que $\widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(a)) = 1$. D'après le lemme 6.3.1 (i), l'opérateur de troncature fournit un noyau

$$(m_1, m_2) \mapsto \mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(m_1 k, \xi a^{1-\delta}(a^{-1}ua)m_2 k) \tag{10.4}$$

sur $M_Q(\mathbb{A}) \times M_Q(\mathbb{A})$, dont la restriction à $\mathfrak{S}_Q^* \times \mathfrak{S}_Q^*$ est lisse et à support compact, donc bornée. Choisissons un sous-groupe ouvert distingué $\boldsymbol{K}'$ de $\boldsymbol{K}$ tel que la fonction $f \in C_c^\infty(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ définissant $K_{Q,\delta}$ soit $\boldsymbol{K}'$-bi-invariante. Notons $\boldsymbol{K}'_Q$ le groupe $\boldsymbol{K}' \cap M_Q(\mathbb{A})$. Pour tous a, u, k et ξ, la fonction

$$(m_1, m_2) \mapsto K_{Q,\delta}(m_1 k, \xi a^{1-\delta}(a^{-1}ua)m_2 k),$$

sur $M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A}) \times M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})$, est $(\boldsymbol{K}'_Q \times \boldsymbol{K}'_Q)$-invariante à droite. D'après le lemme 6.3.1 (ii), il existe un compact Ω_2 de $\mathfrak{S}_Q^* \times \mathfrak{S}_Q^*$ tel que pour tous a, u, k et ξ, le support de la restriction à $\mathfrak{S}_Q^* \times \mathfrak{S}_Q^*$ du noyau tronqué (10.4) soit contenu dans Ω_2. Par restriction à la diagonale, on obtient une fonction en $m = m_1 = m_2$ bornée sur $\mathfrak{S}_Q^*$, et à support dans un compact C de $\mathfrak{S}_Q^*$ indépendant de a, u, k et ξ. D'après le lemme 10.1.1 (en supposant $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c_1$), si $\Xi_{Q,\delta}(umak) \neq 0$, alors $\|\mathbf{H}_0(a)^G\| \leq c_2(1 + \|\mathbf{H}_0(m)\|)$ pour une constante $c_2 > 0$. Par conséquent la somme sur $a \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}}$ dans (10.3) est finie. D'après [25, lemme 10.1.4], la somme sur ξ dans

$$\sum_{\xi \in Q_\delta(F)\backslash Q(F)} \left|\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta}(mk, \xi a^{1-\delta}(a^{-1}ua)mk)\right|,$$

porte sur un ensemble fini, que l'on peut choisir indépendant de a, u, m et k (puisque $x = mk$ et $y = a^{1-\delta}(a^{-1}ua)mk$ varient dans des compacts, cf. la preuve de *loc. cit.*). Cela achève la démonstration. ∎

On en déduit l'analogue de [25, proposition 10.1.7] :

Corollaire 10.1.3. *Si $\boldsymbol{d}_0(T) > c$ où c est une constante dépendant du support de f, l'intégrale*

$$\int_{\boldsymbol{X}_G} |k^T_{\mathrm{spec}}(x)| \,\mathrm{d}x$$

est convergente.

Ce corollaire est aussi impliqué par l'identité fondamentale de la proposition 8.2.1 et le théorème 9.1.2.

10.2 Annulations supplémentaires

Nous allons maintenant donner une expression un peu différente pour

$$\mathfrak{J}^T_{\mathrm{spec}} = \int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\mathrm{spec}}(x)\,\mathrm{d}x.$$

De fait, comme dans [25, corollaire 10.2.3], on a des annulations supplémentaires qui sont une première étape essentielle pour le développement spectral fin :

Proposition 10.2.1. *Si T est assez régulier (comme dans le lemme 10.2.1 de* [25]*), on a*

$$\mathfrak{J}^T_{\mathrm{spec}} = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset R}} \widetilde{\eta}(Q,R) \int_{\boldsymbol{Y}_{Q_{\delta_0}}} \widetilde{\sigma}^R_Q(\mathbf{H}_0(x) - T)\boldsymbol{\Lambda}^{T,Q}_1 K_{Q,\delta_0}(x,x)\,\mathrm{d}x \tag{10.5}$$

avec

$$\widetilde{\eta}(Q,R) = \begin{cases} \widetilde{\epsilon}(Q,R) & \textit{si } Q^+ = R^-,\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. Soient Q, $R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels qu'il existe un $\widetilde{P} \in \widetilde{P}_{\mathrm{st}}$ avec $Q \subset P \subset R$. On suppose que les éléments de $\widetilde{\mathbf{W}}(Q,R)$ sont de la forme $\delta = w_s$ où $w_s \in \widetilde{M}_{R^-}(F)$ est un représentant de $s = s_0 \rtimes \theta_0$ avec $s_0 \in \mathbf{W}^{M_{R^-}}$ de longueur minimale dans sa double classe $\mathbf{W}^{M_Q}\backslash\mathbf{W}^{M_{R^-}}/\mathbf{W}^{M_Q}$. On a donc $s\alpha > 0$ et $s^{-1}\alpha > 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta^Q_0$, et $M_s = Q_\delta \cap M_Q$ est un sous-groupe parabolique standard de M_Q (cf. [25, section 10.2]). On note S l'élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $S \cap M_Q = M_S$, et on pose $U^Q_S = U_S \cap M_Q$. Le lemme 10.2.1 et la proposition 10.2.2 de [25] sont vrais ici. Cela implique que si T est assez régulier (comme dans [25, lemme 10.2.1]), alors pour $Q, R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $Q \subset R$, seul l'élément $\delta \in \widetilde{\mathbf{W}}(Q, R)$ appartenant à la double classe $Q(F)\delta_0 Q(F)$ donne une contribution non triviale à l'intégrale de k_{spec}^T exprimé au moyen des équations (10.1) et (10.2). ■

Dans le cas non tordu la formule est beaucoup plus simple, puisque la condition $1 \in \mathbf{W}(Q, R)$ implique $Q = R$, et que $\sigma_Q^Q = 0$ sauf si $Q = G$ [25, lemme 2.11.4]. On a donc, dans le cas non tordu, et pour T assez régulier

$$\mathfrak{J}_{\mathrm{spec}}^T = \int_{\overline{\boldsymbol{X}}_G} \mathbf{\Lambda}_1^{T,G} K_G(x, x)\, \mathrm{d}x.$$

Chapitre 11

Formule des traces : propriétés formelles

11.1 Le polynôme asymptotique

Rappelons que l'on a la décomposition

$$k^T_{\text{géom}}(x) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} k^T_{\mathfrak{o}}(x)$$

et l'identité fondamentale de la proposition 8.2.1

$$k^T_{\text{géom}}(x) = k^T_{\text{spec}}(x).$$

Pour $\bullet =$ spec, géom ou $\mathfrak{o}$, on écrira parfois

$$k^{\widetilde{G},T}_{\bullet}(f,\omega;x) \quad \text{en place de} \quad k^T_{\bullet}(x),$$

s'il est nécessaire de préciser les données. On a vu dans le théorème 9.1.2 et dans le corollaire 10.1.3 que l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\bullet}(x)\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente. En particulier on a la décomposition

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} k^T_{\bullet}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{Z\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}} \int_{\boldsymbol{Y}_G(Z)} k^T_{\bullet}(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\boldsymbol{Y}_G(Z)$ est l'image dans $\boldsymbol{Y}_G$ de l'ensemble $\{g\in G(\mathbb{A})\,|\,\mathbf{H}_{\widetilde{G}}(g)=Z'\}$ pour un relèvement (quelconque) Z' de Z dans $\mathcal{A}_{\widetilde{G}}$. La fonction $f\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\widetilde{G}(\mathbb{A}))$ étant fixée, on considère, pour chaque $\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$, la fonction $f_{\widetilde{Q}}\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\widetilde{M}_Q(\mathbb{A}))$, définie par

$$f_{\widetilde{Q}}(m) = \int_{U_Q(\mathbb{A})\times\boldsymbol{K}} f(k^{-1}muk)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k.$$

On a la suite exacte courte

$$0\to\mathcal{B}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{Q}}\to\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{Q}}\to\mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}\to 0$$

et pour $Z\in\mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}$ et T, $X\in\mathfrak{a}_0$, on a posé (cf. proposition 2.1.3)

$$\eta^{\widetilde{G},T}_{\widetilde{Q},F}(Z;X) = \sum_{H\in\mathcal{B}^{\widetilde{G}}_{\widetilde{Q}}(Z)} \Gamma^{\widetilde{G}}_{\widetilde{Q}}(H-X,T),$$

où $\mathcal{B}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}(Z)$ est la fibre au-dessus de $Z \in \mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}$. On a la variante de [25, théorème 11.1.1] :

Théorème 11.1.1. *Pour* $\bullet =$ spec, géom *ou* $\mathfrak{o}$, *Il existe une fonction*

$$T \mapsto \mathfrak{J}_{\bullet}^{T} = \mathfrak{J}_{\bullet}^{\widetilde{G},T}(f,\omega)$$

dans PolExp *telle que si* $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c(f)$ *pour une constante* $c(f)$*, ne dépendant que du support de* f*, on ait*

$$\mathfrak{J}_{\bullet}^{T} = \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\bullet}^{T}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On reprend celle de [25, théorème 11.1.1]. D'après [25, lemme 8.2.1], pour $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ on a

$$k_{\widetilde{P},\mathrm{spec}}^{T}(x) = \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(\mathbf{H}_0(x) - T)K_{\widetilde{P}}(x,x) = k_{\widetilde{P},\mathrm{g\acute{e}om}}^{T}(x).$$

On a donc

$$k_{\bullet}^{T}(x) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(\mathbf{H}_0(\xi x) - T)K_{\widetilde{P},\bullet}(\xi x, \xi x),$$

où

$$K_{\widetilde{P},\mathrm{spec}} = K_{\widetilde{P}} = K_{\widetilde{P},\mathrm{g\acute{e}om}}$$

est introduit en section 8.2 et $K_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}$ a été défini en section 9.1. Comme dans la démonstration de [25, théorème 11.1.1], pour T et $X \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ assez réguliers, on obtient

$$\int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\bullet}^{T+X}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{P}_{\mathrm{st}}} \int_{\boldsymbol{Y}_Q} \Gamma_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}(\mathbf{H}_0(x) - X, T)k_{\widetilde{Q},\bullet}^{X}(x)\,\mathrm{d}x$$

avec

$$k_{\widetilde{Q},\bullet}^{X}(x) = \sum_{\{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}|\widetilde{P}\subset\widetilde{Q}\}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash Q(F)} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{Q}}}\hat{\tau}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{Q}}(\mathbf{H}_0(\xi x) - X)K_{\widetilde{P},\bullet}(\xi x, \xi x).$$

Fixons un $\widetilde{Q} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$. Puisque $\mathrm{vol}(A_{\widetilde{G}}(F)\backslash A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})^1) = 1$, on peut remplacer l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_Q$ par une intégrale sur

$$\boldsymbol{Y}'_Q = \mathfrak{B}_{\widetilde{G}}Q(F)\backslash G(\mathbb{A}),$$

où $\mathfrak{B}_{\widetilde{G}}$ est l'image d'une section du morphisme $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_{\widetilde{G}}$. Notons $\mathfrak{B}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}$ l'image d'une section du morphisme composé

$$A_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}) \to A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})\backslash A_{\widetilde{Q}}(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{B}_{\widetilde{Q}}$$

et posons

$$\mathfrak{B}_{\tilde{Q}} = \mathfrak{B}_{\tilde{G}}\mathfrak{B}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}, \quad \boldsymbol{Y}''_{Q} = \mathfrak{B}_{\tilde{Q}}Q(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

Pour $Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}$, notons $\boldsymbol{Y}''_{Q}(Z)$ l'image de l'ensemble $\{g \in G(\mathbb{A}) \,|\, \mathbf{H}_{\tilde{Q}}(g) = Z'\}$ dans $\boldsymbol{Y}''_{Q}$, où Z' est un relèvement de Z dans $\mathcal{A}_{\tilde{Q}}$. On obtient que

$$\int_{\boldsymbol{Y}_Q} \Gamma_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\mathbf{H}_0(x) - X, T) k_{\tilde{Q},\bullet}^{X}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}} \eta_{\tilde{Q},F}^{\tilde{G},T}(Z; X) \int_{\boldsymbol{Y}''_{Q}(Z)} k_{\tilde{Q},\bullet}^{X}(x)\,\mathrm{d}x$$

avec

$$\int_{\boldsymbol{Y}''_{Q}(Z)} k_{\tilde{Q},\bullet}^{X}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[\mathfrak{B}_{\tilde{Q}} M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})](Z)} k_{\bullet}^{\tilde{M}_Q,X}(f_{\tilde{Q}}, \omega; m)\,\mathrm{d}m.$$

Pour $\bullet = \mathfrak{o}$, le terme $k_{\bullet}^{\tilde{M}_Q,X}(f_Q, \omega; m)$ est défini en remplaçant dans la définition de $k_{\mathfrak{o}}^{\tilde{G},X}$ l'ensemble $G(F)$-invariant $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}}$ par l'ensemble $M_Q(F)$-invariant $\mathcal{O}_{\mathfrak{o}} \cap \widetilde{M}_Q(F)$. Ce dernier correspond à une union finie (éventuellement vide) de classes de paires primitives dans $\widetilde{M}_Q$. La finitude résulte du lemme 3.4.1. Comme plus haut, on peut remplacer l'intégrale sur $[\mathfrak{B}_{\tilde{Q}} M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})](Z)$ par une intégrale sur $\boldsymbol{Y}_{M_Q}(Z)$. En posant

$$\mathfrak{J}_{\bullet}^{\tilde{G},X}(f, \omega) = \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_{\bullet}^{X}(f, \omega; x)\,\mathrm{d}x,$$

on a donc

$$\mathfrak{J}_{\bullet}^{\tilde{G},T+X}(f, \omega) = \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \sum_{Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}} \eta_{\tilde{Q},F}^{\tilde{G},T}(Z; X)\, \mathfrak{J}_{\bullet}^{\tilde{M}_Q,X}(Z; f_{\tilde{Q}}, \omega)$$

avec

$$\mathfrak{J}_{\bullet}^{\tilde{M}_Q,X}(Z; f_{\tilde{Q}}, \omega) = \int_{\boldsymbol{Y}_{M_Q}(Z)} k_{\bullet}^{\tilde{M}_Q,X}(f_{\tilde{Q}}, \omega; m)\,\mathrm{d}m.$$

D'où le résultat puisque d'après la proposition 2.1.3 les fonctions $T \mapsto \eta_{\tilde{Q},F}^{\tilde{G},T}(Z; X)$ appartiennent à PolExp. ■

11.2 Action de la conjugaison

Pour $y \in G(\mathbb{A})$, on note f^y la fonction $f \circ \mathrm{Int}_y$. Soient $y \in G(\mathbb{A})$ et $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. Pour $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ et $Z \in \mathfrak{c}_{\tilde{Q}}$, considérons la fonction dans $C_c^{\infty}(\tilde{M}_Q(\mathbb{A}))$ définie par

$$m \mapsto f_{\tilde{Q},y}^{T}(Z; m) = \int_{U_Q(\mathbb{A}) \times \boldsymbol{K}} f(k^{-1}muk)\eta_{\tilde{Q},F}^{\tilde{G},-\mathbf{H}_0(ky)}(Z; T)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k$$

avec

$$\eta_{\widetilde{Q},F}^{\widetilde{G},X}(Z;T) = \sum_{H \in \mathcal{B}_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{G}}(Z)} \Gamma_{\widetilde{Q}}(H-T,X).$$

Proposition 11.2.1. *Soient* $y \in G(\mathbb{A})$ *et* $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. *Pour* $\bullet =$ spec, géom *ou* $\mathfrak{o}$ *et pour* T *assez régulier, on a*

$$\mathfrak{J}_\bullet^{\widetilde{G},T}(f^y,\omega) = \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \sum_{Z\in\mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}} \mathfrak{J}_\bullet^{\widetilde{M}_Q,T}(f_{\widetilde{Q},y}^T(Z),\omega).$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème 11.1.1. Commençons par remplacer f par f^y et x par xy dans l'expression pour $k_\bullet^T(x)$. On obtient

$$k_\bullet^T(f^y,\omega;xy) = \sum_{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}} \sum_{\xi\in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_{\widetilde{P}}(\mathbf{H}_0(\xi xy)-T) K_{\widetilde{P},\bullet}(\xi x,\xi x),$$

où $K_{\widetilde{P},\bullet}(x',x') = K_{\widetilde{P},\bullet}(f,\omega;x',x')$. Si $x' = u_0 m_0 k$ est une décomposition d'Iwasawa de $x' \in G(\mathbb{A})$, avec $u_0 \in U_0(\mathbb{A})$, $m_0 \in M_0(\mathbb{A})$ et $k = k_{x'} \in \boldsymbol{K}$, alors on a

$$\mathbf{H}_0(x'y) = \mathbf{H}_0(m_0) + \mathbf{H}_0(ky) = \mathbf{H}_0(x') + \mathbf{H}_0(ky).$$

D'après [25, proposition 2.9.4 (2)], on en déduit que

$$k_\bullet^T(f^y,\omega;xy) = \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \sum_{\eta\in Q(F)\backslash G(F)} \Gamma_{\widetilde{Q}}(\mathbf{H}_0(\eta x)-T,-\mathbf{H}_0(k_{\eta x}y)) k_{\widetilde{Q},\bullet}^T(\eta x),$$

où $k_{\widetilde{Q},\bullet}^T(x') = k_{\widetilde{Q},\bullet}^T(f,\omega;x')$, puis, grâce au changement de variable $x\mapsto xy$, que pour $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ assez régulier, on a

$$(11.1)\qquad \int_{\boldsymbol{Y}_G} k_\bullet^T(f^y,\omega,x) = \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \int_{\boldsymbol{Y}_Q} \Gamma_{\widetilde{Q}}(\mathbf{H}_0(x)-T,-\mathbf{H}_0(k_x y)) k_{\widetilde{Q},\bullet}^T(x)\,\mathrm{d}x.$$

On obtient ensuite (comme dans la preuve du théorème 11.1.1) que, toujours pour $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$ assez régulier, le terme à gauche de l'égalité dans (11.1) vaut

$$(11.2)\qquad \sum_{\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}} \sum_{Z\in\mathfrak{c}_{\widetilde{Q}}} \int_{\boldsymbol{Y}_Q''(Z)} \eta_{\widetilde{Q},F}^{\widetilde{G},-\mathbf{H}_0(k_x y)}(Z;T) k_{\widetilde{Q},\bullet}^T(x)\,\mathrm{d}x.$$

Compte tenu de la définition de $f_{\widetilde{Q},y}$ et de la décomposition d'Iwasawa pour $G(\mathbb{A})$, on obtient que l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_Q''(Z)$ dans (11.2) est égale à

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{M_Q}(Z)} k_\bullet^{\widetilde{M}_Q,T}(f_{\widetilde{Q},y}^T(Z),\omega;m)\,\mathrm{d}m.$$

D'où la proposition. ∎

11.3 La formule des traces : première forme

D'après le théorème 11.1.1, pour tout réseau $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, la restriction à $\mathcal{R}$ de la fonction $T \mapsto \mathfrak{J}_{\bullet}^{\widetilde{G},T}(f,\omega)$ est de la forme

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{R},\bullet}^{\widetilde{G},T}(f,\omega) = \sum_{\nu \in \widehat{\mathcal{R}}} p_{\mathcal{R},\nu}(\bullet, f,\omega; T)\, e^{\langle T,\nu \rangle},$$

où les $p_{\mathcal{R},\nu}(\bullet, f,\omega; T)$ sont des polynômes en T. D'après les propositions 1.7.4 et 2.1.3 les polynômes $p_{\mathcal{R}_k,0}(\bullet, f,\omega; T)$ ont une limite lorsque $k \to \infty$ et on pose

$$\boldsymbol{J}_{\bullet}^{\widetilde{G}}(f,\omega) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{k \to +\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(\bullet, f,\omega; T_0).$$

Théorème 11.3.1. *On a l'identité :*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}} \boldsymbol{J}_{\mathfrak{o}}^{\widetilde{G}}(f,\omega) = \boldsymbol{J}_{\text{spec}}^{\widetilde{G}}(f,\omega).$$

Pour M_0 et $\boldsymbol{K}$ fixés, elle est indépendante du choix de P_0.

Démonstration. Par intégration de l'identité fondamentale de la proposition 8.2.1, ce qui a un sens compte tenu du théorème 9.1.2 et de la proposition 10.2.1, on obtient l'identité

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{O}} \mathfrak{J}_{\mathcal{R},\mathfrak{o}}^{\widetilde{G},T}(f,\omega) = \mathfrak{J}_{\mathcal{R},\,\text{spec}}^{\widetilde{G},T}(f,\omega).$$

L'indépendance du choix de P_0, lorsque l'on prend $T = T_0$, se prouve comme dans [25, proposition 11.3.1]. Le théorème en résulte par passage à la limite. ■

C'est l'analogue du théorème 11.3.2 de [25]. Le reste de l'ouvrage est consacré au calcul de la limite $\boldsymbol{J}_{\text{spec}}^{\widetilde{G}}(f,\omega)$. L'étude des limites $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{o}}^{\widetilde{G}}(f,\omega)$ des termes géométriques fera l'objet d'un article ultérieur.

Partie IV

Forme explicite des termes spectraux

Chapitre 12

Estimées uniformes des développements spectraux

12.1 La formule de départ

Soit $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. On pose

$$Q' = \theta_0^{-1}(Q), \quad Q_0 = Q \cap Q'.$$

Rappelons que l'on a posé

$$\boldsymbol{Y}_{Q_0} = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})Q_0(F)\backslash G(\mathbb{A}).$$

Pour $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}$, on note $n^{Q'}(S)$ le nombre de chambres dans $\mathfrak{a}_S^{Q'}$. Pour $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}$, $\sigma \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{Q',\mathbb{C}}$, on a défini en section 7.2 un opérateur

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega) = \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\delta_0, f, \omega) : \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma) \to \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma)),$$

et on a fixé une base orthonormale $\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$ de l'espace pré-hilbertien $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$. Pour $\Psi \in \boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$, posons

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(x,y) = \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(x, \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\Psi, \theta_0\mu)\overline{E^{Q'}(y,\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu$$

et

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y) = \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y,y).$$

La convergence de l'intégrale est claire puisque $\boldsymbol{\mu}_S$ est compact. Observons que, par définition, on a

$$\sum_{\Psi \in \boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(x,y) = \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,Q',\sigma}(x,y;\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

On a la variante suivante de [25, proposition 12.1.1] :

Proposition 12.1.1. *Pour $T \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c(f)$, on a*

$$\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T} = \sum_{\substack{Q,R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}} \\ Q \subset R}} \widetilde{\eta}(Q,R) \int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T)$$
$$\times \left(\sum_{S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}} \frac{1}{n^{Q'}(S)} \sum_{\sigma \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M_S)} \widehat{c}_{M_S}(\sigma) \sum_{\Psi \in \boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y) \right) \mathrm{d}y.$$

Démonstration. Elle est identique à celle de *loc. cit.*, compte-tenu de la formule de la proposition 10.2.1 et de l'expression pour le noyau $K_{Q,\delta_0,\chi}$, donnée par la proposition 7.3.2. ∎

D'après la proposition 7.3.2, l'ensemble des (σ, Ψ), tels que $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\Psi \neq 0$, est fini. Donc, seul un nombre fini de termes non nuls apparaissent dans l'expression de $\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}$. L'expression $\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}$ est une combinaison linéaire finie d'intégrales itérées (en y et en μ)

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T)\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y)\,\mathrm{d}y. \tag{12.1}$$

A priori, la proposition n'affirme que la convergence des intégrales dans l'ordre indiqué, et pas la convergence absolue de l'intégrale multiple.

Pour $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$ et $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$, on considérera aussi les expressions suivantes :

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x,y) = \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(x,\Phi,\theta_0\mu)\overline{E^{Q'}(y,\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu$$

et

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(y) = \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(y,y).$$

À nouveau, la convergence de l'intégrale est claire, puisque $\boldsymbol{\mu}_S$ est compact.

Remarque 12.1.2. On observe que pour $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$, on peut écrire

$$\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\Psi = \sum_{\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)},\theta_0(\sigma))} \vartheta_{\Phi,\Psi}(\mu)\Phi,$$

où la somme porte sur un ensemble fini et où les $\vartheta_{\Phi,\Psi}$ sont des fonctions lisses sur le groupe compact $\boldsymbol{\mu}_S$. On voit donc que l'expression $\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Psi}(y)$, introduite plus haut, est une combinaison linéaire finie d'expressions du type

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi;\vartheta}(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(y,\Phi,\theta_0\mu)\overline{E^{Q'}(y,\Psi,\mu)}\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu,$$

où $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$ ne dépend pas de μ et où ϑ est une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_S$. Pour l'étude de la convergence des intégrales itérées (12.1), il suffira de considérer celle des

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T)\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi;\vartheta}(y)\,\mathrm{d}y. \tag{12.2}$$

Pour prouver la convergence de (12.2), on peut remplacer la fonction ϑ par le sup de sa valeur absolue et, à un scalaire près, on peut supposer que ce sup vaut 1. On est donc ramené à prouver la convergence des intégrales itérées

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y)-T)\mathfrak{J}_{Q,Q';\Phi,\Psi}^T(y)\,\mathrm{d}y. \tag{12.3}$$

En revanche pour effectuer le calcul exact de (12.1), il faut effectuer le calcul exact de (12.2) pour n'importe quel ϑ.

12.2 Estimations

Pour $H \in \mathcal{A}_{Q_0}$, soit $M_{Q_0}(\mathbb{A}; H)$ l'ensemble des $m \in M_{Q_0}(\mathbb{A})$ tels que

$$\mathbf{H}_{Q_0}(m) = H.$$

On note $\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)$ l'image de $U_{Q_0}(\mathbb{A})\times M_{Q_0}(\mathbb{A}; H) \times \boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{Y}_{Q_0}$. On pose

$$\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{A}_{Q_0}.$$

Observons que $\mathbf{H}_{Q_0}$ envoie $\boldsymbol{Z}_{Q_0} = A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})A_{Q_0}(F)\backslash A_{Q_0}(\mathbb{A})$ sur un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$. L'intégrale itérée (12.1) est égale à

$$\sum_{H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(H_Q - T) \int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)} \mathfrak{J}_{Q,Q';\Psi}^T(y)\,\mathrm{d}y.$$

Les estimations [25, lemme 12.2.1] et [25, proposition 12.2.3] sont valables ici, *mutatis mutandis*. On rappelle que $\mathfrak{S}^*$ est un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_G G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, où $\mathfrak{B}_G$ est l'image d'une section du morphisme $A_G(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_G$.

Lemme 12.2.1. *Soit $h \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout x, $y \in \mathfrak{S}^*$, on ait*

$$\sum_{\delta \in \mathfrak{B}_G G(F)} |h(x^{-1}\delta y)| < c\,\delta_{P_0}(x)^{1/2}\delta_{P_0}(y)^{1/2}.$$

Démonstration. Elle est identique à celle de [25, lemme 12.2.1]. Pour passer du groupe U_R à son algèbre de Lie $\mathfrak{u}_R$, on utilise, comme dans la preuve de la proposition de la section 9.1, l'existence d'un F-isomorphisme de variétés algébriques $\mathfrak{u}_R \to U_R$ compatible avec l'action de A_R. ∎

On fixe $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}$, une représentation automorphe $\sigma \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$, et des vecteurs $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$ et $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)}, \theta_0(\sigma))$. On pose

$$L = M_Q, \quad L' = M_{Q'}, \quad L_0 = M_{Q_0}.$$

On fixe un domaine de Siegel $\mathfrak{S}^{L,*}$ pour le quotient $\mathfrak{B}_Q L(F)\backslash L(\mathbb{A})$. On suppose que $\mathfrak{B}_Q \subset A_Q(\mathbb{A})$ est de la forme

$$\mathfrak{B}_Q = \mathfrak{B}_G \mathfrak{B}_Q^G,$$

où $\mathfrak{B}_Q^G \subset A_Q(\mathbb{A})$ est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_Q(\mathbb{A}) \to A_G(\mathbb{A})\backslash A_Q(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_Q^G.$$

On fixe aussi un compact $\Omega_Q \subset U_Q(\mathbb{A})$ tel que $U_Q(\mathbb{A}) = U_Q(F)\Omega$ et l'on pose

$$\mathfrak{S}_Q^G = \Omega_Q \mathfrak{B}_Q^G \mathfrak{S}^{L,*} \boldsymbol{K}.$$

C'est un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_G Q(F)\backslash G(\mathbb{A})$. On fixe, de la même manière, un domaine de Siegel $\mathfrak{S}_{Q'}^G = \Omega_{Q'} \mathfrak{B}_{Q'}^G \mathfrak{S}^{L',*} \boldsymbol{K}$ pour $\mathfrak{B}_G Q'(F)\backslash G(\mathbb{A})$.

Proposition 12.2.2. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathfrak{S}_Q^G \times \mathfrak{S}_{Q'}^G$, on ait*

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} |E^Q(x, \Phi, \theta_0\mu)\overline{E^{Q'}(y, \Psi, \mu)}|\,\mathrm{d}\mu < c\,\delta_{P_0}(x)^{1/2}\delta_{P_0}(y)^{1/2}.$$

Démonstration. Comme dans [25, proposition 12.2.3] on se ramène à prouver qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathfrak{S}^*$, on ait

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} |E^G(y, \Psi, \mu)|^2\,\mathrm{d}\mu < c\,\delta_{P_0}(y).$$

On choisit un sous-groupe ouvert compact $\boldsymbol{K}'$ de $G(\mathbb{A})$ tel que la fonction Ψ soit invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$, et on considère le noyau

$$K_G(e_{\boldsymbol{K}'}; y, y) = \sum_{\delta \in \mathfrak{B}_G G(F)} e_{\boldsymbol{K}'}(y^{-1}\delta y).$$

Son expression spectrale est une somme de termes tous positifs ou nuls, et l'un d'eux est l'intégrale ci-dessus. On conclut, grâce au lemme 12.2.1. ∎

Corollaire 12.2.3. *Pour tout $(x, y) \in G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})$, l'intégrale définissant*

$$\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x, y)$$

est absolument convergente. De plus, il existe c, $D > 0$ et un sous-ensemble compact C_Q de $\mathfrak{S}^{L,*}$ tels que, pour tout $x \in \mathfrak{B}_Q^G \mathfrak{S}^{L,*} \boldsymbol{K}$ et tout $y \in G(\mathbb{A})$, en écrivant $x = ask$ avec $a \in \mathfrak{B}_Q^G$, $s \in \mathfrak{S}^{L,*}$ et $k \in \boldsymbol{K}$, on ait

$$|\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x, y)| \le c\,|a|^D |y|^D,$$

si $s \in C_Q$, et $\mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x, y) = 0$ sinon.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{K}'$ un sous-groupe ouvert compact distingué de $\boldsymbol{K}$ tel que la fonction ϕ soit invariante à droite par $\boldsymbol{K}'$. D'après la proposition 4.2.1, il existe un sous-ensemble compact C_Q de $\mathfrak{S}^{L,*}$ tel que pour tout $(a,k) \in \mathfrak{B}_Q^G \times \boldsymbol{K}$ et tout $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, le support de la fonction sur $\mathfrak{S}^{L,*}$

$$h \mapsto \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(ask, \Phi, \theta_0(\mu))$$

soit contenu dans C_Q. D'autre part pour $y \in G(\mathbb{A})$, il existe un $g \in \mathfrak{B}_G Q'(F)$ tel que $gy \in \mathfrak{S}_{Q'}^G$. On procède comme dans la preuve de [25, proposition 12.2.4], en remarquant que puisque la fonction $\boldsymbol{\delta}_{P_0}$ est à croissance lente, $\boldsymbol{\delta}_{P_0}(x)^{1/2}\boldsymbol{\delta}_{P_0}(gy)^{1/2}$ est essentiellement majoré par $|a|^D|y|^D$. ■

A priori nous ne pouvons rien dire ici sur le centre, c'est pourquoi nous nous sommes limités aux

$$x \in \mathfrak{B}_Q^G \mathfrak{S}^{L,*} \boldsymbol{K}.$$

Pour $y = x$, on en déduira en section 12.3 des estimations pour $x \in \mathfrak{B}_Q^{\widetilde{G}} \mathfrak{S}^{L,*} \boldsymbol{K}$.

12.3 Convergence d'une intégrale itérée

On suppose ici que T est un élément régulier de $\mathfrak{a}_0^G$ tel que[1] $\theta_0(T) = T$. On suppose de plus que pour tout $\alpha \in \Delta_0$, on a

$$0 < \alpha(T) \leq \kappa\, \boldsymbol{d}_0(T)$$

pour une constante $\kappa > 0$ assez grande. Dans un tel cône, les fonctions $\boldsymbol{d}_0(T)$, $\|T\|$ et $\alpha(T)$ sont équivalentes, pour tout $\alpha \in \Delta_0$.

Fixons des vecteurs Ψ et Φ, comme ci-dessus. Pour alléger l'écriture, posons

$$\mathfrak{I}(x,y) = \mathfrak{I}_{Q,Q';\Phi,\Psi}(x,y) \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(y) = \mathfrak{I}(y,y).$$

On veut prouver la convergence de l'intégrale

$$\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_Q(y) - T)|\mathfrak{I}(y)|\,\mathrm{d}y, \tag{12.4}$$

[1]Cette condition peut sembler inadéquate, dès lors qu'on aura *in fine* à évaluer un élément de PolExp en $T_0 \in \mathcal{A}_0^G$ qui n'est *a priori* pas θ_0-invariant. Mais comme l'élément de PolExp à évaluer ne dépend que de l'image de $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G$ dans le sous-espace $a_{\widetilde{M}_0,\mathbb{Q}}^{\widetilde{G}} = (\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G)^{\theta_0}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}^G$ formé des éléments θ_0-invariants, cette condition n'est pas vraiment gênante.

ou, ce qui est équivalent, de l'expression

$$\sum_{H\in\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(H_Q - T)\int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)} |\mathfrak{J}(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{12.5}$$

L'intégration sur $\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)$ se décompose en une intégration sur le produit

$$U_{Q_0}(F)\backslash U_{Q_0}(\mathbb{A}) \times \boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H) \times \boldsymbol{K},$$

où $\boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)$ est l'image de $L_0(\mathbb{A}; H')$ dans $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})L_0(F)\backslash L_0(\mathbb{A})$ pour un relèvement $H' \in \mathcal{A}_{Q_0}$ de $H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$. Par ailleurs, la fonction que l'on intègre est invariante à gauche par le groupe $U_Q(\mathbb{A}) \cap U_{Q'}(\mathbb{A})$. Posons $U_{Q_0}^L = U_Q \cap L$ et $U_{Q_0}^{L'} = U_{Q_0} \cap L'$. L'application naturelle

$$U_{Q_0} \to U_{Q_0}^L \times U_{Q_0}^{L'}$$

induit un isomorphime

$$U_{Q_0}(F)(U_Q(\mathbb{A}) \cap U_{Q'}(\mathbb{A}))\backslash U_{Q_0}(\mathbb{A}) \to U_{Q_0}^L(F)\backslash U_{Q_0}^L(\mathbb{A}) \times U_{Q_0}^{L'}(F)\backslash U_{Q_0}^{L'}(\mathbb{A}).$$

On peut donc remplacer dans (12.5) la variable y par $uu'xk$ avec

$$u \in U_{Q_0}^L(F)\backslash U_{Q_0}^L(\mathbb{A}), \quad u' \in U_{Q_0}^{L'}(F)\backslash U_{Q_0}^{L'}(\mathbb{A}), \quad x \in \boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H) \quad \text{et} \quad k \in \boldsymbol{K}.$$

La mesure $\mathrm{d}y$ se transforme alors en

$$\delta_{Q_0}(x)^{-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k$$

et on a $\mathbf{H}_{Q_0}(x) = \mathbf{H}_{Q_0}(y) = H$. On obtient

$$\mathfrak{J}(uu'xk) = \mathfrak{J}(uxk, u'xk). \tag{12.6}$$

On a la variante suivante du lemme 12.3.1 de [25] :

Lemme 12.3.1. *Il existe un sous-ensemble fini $\omega \subset \mathfrak{a}_Q^{\widetilde{G}}$ indépendant de T tel que si $\mathfrak{J}(uu'xk)$ est non nul, alors $q_Q(H) = ((1-\theta_0)H)_Q^{\widetilde{G}}$ appartient à ω.*

Démonstration. Via le choix d'une section de la surjection $\mathcal{A}_M \to \mathcal{A}_{Q'}$, on dispose d'un isomorphisme $\boldsymbol{\mu}_M = \boldsymbol{\mu}_{Q'} \times \boldsymbol{\mu}_S^{Q'}$ et l'intégration sur $\boldsymbol{\mu}_S$ se décompose en une intégrale double :

$$\mathfrak{J}(uu'xk) = \int_{\boldsymbol{\mu}_S^{Q'}}\int_{\boldsymbol{\mu}_{Q'}} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(uxk, \Phi, \theta_0(\mu_{Q'} + \mu^{Q'}))$$
$$\times \overline{E^{Q'}(u'xk, \Psi, \mu_{Q'} + \mu^{Q'})}\,\mathrm{d}\mu_{Q'}\,\mathrm{d}\mu^{Q'}.$$

Soit $\mathfrak{B}_{Q_0} \subset A_{Q_0}(\mathbb{A})$ un sous-groupe de la forme

$$\mathfrak{B}_{Q_0} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q} \mathfrak{B}_{Q} \; (= \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q} \mathfrak{B}_{Q}^{G} \mathfrak{B}_{G}),$$

où $\mathfrak{B}_{Q_0}^{Q} \subset A_{Q_0}(\mathbb{A})$ est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_{Q_0}(\mathbb{A}) \to A_Q(\mathbb{A}) \backslash A_{Q_0}(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_{Q_0}^{Q}.$$

Notons $\mathfrak{S}^{L_0,*} = \mathfrak{E}_{L_0} \mathfrak{S}^{L_0,1}$ un domaine de Siegel pour le quotient $\mathfrak{B}_{Q_0} L_0(F) \backslash L_0(\mathbb{A})$ (cf. section 3.4).

Fixons de la même manière un sous-groupe $\mathfrak{B}'_{Q_0} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q'} \mathfrak{B}_{Q'} \subset A_{Q_0}(\mathbb{A})$. On ne peut pas en général s'arranger pour que $\mathfrak{B}_{Q_0} = \mathfrak{B}'_{Q_0}$, mais puisque $\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0}$ est d'indice fini dans $\mathfrak{B}_{Q_0}$, quitte à grossir $\mathfrak{E}_{L_0}$, on peut toujours supposer que

$$L_0(\mathbb{A}) = (\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0}) L_0(F) \mathfrak{S}^{L_0,*}.$$

On suppose aussi que $\mathfrak{B}_G$ est de la forme $\mathfrak{B}_G = \mathfrak{B}_G^{\tilde{G}} \mathfrak{B}_{\tilde{G}}$, où $\mathfrak{B}_G^{\tilde{G}} \subset A_G(\mathbb{A})$ est l'image d'une section du morphisme composé

$$A_G(A) \to A_{\tilde{G}}(\mathbb{A}) \backslash A_G(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_G^{\tilde{G}} = \mathcal{B}_{\tilde{G}} \backslash \mathcal{B}_G$$

et l'on pose

$$\mathfrak{B}_{Q_0}^{\tilde{G}} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{\tilde{G}} \mathfrak{B}_{Q}^{\tilde{G}} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q} \mathfrak{B}_{Q}^{G} \mathfrak{B}_{G}^{\tilde{G}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}'^{\tilde{G}}_{Q_0} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q'} \mathfrak{B}_{Q'}^{\tilde{G}} = \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q'} \mathfrak{B}_{Q'}^{G} \mathfrak{B}_{G}^{\tilde{G}}.$$

Choisissons un relèvement de $x \in \boldsymbol{X}_{L_0}^{\tilde{G}}(H)$ dans $L_0(\mathbb{A}; H')$ et écrivons $x = zas$ avec $z \in \mathfrak{B}_{\tilde{G}} L_0(F)$, $a \in (\mathfrak{B}_{Q_0}^{\tilde{G}} \cap \mathfrak{B}'^{\tilde{G}}_{Q_0})$ et $s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}$. On décompose a sous la forme

$$a = a_Q a^Q = a_{Q'} a^{Q'}$$

avec $a_Q \in \mathfrak{B}_{Q}^{\tilde{G}}$, $a^Q \in \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q}$, $a_{Q'} \in \mathfrak{B}_{Q'}^{\tilde{G}}$ et $a^{Q'} \in \mathfrak{B}_{Q_0}^{Q'}$. Posons $H_0 = \mathbf{H}_{Q_0}(a)$. Comme dans la démonstration de [25, lemme 12.3.1], on obtient que

$$\mathfrak{J}(uu'xk) = \boldsymbol{\delta}_Q^{1/2}(a_Q) \boldsymbol{\delta}_{Q'}^{1/2}(a_{Q'}) \int_{\boldsymbol{\mu}_{Q'}} e^{\langle \theta_0(\mu_{Q'}), (H_0)_Q \rangle - \langle \mu_{Q'}, (H_0)_{Q'} \rangle} \, \mathrm{d}\mu_{Q'}$$
$$\times \int_{\boldsymbol{\mu}_S^{Q'}} \boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q(ua^Q sk, \Phi, \theta_0(\mu^{Q'})) \overline{E^{Q'}(u'a^{Q'}sk, \Psi, \mu^{Q'})} \, \mathrm{d}\mu^{Q'}.$$

Or

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_{Q'}} e^{\langle \theta_0(\mu_{Q'}), (H_0)_Q \rangle - \langle \mu_{Q'}, (H_0)_{Q'} \rangle} \, \mathrm{d}\mu_{Q'} = \int_{\boldsymbol{\mu}_{Q'}} e^{\langle \mu_{Q'}, \theta_0^{-1}((H_0)_Q) - (H_0)_{Q'} \rangle} \, \mathrm{d}\mu_{Q'}$$

et cette intégrale n'est non nulle que si $\theta_0^{-1}((H_0)_Q) - (H_0)_{Q'} = 0$. Pour que $\mathfrak{J}(uu'xk)$ soit non nul, il faut donc que

$$(\mathbf{H}_Q(x) - \theta_0(\mathbf{H}_{Q'}(x)))^{\widetilde{G}} = (H - \theta_0(H))_Q^{\widetilde{G}} = (\mathbf{H}_Q(s) - \theta_0(\mathbf{H}_{Q'}(s)))^{\widetilde{G}}.$$

Maintenant, on observe que l'ensemble

$$\omega = \{(\mathbf{H}_Q(s) - \theta_0(\mathbf{H}_{Q'}(s)))^{\widetilde{G}} \,|\, s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}\} \subset \mathfrak{a}_Q^{\widetilde{G}}$$

est fini et le lemme en résulte. ■

Proposition 12.3.2. *Pour $T \in (\mathfrak{a}_0^G)^{\theta_0}$, l'expression*

$$\sum_{H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(H_Q - T) \int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)} |\mathfrak{J}_{Q,Q';\Phi,\Psi}^T(y)| \,\mathrm{d}y$$

est convergente et la somme sur H est finie.

Démonstration. Il s'agit de prouver que pour $H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$, la fonction

$$(u, u', x, k) \mapsto \widetilde{\sigma}_Q^R(H - T)\delta_{Q_0}(x)^{-1}\mathfrak{J}(uu'xk)$$

est absolument intégrable sur

$$U_{Q_0}^L(F)\backslash U_{Q_0}^L(\mathbb{A}) \times U_{Q_0}^{L'}(F)\backslash U_{Q_0}^{L'}(\mathbb{A}) \times \boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H) \times \boldsymbol{K}$$

et qu'elle est nulle, sauf pour un nombre fini de H. On procède comme dans la preuve de [25, proposition 12.3.2]. On commence par découper le domaine de sommation en H, grâce à la partition de [25, lemme 1.7.5] appliquée au couple $(P, R) = (Q_0, Q)$: on peut fixer un $P' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q_0 \subset P' \subset Q$ et imposer que

$$\phi_{Q_0}^{P'}(H - T)\tau_{P'}^Q(H - T) = 1.$$

On s'intéresse donc aux $H \in \mathfrak{a}_{Q_0}$ tels que

$$\widetilde{\sigma}_Q^R(H - T)\phi_{Q_0}^{P'}(H - T)\tau_{P'}^Q(H - T) = 1, \quad q_Q(H) \in \omega. \tag{12.7}$$

D'après [25, lemme 2.13.3] (l'exposant G est ici remplacé par un exposant $\widetilde{G}$, voir section 2.2), pour H vérifiant (12.7), on a

$$\|H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0}\| \ll 1 + \|(H - T)_{P'}^Q\| \tag{12.8}$$

d'où

$$\|H^{\widetilde{G}}\| \ll 1 + \|H_{P'}^Q\|. \tag{12.9}$$

Les constantes implicites dans (12.8) et (12.9) dépendent de T. Au lieu d'intégrer sur $x \in \boldsymbol{X}_{L_0}^{\tilde{G}}(H)$, on peut choisir un relèvement $H' \in \mathcal{A}_{Q_0}$ de $H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$ et intégrer sur $x \in ((\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0})\mathfrak{S}^{L_0,*}) \cap L_0(\mathbb{A}; H')$. De même, on peut faire varier (u, u') dans un compact $\Omega_{Q_0}^{L} \times \Omega_{Q_0}^{L'}$ de $U_{Q_0}^{L}(\mathbb{A}) \times U_{Q_0}^{L'}(\mathbb{A})$. On écrit[2] $x = zas$ avec

$$z \in \mathfrak{B}_{\tilde{G}} L_0(F), \quad a \in (\mathfrak{B}_{Q_0}^{\tilde{G}} \cap \mathfrak{B}'^{\tilde{G}}_{Q_0}) \quad \text{et} \quad s \in \mathfrak{S}^{L_0,*},$$

et on décompose a en $a = a_Q a^Q = a_{Q'} a^{Q'}$ comme dans la preuve du lemme 12.3.1. Pour $u \in \Omega_{Q_0}^{L}$, $u' \in \Omega_{Q_0}^{L'}$ et $k \in \boldsymbol{K}$, en supposant que $a_Q^{-1}\theta_0(a_{Q'})$ appartient à $A_{\tilde{G}}(\mathbb{A})A_Q(\mathbb{A})^1$ – sinon $\mathfrak{J}(uu'xk) = 0$ (cf. la preuve de *loc. cit.*) –, on a

$$\mathfrak{J}(uu'xk) = \boldsymbol{\delta}_Q(a_Q)\mathfrak{J}(ua^Q sk, u'a^{Q'}sk).$$

Quitte à grossir $\mathfrak{E}_Q$, on peut supposer que $L_0(\mathbb{A})^* = \mathfrak{E}_{Q_0} L_0(\mathbb{A})^1$ est contenu dans $L_Q(\mathbb{A})^* = \mathfrak{E}_Q L_Q(\mathbb{A})^1$. Alors pour chaque $u \in \Omega_{Q_0}^{L}$, on peut choisir un $\gamma \in L(F)$ tel que

$$y_1 = \gamma u a^Q s \in \mathfrak{S}^{L,*} = \mathfrak{E}_Q \mathfrak{S}^{L,1}.$$

D'après le corollaire 12.2.3, il existe c, $D > 0$ et un compact C_L dans $\mathfrak{S}^{L,*}$ tel que pour tout $k \in \boldsymbol{K}$, tout $u \in \Omega_{Q_0}^{L}$ et tout $u' \in \Omega_{Q_0}^{L'}$, on ait $\mathfrak{J}(y_1 k, u'a^{Q'}sk) = 0$ si $y_1 \notin C_L$ et

$$|\mathfrak{J}(y_1 k, u'a^{Q'}sk)| \leq c\,|u'a^{Q'}s|^D \quad \text{sinon.}$$

Comme dans la preuve de [25, proposition 12.3.2], on obtient

$$\|H_{P'}^{Q}\| + \|\mathbf{H}_0(s)\| \ll 1 + \|\mathbf{H}_0(y_1)\|. \tag{12.10}$$

Pour $y_1 \in C_L$, d'après (12.9) et (12.10), $\|H^{\tilde{G}}\|$ et $\|\mathbf{H}_0(s)\|$ sont bornés. On en déduit que H varie dans un sous-ensemble fini de $\mathfrak{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$. D'autre part s appartient à $\mathfrak{S}^{L_0,*}$ et $\|\mathbf{H}_0(s)\|$ est borné, par conséquent $|s|$ est borné. On obtient que

$$\boldsymbol{\delta}_{Q_0}(x)^{-1}|\mathfrak{J}(u'uxk)| \ll 1.$$

D'où la proposition, puisque l'ensemble

$$\Omega_{Q_0}^{L} \times \Omega_{Q_0}^{L'} \times ((\mathfrak{B}_{Q_0} \cap \mathfrak{B}'_{Q_0})\mathfrak{S}^{L_0,*} \cap L_0(\mathbb{A}; H)) \times \boldsymbol{K}$$

est de volume fini. ∎

[2] Notons que notre s joue le rôle du x de la démonstration de [25, proposition 12.3.2].

12.4 Transformation de l'opérateur de troncature

Pour calculer l'expression

$$\sum_{H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(H_Q - T) \int_{\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)} \mathfrak{J}^T_{Q,Q';\Phi,\Psi;\vartheta}(y)\, \mathrm{d}y, \tag{12.11}$$

où ϑ est une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_S$, on décompose l'intégrale sur $\boldsymbol{Y}_{Q_0}(H)$ comme en section 12.3. On peut permuter l'intégrale sur le groupe compact

$$U_{Q_0^L}(F)\backslash U_{Q_0^L}(\mathbb{A}) \times U_{Q_0^{L'}}(F)\backslash U_{Q_0^{L'}}(\mathbb{A})$$

avec celle sur le groupe (lui aussi compact) $\boldsymbol{\mu}_S$. Pour $(x,k) \in \boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H) \times \boldsymbol{K}$, la composée de ces deux intégrales est égale à

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} (\boldsymbol{\Lambda}^{T,Q} E^Q)_{Q_0}(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk, \Psi, \mu)} \vartheta(\mu)\, \mathrm{d}\mu, \tag{12.12}$$

où l'indice Q_0 signifie que l'on prend le terme constant le long de Q_0. D'après [25, lemme 4.1.1], cette expression (12.12) n'est non nulle que si

$$\phi_{Q_0}^Q(H - T) = 1.$$

Cela entraîne que dans le découpage suivant les $P' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q_0 \subset P' \subset Q$ dans la preuve de la proposition 12.3.2, seul le domaine correspondant à $P' = Q$ donne une contribution non nulle. D'après (12.8), il existe $c > 0$ tel que pour les H vérifiant

$$\widetilde{\sigma}_Q^R(H - T)\phi_{Q_0}^Q(H - T) = 1, \quad q_Q(H) \in \omega$$

on ait

$$\|H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0}\| \le c. \tag{12.13}$$

Le point est qu'ici la constante c est indépendante de T (d'après [25, lemme 2.13.3] et le lemme 12.3.1). En particulier, puisque $T_{Q_0} \in \mathfrak{a}_{Q_0}^G$, on a

$$H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0} = H_G^{\widetilde{G}} + (H^G - T_{Q_0})$$

et $\|H_G^{\widetilde{G}}\|$ est borné par une constante indépendante de T. Fixons un réel η tel que $0 < \eta < 1$. Si T est assez régulier, la condition (12.13) entraîne

$$\|H^Q - T_{Q_0}^Q\| \le \|\eta T\|. \tag{12.14}$$

Pour $T \in \mathfrak{a}_0$, on note[3] κ^T la fonction caractéristique du sous-ensemble des $X \in \mathfrak{a}_0$ tels que $\|X\| \leq \|T\|$. D'après [25, lemme 4.2.2] il existe $c' > 0$, tel que si

$$\boldsymbol{d}_0(T) \geq c'(c+1),$$

l'expression (12.12) multipliée par $\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)$ vaut[4]

$$\kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q)\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T)$$
$$\times \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^Q(xk,\Phi,\theta_0(\mu))\overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu$$

si $\|H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0}\| \leq c$, et elle est nulle sinon. Ce dernier point résulte de l'analogue de la preuve de (12.8) pour l'expression ci-dessus. Notons que pour H vérifiant $\phi_{Q_0}^G(H-T) = 1$, l'élément

$$T[\![H^Q]\!] = T[\![H^Q]\!]^{Q_0} \in \mathfrak{a}_{P_0}^{Q_0}$$

est « plus régulier » que T^{Q_0} : en effet, d'après [25, lemme 4.2.1], on a

$$\boldsymbol{d}_{P_0\cap L_0}^{L_0}(T[\![H^Q]\!]) \geq \boldsymbol{d}_{P_0\cap L_0}^{L_0}(T^{Q_0}) \geq \boldsymbol{d}_0(T).$$

On a donc prouvé la proposition suivante.

Proposition 12.4.1. *Il existe $c, c' > 0$ tel que pour tout $T \in (\mathfrak{a}_0^G)^{\theta_0}$ vérifiant $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c'(c+1)$, l'expression (12.11) soit égale à*

$$\sum_{H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} \kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q)\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T)e^{-\langle 2\rho_{Q_0},H\rangle}$$
$$\times \int_{\boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)\times \boldsymbol{K}} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^Q(xk,\Phi,\theta_0(\mu))\overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k.$$

La somme sur $\mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$ ne fait intervenir que des H tels que $\|H^{\widetilde{G}} - T_{Q_0}\| \leq c$.

On a aussi l'analogue de [25, proposition 12.5.1] :

[3]Observons que la fonction κ^T utilisée ici n'est pas tout-à-fait la même que celle de [25], puisque nous ne passons pas au quotient par le centre.

[4]Il faut supprimer le signe $(-1)^{a_Q - a_G}$ dans la formule du lemme 4.2.2 de [25]. Voir **Err** (iii) de l'annexe.

Proposition 12.4.2. *Pour $H \in \mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$, on considère l'expression*

(12.15)
$$\int_{\boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)\times \boldsymbol{K}} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} |\boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^{Q}(xk,\Phi,\theta_0(\mu))\overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\vartheta(\mu)|\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k.$$

On suppose que T est dans le cône introduit en section 12.3 et que $\boldsymbol{d}_0(T)$ est assez grand. On a les assertions suivantes :

(i) *Si $\phi_{Q_0}^{Q}(H-T)=1$, l'expression (12.15) est convergente.*

(ii) *Il existe η_0 avec $0<\eta_0<1$ tel que si $0<\eta<\eta_0$, alors il existe $c>0$ tel que, pour tout $T\in(\mathfrak{a}_0^G)^{\theta_0}$ et tout $H\in\mathfrak{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$ vérifiant*

$$\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^{Q}(H-T)\kappa^{\eta T}(H^Q-T_{Q_0}^Q)=1,$$

l'expression (12.15) soit majorée par $c\, e^{\langle 2\rho_{Q_0},H\rangle}\boldsymbol{d}_0(T)^{\dim(\mathfrak{a}_0^{Q_0})}$.

Démonstration. On reprend celle de *loc. cit*. On veut majorer l'intégrale intérieure dans (12.15). Pour cela on peut supposer $\vartheta\equiv 1$ (cf. la remarque 12.1.2). Comme dans la preuve de [25, proposition 12.2.3], on se ramène grâce à l'inégalité de Schwartz à majorer deux types d'intégrales :

(12.16)
$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^{Q}(xk,\Phi,\theta_0(\mu))\overline{\boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^{Q}(xk,\Phi,\theta_0(\mu))}\,\mathrm{d}\mu$$

et

(12.17)
$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)\overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu.$$

Commençons par majorer l'intégrale (12.17). Rappelons que l'on a fixé en section 12.2 un domaine de Siegel $\mathfrak{S}_{Q'}^G=\Omega_{Q'}\mathfrak{B}_{Q'}^G\mathfrak{S}^{L',*}\boldsymbol{K}$ pour le quotient $\mathfrak{B}_G Q'(F)\backslash G(\mathbb{A})$. Soit $h^{Q'}$ la fonction sur $Q'(F)\backslash G(\mathbb{A})/\boldsymbol{K}$ définie par

$$h^{Q'}(y)=\sum_{\delta\in Q'(F)}\boldsymbol{\delta}_{P_0}(\delta y)^{1/2}\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{Q'}^G}(\delta y).$$

On a

$$h^{Q'}(y)\ll\boldsymbol{\delta}_{P_0}(y)^{1/2}\ll h^{Q'}(y)\quad\text{pour}\quad y\in\mathfrak{S}_{Q'}^G.$$

D'après la proposition 12.2.2, pour $b\in\mathfrak{B}_G$ et $y,\,y'\in Q'(F)\mathfrak{S}_{Q'}^G$, l'intégrale

(12.18)
$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} E^{Q'}(by,\Psi,\mu)\overline{E^{Q'}(by',\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu=\int_{\boldsymbol{\mu}_S} E^{Q'}(y,\Psi,\mu)\overline{E^{Q'}(y',\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu$$

est essentiellement majorée par $h^{Q'}(y)h^{Q'}(y')$. Ensuite on prend le terme constant en chacune des variables $y,\,y'$. Cette opération, qui consiste à intégrer sur un compact, commute à l'intégrale sur $\boldsymbol{\mu}_S$. Puis on prend $y=y'=a^G sk$ avec $k\in\boldsymbol{K}$,

$s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}$, $x = as \in L_0(\mathbb{A}; H')$ pour un relèvement $H' \in \mathcal{A}_{Q_0}$ de $H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}$ et $a = a_G a^G \in \mathfrak{B}_G \mathfrak{B}_{Q_0}^G$ (on peut même supposer $a^G \in \mathfrak{B}_{Q_0}^G \cap \mathfrak{B}'^G_{Q_0}$ comme dans la démonstration de la proposition 12.3.2). L'intégrale (12.17) est donc essentiellement majorée par

$$h_{Q_0}^{Q'}(y)^2 = h_{Q_0}^{Q'}(a^G s)^2.$$

Comme la fonction $h^{Q'}$ est à croissance lente, son terme constant $h_{Q_0}^{Q'}$ l'est aussi. L'intégrale (12.17) est donc essentiellement majorée par $|a^G s|^D$ pour $D > 0$ assez grand. L'intégrale (12.16) se déduit, elle aussi, de (12.18) en prenant les termes constants le long de Q_0, puis en appliquant l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0}$, et enfin en posant $y = y' = a^G sk$. Quand on prend les termes constants, on obtient une expression essentiellement majorée par

$$h_{Q_0}^Q(y) h_{Q_0}^Q(y').$$

Rappelons que l'hypothèse $\phi_{Q_0}^Q(H - T) = 1$ assure que l'élément $T[\![H^Q]\!] \in \mathfrak{a}_{P_0}^{Q_0}$ est régulier. D'après la proposition 4.2.1, il existe un sous-ensemble compact Ω de $\mathfrak{S}^{L_0,*}$ tel que si $\mathbf{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} h_{Q_0}^Q(a^G sk) \neq 0$, alors $s \in \Omega$. Comme

$$\mathbf{H}_{Q_0}(x)^G = \mathbf{H}_{Q_0}(a^G) + \mathbf{H}_{Q_0}(s)^G = H^G$$

et que H est fixé, a^G reste dans un ensemble fini de $\mathfrak{B}_{Q_0}^G$. D'où le point (i). Prouvons (ii). On suppose que l'hypothèse

$$\widetilde{\sigma}_Q^R(H - T)\phi_{Q_0}^Q(H - T)\kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q) = 1 \tag{12.19}$$

est vérifiée[5]. On peut prendre x dans un domaine de Siegel $\mathfrak{S}^{L_0} = \mathfrak{B}_{L_0}\mathfrak{S}^{L_0,*}$. On écrit $x = as$ avec $a \in \mathfrak{B}_{Q_0}$ et $s \in \mathfrak{S}^{L_0,*}$. Si η est assez petit, l'hypothèse (12.19) implique, comme dans la preuve de [25, proposition 12.5.1] (majoration (4), page 170), qu'il existe une constante $D > 0$, telle que

$$h_{Q_0}^Q(a^G s) \ll \delta_{Q_0}(a)^{\frac{1}{2}} |s|^D.$$

Mais cette majoration est inutile ici, on peut directement passer à la page 172. Notons $\mathbf{C}$ l'opérateur qui multiplie une fonction sur $\boldsymbol{Y}_{Q_0}$ par la fonction

$$x \mapsto F_{P_0}^{Q_0}(x, T[\![H^Q]\!])$$

[5] Si η est assez petit, l'hypothèse (12.19) implique $\tau_{Q_0}^P(H) = 1$, où $\widetilde{P}$ est l'unique élément de $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ vérifiant la double inclusion $Q' \subset P \subset R$ (cf. [25, page 171]). En particulier, cela entraîne $\tau_{Q_0}^{Q'}(H) = 1$ et $\tau_{Q_0}^Q(H) = 1$.

et décomposons l'opérateur $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0}$ en

$$(\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{C}) + \mathbf{C}.$$

Rappelons que $T[\![H^Q]\!]$ est « plus régulier » que T. D'après la proposition 4.2.2, si T est assez régulier, on peut remplacer l'opérateur $\boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0}$ par $\mathbf{C}$ dans l'intégrale intérieure de l'expression (12.15). Il nous faut donc majorer l'intégrale

$$I_{\mathbf{C}}(xk) = \int_{\boldsymbol{\mu}_S} F_{P_0}^{Q_0}(ask, T[\![H^Q]\!]) E_{Q_0}^{Q}(xk, \Phi, \theta_0(\mu)) \overline{E_{Q_0}^{Q}(xk, \Phi, \theta_0(\mu))} \, \mathrm{d}\mu$$

sous les hypothèses (12.19) et

$$F_{P_0}^{Q_0}(xk, T[\![H^Q]\!]) = F_{P_0}^{Q_0}(s, T[\![H^Q]\!]) = 1. \tag{12.20}$$

Cela conduit à majorer (12.17) et l'analogue de (12.17) où Q remplace Q'. Sous (12.19) et (12.20), on obtient comme dans la preuve de [25, proposition 12.5.1] que $h^{Q'}(a^G s)$ est essentiellement majoré par $\boldsymbol{\delta}_{P_0}(x)^{1/2}$. Donc (12.17) est essentiellement majoré par $\boldsymbol{\delta}_{P_0}(x)$. Il en est de même de l'analogue de (12.17) relatif à Q, et donc aussi de $I_{\mathbf{C}}(xk)$. On obtient que l'expression (12.15) est essentiellement majorée par

$$\int_{\boldsymbol{X}_{L_0}(H)} F_{P_0}^{Q_0}(x, T[\![H^Q]\!]) \boldsymbol{\delta}_{P_0}(x) \, \mathrm{d}x,$$

ou, ce qui revient au même, par

$$e^{\langle 2\rho_{Q_0}, H\rangle} \int_{\boldsymbol{\mathfrak{S}}^{L_0,*}} F_{P_0}^{Q_0}(s, T[\![H^Q]\!]) \boldsymbol{\delta}_{P_0}(s) \, \mathrm{d}s.$$

Rappelons que

$$\boldsymbol{\mathfrak{S}}^{L_0,*} = \mathfrak{E}_{L_0} \boldsymbol{\mathfrak{S}}^{L_0,1} = \mathfrak{E}_{L_0} \Omega_{L_0} \mathfrak{B}_0^{L_0}(t) \mathfrak{F}_{L_0} \boldsymbol{K}_{L_0}$$

avec $\mathfrak{B}_0^{L_0}(t) = \mathfrak{B}_0(t) \cap L_0(\mathbb{A})^1$. On décompose s en $s = vbk$ avec $v \in \mathfrak{E}_{L_0} \Omega_{L_0}$, $b \in \mathfrak{B}_0^{L_0}(t)$ et $k \in \mathfrak{F}_{L_0} \boldsymbol{K}_{L_0}$. La décomposition des mesures introduit un facteur $\boldsymbol{\delta}_{P_0 \cap L_0}^{L_0}(b)^{-1} = \boldsymbol{\delta}_{P_0}(b)^{-1}$, et l'intégrale sur $\boldsymbol{\mathfrak{S}}^{L_0,*}$ est essentiellement majorée par le cardinal de l'ensemble

$$\{b \in \mathfrak{B}_0^{L_0}(t) : F_{P_0}^{Q_0}(b, T[\![H^Q]\!]) = 1\}.$$

En écrivant $Y = \mathbf{H}_0(b) \in \mathfrak{a}_0^{L_0}$, on conclut, comme à la fin de la démonstration de [25, proposition 12.5.1]. ∎

12.5 Retour à la formule de départ

On suppose désormais que $0 < \eta < \eta_0$, où η_0 vérifie les conditions de la proposition 12.4.2.

L'expression pour $\mathfrak{J}^{G,T}$ de la proposition de 12.1.1 est une combinaison linéaire finie d'intégrales itérées (12.1) (ou, ce qui revient au même, d'expressions (12.2)) dont la convergence est assurée par la proposition 12.3.2.

Proposition 12.5.1. *Il existe une constante absolue $c' > 0$ et une constante $c(f) > 0$ telles que, si $\boldsymbol{d}_0(T) \geq c'(c(f)+1)$, on a*

$$\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T} = \sum_{\substack{Q,R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}\\ Q\subset R}} \widetilde{\eta}(Q,R) \sum_{S\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}} \frac{1}{n^{Q'}(S)} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M_S)} \widehat{c}_{M_S}(\sigma) \times \sum_{\Psi\in\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} \sum_{H\in\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} A^T(H;\Psi)$$

avec

$$\begin{aligned} A^T(H;\Psi) = \kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q)\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T) \\ \times e^{-\langle 2\rho_{Q_0},H\rangle} \int_{\boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)\times\boldsymbol{K}} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^Q(xk,\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\Psi,\theta_0(\mu)) \\ \times \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k. \end{aligned}$$

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 12.4.1 et de la remarque 12.1.2. ∎

Définition 12.5.2. Pour $\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma)$ et $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)},\theta_0(\sigma))$, et pour ϑ une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_S$, on pose

$$\begin{aligned} A^T(H;\Phi,\Psi;\vartheta) = \kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^Q)\widetilde{\sigma}_Q^R(H-T)\phi_{Q_0}^Q(H-T) \\ \times e^{-\langle 2\rho_{Q_0},H\rangle} \int_{\boldsymbol{X}_{L_0}^{\widetilde{G}}(H)\times\boldsymbol{K}} \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0} E_{Q_0}^Q(xk,\Phi,\theta_0(\mu)) \\ \times \overline{E_{Q_0}^{Q'}(xk,\Psi,\mu)}\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k. \end{aligned}$$

On écrira simplement $A^T(H)$ pour $A^T(H;\Phi,\Psi;\vartheta)$ lorsque les fonctions Φ, Ψ et φ sont fixées, et on pose

$$A^T = \sum_{H\in\mathcal{C}_{Q_0}^{\widetilde{G}}} A^T(H).$$

Chapitre 13

Simplification du produit scalaire

13.1 Une majoration uniforme

Pour $P \in \mathcal{P}$, choisissons une section du morphisme $A_P(\mathbb{A}) \to \mathcal{B}_P$ et notons $\mathfrak{B}_P$ son image. Cela permet de relever $\Xi(P)^1$ dans $\Xi(P)$, d'où une identification

$$\Xi(P) = \Xi(P)^1 \times \widehat{\mathcal{B}}_P.$$

Le groupe des caractères automorphes, mais non nécessairement unitaires, de $A_P(\mathbb{A})$ s'identifie à $\Xi(P) \times \mathfrak{a}_P^*$. Un tel caractère ξ peut donc s'écrire

$$\xi = \xi_{\mathrm{u}}|\xi| = (\zeta \star \mu) \star \nu = \zeta \star (\mu + \nu)$$

avec $\zeta = \xi|_{A_P(\mathbb{A})^1}$, $\mu \in \widehat{\mathcal{B}}_P$ et $\nu \in \mathfrak{a}_P^*$. On le notera $\xi = (\zeta, \mu, \nu)$.

Soit ϕ une forme automorphe sur $\boldsymbol{X}_G$ (discrète ou non). Pour $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on note $\phi_{P,\mathrm{cusp}}$ le terme constant cuspidal de ϕ le long de P, défini en [32, sous-sections I.3.4, I.3.5]. C'est une forme automorphe cuspidale sur $\boldsymbol{X}_P$, qui s'écrit sous la forme

$$\phi_{P,\mathrm{cusp}} = \sum_{(q,\xi)} q(\mathbf{H}_P(x))\phi_{q,\xi}(x), \tag{13.1}$$

où (q, ξ) parcourt un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}[\mathfrak{a}_P] \times \Xi(P) \times \mathfrak{a}_P^*$ et $\phi_{q,\xi}$ est une forme automorphe cuspidale sur $\boldsymbol{X}_P$, se transformant suivant ξ. En écrivant $\xi = (\zeta, \mu, \nu)$, comme ci-dessus, on voit que la fonction

$$x \mapsto e^{-\langle \mu+\nu, \mathbf{H}_P(x)\rangle}\phi_{q,\xi}(x)$$

appartient à $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_P)_\zeta$. Notons $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_{\Xi(P)^1}$ le sous-espace de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)$, engendré par les espaces $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_\xi$ pour $\xi \in \Xi(P)^1$, identifié au sous-groupe de $\Xi(P)$ des caractères triviaux sur $\mathfrak{B}_P$. Il se décompose en

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_{\Xi(P)^1} = \bigoplus_{\zeta \in \Xi(P)^1} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_\zeta.$$

Pour tout $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, fixons un sous-ensemble compact $\Gamma_P \subset \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*/\mathcal{A}_P^\vee$, deux entiers naturels $\boldsymbol{n}_P$ et d_P, et un sous-espace de dimension finie V_P de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{cusp}}(\boldsymbol{X}_P)_{\Xi(P)^1}$. On note

$$A((V_P, d_P, \Gamma_P, \boldsymbol{n}_P)_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}})$$

l'ensemble des formes automorphes ϕ sur X_G telles que, pour tout $P \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, le terme constant cuspidal $\phi_{P,\mathrm{cusp}}$ puisse s'écrire

$$\phi_{P,\mathrm{cusp}}(x) = \sum_{i=1}^{n_P} e^{\langle \lambda_{P,i}+\rho_P, \mathbf{H}_P(x)\rangle} \sum_{j=1}^{n_{P,i}} q_{P,i,j}(\mathbf{H}_P(x))\phi_{P,i,j}(x), \tag{13.2}$$

où les $n_{P,j}$ sont des entiers positifs ou nuls quelconques, $n_P \leq \boldsymbol{n}_P$, $\lambda_{P,i} \in \Gamma_P$, $q_{P,i,j} \in \mathbb{C}[\mathfrak{a}_P]$ avec $\deg(q_{P,i,j}) \leq d_P$, et $\phi_{P,i,j} \in V_P$. Notons que cet ensemble n'est pas un espace vectoriel (à cause de la condition $n_P \leq \boldsymbol{n}_P$). Dans l'expression (13.2), on peut supposer que les $\lambda_{P,i}$ sont deux-à-deux distincts. On définit comme en [25, section 13.1] une norme

$$\|\phi\|_{\mathrm{cusp}} = \sum_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}} \|\phi_{P,\mathrm{cusp}}\|_{\mathrm{cusp}}.$$

D'après [25, lemme 13.1.1], on a le résultat suivant.

Lemme 13.1.1. *Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\phi \in A((V_P, d_P, \Gamma_P, \boldsymbol{n}_P)_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}})$ et tout $x \in \mathfrak{S} = \mathfrak{B}_G\mathfrak{S}^*$, on ait la majoration*

$$|\phi(x)| \leq c\|\phi\|_{\mathrm{cusp}} \sum_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}} \sum_{i=1}^{n_P} e^{\langle \lambda^P + \Re(\lambda_{P,i})+\rho_P, \mathbf{H}_0(x)\rangle}(1+\mathbf{H}_P(x))^{d_P},$$

où λ^P est la projection de λ sur $\mathfrak{a}_0^{P,*}$ et les $\lambda_{P,i}$ sont ceux de l'égalité (13.2).

13.2 Majoration des termes constants

On fixe deux sous-groupe paraboliques standards Q, $R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $Q \subset R$ et $\tilde{\eta}(Q,R) = 1$. On pose $Q' = \theta_0^{-1}(Q)$ et $Q_0 = Q \cap Q'$. On fixe aussi $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}$ et $\sigma \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$. La représentation σ intervient dans le spectre discret de $M_S(F)\backslash M_S(\mathbb{A})^1$. Considérons :

- un sous-groupe parabolique standard S_{cusp} tel que $S_{\mathrm{cusp}} \subset S$;
- une représentation automorphe cuspidale σ_{cusp} de $M_{S_{\mathrm{cusp}}}(\mathbb{A})$ qui est une sous-représentation irréductible de $L^2(\mathfrak{B}_{S_{\mathrm{cusp}}}\backslash X_{M_{S_{\mathrm{cusp}}}})$ – c'est-à-dire que σ_{cusp} se réalise dans $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(X_{M_{S_{\mathrm{cusp}}}})_\zeta$ pour un caractère $\zeta \in \Xi(S_{\mathrm{cusp}})^1$;
- un opérateur différentiel D à coefficients polynomiaux sur $\mathfrak{a}_{S_{\mathrm{cusp}},\mathbb{C}}^{S,*}$;
- un point $\nu_0 \in \mathfrak{a}_{S_{\mathrm{cusp}}}^{S,*}$.

Rappelons que $\boldsymbol{\Psi}_{S_{\mathrm{cusp}}\cap M_S}(\sigma_{\mathrm{cusp}})$ est une base orthonormale de l'espace vectoriel pré-hilbertien $\mathcal{A}(X_{S_{\mathrm{cusp}}\cap M_S}, \sigma_{\mathrm{cusp}})$. Pour $\Phi_{\mathrm{cusp}} \in \boldsymbol{\Psi}_{S_{\mathrm{cusp}}\cap M_S}(\sigma_{\mathrm{cusp}})$ et $\nu \in \mathfrak{a}_{S_{\mathrm{cusp}},\mathbb{C}}^{S,*}$, formons la série d'Eisenstein

$$E^{M_S}(y, \Phi_{\mathrm{cusp}}, \nu) = \sum_{\gamma \in (S_{\mathrm{cusp}} \cap M_S)(F) \backslash M_S(F)} \Phi_{\mathrm{cusp}}(\gamma y, \nu), \quad y \in M_S(\mathbb{A}).$$

On applique l'opérateur D sous l'hypothèse que la fonction $\nu \mapsto DE^{M_S}(y, \Phi_{\mathrm{cusp}}, \nu)$ est holomorphe en $\nu = \nu_0$ et on note

$$D_{\nu=\nu_0} E^{M_S}(y, \Phi_{\mathrm{cusp}}, \nu),$$

sa valeur en $\nu = \nu_0$.

Comme dans [25] on voit qu'en choisissant convenablement la base $\boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$ de $\boldsymbol{\mathcal{A}}(X_S, \sigma)$, on peut supposer que pour tout élément $\Psi \in \boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)$, il existe des données S_{cusp}, σ_{cusp}, D, ν_0 et $\Psi_{\mathrm{cusp}} \in \boldsymbol{\Psi}_{S_{\mathrm{cusp}}}(\sigma_{\mathrm{cusp}})$ telles que

$$E^{Q'}(y, \Psi, \mu) = D_{\nu=\nu_0} E^{Q'}(y, \Psi_{\mathrm{cusp}}, \nu + \mu)$$

pour tout $\mu \in \mathfrak{a}^*_{S,\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_S$. Prendre un terme constant et prendre un résidu sont deux opérations qui commutent. Grâce à [25, théorème 5.2.2 (4)], on obtient

(13.3)
$$E^{Q'}_{Q_0}(y, \Psi, \mu) = D_{\nu=\nu_0}\Bigg(\sum_{s \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_{S_{\mathrm{cusp}}}, Q_0)} E^{Q_0}(y, \mathbf{M}(s, \nu+\mu)\Psi_{\mathrm{cusp}}, s(\nu+\mu))\Bigg).$$

Le terme constant $E^{Q'}_{S'_{\mathrm{cusp}}}(y, \Psi, \mu)$ de la forme automorphe $E^{Q'}_{Q_0}(y, \Psi, \mu)$, relatif à un sous-groupe parabolique $S'_{\mathrm{cusp}} \in \mathcal{P}^{Q_0}_{\mathrm{st}}$ associé à S_{cusp} dans Q', est égal à :

$$D_{\nu=\nu_0}\Bigg(\sum_{s \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_{S_{\mathrm{cusp}}}, Q_0)} \sum_{s' \in \mathbf{W}^{Q_0}(\mathfrak{a}_{s(S_{\mathrm{cusp}})}, \mathfrak{a}_{S'_{\mathrm{cusp}}})} \mathbf{M}(s's, \nu+\mu)\Psi_{\mathrm{cusp}}(y, s's(\mu+\nu))\Bigg).$$

Les *exposants cuspidaux* de $E^{Q'}_{S'_{\mathrm{cusp}}}(y, \Psi, \mu)$ sont les

$$s's(\nu_0 + \mu) \in \mathfrak{a}^*_{S'_{\mathrm{cusp}},\mathbb{C}}/\mathcal{A}^\vee_{S'_{\mathrm{cusp}}}.$$

Pour $w \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_{S_{\mathrm{cusp}}}, \mathfrak{a}_{S'_{\mathrm{cusp}}})$, notons Q'_w le plus petit sous-groupe parabolique standard de Q' tel que $\mathfrak{a}_{Q'_w} \subset w(\mathfrak{a}_S)$. D'après [25, section 13.2 (5), page 184] et [32, corollaire V.3.16 et proposition VI.1.6 (c)], on sait que, pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, les parties réelles des exposants cuspidaux de $E^{Q'}_{S'_{\mathrm{cusp}}}(y, \Psi, \mu)$ sont de la forme $w\nu_0$, pour des $w \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_{S_{\mathrm{cusp}}}, \mathfrak{a}_{S'_{\mathrm{cusp}}})$ tels que

(13.4)
$$\widehat{\tau}^{Q'_w}_{S'_{\mathrm{cusp}}}(-w\nu_0) = 1.$$

Ainsi dans l'expression $E^{Q'}_{S'_{\mathrm{cusp}}}(y,\Psi,\mu)$ pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, les termes indexés par les couples (s,s') tels que l'élément $w = ss'$ ne vérifie pas (13.4) sont nuls. On décompose $E^{Q'}_{Q_0}(y,\Psi,\mu)$ en

$$E^{Q'}_{Q_0}(y,\Psi,\mu) = E^{Q'}_{Q_0,\mathrm{unit}}(y,\Psi,\mu) + E^{Q'}_{Q_0,+}(y,\Psi,\mu),$$

où le terme $E^{Q'}_{Q_0,\mathrm{unit}}$ est la sous-somme de (13.3) indexée par les s tels que $s(\mathfrak{a}^S_0) \subset \mathfrak{a}^{Q_0}_0$ et le terme $E^{Q'}_{Q_0,+}$ est la sous-somme restante. On obtient, comme en [25, section 13.2 (7)], que pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, on a

$$E^{Q'}_{Q_0,\mathrm{unit}}(y,\Psi,\mu) = \sum_{s\in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S,Q_0)} E^{Q_0}(y,\mathbf{M}(s,\mu)\Psi,\mu).$$

Rappelons que $\mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S,Q_0)$ est l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}_S$ des $s \in \mathbf{W}^{Q'}$ tels que $s(\mathfrak{a}_S) \supset \mathfrak{a}_{Q_0}$ et que s est de longueur minimale dans sa classe $\mathbf{W}^{Q_0}s$ (ce qui signifie que $s(S) \cap L_0$ est standard dans $L_0 = M_{Q_0}$). D'après [25, section 13.2 (6)], la fonction $E^{Q'}_{Q_0,\mathrm{unit}}(y,\Psi,\mu)$ est lisse pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, il en est donc de même pour la fonction

$$E^{Q'}_{Q_0,+}(y,\Psi,\mu) = E^{Q'}_{Q_0}(y,\Psi,\mu) - E^{Q'}_{Q_0,\mathrm{unit}}(y,\Psi,\mu).$$

Proposition 13.2.1. *Soient $Z \in \mathcal{A}_G$ et $T_1 \in \mathfrak{a}^{Q_0}_0$.*

(i) *Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et un réel $c > 0$ tels que*

$$|E^{Q'}_{Q_0}(xk,\Psi,\mu)| \le c\,\boldsymbol{\delta}_{P_0}(a)^{\frac12}(1+\|H\|)^N|s|^N$$

pour tout $H \in \mathcal{A}^G_{Q_0}(Z)$ tel que $\tau^{Q'}_{Q_0}(H) = 1$, tout $(a,s) \in \mathfrak{B}_{L_0} \times \mathfrak{S}^{L_0,*}$ tel que $x = as \in L_0(\mathbb{A};H)$, tout $k \in \boldsymbol{K}$ et tout $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$.

(ii) *Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et un réel $c > 0$ tels que*

$$|E^{Q'}_{Q_0}(xk,\Psi,\mu)| \le c\,\boldsymbol{\delta}_{P_0}(x)^{\frac12}(1+\|X_{Q_0}\|)^N(1+\|\mathbf{H}_0(s)\|)^N$$

pour tout $X \in \mathcal{A}^G_{P_0}(Z)$ tel que $\tau^{Q'}_{P_0}(X+T_1) = 1$, tout $(a,s) \in \mathfrak{B}_{L_0} \times \mathfrak{S}^{L_0,*}$ tel que $\mathbf{H}_0(x) = X$ avec $x = as$, tout $k \in \boldsymbol{K}$ et tout $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$.

(iii) *Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et un réel $c > 0$ tels que*

$$|E^{Q'}_{Q_0,\mathrm{unit}}(xk,\Psi,\mu)| \le c\,\boldsymbol{\delta}_{P_0}(x)^{\frac12}(1+\|H\|)^N(1+\|\mathbf{H}_0(s)\|)^N$$

pour tout $H \in \mathcal{A}^G_{Q_0}(Z)$, tout $(a,s) \in \mathfrak{B}_{L_0} \times \mathfrak{S}^{L_0,*}$ tel $x = as \in L_0(\mathbb{A};H)$, tout $k \in \boldsymbol{K}$ et tout $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$.

(iv) *Il existe un réel $R > 0$, un entier $N > 0$ et un réel $c > 0$ tels que*

$$|E^{Q'}_{Q_0,+}(xk,\Psi,\mu)| \leq c\,\boldsymbol{\delta}_{P_0}(x)^{\frac{1}{2}}(1+\|X_{Q_0}\|)^N \\ \times(1+\|\mathbf{H}_0(s)\|)^N \sup_{\alpha\in\Delta_0^{Q'}\smallsetminus\Delta_0^{Q_0}} e^{-R\langle\alpha,\mathbf{H}_0(x)\rangle}$$

pour tout $X\in\mathcal{A}^G_{P_0}(Z)$ tel que $\tau^{Q'}_{P_0}(X+T_1)=1$, tout $(a,s)\in\mathfrak{B}_{L_0}\times\mathfrak{S}^{L_0,*}$ tel que $\mathbf{H}_0(x)=X$ avec $x=as$, tout $k\in\boldsymbol{K}$ et tout $\mu\in\boldsymbol{\mu}_S$.

Démonstration. On suit, pas à pas, celle de la proposition 13.2.1 de [25]. ∎

13.3 Simplication du terme constant

On a introduit dans la définition 12.5.2 des expressions $A^T(H)$ et A^T. On note

$$A^T_{\mathrm{unit}} = \sum_{H\in\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_{Q_0}} A^T_{\mathrm{unit}}(H)$$

les expressions obtenues en remplaçant les fonctions $E^{Q'}_{Q_0}$ par $E^{Q'}_{Q_0,\mathrm{unit}}$ et $E^{Q}_{Q_0}$ par $E^{Q}_{Q_0,\mathrm{unit}}$ dans la définition de $A^T(H)$. Alors [25, lemme 13.3.1] est vrai ici :

Proposition 13.3.1. *L'intégrale définissant $A^T_{\mathrm{unit}}(H)$ et la somme définissant A^T_{unit} sont absolument convergentes, et pour tout réel r, il existe $c > 0$ tel que*

$$|A^T - A^T_{\mathrm{unit}}| \leq c\,\boldsymbol{d}_0(T)^{-r}.$$

Démonstration. Elle est identique à celle de *loc. cit.*, à la simplification suivante près : la décomposition de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}^{T[\![H^Q]\!],Q_0}$ en $(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{C})+\mathbf{C}$ conduit à la décomposition des expressions $A^T(H)$ et $A^T_{\mathrm{unit}}(H)$ en

$$A^T(H)=A^T_{\mathbf{\Lambda}-\mathbf{C}}(H)+A^T_{\mathbf{C}}(H) \quad \text{et} \quad A^T_{\mathrm{unit}}(H)=A^T_{\mathbf{\Lambda}-\mathbf{C},\mathrm{unit}}(H)+A^T_{\mathbf{C},\mathrm{unit}}(H).$$

Comme dans la preuve de la proposition 12.4.2, si T est assez régulier, on a

$$A^T(H)=A^T_{\mathbf{C}}(H) \quad \text{et} \quad A^T_{\mathrm{unit}}(H)=A^T_{\mathbf{C},\mathrm{unit}}(H).$$

Seules les expressions $A^T_{\mathbf{C}}(H)$ et $A^T_{\mathbf{C},\mathrm{unit}}(H)$ sont à comparer. Les assertions sont alors conséquence de la proposition 13.2.1. ∎

13.4 Simplification du produit scalaire

On a défini en 4.1.5 un élément $T[\![H^Q]\!]$ dans $\mathfrak{a}_{P_0}^{Q_0}$. Pour $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q'}$ et $H \in \mathcal{A}_{Q_0}$, considérons l'opérateur (introduit en section 5.3, mais avec ici Q_0 en place de G, et $T[\![H^Q]\!]$ au lieu de T)

$$\mathbf{\Omega}_{S|\theta_0(S)}^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu) = \sum_{S' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q_0}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{W}^Q(\mathfrak{a}_{\theta_0(S)},\mathfrak{a}_{S'}) \\ t \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S,\mathfrak{a}_{S'})}} \varepsilon_{S'}^{Q_0,T[\![H^Q]\!]_{S'}}(H; s\lambda - t\mu)\mathbf{M}(t,\mu)^{-1}\mathbf{M}(s,\lambda).$$

On a fixé des fonctions

$$\Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma) \quad \text{et} \quad \Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_{\theta_0(S)},\theta_0(\omega\otimes\sigma)),$$

et une fonction lisse ϑ sur $\boldsymbol{\mu}_S$. Rappelons que l'on a introduit dans la définition 5.2.1 un opérateur de décalage $\mathbf{D}_\nu$. Pour $\mu,\,\nu \in \boldsymbol{\mu}_S$ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_{\theta_0(S)}$, on pose

$$\boldsymbol{\omega}^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu;\nu) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\langle \mathbf{D}_\nu \mathbf{\Omega}_{S,\theta_0(S)}^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu)\Phi,\Psi\right\rangle_S,$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\omega}^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu;\nu) = \sum_{S' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}^{Q_0}} \sum_{\substack{s \in \mathbf{W}^Q(\mathfrak{a}_{\theta_0(S)},\mathfrak{a}_{S'}) \\ t \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S,\mathfrak{a}_{S'})}} \varepsilon_{S'}^{Q_0,T[\![H^Q]\!]_{S'}}(H; s\lambda - t\mu)$$
$$\times \left\langle \mathbf{D}_\nu \mathbf{M}(t,\mu)^{-1}\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\Psi\right\rangle_{S'}.$$

Avec les notations de la proposition 5.4.5, pour tout $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_S,\mathfrak{a}_S)$, on a

$$\mathcal{E}(\theta_0(\omega_{A_S}\xi),\xi) = \{\nu \in \boldsymbol{\mu}_S \mid \widetilde{u}(\omega_{A_S}\xi)\star\nu|_{\mathcal{B}_M} = \xi\}.$$

Comme seule la restriction de ν à $\mathcal{B}_M$ intervient, s'il est non vide, cet ensemble est un espace homogène sous $\widehat{\mathfrak{C}}_M$.

Définition 13.4.1. Lorsque $\xi = \xi_\sigma$, on pose

$$\mathcal{E}(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\nu \in \boldsymbol{\mu}_S \mid \xi_{\widetilde{u}(\omega\otimes\sigma)}\star\nu|_{\mathcal{B}_M} = \xi_\sigma\} = \mathcal{E}(\theta_0(\omega_{A_S}\xi_\sigma),\xi_\sigma).$$

Lemme 13.4.2. *Pour que l'expression $\boldsymbol{\omega}^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu;\nu)$ soit non nulle, il est nécessaire que ν appartienne à $\mathcal{E}(\sigma)$.*

Démonstration. On a

$$\mathbf{D}_\nu\mathbf{M}(t,\mu)^{-1}\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\widetilde{u}(\omega\otimes\sigma)\star\nu) \quad \text{et} \quad \Psi \in \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma).$$

Pour que l'expression $\boldsymbol{\omega}^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu;\nu)$ soit non nulle, il est nécessaire que l'on ait

$$\xi_{\widetilde{u}(\omega\otimes\sigma)}\star\nu|_{\mathcal{B}_M} = \xi_\sigma. \qquad \blacksquare$$

Définition 13.4.3. On pose

$$[\boldsymbol{\omega}]^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu) = |\widehat{\mathfrak{C}}_S|^{-1} \sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)} \boldsymbol{\omega}^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu+\nu;\nu)$$

avec $[\boldsymbol{\omega}]^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu) = 0$, si $\mathcal{E}(\sigma) = \emptyset$.

Avec les notations de la proposition 5.4.5 on a

$$[\boldsymbol{\omega}]^{T,Q_0}(H;\lambda,\mu) = \langle [\boldsymbol{\Omega}]^{T,Q_0}_{S|\theta_0(S)}(H,\xi,\xi';\lambda,\mu)\Phi,\Psi\rangle_S,$$

mais avec Q_0 en place de G et $T[\![H^Q]\!]$ au lieu de T. D'après la section 5.4, cette expression est holomorphe en λ et μ. Pour $\lambda = \theta_0(\mu)$, on écrit

$$[\boldsymbol{\omega}]^{T,Q_0}(H;\mu) = [\boldsymbol{\omega}]^{T,Q_0}(H;\theta_0(\mu),\mu).$$

Observons que $[\boldsymbol{\omega}]^{T,Q_0}(H;\mu)$ ne dépend que de l'image de H dans $\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_{Q_0} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{Q_0}$. On pose

$$A^T_{\text{pure}}(H) = \kappa^{\eta T}(H^Q - T^Q_{Q_0})\widetilde{\sigma}^R_Q(H-T)\phi^Q_{Q_0}(H-T)\int_{\boldsymbol{\mu}_S}[\boldsymbol{\omega}]^{T,Q_0}(H;\mu)\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu$$

et

$$A^T_{\text{pure}} = \sum_{H\in\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_{Q_0}} A^T_{\text{pure}}(H).$$

Proposition 13.4.4. *La série définissant A^T_{pure} est convergente, et pour tout réel r, on a une majoration*

$$|A^T_{\text{unit}} - A^T_{\text{pure}}| \ll e^{-r\boldsymbol{d}_0(T)}.$$

Démonstration. La preuve suit, pas à pas, les arguments de [25, proposition 13.4.1]. Tout d'abord, on utilise [25, lemme 2.13.1] pour prouver la convergence de la série définissant A^T_{pure}. Puis, grâce au calcul approché du produit scalaire des séries d'Eisenstein tronquées donné par le théorème 5.4.4 (ii) et compte tenu de la proposition 5.4.5 pour le décalage en ν, on montre qu'il existe un réel $c > 0$ pour lequel on a la majoration souhaitée. ∎

Corollaire 13.4.5. *Pour tout réel r, on a une majoration*

$$|A^T - A^T_{\text{pure}}| \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}.$$

Démonstration. On invoque de plus la proposition 13.3.1. ∎

13.5 Décomposition plus fine

On va décomposer la somme sur $H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$ dans A_{pure}^{T} en une somme sur $\mathcal{C}_{Q}^{\tilde{G}}$ précédée d'une somme sur $\mathcal{A}_{Q_0}^{Q}$, grâce à la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{A}_{Q_0}^{Q} \to \mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}} \to \mathcal{C}_{Q}^{\tilde{G}} \to 0.$$

Considérons $H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$, $Z \in \mathcal{C}_{Q}^{\tilde{G}}$ et $Y \in \mathfrak{a}_{Q_0}^{Q}$ tels que

$$Z = H_Q \quad \text{et} \quad Y = T_{Q_0}^{Q} - H^Q, \quad \text{et donc} \quad H = Z + T_{Q_0}^{Q} - Y.$$

Puisque $\kappa^{\eta T}(-Y) = \kappa^{\eta T}(Y)$, on a

$$\kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^{Q})\widetilde{\sigma}_{Q}^{R}(H - T)\phi_{Q_0}^{Q}(H - T) = \kappa^{\eta T}(Y)\widetilde{\sigma}_{Q}^{R}(Z - T_Q)\phi_{Q_0}^{Q}(-Y)$$

et

$$T[\![H^Q]\!] = T[\![T_{Q_0}^{Q} - Y]\!].$$

Lorsque $\phi_{Q_0}^{Q}(-Y) = 1$ on a $Y = X_{Q_0}$, où X est de la forme

$$X = \sum_{\alpha \in \Delta_0^Q \smallsetminus \Delta_0^{Q_0}} x_\alpha \check{\alpha} \quad \text{avec} \quad x_\alpha \geq 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta_0^Q \smallsetminus \Delta_0^{Q_0}.$$

En d'autres termes, X appartient au cône fermé $\mathcal{C}(Q, Q_0)$ de $\mathfrak{a}_0^Q$ engendré par les éléments $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta_0^Q \smallsetminus \Delta_0^{Q_0}$. D'après [25, lemme 4.2.1], on a

$$T[\![H^Q]\!] = T[\![T_{Q_0}^{Q} - Y]\!] = T^{Q_0} - \sum_{\alpha \in \Delta_0^Q \smallsetminus \Delta_0^{Q_0}} x_\alpha \check{\alpha}^{Q_0} = (T - X)^{Q_0}.$$

Donc

$$H = H_Z^{T-X}, \quad \text{où l'on a posé} \quad H_Z^U \overset{\text{déf}}{=} Z + U_{Q_0}^{Q}.$$

L'application qui à Y associe $X \in \mathcal{C}(Q, Q_0)$ est injective et on note

$$\mathcal{C}_F(Q, Q_0; T) \subset \mathcal{C}(Q, Q_0)$$

son image. On a ainsi transformé la somme sur $H \in \mathcal{C}_{Q_0}^{\tilde{G}}$ en une somme sur

$$(Z, X) \in \mathcal{C}_{Q}^{\tilde{G}} \times \mathcal{C}_F(Q, Q_0; T),$$

la fonction

$$\kappa^{\eta T}(H^Q - T_{Q_0}^{Q})\widetilde{\sigma}_{Q}^{R}(H - T)\phi_{Q_0}^{Q}(H - T) \quad \text{devenant} \quad \kappa^{\eta T}(X_{Q_0})\widetilde{\sigma}_{Q}^{R}(Z - T).$$

Pour $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $X \in \mathcal{C}_F(Q, Q_0; T)$, on pose

$$\omega^{T,Q_0}(Z, X; \lambda, \mu; \nu) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{S' \in \mathcal{P}_{\text{st}}^{Q_0}} \sum_{s \in \mathbf{W}^Q(\mathfrak{a}_{\theta_0(S)}, \mathfrak{a}_{S'})} \sum_{t \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S, \mathfrak{a}_{S'})} \varepsilon_{S'}^{Q_0,(T-X)_{S'}} \times (H_Z^{T-X}; s\lambda - t\mu)\big\langle \mathbf{M}(s,\lambda)\Phi, \mathbf{M}(t,\mu)\mathbf{D}_{-\nu}\Psi\big\rangle_{S'}.$$

On a donc

$$\omega^{T[\![H^Q]\!],Q_0}(H_Z^{T-X}; \lambda, \mu; \nu) = \omega^{T,Q_0}(Z, X; \lambda, \mu; \nu).$$

En remplaçant la variable t par $t't$ avec $t \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S, Q_0)$ et $t' \in \mathbf{W}^{Q_0}(t(\mathfrak{a}_S), \mathfrak{a}_{S'})$, et la variable s par $t'^{-1}s \in \mathbf{W}^Q(\theta_0(\mathfrak{a}_S), t(\mathfrak{a}_S))$ cette expression peut s'écrire :

$$\sum_{t \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S, Q_0)} \sum_{s \in \mathbf{W}^Q(\theta_0(\mathfrak{a}_S), t(\mathfrak{a}_S))} \sum_{S' \in \mathcal{P}_{\text{st}}^{Q_0}} \sum_{t' \in \mathbf{W}^{Q_0}(t(\mathfrak{a}_S), \mathfrak{a}_{S'})} \varepsilon_{S'}^{Q_0,(T-X)_{S'}} \times (H_Z^{T-X}; t'(s\lambda - t\mu))\big\langle \mathbf{M}(t's,\lambda)\Phi, \mathbf{M}(t't,\mu)\mathbf{D}_{-\nu}\Psi\big\rangle_{S'}.$$

Le sous-groupe parabolique $t(S)$ n'est en général pas standard mais il existe un unique sous-groupe parabolique standard ${}_tS \subset Q_0$ tel que $M_{t(S)} = M_{{}_tS}$. On pose ${}_tM = M_{{}_tS}$. Pour $S' \in \mathcal{P}_{\text{st}}^{Q_0}$ et $t' \in \mathbf{W}^{Q_0}(t(\mathfrak{a}_S), a_{S'})$, le sous-groupe parabolique $t'^{-1}(S')$ appartient à l'ensemble $\mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)$ des $S'' \in \mathcal{P}^{Q_0}$ tels que $M_{S''} = {}_tM$. On peut remplacer ci-dessus S' par $S'' = t'^{-1}(S')$. Alors la double somme en S' et t' se transforme en une somme sur $S'' \in \mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)$. Pour

$$H' = t'^{-1}(H)$$

on a

$$\varepsilon_{S'}^{Q_0,(T-X)_{S'}}(H; t'(s\lambda - t\mu)) = \varepsilon_{S''}^{Q_0,[T-X]_{S''}}(H'; s\lambda - t\mu),$$

et

$$\big\langle \mathbf{M}(t's,\lambda)\Phi, \mathbf{M}(t't,\mu)\mathbf{D}_{-\nu}\Psi\big\rangle_{S'}$$

égale

$$\big\langle \mathbf{M}(t',s\lambda)\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi, \mathbf{M}(t',t\mu)\mathbf{M}(t,\mu)\mathbf{D}_{-\nu}\Psi\big\rangle_{S''}.$$

Notons que

$$[T-X]_{S''} = t'^{-1}((T-X)_{S'}) \qquad \text{et donc} \qquad [T-X]_{S''}^{Q_0} = t'^{-1}((T-X)_{S'}^{Q_0}).$$

D'après [25, lemme 5.4.3 (3)], on a

$$\mathbf{M}(t', t\mu)^{-1}\mathbf{M}(t', s\lambda) = e^{\langle s\lambda - t\mu, Y_{S''}\rangle}\mathbf{M}_{S'|S''}(t\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S'|S''}(s\lambda)$$

avec $Y_{S''} = (T_0 - t'^{-1}(T_0))_{S''}$. En définitive, on obtient

$$\omega^{T,Q_0}(Z, X; \lambda, \mu; \nu) = \sum_{t \in \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S, Q_0)} \sum_{s \in \mathbf{W}^Q(\theta_0(\mathfrak{a}_S), t(\mathfrak{a}_S))} \omega_{s,t}^{T,Q_0}(Z, X; \lambda, \mu; \nu)$$

avec

$$\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q_0}(Z,X;\lambda,\mu;\nu) = \sum_{S''\in\mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)} \varepsilon_{S''}^{Q_0,[T-X]_{S''}}(H_Z^{T-X};s\lambda-t\mu)e^{\langle s\lambda-t\mu,Y_{S''}\rangle}$$
$$\times\big\langle \mathbf{M}_{S''|_tS}(s\lambda)\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\mathbf{M}_{S''|_tS}(t\mu)\mathbf{M}(t,\mu)\mathbf{D}_{-\nu}\Psi\big\rangle_{S''}.$$

On doit intégrer en μ la fonction

$$\boldsymbol{\omega}^{T,Q_0}(Z,X;\mu;\nu) \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{\omega}^{T,Q_0}(Z,X;\theta_0(\mu),\mu+\nu;\nu),$$

puis sommer en Z et X. Chaque expression $\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q_0}(Z,X;\lambda,\mu;\nu)$ est encore une fonction lisse de λ et μ, et l'on pose

$$\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q_0}(Z,X;\mu;\nu) \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q_0}(Z,X;\theta_0(\mu),\mu+\nu;\nu).$$

L'expression $\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q_0}(Z,X;\mu;\nu)$ ne dépend que de l'image de Z dans $\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}=\mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_Q$.

Ces manipulations permettent d'écrire, au moins formellement, A_{pure}^T comme une somme indexée par des éléments s et t dans des ensembles de Weyl :

$$A_{\text{pure}}^T = \sum_{t\in\mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S,Q_0)}\ \sum_{s\in\mathbf{W}^{Q}(\theta_0(\mathfrak{a}_S),t(\mathfrak{a}_S))} A_{s,t}^T \qquad \text{où} \qquad A_{s,t}^T = |\widehat{\mathfrak{C}}_S|^{-1}\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)} A_{s,t,\nu}^T$$

avec

$$A_{s,t,\nu}^T = \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T)\Bigg(\sum_{X\in\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)}\kappa^{\eta T}(X_{Q_0})\int_{\boldsymbol{\mu}_S}\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q_0}(Z,X;\mu;\nu)\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu\Bigg).$$

On peut montrer, en reprenant des arguments de [25, proposition 13.4.1], déjà utilisés pour la preuve de la proposition 13.4.4, que l'expression converge (dans l'ordre indiqué). Une autre preuve de la convergence de la série en Z résultera du lemme 13.6.3 (A).

Nous aurons besoin d'une variante de l'expression $\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q_0}(Z,X;\lambda,\mu;\nu)$, où la sommation porte sur $\mathcal{P}^Q({}_tM)$, sans variable X, et où le sous-groupe parabolique Q_0 est remplacé par Q. On pose pour $Z\in\mathcal{A}_Q$:

$$\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;\lambda,\mu;\nu) = \sum_{S''\in\mathcal{P}^{Q}({}_tM)} \varepsilon_{S''}^{Q,[T]_{S''}}(Z;s\lambda-t\mu)e^{\langle s\lambda-t\mu,Y_{S''}\rangle}$$
$$\times\big\langle \mathbf{M}_{S''|_tS}(s\lambda)\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\mathbf{M}_{S''|_tS}(t\mu)\mathbf{M}(t,\mu)\mathbf{D}_{-\nu}\Psi\big\rangle_{S''}.$$

C'est une fonction lisse de λ et μ. On pose

$$\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;\mu;\nu) = \boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;\theta_0(\mu),\mu+\nu;\nu)$$

et

$$[\boldsymbol{\omega}]_{s,t}^{T,Q}(Z;\mu) = |\widehat{\mathfrak{C}}_S|^{-1} \sum_{\nu \in \mathcal{E}(\sigma)} \boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;\mu;\nu).$$

Les expressions $\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;\mu;\nu)$ ne dépendent que de l'image de Z dans $\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}} \backslash \mathcal{A}_Q$.

Proposition 13.5.1. *On pose :*

$$\boldsymbol{A}_{s,t}^T = \sum_{Z \in \mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \int_{\boldsymbol{\mu}_S} [\boldsymbol{\omega}]_{s,t}^{T,Q}(Z;\mu)\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

(i) *L'expression $\boldsymbol{A}_{s,t}^T$ est convergente dans l'ordre indiqué.*

(ii) *Pour tout réel r, on a une majoration $|A_{s,t}^T - \boldsymbol{A}_{s,t}^T| \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}$.*

Cette proposition est l'analogue de [25, proposition 13.5.1], l'un des résultats les plus fins du livre. Sa démonstration occupera les deux sections suivantes.

13.6 Première étape

Considérons l'application

$$s\theta_0 - t : \boldsymbol{\mu}_S \to \boldsymbol{\mu}_{tS}.$$

On note $\boldsymbol{\chi}_S$ son noyau et $\boldsymbol{\eta}_{tS}$ son image, et l'on pose

$$\boldsymbol{\eta}_S = \boldsymbol{\chi}_S \backslash \boldsymbol{\mu}_S, \quad \boldsymbol{\chi}_{tS} = \boldsymbol{\eta}_{tS} \backslash \boldsymbol{\mu}_{tS}.$$

L'application ci-dessus se restreint en un isomorphisme $\iota : \boldsymbol{\eta}_S \to \boldsymbol{\eta}_{tS}$. La suite exacte courte de groupes abéliens compacts

$$0 \to \boldsymbol{\eta}_{tS} \to \boldsymbol{\mu}_{tS} \to \boldsymbol{\chi}_{tS} \to 0$$

donne, par dualité de Pontryagin, une suite exacte courte de $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini

$$0 \to \widehat{\boldsymbol{\chi}}_{tS} \to \mathcal{A}_{tS} \to \widehat{\boldsymbol{\eta}}_{tS} \to 0.$$

En relevant dans $\mathcal{A}_{tS}$ une $\mathbb{Z}$-base de $\widehat{\boldsymbol{\eta}}_{tS}$, on définit un morphisme section du morphisme $\mathcal{A}_{tS} \to \widehat{\boldsymbol{\eta}}_{tS}$, ce qui fournit un isomorphisme entre $\mathcal{A}_{tS}$ et le produit $\widehat{\boldsymbol{\chi}}_{tS} \times \widehat{\boldsymbol{\eta}}_{tS}$. Dualement, cela permet d'identifier $\boldsymbol{\mu}_{tS}$ au produit $\boldsymbol{\chi}_{tS} \times \boldsymbol{\eta}_{tS}$ et donc d'écrire $\Lambda \in \boldsymbol{\mu}_{tS}$ sous la forme

$$\Lambda = \Lambda_{\boldsymbol{\chi}} + \Lambda_{\boldsymbol{\eta}} \in \boldsymbol{\chi}_{tS} \times \boldsymbol{\eta}_{tS}$$

via cette identification (non canonique), et on identifie de même $\boldsymbol{\mu}_S$ au produit $\boldsymbol{\chi}_S \times \boldsymbol{\eta}_S$. On définit un élément de $\boldsymbol{\mu}_S$ en posant, pour $(\chi, \Lambda) \in \boldsymbol{\chi}_S \times \boldsymbol{\mu}_{{}_tS}$,

$$\mu(\chi, \Lambda) = \chi + \iota^{-1}(\Lambda_{\boldsymbol{\eta}}).$$

L'application

$$\boldsymbol{\chi}_S \times \boldsymbol{\mu}_{{}_tS} \to \boldsymbol{\mu}_S \times \boldsymbol{\chi}_{{}_tS}, \quad (\chi, \Lambda) \mapsto (\mu(\chi, \Lambda), \Lambda_{\boldsymbol{\chi}})$$

est bijective et on a la relation

$$\theta_0\mu(\chi, \Lambda) = s^{-1}(t\mu(\chi, \Lambda) + \Lambda_{\boldsymbol{\eta}}). \tag{13.5}$$

Posons

$$\lambda(\chi, \Lambda) = s^{-1}(t\mu(\chi, \Lambda) + \Lambda).$$

Fixons $\nu \in \boldsymbol{\mu}_S$. Rappelons que ${}_tM = M_{{}_tS}$ et $L = M_Q$. Pour $\chi \in \boldsymbol{\chi}_S$, $\Lambda \in \boldsymbol{\mu}_{{}_tS}$ et $S'' \in \mathcal{P}^Q({}_tM)$, posons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}(\chi; \Lambda, S''; \nu) = \vartheta(\mu(\chi, \Lambda))\big\langle &\mathbf{M}_{S''|{}_tS}(s\lambda(\chi, \Lambda))\mathbf{M}(s, \lambda(\chi, \Lambda))\Phi, \\ &\mathbf{M}_{S''|{}_tS}(t\mu(\chi, \Lambda) + \nu)\mathbf{M}(t, \mu(\chi, \Lambda) + \nu)\mathbf{D}_{-\nu}\Psi\big\rangle_{S''}.\end{aligned}$$

Les expressions $\boldsymbol{c}(\chi; \Lambda, S''; \nu)$, considérées comme des fonctions de Λ dépendant des paramètres χ et ν, définissent une $(Q, {}_tM)$-famille périodique $\boldsymbol{c}(\chi; \nu)$. On définit aussi une $(Q, {}_tM)$-famille périodique $\boldsymbol{d}(\chi; \nu) = \boldsymbol{c}(\mathfrak{Y}, \chi; \nu)$ par

$$\boldsymbol{d}(\chi; \Lambda, S''; \nu) = e^{\langle \Lambda, Y_{S''}\rangle}\boldsymbol{c}(\chi; \Lambda, S''; \nu).$$

En se limitant aux $S'' \in \mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)$, on obtient des $(Q_0, {}_tM)$-familles périodiques. Pour $Z \in \mathcal{A}_Q$, resp. $H \in \mathcal{A}_{Q_0}$, et $X' \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, on leur associe les fonctions

$$\boldsymbol{d}^{Q,X'}_{{}_tM,F}(Z, \chi; \Lambda; \nu) = \sum_{S'' \in \mathcal{P}^Q({}_tM)} \varepsilon^{Q,[X']_{S''}}_{S''}(Z; \Lambda)\boldsymbol{d}(\chi; \Lambda, S''; \nu)$$

et

$$\boldsymbol{d}^{Q_0,X'}_{{}_tM,F}(H, \chi; \Lambda; \nu) = \sum_{S'' \in \mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)} \varepsilon^{Q_0,[X']_{S''}}_{S''}(H; \Lambda)\boldsymbol{d}(\chi; \Lambda, S''; \nu).$$

Ces fonctions sont lisses en χ et Λ.

Lemme 13.6.1. *Soient $Z \in \mathcal{C}^{\widetilde{G}}_Q$, $\chi \in \boldsymbol{\chi}_S$, $\Lambda \in \boldsymbol{\eta}_{{}_tS}$ et $X \in \mathcal{C}^+_F(Q, Q_0; T)$. On a les égalités suivantes :*

(i) $\boldsymbol{\omega}^{T,Q_0}_{s,t}(Z, X; \mu(\chi, \Lambda); \nu)\vartheta(\mu(\chi, \Lambda)) = \boldsymbol{d}^{Q_0,T-X}_{{}_tM,F}(H^{T-X}_Z, \chi; \Lambda; \nu)$

(ii) $\boldsymbol{\omega}^{T,Q}_{s,t}(Z; \mu(\chi, \Lambda); \nu)\vartheta(\mu(\chi, \Lambda)) = \boldsymbol{d}^{Q,T}_{{}_tM,F}(Z, \chi; \Lambda; \nu).$

Démonstration. Rappelons que, par définition,

$$\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q_0}(Z,X;\lambda,\mu;\nu)=\sum_{S''\in\mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)}\varepsilon_{S''}^{Q_0,[T-X]_{S''}}(H_Z^{T-X};s\lambda-t\mu)e^{\langle Y_{S''},s\lambda-t\mu\rangle}$$
$$\times\big\langle\mathbf{M}_{S''|_tS}(s\lambda)\mathbf{M}(s,\lambda)\Phi,\mathbf{M}_{S''|_tS}(t\mu)\mathbf{M}(t,\mu)\mathbf{D}_{-\nu}\Psi\big\rangle_{S''}.$$

Pour $Z\in\mathcal{A}_{Q_0}$ et $\Lambda\in\boldsymbol{\mu}_S$ en position générale, on a

$$\boldsymbol{d}_{\,tM,F}^{\,Q,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;\Lambda;\nu)=\boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q_0}(Z,X;\lambda(\chi,\Lambda),\mu(\chi,\Lambda)+\nu;\nu).$$

Mais, d'après la relation (13.5) on a

$$\lambda(\chi,\Lambda)=\theta_0\mu(\chi,\Lambda)+s^{-1}(\Lambda_{\boldsymbol{\chi}}).$$

On obtient (i) pour $\Lambda_{\boldsymbol{\chi}}=0$. La preuve de (ii) est similaire. ∎

On munit $\boldsymbol{\chi}_S$ et $\boldsymbol{\eta}_{tS}$ des mesures de Haar telles que $\mathrm{vol}(\boldsymbol{\chi}_S)=1=\mathrm{vol}(\boldsymbol{\eta}_{tS})$. En posant, comme ci-dessus, $H_Z^{T-X}=Z+(T-X)_{Q_0}^{Q}$, l'expression $A_{s,t,\nu}^T$ se réécrit

$$A_{s,t,\nu}^T=\sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}}\widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T)\sum_{X\in\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)}\kappa^{\eta T}(X_{Q_0})$$
$$\times\int_{\boldsymbol{\chi}_S}\left(\int_{\boldsymbol{\eta}_{tS}}\boldsymbol{d}_{\,tM,F}^{\,Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;\Lambda;\nu)\,\mathrm{d}\Lambda\right)\mathrm{d}\chi.$$

Pour $Z\in\mathcal{A}_Q$, $S''\in\mathcal{P}^Q({}_tS)$, $V\in\mathcal{A}_{tS}$ et $X'\in\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, on pose

$$\widehat{\boldsymbol{d}}(\chi;V,S'';\nu)=\int_{\boldsymbol{\mu}_{tS}}\boldsymbol{d}(\chi;\Lambda,S'';\nu)e^{-\langle\Lambda,V\rangle}\,\mathrm{d}\Lambda$$

et

$$\widehat{\boldsymbol{d}}_{\,tM,F}^{\,Q,X'}(Z,\chi;V;\nu)=\int_{\boldsymbol{\mu}_{tS}}\boldsymbol{d}_{\,tM,F}^{\,Q,X'}(Z,\chi;\Lambda;\nu)e^{-\langle\Lambda,V\rangle}\,\mathrm{d}\Lambda.$$

Pour $H\in\mathcal{A}_{Q_0}$, on définit de manière analogue $\widehat{\boldsymbol{d}}_{\,tM,F}^{\,Q_0,X'}(H,\chi;V;\nu)$. Ces fonctions sont à décroissance rapide en V. Notons

$$\mathcal{D}_{tS}\overset{\text{déf}}{=}\boldsymbol{\eta}_{tS}^{\vee}\subset\mathcal{A}_{tS}$$

l'annulateur de $\boldsymbol{\eta}_{tS}$ ($\subset\boldsymbol{\mu}_{tS}$) dans $\mathcal{A}_{tS}$.

Lemme 13.6.2. *On a*

$$A_{s,t,\nu}^T=\sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}}\widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T)\sum_{X\in\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)}\kappa^{\eta T}(X_{Q_0})\int_{\boldsymbol{\chi}_S}\sum_{V\in\mathcal{D}_{tS}}\widehat{\boldsymbol{d}}_{\,tM,F}^{\,Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;V;\nu)\,\mathrm{d}\chi.$$

Démonstration. Il suffit d'observer que par inversion de Fourier on a

$$\int_{\boldsymbol{\eta}_{t}S} \boldsymbol{d}_{{}_tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;\Lambda;\nu)\,\mathrm{d}\Lambda = \sum_{V\in\mathfrak{D}_{t}S} \widehat{\boldsymbol{d}}_{{}_tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;V;\nu). \qquad\blacksquare$$

Il résultera du lemme 13.6.3 (qui est l'analogue de [25, lemme 13.6.3]) que cette expression est absolument convergente.

Lemme 13.6.3. *Fixons un réel $\rho > 0$, et considérons les cinq expressions :*

(A) $$\sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \sum_{X\in\mathfrak{C}_F(Q,Q_0;T)} \int_{\boldsymbol{\chi}_S} \sum_{V\in\mathfrak{D}_{t}S} \left|\widehat{\boldsymbol{d}}_{{}_tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;V;\nu)\right|\mathrm{d}\chi;$$

(B) $$\sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \sum_{X\in\mathfrak{C}_F(Q,Q_0;T)} (1-\kappa^{\eta T}(X_{Q_0})) \int_{\boldsymbol{\chi}_S} \sum_{V\in\mathfrak{D}_{t}S} \left|\widehat{\boldsymbol{d}}_{{}_tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;V;\nu)\right|\mathrm{d}\chi;$$

(C) $$\sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \sum_{X\in\mathfrak{C}_F(Q,Q_0;T)} \int_{\boldsymbol{\chi}_S} \sum_{V\in\mathfrak{D}_{t}S} (1-\kappa^{\rho T}(V))\left|\widehat{\boldsymbol{d}}_{{}_tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;V;\nu)\right|\mathrm{d}\chi;$$

(D) $$\sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \int_{\boldsymbol{\chi}_S} \sum_{V\in\mathfrak{D}_{t}S} \left|\widehat{\boldsymbol{d}}_{{}_tM,F}^{Q,T}(Z,\chi;V;\nu)\right|\mathrm{d}\chi;$$

(E) $$\sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \int_{\boldsymbol{\chi}_S} \sum_{V\in\mathfrak{D}_{t}S} (1-\kappa^{\rho T}(V))\left|\widehat{\boldsymbol{d}}_{{}_tM,F}^{Q,T}(Z,\chi;V;\nu)\right|\mathrm{d}\chi.$$

Alors on a :

(i) *Les cinq expressions sont convergentes.*

(ii) *Pour tout réel r, l'expression* (B) *est essentiellement majorée par $\boldsymbol{d}_0(T)^{-r}$.*

(iii) *Il existe une constante absolue $\rho_0 > 0$ telle que si $\rho > \rho_0$, alors pour tout réel r, les expressions* (C) *et* (E) *sont essentiellement majorées par $\boldsymbol{d}_0(T)^{-r}$.*

Admettons provisoirement ce lemme prouvé au paragraphe suivant. D'après le lemme 1.5.1, pour chaque $\chi \in \boldsymbol{\chi}_S$ (le paramètre ν étant fixé), il existe une fonction à décroissance rapide

$$\varphi = \varphi(\chi;\nu) : \mathfrak{U} \mapsto \varphi(\mathfrak{U}) = \varphi(\chi;\mathfrak{U};\nu)$$

sur $\mathcal{H}_{Q,{}_tM}$ telle que $\boldsymbol{c}(\chi;\nu) = \boldsymbol{c}_\varphi$. Rappelons que $\boldsymbol{c}(\chi;\nu)$ est la $(Q,{}_tM)$-famille périodique définie par

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}(\chi;\Lambda,S'';\nu) = \vartheta(\chi,\Lambda)\langle &\mathbf{M}_{S''|_tS}(s\lambda(\chi,\Lambda))\mathbf{M}(s,\lambda(\chi,\Lambda))\Phi,\\ &\mathbf{M}_{S''|_tS}(t\mu(\chi,\Lambda)+\nu)\mathbf{M}(t,\mu(\chi,\Lambda)+\nu)\mathbf{D}_{-\nu}\Psi\rangle_{S''}\end{aligned}$$

et que l'on a posé

$$\boldsymbol{d}(\chi;\nu) = \boldsymbol{c}(\mathfrak{Y},\chi;\nu).$$

Pour $H \in \mathcal{A}_{Q_0}$ et $X' \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, on a donc

$$\boldsymbol{d}_{tM,F}^{Q_0,X'}(H,\chi;\Lambda;\nu) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q_0,tM}} \varphi(\mathfrak{U}-\mathfrak{Y})\gamma_{tM,F}^{Q_0,X'}(H,\mathfrak{U};\Lambda)$$

avec

$$\gamma_{tM,F}^{Q_0,X'}(H,\mathfrak{U};\Lambda) = \sum_{H'\in\mathcal{A}_{tM}^{Q_0}(H+U_{Q_0})} \Gamma_{tM}^{Q_0}(H',\mathfrak{U}(X'))e^{\langle\Lambda,H'\rangle}.$$

Pour $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $X \in \mathcal{C}_F^+(Q,Q_0;T)$, on obtient

$$\boldsymbol{d}_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;\Lambda;\nu) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q_0,tM}} \varphi(\mathfrak{U}-\mathfrak{Y})\gamma_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\mathfrak{U};\Lambda).$$

On a aussi

$$\boldsymbol{d}_{tM,F}^{Q,T}(Z,\chi;\Lambda;\nu) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q,tM}} \varphi(\mathfrak{U}-\mathfrak{Y})\gamma_{tM,F}^{Q,T}(Z,\mathfrak{U};\Lambda).$$

On introduit, comme ci-dessus, des transformées de Fourier inverses

$$V \mapsto \widehat{\gamma}_{tM,F}^{Q_0,X'}(H,\mathfrak{U};V) \quad \text{et} \quad V \mapsto \widehat{\gamma}_{tM,F}^{Q,X'}(Z,\mathfrak{U};V),$$

le paramètre V variant dans $\mathcal{A}_{tM}$. Par inversion de Fourier, on a

$$\widehat{\gamma}_{tM,F}^{Q,X'}(Z,\mathfrak{U};V) = \begin{cases} \Gamma_{tM}^{Q}(V,\mathfrak{U}(X')) & \text{si } Z+U_Q = V_Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\widehat{\boldsymbol{d}}_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;V;\nu) = \sum_{\substack{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q_0,tM}\\ H_Z^{T-X}+U_{Q_0}=V_{Q_0}}} \varphi(\chi;\mathfrak{U}-\mathfrak{Y};\nu)\Gamma_{tM}^{Q_0}(V,\mathfrak{U}(T-X))$$

et

$$\widehat{\boldsymbol{d}}_{tM,F}^{Q,T}(Z,\chi;V;\nu) = \sum_{\substack{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q,tM}\\ Z+U_Q=V_Q}} \varphi(\chi;\mathfrak{U}-\mathfrak{Y};\nu)\Gamma_{tM}^{Q}(V,\mathfrak{U}(T)).$$

Fixons un réel $\rho > \rho_0$ comme dans le point (iii) et posons

$$E_1^T = \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T)\int_{\boldsymbol{\chi}_S}\sum_{V\in\mathcal{D}_{tS}} \kappa^{\rho T}(V)\sum_{X\in\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)} \widehat{\boldsymbol{d}}_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\chi;V;\nu)\,\mathrm{d}\chi.$$

D'après le lemme 13.6.2 et les assertions du lemme 13.6.3 concernant les expressions (A), (B) et (C), l'expression E_1^T est absolument convergente, et pour tout réel r, on a une majoration

$$\left|A_{s,t,\nu}^T - E_1^T\right| \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}.$$

Notons $\mathcal{R}_{tS}^+$ l'ensemble des racines de A_{tM} qui sont positives pour le sous-groupe parabolique standard ${}_tS$. Pour tout $S'' \in \mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)$, notons $a(S'')$ le nombre d'élément de $(-\Delta_{S''}) \cap \mathcal{R}_{tS}^+$ – ou encore de $(-\Delta_{S''}^{Q_0}) \cap \mathcal{R}_{tS}^+$ – et

$$\mathcal{C}^{Q_0}(S'') \subset \mathfrak{a}_{tM}^{Q_0}$$

le cône formé des

$$\left(\sum_{\alpha \in \Delta_{S''}^{Q_0} \cap \mathcal{R}_{tS}^+} x_\alpha \check{\alpha}\right) + \left(\sum_{\alpha \in (-\Delta_{S''}^{Q_0}) \cap \mathcal{R}_{tS}^+} y_\alpha \check{\alpha}\right),$$

pour des $x_\alpha \geq 0$ et des $y_\alpha > 0$. Pour $Y \in \mathfrak{a}_{tM}^{Q_0} + \mathcal{A}_{Q_0}$, on pose

$$\mathcal{C}_F^{Q_0}(Y; S'') = \left(Y + \mathcal{C}^{Q_0}(S'')\right) \cap \mathcal{A}_{tM} \subset \mathcal{A}_{tM}^{Q_0}(Y_{Q_0}).$$

Notons que pour $H \in \mathcal{A}_{tM}$, on a

$$\mathcal{C}_F^{Q_0}(H + Y; S'') = H + \mathcal{C}_F^{Q_0}(Y; S'').$$

En remplaçant les exposants Q_0 par Q, on définit de la même manière

$$\mathcal{C}^Q(S'') \subset \mathfrak{a}_{tM}^Q \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_F^Q(Y; S'') \subset \mathcal{A}_{tM}.$$

Lemme 13.6.4. *Pour $Z \in \mathcal{A}_Q$, $\chi \in \boldsymbol{\chi}_S$, $V \in \mathcal{A}_{tM}$ et $X \in \mathfrak{C}_F(Q, Q_0; T)$, on a*

$$\widehat{\boldsymbol{d}}_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X}, \chi; V; \nu) = \sum_{S'' \in \mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)} (-1)^{a(S'')} \sum_{V_1 \in \mathcal{C}_F^{Q_0}(-H_{Z,S''}^{T-X}; S'')} \widehat{\boldsymbol{d}}(\chi; V + V_1, S''; \nu)$$

avec

$$H_{Z,S''}^{T-X} \stackrel{\text{déf}}{=} Z + [T - X]_{S''}^Q.$$

Démonstration. On rappelle que $H_Z^{T-X} = Z + (T - X)_{Q_0}^Q \in \mathcal{A}_{Q_0}$. On a

$$\widehat{\boldsymbol{d}}_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X}, \chi; V; \nu) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q_0,tM}} \varphi(\chi; \mathfrak{U} - \mathfrak{Y}; \nu) \widehat{\gamma}_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X}, \mathfrak{U}; V)$$

avec

$$\widehat{\gamma}_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X}, \mathfrak{U}; V) = \begin{cases} \Gamma_{tM}^{Q_0}(V, \mathfrak{U}(T - X)) & \text{si } H_Z^{T-X} + U_{Q_0} = V_{Q_0}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lemme 1.6.1 nous dit que

$$\Gamma_{tM}^{Q_0}(V,\mathfrak{U}(T-X))=\sum_{S''\in\mathcal{P}^{Q_0}(_tM)}(-1)^{a(S'')}\mathbf{1}_{\mathcal{C}^{Q_0}(S'')}\big(([T-X]_{S''}+U_{S''}-V)^{Q_0}\big),$$

où $\mathbf{1}_{\mathcal{C}^{Q_0}(S'')}$ est la fonction caractéristique du cône $\mathcal{C}^{Q_0}(S'')$. On obtient

$$\widehat{\gamma}_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\mathfrak{U};V)=\sum_{S''\in\mathcal{P}^{Q_0}(_tM)}(-1)^{a(S'')}$$
$$\times\begin{cases}\mathbf{1}_{\mathcal{C}^{Q_0}(S'')}\big(([T-X]_{S''}+U_{S''})^{Q_0}-V\big) & \text{si } H_Z^{T-X}+U_{Q_0}=V_{Q_0},\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

soit encore

$$\widehat{\gamma}_{tM,F}^{Q_0,T-X}(H_Z^{T-X},\mathfrak{U};V)=\sum_{S''\in\mathcal{P}^{Q_0}(_tM)}(-1)^{a(S'')}\mathbf{1}_{\mathcal{C}^{Q_0}(S'')}(Y)$$

avec

$$Y=Z+(T-X)_{Q_0}^{Q}+[T-X]_{S''}^{Q_0}+U_{S''}-V=H_{Z,S''}^{T-X}+U_{S''}-V.$$

La condition $Y\in\mathcal{C}^{Q_0}(S'')$ équivaut à

$$U_{S''}\in V+\mathcal{C}_F^{Q_0}(-H_{Z,S''}^{T-X};S'')$$

et implique que $U_{Q_0}=V_{Q_0}-H$. D'autre part on a, par définition,

$$\boldsymbol{d}(\chi;\Lambda,S'';\nu)=\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q_0,tM}}\varphi(\chi;\mathfrak{U}-\mathfrak{Y};\nu)e^{\langle\Lambda,U_{S''}\rangle},$$

et donc, par inversion de Fourier,

$$\widehat{\boldsymbol{d}}(\chi;V,S'';\nu)=\sum_{\substack{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q_0,tM}\\ U_{S''}=V}}\varphi(\chi;\mathfrak{U}-\mathfrak{Y};\nu).$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q_0,tM}}\varphi(\chi;\mathfrak{U}-\mathfrak{Y};\nu)\mathbf{1}_{V+\mathcal{C}_F^{Q_0}(-H_{Z,S''}^{T-X};S'')}(U_{S''})=\sum_{V_1\in\mathcal{C}_F^{Q_0}(-H_{Z,S''}^{T-X};S'')}\widehat{\boldsymbol{d}}(\chi;V+V_1;\nu),$$

ce qui prouve le lemme. ■

D'après le lemme 13.6.4, la somme sur X dans l'expression E_1^T devient

$$\sum_{S''\in\mathcal{P}^{Q_0}(_tM)}(-1)^{a(S'')}\sum_{X\in\mathcal{C}_F(Q_0,Q;T)}\Bigg(\sum_{V_1\in\mathcal{C}_F^{Q_0}(-H_{Z,S''}^{T-X};S'')}\widehat{\boldsymbol{d}}(\chi;V+V_1,S'';\nu)\Bigg).\tag{13.6}$$

L'expression (13.6) est bien absolument convergente.

Lemme 13.6.5. *Pour $Z \in \mathcal{A}_Q$, $\chi \in \boldsymbol{\chi}_S$ et $V \in \mathcal{D}_{tS}$*

$$\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q,T}_{tM,F}(Z,\chi;V;\nu) \sum_{S''\in\mathcal{P}^Q({}_tM)} (-1)^{a(S'')} \sum_{V_2\in\mathcal{C}_F^Q(-H^T_{Z,S''};S'')} \widehat{\boldsymbol{d}}(\chi;V+V_2,S'';\nu)$$

avec $H^T_{Z,S''} \overset{\text{déf}}{=} Z + [T]^Q_{S''}$.

Démonstration. Elle est identique à celle du lemme 13.6.4. ∎

Pour $S'' \in \mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)$, il résulte des définitions que l'application

$$\mathcal{C}(Q,Q_0)\times\mathcal{C}^{Q_0}(S'') \to \mathfrak{a}^Q_{tM} \qquad \text{définie par} \qquad (X,V_1)\mapsto [X]^Q_{S''}+V_1$$

est injective et a pour image le cône $\mathcal{C}^Q(S'')$. Pour $X \in \mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)$, tout élément $V_1 \in \mathcal{C}_F^{Q_0}(-H^{T-X}_{Z,S''};S'')$ s'écrit

$$V_1 = -H^{T-X}_{Z,S''} + V_1^* = -H^T_{Z,S''} + V_2^*$$

avec $V_1^* \in \mathcal{C}^{Q_0}(S'')$ et $V_2^* = [X]^Q_{S''} + V_1^* \in \mathcal{C}^Q(S'')$. Par définition, V_1 appartient à $\mathcal{C}_F^Q(-H^T_{Z,S''};S'')$. Réciproquement, tout élément $V_2 \in \mathcal{C}_F^Q(-H^T_{Z,S''};S'')$ s'écrit

$$V_2 = -H^T_{Z,S''} + [X]^Q_{S''} + V_1^* = -H^{T-X}_{Z,S''} + V_1^*$$

avec $X \in \mathcal{C}(Q,Q_0)$ et $V_1^* \in \mathcal{C}^{Q_0}(S'')$. Donc V_2 appartient à $\mathcal{C}_F^{Q_0}(-H^{T-X}_{Z,S''};S'')$, et comme

$$(V_2)_{Q_0} = -Z-(T-X)^Q_{Q_0} = -H^{T-X}_Z,$$

par définition, X appartient à $\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)$. L'expression (13.6) se réécrit donc

$$\sum_{S''\in\mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)} (-1)^{a(S'')} \sum_{V_2\in\mathcal{C}_F^Q(-H^T_{Z,S''};S'')} \widehat{\boldsymbol{d}}(\chi;V+V_2,S'';\nu),$$

soit encore, d'après le lemme 13.6.5,

$$\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q,T}_{tM,F}(Z,\chi;V;\nu) - \sum_{S''\in\mathcal{P}^Q({}_tM)\smallsetminus\mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)} (-1)^{a(S'')} \sum_{V_2\in\mathcal{C}_F^Q(-H^T_{Z,S''};S'')} \widehat{\boldsymbol{d}}(\chi;V+V_2,S'';\nu).$$

On en déduit l'égalité

$$E_1^T = E_2^T - E_3^T, \tag{13.7}$$

où

$$E_2^T = \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T)\int_{\boldsymbol{\chi}_S}\sum_{V\in\mathcal{D}_{tS}} \kappa^{\rho T}(V)\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q,T}_{tM,F}(Z,\chi;V;\nu)\,\mathrm{d}\chi$$

et

$$E_3^T = \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \int_{\chi_S} \sum_{V\in\mathcal{D}_{tS}} \kappa^{\rho T}(V)$$
$$\times \sum_{S''\in\mathcal{P}^Q({}_tM)\smallsetminus\mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)} (-1)^{a(S'')} \sum_{V_2\in\mathcal{C}_F^Q(-H_{Z,S''}^T;S'')} \widehat{\boldsymbol{d}}(\chi; V+V_2, S''; \nu).$$

La décomposition (13.7) est justifiée, car l'expression E_2^T est absolument convergente d'après le lemme 13.6.3 (D), et donc E_3^T est convergente, au moins dans l'ordre indiqué.

Lemme 13.6.6. *Pour $S'' \in \mathcal{P}^Q({}_tM)\smallsetminus\mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)$, posons*

$$E_{S''}^T = \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \int_{\chi_S} \sum_{V\in\mathcal{D}_{tS}} \kappa^{\rho T}(V) \sum_{V_2\in\mathcal{C}_F^Q(-H_{Z,S''}^T;S'')} |\widehat{\boldsymbol{d}}(\chi; V+V_2, S''; \nu)|\,\mathrm{d}\chi.$$

Pour tout réel r, on a une majoration de la forme $E_{S''}^T \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}$.

Admettons ce lemme (qui sera lui aussi prouvé dans le paragraphe suivant), et posons

$$E_4^T = \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \int_{\chi_S} \sum_{V\in\mathcal{D}_{tS}} \widehat{\boldsymbol{d}}_{tM,F}^{Q,T}(Z,\chi; V;\nu)\,\mathrm{d}\chi.$$

L'expression E_4^T est absolument convergente et, d'après l'assertion (iii) du lemme 13.6.3, concernant l'expression (E), pour tout réel r, on a

$$|E_2^T - E_4^T| \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}.$$

Par inversion de Fourier de la somme sur V dans E_4^T, on a

$$E_4^T = \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \int_{\chi_S} \left(\int_{\eta_{tS}} \boldsymbol{d}_{tM,F}^{Q,T}(Z,\chi;\Lambda;\nu)\,\mathrm{d}\Lambda\right)\mathrm{d}\chi$$

avec (d'après le lemme 13.6.1 (ii))

$$\boldsymbol{d}_{tM,F}^{Q,T}(Z,\chi;\Lambda;\nu) = \boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;\mu(\chi,\Lambda);\nu)\vartheta(\mu(\chi,\Lambda)).$$

L'expression E_4^T est convergente dans l'ordre indiqué. On peut regrouper les intégrales en χ et Λ grâce au changement de variables $(\chi,\Lambda)\mapsto\mu(\chi,\Lambda)$. On obtient

$$E_4^T = \boldsymbol{A}_{s,t,\nu}^T \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \int_{\mu_S} \boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;\mu;\nu)\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

On a prouvé que pour tout réel r, on a

$$|A^T_{s,t,\nu} - \boldsymbol{A}^T_{s,t,\nu}| \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r},$$

ce qui achève la preuve de la proposition 13.5.1, modulo les majorations des lemmes 13.6.3 et 13.6.6, qui seront établies dans la section suivante.

13.7 Fin de la preuve

Avant d'attaquer la démonstration proprement dite des lemmes 13.6.3 et 13.6.6, on établit une variante du lemme 1.6.12. Soit $Z \in \mathcal{A}_Q$. Pour $P' \in \mathcal{F}^Q({}_tM)$, $U \in \mathcal{A}_{P'}$ et $X \in \mathfrak{a}_{P'}$, considérons l'expression

$$\gamma^{Q,U}_{P',F}(Z; X, \Lambda) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{H \in \mathcal{A}^Q_{P'}(Z)} \Gamma^Q_{P'}(H - X, U) e^{\langle \Lambda, H \rangle}.$$

Puisque la somme sur H est finie, c'est une fonction entière en Λ. Pour $V \in \mathcal{A}_{P'}$, sa transformée de Fourier inverse

$$\widehat{\gamma}^{Q,U}_{P',F}(Z; X, V) = \int_{\boldsymbol{\mu}_{P'}} \gamma^{Q,U}_{P',F}(Z; X, \Lambda) e^{-\langle \Lambda, V \rangle}\, \mathrm{d}\Lambda$$

est donnée par

$$\widehat{\gamma}^{Q,U}_{P',F}(Z; X, V) = \begin{cases} \Gamma^Q_{P'}(V - X, U) & \text{si } Z = V_Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\boldsymbol{e}$ une $(Q, {}_tM)$-famille périodique donnée par une fonction à décroissance rapide m sur $\mathcal{H}_{Q,{}_tM}$. La fonction

$$\boldsymbol{e}^Q_{P',F}(Z; X, \Lambda) = \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_{Q,{}_tM}} m(\mathfrak{U}) \gamma^{Q,U_{P'}}_{P',F}(Z + U_Q; X, \Lambda)$$

est lisse en Λ. Pour $V \in \mathcal{A}_{P'}$, on définit comme ci-dessus les transformées de Fourier inverses $\widehat{\boldsymbol{e}}^Q_{P',F}(Z; X, V)$ et $\widehat{\boldsymbol{e}}(V, P')$. Ce sont des fonctions à décroissance rapide en $V \in \mathcal{A}_{P'}$.

Lemme 13.7.1. *Pour $V \in \mathcal{A}_{P'}$, on a*

$$\widehat{\boldsymbol{e}}^Q_{P',F}(Z; X, V) = \sum_{U \in \mathcal{A}^Q_{P'}(V_Q - Z)} \widehat{\boldsymbol{e}}(U, P') \Gamma^Q_{P'}(V - X, U).$$

De plus pour tout réel r, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|\widehat{\boldsymbol{e}}^Q_{P',F}(Z; X, V)| \le c\big(1 + \|V - Z - X^Q\|\big)^{-r}.$$

Démonstration. On a

$$\widehat{\boldsymbol{e}}^{\,Q}_{P',F}(Z;X,V)=\sum_{\substack{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q,{}_tM}\\ Z+U_Q=V_Q}} m(\mathfrak{U})\Gamma^Q_{P'}(V-X,U_{P'})$$

avec, pour $U\in\mathcal{A}_{P'}$,

$$\sum_{\substack{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q,{}_tM}\\ U_{P'}=U}} m(\mathfrak{U})=\int_{\boldsymbol{\mu}_{P'}}\boldsymbol{e}(\Lambda,P')e^{-\langle\Lambda,U\rangle}\,\mathrm{d}\Lambda=\widehat{\boldsymbol{e}}(U,P').$$

D'où la première assertion du lemme. Quant à la majoration, pour $V,U\in\mathcal{A}_{P'}$ tels que $\Gamma^Q_{P'}(V-X,U)$, on a $\|(V-X)^Q\|\ll\|U^Q\|$. Si de plus $Z+U_Q=V_Q$, alors puisque $V-Z-X^Q=U_Q+(V-X)^Q$, on a

$$\|V-Z-X^Q\|\ll\|U_Q\|+\|(V-X)^Q\|\ll\|U\|.$$

On obtient que pour tout réel $r>1$, l'expression

$$|\widehat{\boldsymbol{e}}^{\,Q}_{P',F}(Z;X,V)|(1+\|V-Z-X^Q\|)^r$$

est essentiellement majorée par

$$\sum_{U\in\mathcal{A}^Q_{P'}(V_Q-Z)}\widehat{\boldsymbol{e}}(U,P')|(1+\|U\|)^r.$$

Cette somme converge car $\widehat{\boldsymbol{e}}(U,P')$ est à décroissance rapide en U. ∎

Démonstration du lemme 13.6.3. On reprend en l'adaptant celle de [25, lemme 13.6.3]. Commençons par l'expression (D). D'après le lemme 1.6.12, pour $V\in\mathcal{A}_{{}_tM}$, on a

$$\widehat{\boldsymbol{d}}^{\,Q,T}_{{}_tM,F}(Z,\chi;V;\nu)=\sum_{\substack{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q,{}_tM}\\ Z+U_Q=V_Q}}\varphi(\chi;\mathfrak{U}-\mathfrak{Y};\nu)\Gamma^Q_{{}_tM}(V,\mathfrak{U}(T))$$

avec (d'après [25, lemme 1.8.6])

$$\Gamma^Q_{{}_tM}(V,\mathfrak{U}(T))=\sum_{P'\in\mathcal{F}^Q({}_tM)}\Gamma^{P'}_{{}_tM}(V,\mathfrak{T})\Gamma^Q_{P'}(V_{P'}-[T]_{P'},U_{P'}).$$

On obtient

$$\widehat{\boldsymbol{d}}^{\,Q,T}_{{}_tM,F}(Z,\chi;V;\nu)=\sum_{P'\in\mathcal{F}^Q({}_tM)}\Gamma^{P'}_{{}_tM}(V,\mathfrak{T})\widehat{\boldsymbol{d}}^{\,Q}_{P',F}(Z,\chi;[T]_{P'},V_{P'};\nu)$$

avec, pour $X \in \mathfrak{a}_{P'}$ et $V' \in \mathcal{A}_{P'}$,

$$\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q}_{P',F}(Z,\chi;X,V';\nu) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_{Q,{}_tM}\\ U_Q=V'_Q-Z}} \varphi(\chi;\mathfrak{U}-\mathfrak{Y};\nu)\Gamma^{Q}_{P'}(V'-X,U_{P'}),$$

soit encore (d'après le lemme 13.7.1),

$$\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q}_{P',F}(Z,\chi;X,V';\nu) = \sum_{U\in\mathcal{A}^{Q}_{P'}(V'_Q-Z)} \widehat{\boldsymbol{d}}(\chi;U,P';\nu)\Gamma^{Q}_{P'}(V'-X,U).$$

L'expression (D) est donc majorée par

$$\sum_{P'\in\mathcal{F}^Q({}_tM)} I^T_{(D)}(P')$$

avec[1]

$$I^T_{(D)}(P') = \sum_{Z\in\mathfrak{C}^{\widetilde{G}}_Q} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T)\int_{\boldsymbol{\chi}_S}\sum_{V\in\mathfrak{D}_{{}_tS}} \Gamma^{P'}_{{}_tM}(V^{P'},\mathfrak{T})|\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q}_{P',F}(Z,\chi;[T]_{P'},V_{P'};\nu)|\,\mathrm{d}\chi.$$

Fixons un $P'\in\mathcal{F}^Q({}_tM)$. L'élément T étant fixé, d'après [25, corollaire 1.8.5], il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $V\in\mathfrak{a}_{{}_tS}$ tel que $\Gamma^{P'}_{{}_tM}(V^{P'},\mathfrak{T})\neq 0$, on ait $\|V^{P'}\|\leq c$. Pour $X\in\mathfrak{a}_{P'}$, la fonction $\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q}_{P',F}(Z,\chi;X,V';\nu)$ est à décroissance rapide en $V'\in\mathcal{A}_{P'}$, uniformément en χ, par conséquent l'expression

$$\int_{\boldsymbol{\chi}_S}\sum_{V\in\mathfrak{D}_{{}_tS}} \Gamma^{P'}_{{}_tM}(V^{P'},\mathfrak{T})|\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q}_{P',F}(Z,\chi;[T]_{P'},V_{P'};\nu)|\,\mathrm{d}\chi$$

est convergente et, en posant

$$\phi(Z,X,V') \overset{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{\chi}_S} |\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q}_{P',F}(Z,\chi;X,V';\nu)|\,\mathrm{d}\chi,$$

on a

$$I^T_{(D)}(P') = \sum_{Z\in\mathfrak{C}^{\widetilde{G}}_Q} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T)\sum_{V\in\mathfrak{D}_{{}_tS}} \Gamma^{P'}_{{}_tM}(V^{P'},\mathfrak{T})\phi(Z,[T]_{P'},V_{P'}).$$

Le groupe $\mathfrak{D}_{{}_tS}$ est par définition l'annulateur de

$$\boldsymbol{\eta}_{{}_tS} = (s\theta_0 - t)\boldsymbol{\mu}_S \subset \boldsymbol{\mu}_{{}_tS}$$

[1] Rappelons que puisque l'élément T est régulier, la famille orthogonale $\mathfrak{T}$ est régulière, et d'après [25, proposition 1.8.7], la fonction $H\mapsto\Gamma^{P'}_{{}_tM}(H,\mathfrak{T})$ est la fonction caractéristique d'un ensemble qui se projette sur un compact convexe de $\mathfrak{a}^{P'}_{{}_tM}$.

dans $\mathcal{A}_{tS}$. On a donc

$$\mathcal{D}_{tS} = \ker\left(\theta_0^{-1}s^{-1}(1 - w\theta_0) : \mathcal{A}_{tS} \to \mathcal{A}_S\right) \quad \text{avec} \quad w = s\theta_0(t)^{-1},$$

soit encore,

$$\mathcal{D}_{tS} = \ker\left(1 - w\theta_0 : \mathcal{A}_{tS} \to \mathcal{A}_{tS}\right).$$

Posons

$$\mathfrak{d}_{tS} = \ker\left(1 - w\theta_0 : \mathfrak{a}_{tS} \to \mathfrak{a}_{\theta_0(tS)}\right) \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}_{P'} = \mathfrak{d}_{tS} \cap \mathfrak{a}_{P'}.$$

Soit $\mathfrak{e}_{P'}$ l'orthogonal de $\mathfrak{d}_{P'}$ dans $\mathfrak{a}_{P'}$. On note $V' \mapsto V'_d$, resp. $V' \mapsto V'_e$, la projection orthogonale de $\mathfrak{a}_{P'} = \mathfrak{d}_{P'} \oplus \mathfrak{e}_{P'}$ sur $\mathfrak{d}_{P'}$, resp. $\mathfrak{e}_{P'}$. Posons

$$\mathfrak{d}_{tS}^{(P')} = \mathfrak{d}_{tS} \cap (\mathfrak{a}_{tS}^{P'} \oplus \mathfrak{e}_{P'}).$$

On a la décomposition

$$\mathfrak{d}_{tS} = \mathfrak{d}_{P'} \oplus \mathfrak{d}_{tS}^{(P')} \tag{13.8}$$

et la projection $\mathfrak{a}_{tS} \to \mathfrak{a}_{tS}^{P'}$, $V \mapsto V^{P'}$ est injective sur $\mathfrak{d}_{tS}^{(P')}$. Posons

$$\mathcal{D}_{P'} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{D}_{tS} \cap \mathfrak{a}_{P'} = \mathcal{A}_{tS} \cap \mathfrak{d}_{P'},$$

et notons $\mathcal{D}_{P'}^\flat$ et $\mathcal{D}_{tS}^{(P')}$ les projections orthogonales de $\mathcal{D}_{tS}$ sur $\mathfrak{d}_{P'}$ et $\mathfrak{d}_{tS}^{(P')}$ pour la décomposition (13.8). On a l'inclusion $\mathcal{D}_{P'} \subset \mathcal{D}_{P'}^\flat$ (avec égalité si $P' = {}_tS$), et la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{D}_{P'} \to \mathcal{D}_{tS} \to \mathcal{D}_{tS}^{(P')} \to 0. \tag{13.9}$$

On décompose la somme $\sum_{V \in \mathcal{D}_{tS}}$ en une double somme

$$\sum_{V_1 \in \mathcal{D}_{tS}^{(P')}} \sum_{V \in \mathcal{D}_{P'}(V_1)},$$

où $\mathcal{D}_{P'}(V_1) \subset \mathcal{D}_{tS}$ est la fibre au-dessus de V_1 pour la suite exacte courte (13.9). L'expression $I_{(D)}^T(P')$ se réécrit

$$I_{(D)}^T(P') = \sum_{Z \in \mathfrak{C}_Q^{\tilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \sum_{V_1 \in \mathcal{D}_{tS}^{(P')}} \Gamma_{tM}^{P'}(V_1^{P'}, \mathfrak{T})\phi_e(Z, [T]_{P'}, V_1)$$

avec

$$\phi_e(Z, X, V_1) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{V \in \mathcal{D}_{P'}(V_1)} \phi(Z, X, V_{P'}).$$

On a

$$\phi_e(Z,X,V_1) \ll \phi_e^\flat(Z,X) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{V'\in\mathcal{D}^\flat_{P'}} \phi(Z,X,V').$$

Observons que

$$\phi(Z,X,V') = \phi(0,X-Z',V'-Z'),$$

où Z' est un relèvement de Z dans $\mathcal{A}_{P'}$. On en déduit que les fonctions $\phi_e(Z,X,V_1)$ et $\phi_e^\flat(Z,X)$ ne dépendent que Z_e et qu'elles sont à décroissance rapide en Z_e. D'autre part, puisque la projection $V \mapsto V^{P'}$ est injective sur $\mathcal{D}^{(P')}_{{}_tS}$, la somme

$$\sum_{V_1\in\mathcal{D}^{(P')}_{{}_tS}} \Gamma^{P'}_{{}_tM}(V_1^{P'},\mathfrak{T})$$

est finie. D'où la majoration

$$I^T_{(D)}(P') \ll \sum_{Z\in\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_Q} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T)\phi_e^\flat(Z,[T]_{P'}).$$

D'après [25, section 13.6 (10), page 202], on a l'inclusion

$$\mathfrak{d}_{{}_tS} \subset \ker(q_Q), \tag{13.10}$$

où $q_Q : \mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_Q$ est l'application définie en section 2.3. Rappelons que cette application est légèrement différente de celle de [25, section 2.13] (au lieu de projeter sur $\mathfrak{a}^G_Q$, on projette ici sur $\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_Q$). L'inclusion (13.10) entraîne l'analogue de la majoration [25, section 13.6 (10), page 202] :

(13.11)

$$\|(Z-T_Q)^{\widetilde{G}}\| \ll \|(Z-T_Q)_e\| \quad \text{pour tout } Z\in\mathfrak{a}_Q \text{ tel que } \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T)=1.$$

On en déduit que $\|Z^{\widetilde{G}}\| \ll 1+\|Z_e\|$ pour tout $Z\in\mathcal{A}_Q$ tel que $\widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T)=1$. Cela entraîne la convergence de $I^T_{(D)}(P')$ et achève la preuve de la convergence de (D).

Considérons maintenant l'expression (E). On voit comme ci-dessus qu'elle est majorée par

$$\sum_{P'\in\mathcal{F}^Q({}_tM)} I^T_{(E)}(P')$$

avec

$$I^T_{(E)}(P') = \sum_{Z\in\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_Q} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T) \sum_{V\in\mathcal{D}_{{}_tS}} \big(1-\kappa^{\rho T}(V)\big)\Gamma^{P'}_{{}_tM}(V^{P'},\mathfrak{T})\phi(Z,[T]_{P'},V_{P'}),$$

soit encore,

$$I^T_{(E)}(P') = \sum_{Z \in \mathcal{C}^{\widetilde{G}}_Q} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T) \sum_{V_1 \in \mathcal{D}^{(P')}_{tS}} \Gamma^{P'}_{tM}(V^{P'}_1, \mathfrak{T})$$
$$\times \sum_{V \in \mathcal{D}_{P'}(V_1)} \big(1 - \kappa^{\rho T}(V)\big)\phi(Z, [T]_{P'}, V_{P'}).$$

Fixons $\rho' > 0$, pour l'instant arbitraire. Pour alléger l'écriture, posons

$$Z_T \stackrel{\text{déf}}{=} Z - T_Q \in \mathfrak{a}_Q.$$

Observons que

$$\widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T) = \widetilde{\sigma}^R_Q(Z_T) = \widetilde{\sigma}^R_Q(Z^{\widetilde{G}}_T).$$

On majore $I^T_{(E)}(P')$ par

$$I^T_{(E),\geq}(P') + I^T_{(E),<}(P'),$$

où $I^T_{(E),\geq}(P')$, resp. $I^T_{(E),<}(P')$, est l'expression obtenue en remplaçant la fonction $\widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T)$ par $\widetilde{\sigma}^R_Q(Z_T)(1-\kappa^{\rho' T}(Z_T))$, resp. $\widetilde{\sigma}^R_Q(Z_T)\kappa^{\rho' T}(Z_T)$, dans $I^T_{(E)}(P')$. On commence par majorer $I^T_{(E),\geq}(P')$. On peut choisir $\rho'' > 0$ tel que $(1-\kappa^{\rho' T}(Z_T)) = 1$ (c'est-à-dire $\|Z_T\| > \rho'\|T\|$) implique $\|Z^{\widetilde{G}}_T\| > \rho''\|T\|$. Alors on a

$$I^T_{(E),\geq}(P') \ll \sum_{Z \in \mathcal{C}^{\widetilde{G}}_Q} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z^{\widetilde{G}}_T)(1-\kappa^{\rho'' T}(Z^{\widetilde{G}}_T)) \sum_{V_1 \in \mathcal{D}^{(P')}_{tS}} \Gamma^{P'}_{tM}(V^{P'}_1, \mathfrak{T})\phi_e(Z, [T]_{P'}, V_1).$$

Pour tout $V \in \mathcal{D}_{P'}(V_1)$ la projection orthogonale $V_{P',e}$ de $V_{P'}$ sur $\mathfrak{e}_{P'}$ ne dépend que de V_1, et on la note $V_{1,e}$. D'après le lemme 13.7.1, pour tout réel r on a une majoration

$$\phi_e(Z, X, V_1) \ll \Big(1 + \|V_{1,e} - Z_{T,e} - X_e\|\Big)^{-r}, \tag{13.12}$$

où la constante implicite est absolue, c'est-à-dire ne dépend d'aucune variable. La constante implicite dans la majoration (13.11) est elle aussi absolue. Comme dans la preuve de [25, lemme 13.6.3][2] on montre que l'on peut choisir ρ'' tel que la condition

$$\widetilde{\sigma}^R_Q(Z^{\widetilde{G}}_T)(1-\kappa^{\rho'' T}(Z^{\widetilde{G}}_T))\Gamma^{P'}_{tM}(V^{P'}, \mathfrak{T}) = 1$$

entraîne une majoration

$$\|Z^{\widetilde{G}}_T\| \ll \|V_{1,e} - Z_{T,e} - [T]_{P',e}\|.$$

[2]Voir toutefois les *errata* **Err** (xix) et **Err** (xx) de l'annexe.

Pour tout réel r on a donc une majoration

$$I^T_{(E),\geq}(P') \ll \sum_{Z\in\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_Q} (1-\kappa^{\rho'' T}(Z^{\widetilde{G}}_T))(1+\|Z^{\widetilde{G}}_T\|)^{-r} \sum_{V_1\in\mathcal{D}^{(P')}_{tS}} \Gamma^{P'}_{tM}(V^{P'}_1,\mathfrak{T}).$$

La somme en V_1 est essentiellement majorée par $\|T\|^D$ pour un certain entier D, et la somme en Z est essentiellement majorée par $\|T\|^{-r}$. D'où la majoration

$$I^T_{(E),\geq}(P') \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}.$$

Traitons maintenant $I^T_{(E),>}(P')$. Grâce à la suite exacte courte

$$0\to \mathcal{D}^{P'}_{tS} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{D}_{tS}\cap \mathfrak{d}^{(P')}_{tS} \to \mathcal{D}_{tS}\to \mathcal{D}^{\flat}_{P'}\to 0, \tag{13.13}$$

on peut décomposer la somme $\sum_{V\in\mathcal{D}_{tS}}$ en une double somme

$$\sum_{V'\in\mathcal{D}^{\flat}_{P'}}\ \sum_{V\in\mathcal{D}^{P'}_{tS}(V')},$$

où $\mathcal{D}^{P'}_{tS}(V')$ est la fibre au-dessus de V' dans $\mathcal{D}_{tS}$ pour la suite exacte courte (13.13). On a donc

$$\begin{aligned} I^T_{(E),<}(P') = \sum_{Z\in\mathcal{C}^{\widetilde{G}}_Q} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T)\kappa^{\rho' T}(Z_T) &\sum_{V'\in\mathcal{D}^{\flat}_{P'}} \phi(Z,[T]_{P'},V') \\ \times \sum_{V\in\mathcal{D}^{P'}_{tS}(V')} &(1-\kappa^{\rho T}(V))\Gamma^{P'}_{tM}(V^{P'},\mathfrak{T}). \end{aligned}$$

Comme dans la preuve de [25, lemme 13.6.3], il existe une constante $c_1>0$ telle que pour tout $V\in\mathcal{D}_{tS}$ tel que $\Gamma^{P'}_{tM}(V^{P'},\mathfrak{T})=1$, on ait la majoration $\|V_1\|\leq c_1\|T\|$, où $V_1=V-V_d$ est l'image de V dans $\mathcal{D}^{(P')}_{tS}$. Si $\rho>c_1$, en ajoutant la condition $(1-\kappa^{\rho T}(V))=1$ c'est-à-dire $\rho\|T\|<\|V\|$, on obtient $\|V_d\|>(\rho-c_1)\|T\|$ c'est-à-dire $(1-\kappa^{(\rho-c_1)T}(V_d))=1$. En particulier $V_d\neq 0$ et l'espace $\mathfrak{d}_{P'}$ n'est pas nul. Il existe $c_2>0$ tel que la condition $\kappa^{\rho' T}(Z_T)=1$ c'est-à-dire $\|Z_T\|\leq\rho'\|T\|$ entraîne $\|Z_{T,d}+[T]_{P',d}\|\leq c_2\|T\|$. En prenant $\rho>c_1+c_2$, on obtient que la condition

$$\kappa^{\rho' T}(Z_T)(1-\kappa^{\rho T}(V))\Gamma^{P'}_{tM}(V^{P'},\mathfrak{T})=1$$

entraîne l'inégalité

$$\|V_d-Z_{T,d}-[T]_{P',d}\|\geq(\rho-(c_1+c_2))\|T\|>\Big(1-\frac{c_2}{\rho-c_1}\Big)\|V_d\|.$$

Grâce au lemme 13.7.1, on en déduit que pour tout réel r l'expression $I^T_{(E),<}(P')$ est essentiellement majorée par

$$\sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \kappa^{\rho'T}(Z_T^{\widetilde{G}}) \sum_{V'\in\mathcal{D}^\flat_{tS}} (1+\|V'\|)^{-r}(1-\kappa^{(\rho-c_1)T}(V')) \sum_{V_1\in\mathcal{D}_{tS}^{(P')}} \Gamma^{P'}_{tM}(V_1^{P'},\mathfrak{T}).$$

Les sommes en Z et en V_1 sont essentiellement majorées par $\|T\|^D$ pour un entier D convenable, et pour tout réel r la somme sur V' est essentiellement majorée par $\|T\|^{-r}$. D'où une majoration

$$I^T_{(E),<}(P') \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r},$$

qui, jointe à la majoration $I^T_{(E),\geq}(P') \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}$, assure la convergence de l'expression (E) et l'assertion de (iii), la concernant.

Considérons maintenant l'expression (A). Comme pour (D), on obtient qu'elle est essentiellement majorée par

$$\sum_{P'\in\mathcal{F}^{Q_0}({}_tM)} I^T_{(A)}(P')$$

avec

$$I^T_{(A)}(P') = \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \sum_{X\in\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)} \times \sum_{V\in\mathcal{D}_{tS}} \left|\Gamma^{P'}_{tM}(V^{P'},\mathfrak{T}-\mathfrak{X})\right| \psi(H_Z^{T-X},[T-X]_{P'},V_{P'})$$

et

$$\psi(H,Y,V') \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\boldsymbol{\chi}_S} \left|\widehat{\boldsymbol{d}}\,^{Q_0}_{P',F}(H,\chi;Y,V';\nu)\right| \mathrm{d}\chi.$$

Ici $\mathfrak{T}-\mathfrak{X}$ est la famille orthogonale $([T-X]_{P'})$. Elle est rationnelle si $T\in\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. Fixons un $P'\in\mathcal{F}^{Q_0}({}_tM)$. Rappelons que $\mathfrak{e}_{P'}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{d}_{P'}=\mathfrak{d}_{tS}\cap\mathfrak{a}_{P'}$ dans $\mathfrak{a}_{P'}$, et qu'on a noté $V'\mapsto V'_e$ la projection orthogonale de $\mathfrak{a}_{P'}=\mathfrak{d}_{P'}\oplus\mathfrak{e}_{P'}$ sur $\mathfrak{e}_{P'}$. Comme pour (D), l'expression $I^T_{(A)}(P')$ se réécrit

$$I^T_{(A)}(P') = \sum_{Z\in\mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \sum_{X\in\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)} \times \sum_{V_1\in\mathcal{D}_{tS}^{(P')}} \left|\Gamma^{P'}_{tM}(V_1^{P'},\mathfrak{T}-\mathfrak{X})\right| \psi_e(H_Z^{T-X},[T-X]_{P'},V_1)$$

avec

$$\psi_e(H,Y,V_1) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{V\in\mathcal{D}_{P'}(V_1)} \psi(H,Y,V_{P'}).$$

D'après le lemme 13.7.1, pour tout réel r on a une majoration

$$\psi_e(H,Y,V_1) \ll \big(1+\|V_{1,e}-(H+Y^{Q_0})_e\|\big)^{-r}.$$

Pour $H=H_Z^{T-X}=Z+(T-X)_{Q_0}^Q$ et $Y=[T-X]_{P'}$, on a

$$H+Y^{Q_0}=Z+[T-X]_{P'}^Q=Z_{T-X}+[T-X]_{P'}$$

avec $Z_{T-X}=Z-(T-X)_Q$. Comme X appartient à $\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)\subset\mathfrak{a}_0^Q$, on a $Z_{T-X}=Z_T$. Notons $\mathfrak{d}_{Q_0}^\flat\subset\mathfrak{a}_{Q_0}$ l'image de $\mathfrak{d}_{tS}$ par la projection $V\mapsto V_{Q_0}$, et soit $\mathfrak{h}$ l'orthogonal de $\mathfrak{d}_{Q_0}^\flat$ dans $\mathfrak{a}_{Q_0}$. Puisque

$$\mathfrak{d}_{Q_0}=\mathfrak{d}_{P'}\cap\mathfrak{a}_{Q_0}\subset\mathfrak{d}_{Q_0}^\flat,$$

on a l'inclusion $\mathfrak{h}\subset e_{P'}$. Notons $\mathfrak{h}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans $e_{P'}$, et $V\mapsto V_h=V_{P',h}$ la projection orthogonale de

$$\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}_0^{P'}\oplus\mathfrak{d}_{P'}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^\perp$$

sur $\mathfrak{h}$. Pour $V\in\mathfrak{d}_{tS}$, on a $V_h=0$. D'autre part puisque la projection $V\mapsto V_h$ se factorise à travers $V\mapsto V_{Q_0}$, on a $[T-X]_{P',h}=(T-X)_h=T_h-X_h$. Pour tout réel r, on obtient une majoration

$$\psi_e(H_Z^{T-X},[T-X]_{P'},V_1)\ll\big(1+\|Z_{T,h}+T_h-X_h\|\big)^{-r}.$$

Or d'après [25, section 13.6 (13), page 204], pour tout $Z\in\mathfrak{c}_Q^{\widetilde{G}}$ tel que $\widetilde{\sigma}_Q^R(Z_T)=1$ et tout $X\in\mathcal{C}(Q,Q_0)$, on a une majoration

$$\|Z_T^{\widetilde{G}}\|+\|X\|\ll\|Z_{T,h}+T_h-X_h\|. \tag{13.14}$$

Comme $\|Z^{\widetilde{G}}\|\ll 1+\|Z_T^{\widetilde{G}}\|$ (la constante implicite dépendant de T), pour tout réel r on obtient une majoration

$$I_{(A)}^T(P')\ll\sum_{Z\in\mathfrak{c}_Q^{\widetilde{G}}}\sum_{X\in\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)}\big(1+\|Z^{\widetilde{G}}\|+\|X\|\big)^{-r}\sum_{V_1\in\mathcal{D}_{tS}^{(P')}}\big|\Gamma_{tM}^{P'}(V_1^{P'},\mathfrak{T}-\mathfrak{X})\big|.$$

Puisque l'application $V_1\mapsto V_1^{P'}$ est injective, la somme en V_1 est essentiellement majorée par

$$\|T\|^D+(1+\|X\|)^D$$

pour un entier D convenable. On en déduit que pour tout réel r, on a une majoration

$$I_{(A)}^T(P')\ll\sum_{Z\in\mathfrak{c}_Q^{\widetilde{G}}}\sum_{X\in\mathcal{C}_F(Q,Q_0;T)}\|T\|^D(1+\|Z^{\widetilde{G}}\|)^{-r}(1+\|X\|)^{-r}. \tag{13.15}$$

Cela prouve la convergence de l'expression (A).

Quant aux deux expressions restantes ((B) et (C)), leur convergence se déduit des raisonnements précédents comme dans la preuve du lemme 13.6.3 de [25]. Idem, pour la majoration du point (ii) de l'énoncé. Cela achève la preuve du lemme 13.6.3. ■

Démonstration du lemme 13.6.6*.* Le sous-groupe parabolique

$$S'' \in \mathcal{P}^Q({}_tM) \smallsetminus \mathcal{P}^{Q_0}({}_tM)$$

étant fixé, on considère la transformée de Fourier inverse

$$V \mapsto \widehat{\boldsymbol{d}}(\chi; V, S''; \nu).$$

C'est une fonction à décroissance rapide en $V \in \mathcal{A}_{{}_tM}$, uniformément en χ. Par conséquent la fonction

$$V \mapsto \xi(V) = \int_{\boldsymbol{\chi}_S} |\widehat{\boldsymbol{d}}(\chi; V, S''; \nu)|\,\mathrm{d}\chi$$

sur $\mathcal{A}_{{}_tM}$ est encore à décroissance rapide, et on a une majoration

$$E^T_{S''} \ll \sum_{Z \in \mathcal{C}^{\widetilde{G}}_Q} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T) \sum_{V \in \mathcal{D}_{{}_tS}} \kappa^{\rho T}(V) \sum_{V_2 \in \mathcal{C}^Q_F(-H^T_{Z,S''}; S'')} \xi(V+V_2). \tag{13.16}$$

Rappelons que pour $Y \in \mathfrak{a}^Q_{{}_tM} + \mathcal{A}_Q$, on a posé

$$\mathcal{C}^Q_F(Y; S'') = \big(Y + \mathcal{C}^Q(S'')\big) \cap \mathcal{A}_{{}_tM} \subset \mathcal{A}^Q_{{}_tM}(Y_Q).$$

On note $\mathcal{C}^Q(S'')_{Q_0}$ et $\mathcal{C}^Q_F(Y; S'')_{Q_0}$ les images (projections orthogonales) de $\mathcal{C}^Q(S'')$ et $\mathcal{C}^Q_F(Y; S'')$ dans $\mathfrak{a}_{Q_0}$. Par définition $\mathcal{C}^Q(S'')_{Q_0}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{a}^Q_{Q_0}$, Y_{Q_0} appartient à $\mathfrak{a}^Q_{Q_0} + \mathcal{A}_Q$, et on a les inclusions

$$\mathcal{C}^Q_F(Y; S'')_{Q_0} \subset \big(Y_{Q_0} + \mathcal{C}^Q(S'')_{Q_0}\big) \cap \mathcal{A}_{Q_0} \subset \mathcal{A}^Q_{Q_0}(Y_Q).$$

Pour $X \in \mathcal{C}^Q_F(Y; S'')_{Q_0}$, on note $\mathcal{C}^Q_F(Y; S'')^{Q_0}_X \subset \mathcal{C}^Q_F(Y; S'')$ la fibre au-dessus de X. Cette fibre est contenue dans $\mathcal{A}^{Q_0}_{{}_tM}(X)$. On peut donc décomposer la somme $\sum_{V_2 \in \mathcal{C}^Q_F(-H^T_{Z,S''}; S'')}$ en une double somme

$$\sum_{X \in \mathcal{C}^Q_F(-H^T_{Z,S''}; S'')_{Q_0}} \; \sum_{V_2 \in \mathcal{C}^Q_F(-H^T_{Z,S''}; S'')^{Q_0}_X},$$

puis majorer brutalement la seconde somme par $\sum_{V_2 \in \mathcal{A}^{Q_0}_{{}_tM}(X)}$. On obtient

$$E^T_{S''} \ll \sum_{Z \in \mathcal{C}^{\widetilde{G}}_Q} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z-T) \sum_{V \in \mathcal{D}_{{}_tS}} \kappa^{\rho T}(V) \sum_{X \in \mathcal{C}^Q_F(-H^T_{Z,S''}; S'')_{Q_0}} \bar{\xi}(V_{Q_0} + X), \tag{13.17}$$

avec, pour $\overline{V} \in \mathcal{A}_{Q_0}$,

$$\overline{\xi}(\overline{V}) = \sum_{V_2 \in \mathcal{A}_{tM}^{Q_0}(\overline{V})} \xi(V).$$

La fonction $\overline{\xi}$ est à décroissance rapide en $\overline{V} \in \mathcal{A}_{Q_0}$.

Notons $\mathfrak{k}$ le noyau de l'application $q_Q : \mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_Q^{\widetilde{G}}$ définie en section 2.3, et $\mathfrak{k}_t$ sa projection sur $\mathfrak{a}_{tS}$ ou ce qui revient au même (puisque $\mathfrak{a}_0^{tS} \subset \mathfrak{a}_0^{Q_0} \subset \mathfrak{k}$) son intersection avec cet espace. On note $\mathfrak{f}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}_t$ dans $\mathfrak{a}_{tS}$. Puisque $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_t \oplus \mathfrak{a}_0^{tS}$, c'est aussi l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{a}_0$. C'est donc un sous-espace de $\mathfrak{a}_{Q_0}$. Pour $V \in \mathfrak{a}_{tS} = \mathfrak{k}_t \oplus \mathfrak{f}$, on note $V_f = V_{Q_0,f}$ la projection orthogonale de V sur $\mathfrak{f}$. D'après l'inclusion (13.10), on a $\mathfrak{d}_{tS} \subset \mathfrak{k}_t$, par conséquent $V_f = 0$ pour tout $V \in \mathfrak{d}_{tS}$. D'après (13.17), pour tout réel r, on obtient une majoration

$$E_{S''}^T \ll \sum_{Z \in \mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z_T) \sum_{V \in \mathfrak{D}_{tS}} \kappa^{\rho T}(V) \sum_{X \in \mathcal{C}_F^Q(-H_{Z,S''}^T;S'')_{Q_0}} (1 + \|X_f\|)^{-r}. \tag{13.18}$$

La somme sur V est essentiellement majorée par $\|T\|^D$ pour un D convenable. L'élément $H_{Z,S''}^T$ est par définition égal à $Z + [T]_{S''}^Q = Z_T + [T]_{S''}$. Tout élément $X \in \mathcal{C}_F^Q(-H_{Z,S''}^T; S'')_{Q_0}$ s'écrit $X = -H_{Z;S''}^T + X'$ avec $X' \in \mathcal{C}^Q(S'')_{Q_0}$, et l'on a

$$X_f = -Z_{T,f} - T_f + X'_f.$$

D'après [25, section 13.7 (4), page 208], pour $Z \in \mathcal{A}_Q$ tel que $\widetilde{\sigma}_Q^R(Z_T) = 1$ et $X' \in \mathcal{C}_F^Q(S'')_{Q_0}$, on a une majoration absolue

$$\|T\| + \|Z_T^{\widetilde{G}}\| + \|X'\| \ll 1 + \|-Z_{T,f} - T_f + X'_f\|.$$

On en déduit que pour $Z \in \mathcal{A}_Q$ tel que $\widetilde{\sigma}_Q^R(Z_T) = 1$ et $X \in \mathcal{C}_F^Q(-H_{Z,S''}^T; S'')_{Q_0}$, on a une majoration absolue

$$\|T\| + \|Z^{\widetilde{G}}\| + \|X\| \ll 1 + \|X_f\|.$$

D'après (13.18), pour tout réel r, on obtient une majoration

$$E_{S''}^T \ll \|T\|^{D-r} \sum_{Z \in \mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} (1 + \|Z^{\widetilde{G}}\|)^{-r} \sum_{X \in \mathcal{C}_F^Q(-H_{Z,S''}^T;S'')_{Q_0}} (1 + \|X\|)^{-r}. \tag{13.19}$$

Ceci est essentiellement majoré par $\boldsymbol{d}_0(T)^{-r}$, ce qui démontre le lemme. ∎

13.8 Élargissement des sommations

D'après [25, lemme 13.8.1], on a l'inclusion

$$\mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S, Q_0) \subset \mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_S, Q). \tag{13.20}$$

On relâche les hypothèses sur Q et R : on suppose seulement $P_0 \subset Q \subset R$ et on abandonne l'hypothèse $\widetilde{\eta}(Q, R) \neq 0$. Pour $t \in W^G(\mathfrak{a}_S, Q)$, on pose

$$\widetilde{\eta}(Q, R; t) = \sum_{\widetilde{P}} (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}},$$

où la somme porte sur l'ensemble des $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ tels que $Q \subset P \subset R$ et $t \in W^P$. Cet ensemble peut être vide. S'il est non vide, alors il existe deux espaces paraboliques standards $\widetilde{P}_1 \subset \widetilde{P}_2$ tel que ce soit l'ensemble des $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ vérifiant $\widetilde{P}_1 \subset \widetilde{P} \subset \widetilde{P}_2$ (on a alors $P_2 = R^-$). On en déduit que $\widetilde{\eta}(Q, R; t) \neq 0$ si et seulement s'il existe un *unique* $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q \subset P \subset R$ et $t \in W^P$, auquel cas on a

$$\widetilde{\eta}(Q, R; t) = (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}}.$$

Rappelons que pour $P' \in \mathcal{F}^Q({}_tM)$ et $w = s\theta_0(t)^{-1}$ on a posé :

$$\mathfrak{d}_{tS} = \ker\Big(1 - w\theta_0 : \mathfrak{a}_{tS} \to \mathfrak{a}_{\theta_0(tS)}\Big).$$

Rappelons aussi que pour $V \in \mathfrak{a}_{P'} = \mathfrak{d}_{P'} \oplus \mathfrak{e}_{P'}$, on a noté V_e la projection orthogonale de V sur $\mathfrak{e}_{P'}$.

Lemme 13.8.1. *On suppose $\widetilde{\eta}(Q, R; t) \neq 0$. Soient $Z \in \mathcal{A}_Q$ et $V \in \mathcal{D}_{tS}$ tels que*

$$\widetilde{\sigma}_Q^R(Z - T)\Gamma_{tM}^{P'}(V^{P'}, \mathfrak{T}) = 1.$$

Alors,

(i) $\|(Z - T_Q)^{\widetilde{G}}\| \ll 1 + \|V_{P',e} - (Z - T_Q)_e - [T]_{P',e}\|$;

(ii) *et, si $t \notin \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S, Q_0)$,*

$$\|T\| + \|(Z - T_Q)^{\widetilde{G}}\| \ll 1 + \|V_{P',e} - (Z - T_Q)_e - [T]_{P',e}\|.$$

Démonstration. Ce sont les analogues des assertions (3)(i) et (3)(ii) en bas de la page 211 de [25], dont la preuve occupe les pages 212 à 215 de *loc. cit.* ■

Proposition 13.8.2. *Soient $t \in \mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_S, Q)$ et $s \in \mathbf{W}^Q(\theta_0(\mathfrak{a}_S), t(\mathfrak{a}_S))$. On pose*

$$A_{s,t}^T = \sum_{Z \in \mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z - T) \int_{\boldsymbol{\mu}_S} [\boldsymbol{\omega}]_{s,t}^{T,Q}(Z; \mu)\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

On suppose $\widetilde{\eta}(Q, R; t) \neq 0$.

(i) *L'expression $\boldsymbol{A}_{s,t}^{T}$ est convergente dans l'ordre indiqué.*

(ii) *Supposons $t \notin \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S, Q_0)$. Alors pour tout réel r, on a une majoration*

$$|\boldsymbol{A}_{s,t}^{T}| \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}.$$

Démonstration. Puisque $\boldsymbol{A}_{s,t} = |\widehat{\mathfrak{C}}_S|^{-1} \sum_{\nu \in \mathcal{E}(\sigma)} \boldsymbol{A}_{s,t,\nu}$ avec

$$\boldsymbol{A}_{s,t,\nu}^{T} = \sum_{Z \in \mathfrak{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{\omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;\mu;\nu)\vartheta(\mu)\,\mathrm{d}\mu,$$

il suffit de prouver les résultats pour $\boldsymbol{A}_{s,t,\nu}^{T}$ avec $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$ fixé. Le lemme 13.6.1 (ii) s'applique ici encore et on en déduit l'analogue du lemme 13.6.2 :

$$\boldsymbol{A}_{s,t,\nu}^{T} = \sum_{Z \in \mathfrak{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T)\left(\int_{\boldsymbol{\chi}_S} \sum_{V \in \mathfrak{D}_{tS}} \widehat{\boldsymbol{d}}_{tM,F}^{\,Q,T}(Z,\chi;V;\nu)\,\mathrm{d}\chi\right).$$

L'expression est convergente dans l'ordre indiqué. Il s'agit de prouver qu'elle est absolument convergente puis de la majorer lorsque $t \notin \mathbf{W}^{Q'}(\mathfrak{a}_S, Q_0)$. On observe que dans la preuve de la convergence de l'expression (D) du lemme 13.6.3, ce n'est qu'à partir de la relation (13.10) que l'hypothèse $t \in \mathbf{W}^{Q'}$ est utilisée. On a donc ici aussi la majoration

$$\boldsymbol{A}_{s,t,\nu}^{T} \ll \sum_{P' \in \mathcal{F}^Q({}_tS)} I_{(D)}^{T}(P')$$

avec

$$I_{(D)}^{T}(P') = \sum_{Z \in \mathfrak{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_Q^R(Z-T) \sum_{V_1 \in \mathfrak{D}_{tS}^{(P')}} \Gamma_{tM}^{P'}(V_1^{P'},\mathfrak{T})\phi_e(Z,[T]_{P'},V_1).$$

D'après (13.12) et le lemme 13.8.1, pour tout réel r, en posant $C_r = 1$ sans hypothèse sur t et $C_r = \|T\|^{-r}$ sous l'hypothèse de (ii), on a une majoration

$$I_{(D)}^{T}(P') \ll C_r \sum_{Z \in \mathfrak{C}_Q^{\widetilde{G}}} \left(1 + \|(Z-T_Q)^{\widetilde{G}}\|\right)^{-r} \sum_{V_1 \in \mathfrak{D}_{tS}^{(P')}} \Gamma_{tM}^{P'}(V_1^{P'},\mathfrak{T}),$$

où la constante implicite est absolue. La somme en V_1 est essentiellement majorée par $\|T\|^D$ pour un certain entier D. La somme en Z est convergente, ce qui démontre le point (i). Sous l'hypothèse de (ii) on obtient $I_{(D)}^{T}(P') \ll \|T\|^{-r}$ pour tout réel r, ce qui démontre (ii). ■

On pose

$$\boldsymbol{A}^{T} = \sum_{t \in \mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_S, Q)} \widetilde{\eta}(Q,R;t) \sum_{s \in \mathbf{W}^Q(\theta_0(\mathfrak{a}_S), t(\mathfrak{a}_S))} \boldsymbol{A}_{s,t}^{T}.$$

Corollaire 13.8.3. *Pour tout réel r, on a les majorations suivantes :*

(i) *Si* $\widetilde{\eta}(Q,R) \neq 0$ *alors* $|\widetilde{\eta}(Q,R)A^T - \boldsymbol{A}^T| \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}$.

(ii) *Si* $\widetilde{\eta}(Q,R) = 0$ *alors* $|\boldsymbol{A}^T| \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}$.

Définition 13.8.4. On considère Q, $S \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $S \subset Q' = \theta_0^{-1}(Q)$. Soient $t \in \mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_S, Q)$, $s \in \mathbf{W}^Q(\theta_0(\mathfrak{a}_S), t(\mathfrak{a}_S))$, $Z \in \mathcal{A}_Q$, $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_{\theta_0(\mathfrak{a}_S)}$. Pour $\sigma \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M_S)$, on définit l'opérateur

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;S,\sigma;\lambda,\mu) = &\sum_{S'' \in \mathcal{P}^Q({}_tM)} \varepsilon_{S''}^{Q,[T]_{S''}}(Z; s\lambda - t\mu) e^{\langle s\lambda - t\mu, Y_{S''}\rangle}\\ &\times \mathbf{M}(t,\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(t\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(s\lambda)\mathbf{M}(s,\lambda).\end{aligned}$$

C'est une fonction lisse de λ et μ. On a introduit dans la définition 13.4.1 l'ensemble $\mathcal{E}(\sigma)$ qui, s'il est non vide, est un espace principal homogène sous $\widehat{\mathfrak{C}}_M$. Pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_S$, on pose :

$$[\mathbf{\Omega}]_{s,t}^{T,Q}(Z;S,\sigma;\mu) = |\widehat{\mathfrak{C}}_S|^{-1} \sum_{\nu \in \mathcal{E}(\sigma)} \mathbf{D}_\nu \mathbf{\Omega}_{s,t}^{T,Q}(Z;S,\sigma;\theta_0(\mu),\mu+\nu).$$

La fonction $\mu \mapsto [\mathbf{\Omega}]_{s,t}^{T,Q}$ est lisse. On rappelle que l'on a défini dans la proposition 12.1.1 une expression $\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T} = \mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}(f,\omega)$. Nous allons en introduire une variante. Pour alléger un peu les notations nous aurons recours au lemme suivant :

Lemme 13.8.5. *Considérons deux espaces pré-hilbertiens $\boldsymbol{\mathcal{E}} \subset \boldsymbol{\mathcal{F}}$ où $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est un facteur direct et un opérateur $A : \boldsymbol{\mathcal{E}} \to \boldsymbol{\mathcal{F}}$ de rang fini. On suppose que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est muni d'une base (au sens algébrique) orthonormale $\boldsymbol{\Psi}$. L'expression*

$$\mathfrak{Sp}(A) = \sum_{\Psi \in \boldsymbol{\Psi}} \langle A\Psi, \Psi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{F}}},$$

donnée par une série convergente, est indépendante du choix de la base. Si, de plus, A stabilise $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, c'est-à-dire si A est un endomorphisme de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, alors

$$\mathfrak{Sp}(A) = \mathrm{trace}(A).$$

Démonstration. Puisque $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est un facteur direct, tout $\Phi \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ peut s'écrire $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ avec $\Phi_1 \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ et Φ_2 est orthogonal à $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. La série

$$\sum_{\Psi \in \boldsymbol{\Psi}} \langle \Phi, \Psi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{F}}} = \sum_{\Psi \in \boldsymbol{\Psi}} \langle \Phi_1, \Psi\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$$

se réduit à une somme finie et il en est de même de la série définissant $\mathfrak{Sp}(A)$ puisque A est de rang fini. L'indépendance du choix de la base se ramène au cas de la dimension finie. ∎

Nous appliquerons ce lemme au cas où $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$ et où $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est l'espace engendré par $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \sigma)$ et les $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S, \widetilde{u}(\sigma \otimes \omega) \star \nu)$ pour $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$. Nous poserons

$$\mathfrak{Sp}_\sigma(A) = \sum_{\Psi \in \boldsymbol{\Psi}_S(\sigma)} \langle A\Psi, \Psi \rangle_S .$$

Proposition 13.8.6. *On considère l'expression*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathfrak{J}}^{\widetilde{G},T}_{\mathrm{spec}}(f,\omega) = & \sum_{\substack{Q,R \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}} \\ Q \subset R}} \sum_{S \in \mathcal{P}^{Q'}_{\mathrm{st}}} \frac{1}{n^{Q'}(S)} \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M_S)} \widehat{c}_M(\sigma) \\ & \times \sum_{t \in \mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_S, Q)} \sum_{s \in \mathbf{W}^Q(\theta_0(\mathfrak{a}_S), t(\mathfrak{a}_S))} \widetilde{\eta}(Q,R;t) \sum_{Z \in \mathcal{C}_Q^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}^R_Q(Z - T_Q) \\ & \times \int_{\boldsymbol{\mu}_S} \mathfrak{Sp}_\sigma\Big([\boldsymbol{\Omega}]^{T,Q}_{s,t}(Z; S, \sigma; \mu) \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\Big)\, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(i) *L'expression $\boldsymbol{\mathfrak{J}}^{\widetilde{G},T}_{\mathrm{spec}} = \boldsymbol{\mathfrak{J}}^{\widetilde{G},T}_{\mathrm{spec}}(f,\omega)$ est convergente.*

(ii) *Pour tout réel r, on a une majoration*

$$\left| \mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}_{\mathrm{spec}} - \boldsymbol{\mathfrak{J}}^{\widetilde{G},T}_{\mathrm{spec}} \right| \ll \boldsymbol{d}_0(T)^{-r}.$$

Démonstration. On observe que, d'après le théorème 7.1.1, l'opérateur $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)$ est de rang fini ; l'assertion (i) résulte alors de la proposition 13.8.2 (en utilisant la remarque 12.1.2). Compte tenu de l'expression pour $\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}$ donnée dans la proposition 12.5.1, on voit que la majoration (ii) résulte de la conjonction des inégalités du corollaire 13.4.5, de la proposition 13.5.1 et du corollaire 13.8.3. ∎

Chapitre 14

Formules explicites

14.1 Combinatoire finale : étape 1

Soient S, S_0, $Q \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tels que $S_0 = \theta_0(S) \subset Q$. On a donc, comme précédemment, $S \subset \theta_0^{-1}(Q) = Q'$. Soit aussi $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_S, \mathfrak{a}_S)$. D'après [25, lemme 14.1.1], $\widetilde{u}$ s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$\widetilde{u} = u\theta_0, \quad u = t^{-1}s \in \mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_{S_0}, \mathfrak{a}_S)$$

avec $t \in \mathbf{W}^G(\mathfrak{a}_S, Q)$ et $s \in \mathbf{W}^Q(\mathfrak{a}_{S_0}, t(\mathfrak{a}_S))$. Soit $S'' \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $\mathfrak{a}_{S''} = t(\mathfrak{a}_S)$, et soit $S_1 = t^{-1}(S'')$. On a donc $S'' \subset Q$. On considère des paramètres μ et ν dans $\boldsymbol{\mu}_S$, et l'on pose $\Lambda = \widetilde{u}\mu - \nu$. Rappelons que l'on a posé, en section 3.2,

$$Y_u = T_0 - u^{-1}T_0 = \mathbf{H}_0(w_u^{-1}).$$

On introduit une variante tordue :

$$Y_{\widetilde{u}} = \theta_0^{-1}Y_u = \theta_0^{-1}T_0 - \widetilde{u}^{-1}T_0,$$

ainsi que le scalaire

$$a_S(\mu, \widetilde{u}) = e^{\langle \mu + \rho_S, Y_{\widetilde{u}} \rangle} = e^{\langle \theta_0\mu + \rho_{S_0}, Y_u \rangle}.$$

On pose enfin

$$M = M_S, \quad Q_1 = t^{-1}Q = t^{-1}sQ = \widetilde{u}Q' \in \mathcal{F}(M).$$

Soit $H \in \mathcal{A}_{Q_1}$. Pour $S_1 \in \mathcal{P}^{Q_1}(M)$, on a défini en sections 5.3 et 5.4

$$\mathcal{M}(\mathfrak{Y}; S, \mu; \Lambda, S_1) = e^{\langle \Lambda, Y_{S_1} \rangle}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu + \Lambda)$$

et

$$\mathcal{M}_{M,F}^{Q_1,T}(H, \mathfrak{Y}; S, \mu; \Lambda) = \sum_{S_1 \in \mathcal{P}^{Q_1}(M)} \varepsilon_{S_1}^{Q_1,[T]_{S_1}}(H; \Lambda)\mathcal{M}(\mathfrak{Y}; S, \mu; \Lambda, S_1).$$

Pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_{\theta_0(M)}$, on a défini en 13.8.4 l'opérateur

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{s,t}^{T,Q}(tH; S, \sigma; \lambda, \mu) = &\sum_{S'' \in \mathcal{P}^Q({}_tM)} \varepsilon_{S''}^{Q,[T]_{S''}}(tH; s\lambda - t\mu)e^{\langle s\lambda - t\mu, Y_{S''} \rangle}\\ &\times \quad \mathbf{M}(t,\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(t\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(s\lambda)\mathbf{M}(s,\lambda).\end{aligned}$$

Proposition 14.1.1. *Soient $\nu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\Lambda = u\lambda - \mu$. Avec les notations de la définition 7.2.2 on a*

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Omega}_{s,t}^{T,Q}(tH; S, \sigma; \lambda, \mu + \nu)\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f, \omega)\\ &\quad= \frac{a_S(\theta_0^{-1}\lambda, \widetilde{u})}{a_S(\mu, \widetilde{u})}\mathcal{M}_{M,F}^{Q_1,T}(H, \mathfrak{Y}; S, \mu + \nu; \Lambda - \nu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu + \Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u}, f, \omega).\end{aligned}$$

Démonstration. Posons $\mu' = \mu + \nu$ et $\Lambda' = u\lambda - \mu' = \Lambda - \nu$. Puisque

$$\Lambda' = t^{-1}(s\lambda - t\mu'),$$

pour $S'' \in \mathcal{P}^Q({}_tM)$ et $S_1 = t^{-1}(S'') \in \mathcal{P}^{Q_1}(M)$, on a

$$\varepsilon_{S''}^{Q,[T]_{S''}}(tH; s\lambda - t\mu')e^{\langle s\lambda - t\mu', Y_{S''}\rangle} = \varepsilon_{S_1}^{Q_1,t^{-1}[T]_{S''}}(H; \Lambda')e^{\langle \Lambda', t^{-1}Y_{S''}\rangle}.$$

Or, on a $t^{-1}[T]_{S''} = [T]_{S_1}$, et

$$t^{-1}Y_{S''} = Y_{S_1} - Y_{t^{-1}(S)},$$

où $Y_{t^{-1}(S)}$ est la projection de $Y_t = T_0 - t^{-1}T_0$ sur $\mathfrak{a}_M$. Grâce à [25, lemmes 6.1.1 et 14.1.2], on obtient, comme dans la preuve de [25, proposition 14.1.3], que

$$\mathbf{M}(t, \mu')^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(t\mu')^{-1}\mathbf{M}_{S''|_tS}(s\lambda)\mathbf{M}(s, \lambda)\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f, \omega)$$

est égal à

$$\frac{a_S(\theta_0^{-1}\lambda, \widetilde{u})}{a_S(\mu, \widetilde{u})}e^{\langle \Lambda', Y_{t^{-1}(S)}\rangle}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu')^{-1}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu' + \Lambda')\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu' + \Lambda')\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u}, f, \omega).$$

D'où le résultat. ∎

Pour $\nu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\Lambda = (\widetilde{u} - 1)\mu$, on pose

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H; \sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu)\\ &\qquad= \mathfrak{S}\mathfrak{p}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\mathcal{M}_{M,F}^{Q_1,T}(H, \mathfrak{Y}; S, \mu + \nu; \Lambda - \nu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu + \Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u}, f, \omega)\Big).\end{aligned}$$

Pour $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$, l'espace principal homogène sous $\widehat{\mathfrak{c}}_M$ introduit dans la définition 13.4.1, on a $\nu|_{\mathcal{B}_{\widetilde{G}}} = 0$ et $\Lambda|_{\mathcal{B}_{\widetilde{G}}} = 0$. L'expression

$$\boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H; \sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu)$$

ne dépend donc que de l'image de H dans $\mathcal{C}_{Q_1} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{Q_1}$. On pose alors

$$[\boldsymbol{A}]_M^{T,Q_1}(H; \sigma, \widetilde{u}, \mu) = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1}\sum_{\nu \in \mathcal{E}(\sigma)}\boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H; \sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu).$$

Rappelons que S est l'unique élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $M_S = M$.

Lemme 14.1.2.

(i) *On a l'égalité*

$$[A]_M^{T,Q_1}(H;\sigma,\tilde{u},\mu)=\mathfrak{Sp}_\sigma\Big([\boldsymbol{\Omega}]_{s,t}^{T,Q}(tH;S,\sigma;\mu)\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{S,\sigma,\mu}(f,\omega)\Big).$$

(ii) *Cette expression est invariante si l'on remplace M, Q_1, S, $\tilde{u}$ et H par leurs conjugués sous l'action d'un élément $w\in\mathbf{W}^G$, et simultanément σ et μ par $w\sigma=\sigma\circ\mathrm{Int}_w^{-1}$ et $w\mu=\mu\circ\mathrm{Int}_w^{-1}$.*

Démonstration. Pour (i), puisque $\mathcal{M}_{M,F}^{Q_1,T}(H,\mathfrak{Y};S,\mu;\Lambda)$ est lisse pour les valeurs imaginaires pures de μ et Λ, on peut prendre $\lambda=\theta_0(\mu)$ dans la proposition 14.1.1. Pour (ii), rappelons que w définit un opérateur

$$\boldsymbol{w}:\boldsymbol{\mathcal{A}}(X_S,\sigma)\to\boldsymbol{\mathcal{A}}(X_{wS},w\sigma).$$

Cet opérateur est une isométrie et (ii) est une conséquence des équations fonctionnelles satisfaites par les opérateurs d'entrelacement. ■

On observe que $[T]_{Q_1}=t^{-1}(T_Q)$ puisque $Q_1=t^{-1}Q$. Soient aussi $R\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ tel que $Q'\subset R$, et $R_1=t^{-1}R$. On pose

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\tilde{u})=\sum_{H\in\mathfrak{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}}\tilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H-[T]_{Q_1})\int_{\boldsymbol{\mu}_M}[A]_M^{T,Q_1}(H;\sigma,\tilde{u},\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

On a défini cette expression pour $M=M_S$ avec $S\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. Plus généralement, elle est bien définie pour tout $M\in\mathcal{L}$, tout $S\in\mathcal{P}$ tel que $M_S=M$, tout Q_1 et tout R_1 dans $\mathcal{P}$ tels que $M\subset Q_1\subset R_1$, et tout $\tilde{u}\in\mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_M)$. On introduit alors l'expression

$$\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\tilde{u})=\sum_{\substack{Q_1,R_1\in\mathcal{P}\\ M\subset Q_1\subset R_1}}\tilde{\eta}(Q_1,R_1;u)\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\tilde{u})$$

et on a l'analogue de la proposition 14.1.5 de [25] :

Proposition 14.1.3. *L'expression $\mathfrak{J}_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{G},T}(f,\omega)$ de la proposition 13.8.6 se réécrit*

$$\mathfrak{J}_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{G},T}(f,\omega)=\sum_{M\in\mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G}\frac{1}{w^G(M)}\sum_{\sigma\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)}\widehat{c}_M(\sigma)\sum_{\tilde{u}\in\mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_M)}\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\tilde{u}).$$

Maintenant, on définit une (G,M)-famille $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}(\sigma,\tilde{u},\mu;\nu)$ par

$$\boldsymbol{c}(\Lambda,S_1)=\mathfrak{Sp}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\,\mathcal{M}(\mathfrak{Y};S,\mu+\nu;\Lambda,S_1)\mathbf{M}_{S|\tilde{u}S}(\mu+\nu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\tilde{u},f,\omega)\Big).$$

Elle est périodique car la famille orthogonale $\mathfrak{Y}$ est entière. Pour $\Lambda = (\widetilde{u}-1)\mu$, on a donc

$$\boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H;\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu) = \boldsymbol{c}_{M,F}^{Q_1,T}(H;\Lambda-\nu).$$

D'après le lemme 1.5.1, il existe une fonction à décroissance rapide

$$\mathfrak{U} \mapsto \varphi(\mathfrak{U}) = \varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})$$

sur $\mathcal{H}_M$ telle que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_\varphi$.

D'après la formule d'inversion de Fourier du corollaire 1.6.10, on a

$$\boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H;\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \varphi(\mathfrak{U})\gamma_{M,F}^{Q_1,T}(H,\mathfrak{U};\Lambda-\nu)$$

avec

$$\gamma_{M,F}^{Q_1,T}(H,\mathfrak{U};\Lambda-\nu) = \gamma_{M,F}^{Q_1,\mathfrak{U}(T)}(H+U_{Q_1};\Lambda-\nu).$$

Lemme 14.1.4. *Le support de φ est contenu dans le réseau*

$$\mathcal{H}_M^G = \mathcal{H}_M \cap \mathfrak{H}_M^G$$

du sous-espace $\mathfrak{H}_M^G$ de $\mathfrak{H}_M$ formé des familles orthogonales $\mathfrak{U} = (U_P)$ telles que $U_G = 0$.

Démonstration. Il suffit de voir que la (G,M)-famille périodique $\boldsymbol{c}$ est invariante par translations par les éléments de $\widehat{\mathfrak{a}}_G$ (en fait, de $\boldsymbol{\mu}_G$). Par définition,

$$\boldsymbol{c}(\Lambda,S_1) = \mathfrak{Sp}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\,\mathcal{M}(\mathfrak{Y};S,\mu+\nu;\Lambda,S_1)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\nu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big)$$

avec

$$\mathcal{M}(\mathfrak{Y};S,\mu;\Lambda,S_1) = e^{\langle\Lambda,Y_{S_1}\rangle}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu+\Lambda).$$

D'autre part on a

$$\boldsymbol{c}(\Lambda,S_1) = \int_{\boldsymbol{\mu}_G} \boldsymbol{c}(\Lambda+\nu,S_1)\,\mathrm{d}\nu = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\left(\int_{\boldsymbol{\mu}_G} e^{\langle\nu,U_G\rangle}\,\mathrm{d}\nu\right)e^{\langle\Lambda,U_{S_1}\rangle}\varphi(\mathfrak{U}).$$

On en déduit que

$$\varphi(\mathfrak{U}) = \left(\int_{\boldsymbol{\mu}_G} e^{\langle\nu,U_G\rangle}\,\mathrm{d}\nu\right)\varphi(\mathfrak{U}).$$

Cela prouve le lemme. ∎

Conformément à nos conventions, on pose $\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_M$. Soit $\widetilde{L}\in\mathcal{L}^{\widetilde{G}}$ le sous-ensemble de Levi minimal contenant $M\widetilde{u}$. En particulier,

$$\widetilde{u}\in\mathbf{W}^{\widetilde{L}}(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_M).$$

Proposition 14.1.5. *On a l'égalité*

$$\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1} \sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)} \sum_{H\in\mathfrak{C}_M^{\widetilde{G}}} e^{-\langle\nu, Y_{\widetilde{u}}+H\rangle}$$
$$\times \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle(\widetilde{u}-1)\mu,H\rangle}\Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(H,\mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. La preuve ci-après reprend, pour l'essentiel, les arguments de [25, proposition 14.1.7]. On rappelle que par définition on a

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1} \sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)} e^{-\langle\nu,Y_{\widetilde{u}}\rangle}\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\widetilde{u};\nu)$$

avec

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\widetilde{u};\nu) = \sum_{H_1\in\mathfrak{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H_1-[T]_{Q_1})\int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H_1;\sigma,\widetilde{u},\mu+\nu;\nu)\,\mathrm{d}\mu.$$

Fixons $\nu\in\mathcal{E}(\sigma)$ et posons $\varphi=\varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)$. Pour $H_1\in\mathcal{A}_{Q_1}$ et $\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M$, on a (par définition)

$$\gamma_{M,F}^{Q_1,T}(H_1,\mathfrak{U};\Lambda) = \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))e^{\langle\Lambda,H\rangle}.$$

Par conséquent, en rappelant que $\boldsymbol{c}$ est la (G,M)-famille $\boldsymbol{c}_\varphi=\boldsymbol{c}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)$, on a

$$\boldsymbol{c}_{M,F}^{Q_1,T}(H_1;\Lambda) = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \varphi(\mathfrak{U})\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))e^{\langle\Lambda,H\rangle}. \tag{14.1}$$

Pour $H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})$, on a $H_{Q_1}=H_1+U_{Q_1}$, et il existe une constante $c>0$ (indépendante de $\mathfrak{U}$) telle que si $\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))\neq 0$, on ait

$$\|H^{Q_1}\| \le c \sup_{P\in\mathcal{P}^{Q_1}(M)} \|(U_P+[T]_P)^{Q_1}\|.$$

Par conséquent, la somme

$$\sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} |\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))|$$

est finie, et puisque φ est à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M$, on en déduit que l'expression (14.1) est absolument convergente. En prenant $\Lambda=(\widetilde{u}-1)\mu-\nu$, on obtient que

$$\int_{\boldsymbol{\mu}_S} \boldsymbol{A}_M^{T,Q_1}(H_1;\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M^G}\ \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U}) \times \Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))e^{\langle(\widetilde{u}-1)\mu-\nu,H\rangle}\,\mathrm{d}\mu.$$

On a donc

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\widetilde{u};\nu) = \sum_{H_1\in\mathcal{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}}\ \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\ \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H,\mu,\nu,\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu$$

avec

$$\boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H,\mu,\nu,\mathfrak{U}) = e^{\langle(\widetilde{u}-1)\mu-\nu,H\rangle}\widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H-\mathfrak{U}(T))\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U}).$$

L'expression

$$\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\ \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1})} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H,\mu,\nu,\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu \tag{14.2}$$

est absolument convergente. Pour chaque $\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M$, puisque $(U_S)_{Q_1}=U_{Q_1}$, on a $\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1+U_{Q_1}) = \mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1)+U_S$. L'expression (14.2) est donc égale à

$$\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\ \sum_{H\in\mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1)} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H+U_S,\mu,\nu,\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu$$

et $\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma,\widetilde{u};\nu)$, c'est-à-dire la somme sur $H_1\in\mathcal{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}$ des expressions (14.2), se réécrit

$$\sum_{H\in\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}}\ \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{Q_1}^{R_1}(H+U_S,\mu,\nu,\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu. \tag{14.3}$$

Pour cela, il suffit de démontrer la convergence absolue d'une somme itérée de la forme

$$\sum_{H\in\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}}\ \sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} \widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H-[T]_{Q_1})\Gamma_M^{Q_1}(H+U_S,\mathfrak{U}(T))\psi((\widetilde{u}^*-1)(H+U_S),\mathfrak{U}),$$

où $\widetilde{u}^*$ est le transposé de $\widetilde{u}$ (identifié à $\widetilde{u}^{-1}$) et

$$\psi(X,\mathfrak{U}) = \int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle\mu,X\rangle}\varphi(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu.$$

D'après ce qui précède, c'est-à-dire la convergence absolue de l'expression (14.2), pour $H_1 \in \mathcal{A}_{Q_1}$, l'expression

$$\sum_{H \in \mathcal{A}_M^{Q_1}(H_1)} \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M} \Gamma_M^{Q_1}(H + U_S, \mathfrak{U}(T))\psi((\widetilde{u}^* - 1)(H + U_S), \mathfrak{U})$$

est absolument convergente. De plus sa valeur en H_1 est donnée par $\xi((\widetilde{u}^* - 1)H_1)$ pour une fonction ξ sur $\mathcal{A}_{Q_1}$ qui est la transformée anti-Laplace d'une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_{Q_1} = \widehat{\mathcal{A}}_{Q_1}$. Il suffit donc d'établir la convergence absolue de la somme

$$\sum_{H_1 \in \mathfrak{C}_{Q_1}^{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H_1 - [T]_{Q_1})\xi((\widetilde{u}^* - 1)H_1),$$

qui résulte de [25, lemme 2.12.2] (cf. aussi section 2.3). On peut donc effectuer le changement de variable $H \mapsto H - U_S$ dans (14.3). On obtient que

$$\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u}; \nu) = \sum_{H \in \mathfrak{C}_M^{\widetilde{G}}} \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M^G} \left(\int_{\boldsymbol{\mu}_M} \boldsymbol{G}_{M,Q_1}^{T,R_1}(H, \mu, \nu, \mathfrak{U})\, \mathrm{d}\mu\right).$$

On a

$$\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = \sum_{\substack{Q_1, R_1 \in \mathcal{P} \\ M \subset Q_1 \subset R_1}} \widetilde{\eta}(Q_1, R_1; u)\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u})$$

avec

$$\widetilde{\eta}(Q_1, R_1; u)\mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u}) = \sum_{\substack{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{P}} \\ Q_1 \subset P \subset R_1}} (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}} \mathfrak{J}_{M,Q_1}^{T,R_1}(\sigma, \widetilde{u}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{C}}_M|^{-1} \sum_{\nu \in \widehat{\mathfrak{C}}_M} e^{-\langle \nu, Y_{\widetilde{u}} \rangle} \sum_{H \in \mathfrak{C}_M^{\widetilde{G}}} \sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M^G} \sum_{\substack{Q_1, R_1 \in \mathcal{P} \\ M \subset Q_1 \subset R_1}} \\ \times \sum_{\substack{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{P}} \\ Q_1 \subset P \subset R_1}} (-1)^{a_{\widetilde{P}} - a_{\widetilde{G}}} \widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H - \mathfrak{U}(T)_{Q_1})\Gamma_M^{Q_1}(H, \mathfrak{U}(T)) \\ \times \int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle (\widetilde{u} - 1)\mu - \nu, H \rangle} \varphi(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu; \mathfrak{U})\, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

La double somme

$$\sum_{\substack{Q_1, R_1 \in \mathcal{P} \\ M \subset Q_1 \subset R_1}} \sum_{\substack{\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{P}} \\ Q_1 \subset P \subset R_1}}$$

s'écrit aussi

$$\sum_{\substack{\widetilde{P}\in\widetilde{\mathcal{P}},\widetilde{u}\in\mathbf{W}^{\widetilde{P}}\\ M\subset P}}\ \sum_{\substack{Q_1,R_1\in\mathcal{P}\\ M\subset Q_1\subset P\subset R_1}} = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(\widetilde{L})}\ \sum_{\substack{Q_1,R_1\in\mathcal{P}\\ M\subset Q_1\subset P\subset R_1}}$$

et d'après [25, lemme 2.11.5], la double somme

$$\sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(\widetilde{L})}\ \sum_{\substack{Q_1,R_1\in\mathcal{P}\\ M\subset Q_1\subset P\subset R_1}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}}\widetilde{\sigma}_{Q_1}^{R_1}(H-\mathfrak{U}(T)_{Q_1})\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T))$$

est égale à
(14.4)

$$\sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(\widetilde{L})}\ \sum_{\substack{Q_1\in\mathcal{P}\\ M\subset Q_1\subset P}} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}}\hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H-\mathfrak{U}(T)_P)\tau_{Q_1}^{P}(H-\mathfrak{U}(T)_{Q_1})\Gamma_M^{Q_1}(H,\mathfrak{U}(T)).$$

D'après [25, lemme 1.8.4 (3)] et [25, proposition 2.9.3], cette double somme (14.4) est égale à

$$\sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{F}(\widetilde{L})} (-1)^{a_{\widetilde{P}}-a_{\widetilde{G}}}\hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H-\mathfrak{U}(T)_P) = \Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(H,\mathfrak{U}(T)).$$

Cela achève la preuve la proposition. ■

14.2 Combinatoire finale : étape 2

Ce paragraphe n'a pas d'équivalent pour les corps de nombres : il s'agit, à l'aide du lemme d'inversion de Fourier du lemme 14.2.2, de remplacer la somme sur les $H\in\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}$ dans la proposition 14.1.5 par une somme sur les $\widetilde{Z}\in\widehat{\mathfrak{c}}_G$.

Rappelons que $\widetilde{L}\in\mathcal{L}^{\widetilde{G}}$ est le sous-espace de Levi minimal (dans $\widetilde{G}$) contenant $M\widetilde{u}$. L'espace $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$ est le sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ formé des points fixes sous $\widetilde{u}=u\theta_0$. On note $\mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$ dans $\mathfrak{a}_M$:

$$\mathfrak{a}_M=\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}\oplus\mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}}\quad\text{et l'on a}\quad \mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}}=(\widetilde{u}-1)\mathfrak{a}_M.$$

Par définition, $\mathcal{A}_{\widetilde{L}}$ est l'image et $\mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}$ le noyau de la projection de $\mathcal{A}_M$ sur $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$. On a donc une suite exacte

$$0\to\mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}\to\mathcal{A}_M\to\mathcal{A}_{\widetilde{L}}\to 0.$$

La dualité de Pontryagin fournit alors la suite exacte

$$0\to\mu_{\widetilde{L}}\to\mu_M\to\mu_M^{\widetilde{L}}\to 0.$$

Conformément à nos conventions, les groupes compacts $\boldsymbol{\mu}_M$, $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$ et $\boldsymbol{\mu}_M^{\widetilde{L}}$ sont munis de la mesure de Haar, qui leur donne le volume 1. Considérons le morphisme entre groupes de Lie abéliens compacts connexes

$$\phi : \boldsymbol{\mu}_M^{\widetilde{L}} \times \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}} \to \boldsymbol{\mu}_M, \quad \text{défini par} \quad \phi(\dot{\mu}, \lambda) = (\widetilde{u} - 1)\mu - \lambda,$$

où $\mu \in \boldsymbol{\mu}_M$ est un relèvement de $\dot{\mu} \in \boldsymbol{\mu}_M^{\widetilde{L}}$.

Lemme 14.2.1. *Le morphisme ϕ est surjectif et son noyau $\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}$ est un groupe fini dont le cardinal est égal à la valeur absolue du jacobien de ϕ :*

$$|\mathrm{Jac}(\phi)| = |\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}| = |\det(\widetilde{u} - 1 \mid \mathfrak{a}_M^{\widetilde{L}})|.$$

Démonstration. Le morphisme ϕ induit un isomorphisme pour les algèbres de Lie, car les espaces tangents, à l'origine, de l'image de $(\widetilde{u} - 1)$ et de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$, sont des supplémentaires orthogonaux (on identifie $\widetilde{u}$ et son transposé inverse, et on utilise l'égalité $\widetilde{u}^{-1}(\widetilde{u} - 1) = -(\widetilde{u} - 1)$). ∎

Pour $\nu \in \boldsymbol{\mu}_M$, on note

$$\xi_{\widetilde{u},\nu} : \boldsymbol{\mu}_M \to \boldsymbol{\mu}_M \qquad \text{l'application} \qquad \mu \mapsto (\widetilde{u} - 1)\mu - \nu.$$

Considérons le sous-ensemble des $\mu \in \boldsymbol{\mu}_M$ dont l'image par $\xi_{\widetilde{u},\nu}$ appartient à $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$:

$$\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu) = \{\mu \in \boldsymbol{\mu}_M \mid (\widetilde{u} - 1)\mu - \nu \in \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}\}.$$

C'est une union finie de translatés de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$. En effet, son quotient

$$\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{L}}(\nu) = \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)/\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$$

est un espace principal homogène sous le groupe $\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{L}}(0) \simeq \mathfrak{K}_{\widetilde{u}}$. On a donc

$$|\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}^{\widetilde{L}}(\nu)| = |\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|.$$

On munit $\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$ de la mesure $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$-invariante induite par celle sur $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$.

Lemme 14.2.2. *Pour $X \in \mathcal{A}_{\widetilde{L}}$, on note $\mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}(X)$ l'ensemble des $H \in \mathcal{A}_M$ tels que $H_{\widetilde{L}} = X$. Soient $\nu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et ψ une fonction lisse sur $\boldsymbol{\mu}_M$. On a l'identité*

$$\sum_{H \in \mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}(X)} \left(\int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle (\widetilde{u}-1)\mu - \nu, H\rangle} \psi(\mu)\,\mathrm{d}\mu \right) = |\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|^{-1} \int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)} e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu), X\rangle} \psi(\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. C'est immédiat, par inversion de Fourier (cf. [34, section 3.20]). ∎

Rappelons que

$$\mathcal{E}(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\nu \in \boldsymbol{\mu}_M \,|\, \xi_{\tilde{u}(\omega\otimes\sigma)} \star \nu|_{\mathcal{B}_M} = \xi_\sigma\}.$$

En particulier, tout $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$ est trivial sur $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$, et donc, pour tout $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\tilde{u}}(\nu)$, le caractère $\xi_{\tilde{u},\nu}(\mu)$ de $\mathcal{A}_{\widetilde{L}}$ est, lui aussi, trivial sur $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$. Soit $\widetilde{Z} \in \mathcal{A}_{\widetilde{G}}$. Pour ν, $\mu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\Lambda = (\tilde{u}-1)\mu$, on pose

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{T,\widetilde{G}}(\widetilde{Z};\sigma,\tilde{u},\mu;\nu)\\
&\quad = \mathfrak{Sp}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\, \mathcal{M}_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},T}(\widetilde{Z},\mathfrak{Y};S,\mu+\nu;\Lambda-\nu)\mathbf{M}_{S|\tilde{u}S}(\mu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\tilde{u},f,\omega)\Big).
\end{aligned}$$

Pour $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$, puisque $\Lambda-\nu$ est trivial sur $\mathcal{B}_{\widetilde{G}}$, cette expression ne dépend que de l'image de $\widetilde{Z}$ dans $\mathfrak{c}_{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{\widetilde{G}}$.

Proposition 14.2.3. *On a*

$$\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\tilde{u}) = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1}|\mathfrak{K}_{\tilde{u}}|^{-1}\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\sum_{\widetilde{Z}\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}}\int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\tilde{u}}(\nu)}\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{T,\widetilde{G}}(\widetilde{Z};\sigma,\tilde{u},\mu;\nu)\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. D'après la proposition 14.1.5,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\tilde{u}) &= |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1}\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\sum_{H\in\mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}} e^{-\langle\nu,Y_{\tilde{u}}+H\rangle}\\
&\quad\times\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle(\tilde{u}-1)\mu,H\rangle}\Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(H,\mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma,\tilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

On décompose la somme sur les $H \in \mathcal{C}_M^{\widetilde{G}}$ en une double somme sur $X \in \mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$, précédée de la somme en $H \in \mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}(X)$, où $\mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{\widetilde{L}}$, et l'on obtient

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\tilde{u}) &= |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1}\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\sum_{X\in\mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}}\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M}\\
&\quad\times\sum_{H\in\mathcal{A}_M^{\widetilde{L}}(X)}\int_{\boldsymbol{\mu}_M} e^{\langle(\tilde{u}-1)\mu-\nu,H\rangle}\Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(H,\mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma,\tilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 14.2.2, on voit que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma,f,\omega,\tilde{u}) &= |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1}|\mathfrak{K}_{\tilde{u}}|^{-1}\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\sum_{X\in\mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}}\\
&\quad\times\int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\tilde{u}}(\nu)}\sum_{\mathfrak{U}\in\mathcal{H}_M} e^{\langle\xi_{\tilde{u},\nu}(\mu),X\rangle}\Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(X,\mathfrak{U}(T))\varphi(\sigma,\tilde{u},\mu;\nu;\mathfrak{U})\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

On décompose la somme sur $X \in \mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$ en une double somme sur $\widetilde{Z} \in \mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$, précédée de la somme sur $X \in \mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\widetilde{Z})$. Pour $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$, $\widetilde{Z} \in \mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$ et $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$, on a

$$\sum_{X \in \mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\widetilde{Z})} e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu), X\rangle} \Gamma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(X; \mathfrak{U}(T)) = \gamma_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},\mathfrak{U}(T)}(\widetilde{Z}; \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)).$$

Rappelons que la somme sur $\mathcal{H}_M$ est en fait une somme sur $\mathcal{H}_M^G$ (cf. lemme 14.1.4). D'après la formule d'inversion de Fourier pour les $(\widetilde{G}, \widetilde{L})$-familles (2.1), pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$, on a

$$\sum_{\mathfrak{U} \in \mathcal{H}_M^G} \gamma_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},\mathfrak{U}(T)}(\widetilde{Z}; \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)) \varphi(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu; \mathfrak{U}) = \boldsymbol{c}_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},T}(\widetilde{Z}; \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)),$$

où $\boldsymbol{c}$ est la (G, M)-famille définie par la fonction à décroissance rapide sur $\mathcal{H}_M : \mathfrak{U} \mapsto \varphi(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu; \mathfrak{U})$. Puisque $\Lambda - \nu = \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)$ le terme $\boldsymbol{c}_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},T}(\widetilde{Z}; \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu))$ est égal à l'expression $\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{T,\widetilde{G}}(\widetilde{Z}; \sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu)$. ∎

On rappelle que l'on est parti de la formule de la proposition 10.2.1 pour $\mathfrak{J}_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{G},T}(f, \omega)$ réécrite sous la forme de la proposition 12.1.1. Puis on a introduit une variante $\boldsymbol{\mathfrak{J}}_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{G},T}(f, \omega)$ dans la proposition 13.8.6 (i) que l'on a décomposé en une somme de termes $\boldsymbol{\mathfrak{J}}_{M}^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u})$ (cf. proposition 14.1.3) pour lesquels on obtient une nouvelle expression dans la proposition 14.2.3. Ces formules ont été obtenues pour $T \in \mathfrak{a}_0$ dans le translaté d'un cône ouvert non vide. Pour $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, nous pouvons maintenant les comparer.

Proposition 14.2.4. *On a l'égalité de fonctions dans* PolExp *:*

$$\mathfrak{J}_{\mathrm{spec}}^{\widetilde{G},T}(f, \omega) = \sum_{M \in \mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\sigma \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma) \sum_{\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_M)} \boldsymbol{\mathfrak{J}}_{M}^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}).$$

Démonstration. Les deux membres de cette équation sont, comme fonctions de $T \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, des éléments de PolExp : on invoque le théorème 11.1.1 pour $\mathfrak{J}^{\widetilde{G},T}$ et le lemme 5.3.1 pour les $\boldsymbol{\mathfrak{J}}_{M}^{\widetilde{G},T}$, vu leur définition dans la proposition 14.2.3. Compte tenu de la décomposition de la proposition 14.1.3, la majoration du point (ii) de la proposition 13.8.6 montre que les deux membres ne diffèrent que par une quantité qui tend vers zéro lorsque T tend vers l'infini dans un cône ouvert. Leur égalité résulte alors du lemme 1.7.2. ∎

Cette proposition peut être vue comme l'analogue de [25, proposition 14.1.11] (raffiné en [25, théorème 14.2.1]). Toutefois, c'est une égalité de fonctions dans PolExp et non une égalité de polynômes, et, par ailleurs, les sommes sur ν et $\widetilde{Z}$

viennent compliquer l'expression de la proposition 14.2.3 ; une nouvelle étape est nécessaire ici.

14.3 Le polynôme limite au point central

Les preuves dans cette section sont inspirées de celle du lemme de [34, section 3.23]. Pour $S \in \mathcal{P}(M)$ et $\mu \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{C}}$, rappelons que $\mathcal{M}(S,\mu)$ est la (G,M)-famille spectrale à valeurs opérateurs définie par

$$\mathcal{M}(S,\mu;\Lambda,S_1) = \mathbf{M}_{S_1|S}(\mu)^{-1}\mathbf{M}_{S_1|S}(\mu+\Lambda)$$

et qu'on lui a associé l'opérateur

$$\mathcal{M}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(S,\mu;\Lambda) = \sum_{\tilde{S}_1 \in \widetilde{\mathcal{P}}(\tilde{L})} \epsilon_{\tilde{S}_1}^{\tilde{G}}(\Lambda)\mathcal{M}(S,\mu;\Lambda,S_1).$$

C'est une variante de l'opérateur $\mathcal{M}_{M,F}^{G,T}(Z,\mathfrak{Y};P,\lambda;\Lambda)$ introduit dans le lemme 5.3.1. Ici, comme dans le cas des corps de nombres, on intègre les fonctions caractéristiques de cônes sur l'espace vectoriel, plutôt que de sommer sur le réseau (cf. définition 1.6.2). Les fonctions $\epsilon_{\tilde{S}_1}^{\tilde{G}}(\Lambda)$ sont définies via le choix d'une mesure de Haar sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}$, mais le produit

$$\mathrm{vol}(\mathcal{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}\backslash\mathfrak{a}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}})^{-1}\mathcal{M}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(S,\mu;\Lambda)$$

est indépendant de ce choix. Pour alléger l'écriture, posons (comme dans [25, section 14.1])

$$\mathcal{M}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(S,\mu) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{M}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(S,\mu;0).$$

Définition 14.3.1. On pose

$$\boldsymbol{A}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\sigma,\tilde{u},\mu;\nu,\Lambda) = \mathfrak{Sp}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\,\mathcal{M}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(S,\mu+\nu;\Lambda)\mathbf{M}_{S|\tilde{u}S}(\mu+\nu)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\tilde{u},f,\omega)\Big).$$

Fixons $\nu \in \mathcal{E}(\sigma)$, $\tilde{Z} \in \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ et $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\tilde{u}}(\nu)$. Considérons la fonction (introduite juste avant la proposition 14.2.3)

$$T \mapsto a_{\tilde{Z},\mu}(T) = \boldsymbol{A}_{\tilde{L}}^{T,\tilde{G}}(\tilde{Z};\sigma,\tilde{u},\mu;\nu)$$

sur $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$. D'après l'analogue tordu de la proposition 1.7.4, cette fonction appartient à PolExp. Pour tout réseau $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$, on peut écrire

$$a_{\tilde{Z},\mu}(T) = \sum_\tau e^{\langle\tau,T\rangle}p_{\mathcal{R},\tau}(a_{\tilde{Z},\mu},T) \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{R},$$

où la somme porte sur un sous-ensemble fini de caractères $\tau \in \widehat{\mathcal{R}}$. D'après l'analogue tordu de la proposition 1.7.4, la limite

$$\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(a_{\widetilde{Z},\mu}, T_0)$$

existe et est indépendante du réseau $\mathcal{R}$.

Lemme 14.3.2. *On a*

$$\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu} = \begin{cases} \mathrm{vol}\Big(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\backslash\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1} e^{\langle\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu),\widetilde{Z}\rangle}\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu,\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)) & \textit{si } \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)\in\widehat{\mathfrak{C}}_{\widetilde{G}}, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. La (G,M)-famille périodique $\boldsymbol{c}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu)$, introduite en section 14.1, est de la forme $\boldsymbol{c}(\sigma,\widetilde{u},\mu;\nu) = \boldsymbol{d}(\mathfrak{Y})$, pour une (G,M)-famille périodique $\boldsymbol{d}$ donnée par

$$\boldsymbol{d}(\Lambda,S_1) = \mathfrak{Sp}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\mathcal{M}(S,\mu+\nu;\Lambda,S_1)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\nu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big)$$

et

$$\boldsymbol{d}(\mathfrak{Y};\Lambda,S_1) = e^{\langle\Lambda,Y_{S_1}\rangle}\boldsymbol{d}(\Lambda,S_1).$$

On a donc

$$a_{\widetilde{Z},\mu}(T) = \boldsymbol{d}_{\widetilde{L},F}^{\widetilde{G},T}(\mathfrak{Y};\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)).$$

Rappelons que $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)$ est un élément de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$, et, plus précisément, un caractère de $\mathcal{C}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} = \mathcal{B}_{\widetilde{G}}\backslash\mathcal{A}_{\widetilde{L}}$. Le dual de Pontryagin $\widehat{\mathcal{C}}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$ s'insère dans la suite exacte courte

$$0\to\widehat{\mathfrak{C}}_{\widetilde{G}}\to\widehat{\mathcal{C}}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\to\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\to 0.$$

L'image de $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)$ dans $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$ est nulle si et seulement si $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)\in\widehat{\mathfrak{C}}_{\widetilde{G}}$. On déduit alors de la proposition 1.7.4 que

$$\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu} = \begin{cases} \mathrm{vol}\Big(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\backslash\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1} e^{\langle\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu),\widetilde{Z}\rangle}\boldsymbol{d}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{Y}+\mathfrak{T}_0;\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)) & \text{si } \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)\in\widehat{\mathfrak{C}}_{\widetilde{G}}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où, pour $\Lambda\in\widehat{\mathfrak{a}}_{\widetilde{L}}$ en dehors des murs,

$$\boldsymbol{d}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\mathfrak{Y}+\mathfrak{T}_0;\Lambda) = \sum_{\widetilde{P}\in\mathcal{P}(\widetilde{L})} e^{\langle\Lambda,Y_{\widetilde{P}}+[T_0]_{\widetilde{P}}\rangle}\epsilon_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}(\Lambda)\boldsymbol{d}(\Lambda,\widetilde{P}).$$

Puisque $Y_{\widetilde{P}}+[T_0]_{\widetilde{P}}$ est égal à l'image $T_{0,\widetilde{L}}$ de T_0 dans $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}$, on a

$$e^{\langle\Lambda,Y_{\widetilde{P}}+[T_0]_{\widetilde{P}}\rangle}\boldsymbol{d}(\Lambda,\widetilde{P}) = e^{\langle\Lambda,T_{0,\widetilde{L}}\rangle} \times\mathfrak{Sp}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu\mathcal{M}(S,\mu+\nu;\Lambda,\widetilde{P})\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu+\nu+\Lambda)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big).$$

Comme $T_{0,\widetilde{L}}$ appartient à $\mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}$, si $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu) \in \widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}$ alors $e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu), T_{0,\widetilde{L}}\rangle} = 1$ et, compte tenu de de la définition 14.3.1,

$$\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu} = \mathrm{vol}\Big(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} \backslash \mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1} e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu), \widetilde{Z}\rangle} \boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu, \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu)). \qquad \blacksquare$$

Définition 14.3.3. Introduisons les notations suivantes :

$$v_{\widetilde{L}} = \mathrm{vol}\Big(\mathcal{B}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} \backslash \mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big), \quad V_M(\widetilde{u}) = v_{\widetilde{L}}^{-1} |\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{L}}| |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1} |\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|^{-1}$$

et

$$\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu, 0) = \{\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu) \mid \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu) = 0\}.$$

L'ensemble $\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu, 0)$ est stable par translations par $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$ et muni de la mesure $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$-invariante induite par celle sur $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$. On pose

$$\boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}; \nu) = V_M(\widetilde{u}) \int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0)} \boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu)\, \mathrm{d}\mu$$

avec

$$\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu) = \boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu, 0),$$

c'est-à-dire,

$$\boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu) = \mathfrak{S}\mathfrak{p}_\sigma\Big(\mathbf{D}_\nu \mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S, \mu + \nu) \mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu + \nu) \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u}, f, \omega)\Big).$$

Enfin, on pose

$$\boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}) = \sum_{\nu \in \mathcal{E}(\sigma)} \boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}; \nu).$$

Proposition 14.3.4. *La fonction*

$$T \mapsto h(T) = \mathfrak{J}_M^{\widetilde{G},T}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u})$$

est dans PolExp *et pour tout réseau* $\mathcal{R}$ *de* $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{Q}}$*, on a l'égalité*

$$\lim_{k \to +\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(h, T_0) = \boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma, f, \omega, \widetilde{u}).$$

Démonstration. Rappelons que pour $\widetilde{Z} \in \mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$, la fonction $T \mapsto a_{\widetilde{Z},\mu}(T)$, introduite avant le lemme 14.3.2, appartient à PolExp et que $\boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu}$ en est le polynôme limite en $T = T_0$. Comme l'expression $a_{\widetilde{Z},\mu}(T)$ est lisse en μ lorsque μ varie dans le compact $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$, on en déduit que la fonction

$$h_{\widetilde{Z},\nu} : T \mapsto \int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)} a_{\widetilde{Z},\mu}(T)\, \mathrm{d}\mu$$

appartient, elle aussi, à PolExp. Le contrôle du terme d'erreur dans le passage à la limite (cf. proposition 1.7.4) montre qu'il est uniforme et on obtient que

$$\lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(h_{\widetilde{Z},\nu}, T_0) = \int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)} \lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(a_{\widetilde{Z},\mu}, T_0)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)} \boldsymbol{\alpha}_{\widetilde{Z},\mu}\,\mathrm{d}\mu.$$

La somme sur les $\widetilde{Z} \in \mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$ de l'expression ci-dessus étant finie, on peut permuter la somme et l'intégrale. Mais la somme sur $\widetilde{Z} \in \mathfrak{c}_{\widetilde{G}}$ des $e^{\langle \xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu), \widetilde{Z}\rangle}$ vaut $|\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}|$ si $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu) = 0$, et 0 sinon. On a donc montré que

$$\sum_{\widetilde{Z}\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}} \lim_{k\to+\infty} p_{\mathcal{R}_k,0}(h_{\widetilde{Z},\nu}, T_0)$$

est égal à

$$|\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}|\mathrm{vol}\Big(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} \backslash \mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1} \int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0)} \boldsymbol{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(\sigma, \widetilde{u}, \mu; \nu)\,\mathrm{d}\mu.$$

Compte tenu de la définition 14.3.3, on a

$$|\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{G}}|\mathrm{vol}\Big(\mathcal{A}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} \backslash \mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1} = |\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{L}}|\mathrm{vol}\Big(\mathcal{B}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}} \backslash \mathfrak{a}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}\Big)^{-1} = |\widehat{\mathfrak{c}}_{\widetilde{L}}| v_{\widetilde{L}}^{-1}.$$

D'où le lemme, puisque d'après la proposition 14.2.3, on a

$$h(T) = |\widehat{\mathfrak{c}}_M|^{-1}|\mathfrak{K}_{\widetilde{u}}|^{-1} \sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)} \sum_{\widetilde{Z}\in\mathfrak{c}_{\widetilde{G}}} h_{\widetilde{Z},\nu}(T). \qquad \blacksquare$$

14.4 Développement spectral fin

Soient $\nu \in \boldsymbol{\mu}_M$ et $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu)$ tels que $\xi_{\widetilde{u},\nu}(\mu) = 0$. Puisque $\nu = (\widetilde{u} - 1)\mu$ on a

$$\mathbf{D}_\nu = \mathbf{D}_{-\mu}\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}.$$

D'après l'équation fonctionnelle du lemme 5.2.2, on a

$$\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}\mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S, \widetilde{u}\mu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\widetilde{u}\mu) = \mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S, 0)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{D}_\nu \mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S, \mu + \nu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu + \nu)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u}, f, \omega) \tag{14.5}$$

est égale à

$$\mathbf{D}_{-\mu}\mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S, 0)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}\,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u}, f, \omega).$$

Puisque, d'après le lemme 7.2.3 on a

$$\mathbf{D}_{\widetilde{u}\mu}\,\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)=\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma\star\mu,0}(\widetilde{u},f,\omega)\mathbf{D}_{\mu},$$

l'expression (14.5) est encore égale à

$$\mathbf{D}_{\mu}^{-1}\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)\,\mathbf{D}_{\mu},$$

où l'on a posé

$$\boldsymbol{A}(\sigma,\widetilde{u},\mu)=\mathcal{M}_{L}^{\widetilde{G}}(S,\mu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega).$$

En observant que

$$\mathfrak{Sp}_{\sigma}\Big(\mathbf{D}_{\mu}^{-1}\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)\,\mathbf{D}_{\mu}\Big)=\mathfrak{Sp}_{\sigma\star\mu}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)),$$

l'expression de $\boldsymbol{J}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u})$, donnée dans la définition 14.3.3, peut donc encore s'écrire

$$\boldsymbol{J}_{M}^{\widetilde{G}}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u})=V_{M}(\widetilde{u})\sum_{\nu\in\mathcal{E}(\sigma)}\int_{\boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0)}\mathfrak{Sp}_{\sigma\star\mu}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0))\,\mathrm{d}\mu.$$

Lemme 14.4.1. *Pour que l'expression $\mathfrak{Sp}_{\sigma\star\mu}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0))$ soit non nulle, il faut que*

$$\widetilde{u}(\omega\otimes(\sigma\star\mu))\simeq\sigma\star\mu,\tag{14.6}$$

c'est-à-dire que $\sigma\star\mu$ se prolonge en une représentation de $(M\widetilde{u},\omega)$. Dans ce cas, on a

$$\mathfrak{Sp}_{\sigma\star\mu}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0))=\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)).$$

Démonstration. L'opérateur $\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu,\widetilde{u},0)$ envoie l'espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\sigma\star\mu)$ dans l'espace $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{X}_S,\widetilde{u}(\omega\otimes(\sigma\star\mu)))$ et pour que ces deux espaces soient d'intersection non nulle, il faut qu'ils soient égaux, c'est-à-dire que la condition (14.6) soit vérifiée. ■

D'après le lemme 14.4.1, la contribution de $\boldsymbol{\sigma}$ (l'orbite de σ sous torsion par $\boldsymbol{\mu}_M$) est nulle, sauf peut-être si

$$\boldsymbol{\sigma}\in\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M;\widetilde{u},\omega)\subset\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M),$$

où $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M;\widetilde{u},\omega)$ est le sous-ensemble des $\boldsymbol{\sigma}$ ayant un représentant σ vérifiant la condition

$$\widetilde{u}(\omega\otimes\sigma)\simeq\sigma.\tag{14.7}$$

On supposera désormais que σ est un tel représentant[1]. Considérons l'ensemble

$$\mathfrak{L}(\sigma,\widetilde{u}) \overset{\text{déf}}{=} \{\lambda \in \boldsymbol{\mu}_M \mid \widetilde{u}(\omega\otimes(\sigma\star\lambda)) \simeq \sigma\star\lambda\}$$

qui, compte tenu de (14.7), est égal à

$$\{\lambda \in \boldsymbol{\mu}_M \mid (\widetilde{u}-1)\lambda \in \mathrm{Stab}_M(\sigma)\}\,.$$

On observe que $\mathrm{Stab}_M(\sigma) \subset \mathfrak{E}(\sigma)$. On a donc une injection

$$\mathfrak{L}(\sigma,\widetilde{u}) \to \bigcup_{\nu\in\mathfrak{E}(\sigma)} \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0).$$

On note $\mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})$ l'ensemble fini quotient de $\mathfrak{L}(\sigma,\widetilde{u})$ par l'action de $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$. En choisissant des représentants λ dans $\mathfrak{L}(\sigma,\widetilde{u}) \subset \boldsymbol{\mu}_M$ pour les éléments $\dot{\lambda} \in \mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})$, on définit une injection

$$\mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u}) \times \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}} \to \bigcup_{\nu\in\mathfrak{E}(\sigma)} \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0) \quad \text{par} \quad (\dot{\lambda},\mu) \mapsto \lambda+\mu.$$

Dans la définition 14.3.3 de $\boldsymbol{J}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u})$ et compte tenu du lemme 14.4.1, on peut donc remplacer la somme sur les $\nu \in \mathfrak{E}(\sigma)$ précédée de l'intégrale sur les $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{M,\widetilde{u}}(\nu,0)$ par la somme sur les $\dot{\lambda} \in \mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})$ précédée de l'intégrale sur $\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$:

$$\boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u}) = V_M(\widetilde{u}) \sum_{\dot{\lambda}\in\mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})} \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}} \mathrm{trace}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\lambda,\widetilde{u},\mu))\,\mathrm{d}\mu. \tag{14.8}$$

L'expression ne dépend pas du choix des relèvements puisque, d'après (14.5) et le lemme 7.2.3, pour $\mu,\ \mu' \in \boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}$, on a

$$\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu',\widetilde{u},\mu) = \mathbf{D}_{\mu'}\boldsymbol{A}(\sigma,\widetilde{u},\mu+\mu')\mathbf{D}_{\mu'}^{-1}$$

et donc

$$\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}(\sigma\star\mu',\widetilde{u},\mu)) = \mathrm{trace}(\boldsymbol{A}(\sigma,\widetilde{u},\mu+\mu')).$$

Pour chaque classe $\boldsymbol{\sigma}$ on a choisi un représentant σ vérifiant la condition (14.7). D'après (14.8) et compte tenu de la définition 14.3.1 on a

$$\boldsymbol{J}_M^{\widetilde{G}}(\sigma,f,\omega,\widetilde{u}) = V_M(\widetilde{u}) \sum_{\dot{\lambda}\in\mathfrak{l}(\sigma,\widetilde{u})} \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{L}}} \mathrm{trace}\Big(\mathcal{M}_{\widetilde{L}}^{\widetilde{G}}(S,\mu)\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(\mu)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma\star\lambda,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big)\,\mathrm{d}\mu.$$

[1] Observons que l'existence d'un tel représentant exige que le caractère ω soit trivial sur le groupe $A_{M\widetilde{u}}(\mathbb{A}) = A_{\widetilde{L}}(\mathbb{A})$. En général, il n'est pas possible de réaliser la condition (14.7) pour tous les $\widetilde{u}$ simultanément.

Cette expression ne dépend pas du choix de $S \in \mathcal{P}(M)$, ni du choix du représentant σ de $\boldsymbol{\sigma}$.

On rappelle que $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M; \tilde{u}, \omega)$ est l'ensemble des classes modulo torsion par les éléments de $\boldsymbol{\mu}_M$ des (classes d'isomorphisme de) représentations σ vérifiant la condition (14.5). Notons $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M\tilde{u}, \omega)$ l'ensemble des classes modulo torsion par les éléments de $\boldsymbol{\mu}_{\tilde{L}}$ des (classes d'isomorphisme de) représentations verifiant (14.5). On pose

$$\boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{M,\tilde{u}}(f, \omega) = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M; \tilde{u}, \omega)} \widehat{c}_M(\sigma) \boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_M(\sigma, f, \omega, \tilde{u})$$

et

$$\widehat{c}_{\tilde{L}}(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{|\widehat{\mathbb{C}}_{\tilde{L}}|}{|\mathrm{Stab}_{\tilde{L}}(\sigma)|}.$$

Proposition 14.4.2. *L'expression $\boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{M,\tilde{u}}(f, \omega)$ se réécrit*

$$\boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{M,\tilde{u}}(f, \omega) = v_{\tilde{L}}^{-1} \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M\tilde{u}, \omega)} \widehat{c}_{\tilde{L}}(\sigma) |\det(\tilde{u} - 1|\mathfrak{a}^{\tilde{L}}_M)|^{-1}$$
$$\times \int_{\boldsymbol{\mu}_{\tilde{L}}} \mathrm{trace}\Big(\mathcal{M}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(S, \mu) \mathbf{M}_{S|\tilde{u}S}(0) \boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\tilde{u}, f, \omega)\Big)\, d\mu.$$

Démonstration. L'application naturelle

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M\tilde{u}, \omega) \to \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M; \tilde{u}, \omega)$$

est surjective. On peut donc remplacer, dans l'expression $\boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{M,\tilde{u}}(f, \omega)$, la somme sur les $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Pi}(M; \tilde{u}, \omega)$ suivie de la somme sur les $\lambda \in \mathfrak{I}(\sigma, \tilde{u})$ par une simple somme sur les $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Pi}(M\tilde{u}, \omega)$ multipliée par le cardinal de l'image dans $\boldsymbol{\mu}^{\tilde{L}}_M$ du stabilisateur $\mathrm{Stab}_M(\sigma)$. Cette image est le groupe quotient

$$\mathrm{Stab}_M(\sigma)/\mathrm{Stab}_{\tilde{L}}(\sigma) \quad \text{où} \quad \mathrm{Stab}_{\tilde{L}}(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Stab}_M(\sigma) \cap \boldsymbol{\mu}_{\tilde{L}}.$$

Compte tenu de la définition 14.3.3 et du lemme 14.2.1, on a

$$V_M(\tilde{u}) \frac{|\mathrm{Stab}_M(\sigma)|}{|\mathrm{Stab}_{\tilde{L}}(\sigma)|} = v_{\tilde{L}}^{-1} \widehat{c}_{\tilde{L}}(\sigma) \widehat{c}_M(\sigma)^{-1} |\det(\tilde{u} - 1|\mathfrak{a}^{\tilde{L}}_M)|^{-1}.$$

On observe enfin que pour $\mu \in \boldsymbol{\mu}_{\tilde{L}}$, on a

$$\mathbf{M}_{S|\tilde{u}S}(\mu) = \mathbf{M}_{S|\tilde{u}S}(0). \qquad \blacksquare$$

Rappelons que $\mathbf{W}^{\tilde{G}}(\mathfrak{a}_M, \mathfrak{a}_M)$ est l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}_M$ des éléments $\tilde{u} \in \widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^{\tilde{G}}$ tels que $\tilde{u}(\mathfrak{a}_M) = \mathfrak{a}_M$. C'est aussi le quotient

$$\mathbf{W}^{\tilde{G}}(M) = N^{\widetilde{\mathbf{W}}}(M)/\mathbf{W}^M$$

de l'ensemble $N^{\widetilde{\mathbf{W}}}(M)$ des $\tilde{u} \in \widetilde{\mathbf{W}}$ tels que $\tilde{u}(M) = M$ par le groupe de Weyl de M: $\mathbf{W}^M = N^M(M_0)/M_0$.

Proposition 14.4.3. *La valeur en T_0 du polynôme limite introduite dans le théorème 11.3.1 vérifie l'identité*

$$\boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{\mathrm{spec}}(f,\omega) = \sum_{M \in \mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\tilde{u} \in \mathbf{W}^{\tilde{G}}(M)} \boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{M,\tilde{u}}(f,\omega).$$

Démonstration. Par passage à la limite, la proposition 14.2.4 fournit l'identité

$$\boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{\mathrm{spec}}(f,\omega) = \sum_{M \in \mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G} \frac{1}{w^G(M)} \sum_{\sigma \in \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{disc}}(M)} \widehat{c}_M(\sigma) \sum_{\tilde{u} \in \mathbf{W}^{\tilde{G}}(M)} \boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_M(\sigma, f, \omega, \tilde{u}),$$

puis on invoque la proposition 14.4.2. ∎

Pour $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{L}}$ et $M \in \mathcal{L}^L$, un élément $\tilde{u} \in \mathbf{W}^{\tilde{L}}(M)$ est dit *régulier* si l'espace de Levi (dans $\tilde{L}$), qui lui est associé, est lui-même $\tilde{L}$. Ceci équivaut à demander que

$$\det(\tilde{u} - 1|\mathfrak{a}^L_M) \neq 0.$$

On note $\boldsymbol{W}^{\tilde{L}}(M)_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des $\tilde{u} \in \mathbf{W}^{\tilde{L}}(M)$ qui sont réguliers. Observons que pour $\tilde{u} \in \boldsymbol{W}^{\tilde{L}}(M)_{\mathrm{reg}}$, $\tilde{L}$ est le sous-espace de Levi (dans $\tilde{G}$) associé à $\tilde{u}$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace de Levi contenant $M\tilde{u}$; par conséquent, d'après le lemme 14.2.1, on a aussi

$$\det(\tilde{u} - 1|\mathfrak{a}^{\tilde{L}}_M) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}^{\tilde{L}}_M = (\tilde{u} - 1)\mathfrak{a}_M,$$

où $\mathfrak{a}_{\tilde{L}}$ est le sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ formé des points fixes sous $\tilde{u}$, et $\mathfrak{a}^{\tilde{L}}_M$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\tilde{L}}$ dans $\mathfrak{a}_M$.

L'expression $J^{\tilde{G}}_{M,\tilde{u}}(f,\omega)$ a déjà été définie pour $M \in \mathcal{L}$ et $\tilde{u} \in \mathbf{W}^{\tilde{G}}(M)$. Pour $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{L}}$, posons

$$\boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(f,\omega) = \sum_{M \in \mathcal{L}^L} \frac{|\mathbf{W}^M|}{|\mathbf{W}^L|} \sum_{\tilde{u} \in \mathbf{W}^{\tilde{L}}(M)_{\mathrm{reg}}} \boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{M,\tilde{u}}(f,\omega).$$

Notons $\widetilde{\mathbf{W}}^L = N_L(\tilde{M}_0)/M_0$ le quotient du normalisateur de $\tilde{M}_0$ dans L par M_0. Avec ces notations, on a la forme finale du développement spectral :

Théorème 14.4.4. *On a*

$$\boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{\mathrm{spec}}(f,\omega) = \sum_{\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{L}}} \frac{|\widetilde{\mathbf{W}}^L|}{|\widetilde{\mathbf{W}}^G|} \boldsymbol{J}^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(f,\omega).$$

Démonstration. Pour tout $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)$ il existe un $\widetilde{L}$ tel que $\widetilde{u}$ appartienne à $W^{\widetilde{L}}(M)_{\text{reg}}$ et $\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega)$ est donné par la proposition 14.4.2. On invoque enfin la proposition 14.4.3. ∎

14.5 Partie discrète modulo le centre

Pour $M \in \mathcal{L}$, on s'intéresse à la partie discrète (modulo le centre), c'est-à-dire aux contributions $\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega)$ avec $\widetilde{L} = \widetilde{G}$.

On pose

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\text{disc}}(f,\omega) = \sum_{\widetilde{u}\in\mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)_{\text{reg}}} \boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega).$$

Pour $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)_{\text{reg}}$, on a

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega) = \sum_{\sigma\in\boldsymbol{\Pi}_{\text{disc}}(M\widetilde{u},\omega)} \widehat{c}_{\widetilde{G}}(\sigma)|\det(\widetilde{u}-1|\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_M)|^{-1} \times \int_{\boldsymbol{\mu}_{\widetilde{G}}} \operatorname{trace}\Big(\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,\mu}(\widetilde{u},f,\omega)\Big)\,\mathrm{d}\mu.$$

On souhaite permuter la somme et l'intégrale dans l'expression $\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega)$ ci-dessus. On commence par regrouper les termes suivant le groupe $\Xi(\widetilde{G})$ des caractères unitaires automorphes de $A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})$. On le munit d'une mesure de Haar suivant les conventions 1.3.1 ; elle vérifie $\operatorname{vol}(\widehat{\mathcal{B}}_{\widetilde{G}}) = 1$. Pour $\xi \in \Xi(\widetilde{G})$, on note

$$\Pi_{\text{disc}}(M\widetilde{u},\omega)_\xi,$$

le sous-ensemble de $\Pi_{\text{disc}}(M\widetilde{u},\omega)$ formé de des σ tels que $\xi_\sigma|_{A_{\widetilde{G}}(\mathbb{A})} = \xi$, et on pose

$$\operatorname{trace}\Big(\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\boldsymbol{\rho}_{S,\text{disc},\xi}(\widetilde{u},f,\omega)\Big) = \sum_{\sigma\in\Pi_{\text{disc}}(M\widetilde{u},\omega)_\xi} \operatorname{trace}\Big(\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\boldsymbol{\rho}_{S,\sigma,0}(\widetilde{u},f,\omega)\Big).$$

Ici encore, l'expression est indépendante du choix de $S \in \mathcal{P}(M)$. Posons

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega,\xi) = |\det(\widetilde{u}-1;\mathfrak{a}^{G}_M)|^{-1}\operatorname{trace}\Big(\mathbf{M}_{S|\widetilde{u}S}(0)\boldsymbol{\rho}_{S,\text{disc},\xi}(\widetilde{u},f,\omega)\Big).$$

Puisque

$$|\det(\widetilde{u}-1;\mathfrak{a}^{\widetilde{G}}_M)| = j(\widetilde{G})\,|\det(\widetilde{u}-1;\mathfrak{a}^{G}_M)|,$$

on obtient le lemme suivant.

Lemme 14.5.1. *Pour $M \in \mathcal{L}$ et $\widetilde{u} \in \mathbf{W}^{\widetilde{G}}(M)_{\text{reg}}$, on a*

$$\boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega) = j(\widetilde{G})^{-1}\int_{\Xi(\widetilde{G})} \boldsymbol{J}^{\widetilde{G}}_{M,\widetilde{u}}(f,\omega,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Rappelons qu'on a noté $\Xi(G,\theta,\omega)$ le sous-ensemble de $\Xi(G)$ formé des caractères ξ tels que, en notant ω_{A_G} la restriction de ω à $A_G(\mathbb{A})$, on ait

$$\xi\circ\theta=\omega_{A_G}\otimes\xi.$$

Si $\Xi(G,\theta,\omega)$ est non vide, on le munit, comme en section 8.1, de la mesure $\Xi(G)^\theta$-invariante déduite de la mesure de Haar sur $\Xi(G)^\theta$, telle que $\mathrm{vol}(\widehat{\mathcal{B}}_G^\theta)=1$.

Lemme 14.5.2. *Pour $M\in\mathcal{L}$ et $\tilde{u}\in\mathbf{W}^{\tilde{G}}(M)_{\mathrm{reg}}$, on a*

$$\boldsymbol{J}_{M,\tilde{u}}^{\tilde{G}}(f,\omega)=\int_{\Xi(G,\theta,\omega)}\boldsymbol{J}_{M,\tilde{u}}^{\tilde{G}}(f,\omega,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Démonstration. Cela résulte des lemmes 14.5.1 et 8.1.5. ■

On peut reformuler ce qui précède sous la forme de la proposition suivante.

Proposition 14.5.3. *La partie « discrète modulo le centre » de la formule des traces est donnée par*

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{disc}}^{\tilde{G}}(f,\omega)=\sum_{M\in\mathcal{L}^G/\mathbf{W}^G}\frac{1}{w^G(M)}\boldsymbol{J}_{M,\mathrm{disc}}^{\tilde{G}}(f,\omega)$$

avec

$$\boldsymbol{J}_{M,\mathrm{disc}}^{\tilde{G}}(f,\omega)=\sum_{\tilde{u}\in\mathbf{W}^{\tilde{G}}(M)_{\mathrm{reg}}}\int_{\Xi(G,\theta,\omega)}\boldsymbol{J}_{M,\tilde{u}}^{\tilde{G}}(f,\omega,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Cela s'écrit aussi

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{disc}}^{\tilde{G}}(f,\omega)=\sum_{M\in\mathcal{L}^G}\frac{|\mathbf{W}^M|}{|\mathbf{W}^G|}\boldsymbol{J}_{M,\mathrm{disc}}^{\tilde{G}}(f,\omega).$$

En particulier, pour $M=G$, on a

$$\boldsymbol{J}_{G,\mathrm{disc}}^{\tilde{G}}(f,\omega)=\int_{\Xi(G,\theta,\omega)}\mathrm{trace}\Big(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}(f,\omega)|L^2_{\mathrm{disc}}(\boldsymbol{X}_G)_\xi\Big)\,\mathrm{d}\xi$$

et on retrouve la formule de la proposition 8.1.4 si G_{der} est anisotrope. On observera que $\boldsymbol{J}_{\mathrm{disc}}^{\tilde{G}}(f,\omega)$ n'est autre que $\boldsymbol{J}_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}(f,\omega)$.

Annexe

Erratum pour [25]

Dans cette annexe, les notations sont celles de [25].

Err (i) – Il a été observé par P.-H. Chaudouard que la preuve de [25, lemme 1.8.1], pages 22–23, n'est valable que si les sous-espaces $\mathfrak{a}_Q^R$ et $\mathfrak{a}_S^R$ sont orthogonaux. Un argument différent est donné ci-dessous. On commence par établir un résultat auxiliaire. Soit V un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie. On note $(\, ,\,)$ le produit scalaire, $\|\ \|$ la norme et V^* l'espace dual (que l'on peut identifier à V). Soit Δ une base de V^* (que l'on ne suppose pas nécessairement obtuse) et soit Δ^* la base de V^* formée des $\xi_\alpha \in V^*$ tels que $(\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$, où $\delta_{\alpha,\beta}$ est le symbole de Kronecker. En d'autres termes, Δ^* est la base duale de Δ et $\alpha \mapsto \xi_\alpha$ est la bijection naturelle entre Δ et Δ^*.

Lemme A.1. *Soit $X \in V$. On note $C(\Delta, X)$ l'ensemble des $H \in V$ tels que pour tout $\alpha \in \Delta$ on ait*

$$\alpha(H) \geq 0 \quad \textit{et} \quad \xi_\alpha(H - X) \leq 0.$$

Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|H\| \leq c\|X\|.$$

Démonstration. Pour $H \in C(\Delta, X)$ on a

$$(H, H) = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(H)\xi_\alpha(H) \leq \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(H)\xi_\alpha(X),$$

ce qui implique l'existence d'une constante $c > 0$, telle que

$$\|H\|^2 \leq c\|H\|\,\|X\| \qquad \text{et donc} \qquad \|H\| \leq c\|X\|. \qquad \blacksquare$$

Corollaire A.2. *L'ensemble $C(\Delta, X)$ est compact et si $X = 0$, alors $C(\Delta, X)$ est réduit à* $\{0\}$.

On considère maintenant trois sous-groupes paraboliques $P \subset Q \subset R$ dans G. Soit $V = \mathfrak{a}_P^R$. On dispose de la base Δ_P^R de $V^* = \mathfrak{a}_P^{R,*}$. On note encore $\alpha \mapsto \xi_\alpha$ la bijection naturelle entre Δ_P^R et sa base duale[1]. D'après [25, lemme 1.2.2], il existe

[1] La base $(\Delta_P^R)^*$ formée des ξ_α n'est pas en général identique à la base $\hat{\Delta}_P^R$, formée des ϖ_α. En effet, les ξ_α et ϖ_α sont colinéaires avec coefficients de proportionnalité positifs, mais non nécessairement égaux à 1.

un sous-groupe parabolique S tel que Δ_P^R soit l'union disjointe de Δ_P^Q et Δ_P^S. Soit $X \in V$. On note $C(P, Q, R, X)$ l'ensemble des $H \in V$ tels que

$$\alpha(H) > 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Delta_P^Q, \quad \alpha(H) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Delta_P^S$$

et

$$\xi_\alpha(H - X) > 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Delta_P^S, \quad \xi_\alpha(H - X) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Delta_P^Q.$$

Le lemme 1.8.1 de [25] affirme que nous avons le résultat suivant.

Lemme A.3. *On a les trois assertions suivantes :*

(i) *L'ensemble $C(P, Q, R, X)$ est relativement compact et est contenu dans une boule de rayon $c\|X\|$, pour une constante $c > 0$.*

(ii) *$C(P, Q, R, 0)$ est vide, sauf si $P = R$.*

(iii) *Si X est dans l'adhérence la chambre de Weyl positive, i.e. si $\alpha(X) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^R$, alors $C(P, Q, R, X)$ est vide si $Q \subsetneq R$.*

Démonstration. On observe que l'adhérence de $C(P, Q, R, X)$ est un fermé dans $C(\Delta, X) \subset V = \mathfrak{a}_P^R$, où Δ est la base de V formée des $\alpha \in \Delta_P^Q$ et des $-\alpha$ pour $\alpha \in \Delta_P^S$. L'assertion (i) résulte du lemme A.1. Lorsque $X = 0$, il résulte du corollaire A.2 que $C(P, Q, R, 0) \subset \{0\}$ et si $P \neq R$ les inégalités strictes excluent $H = 0$. Pour établir (iii), on observe que

$$\alpha(H) = \alpha(X) + \sum_{\beta \in \Delta_P^Q} (\alpha, \beta)\xi_\beta(H - X) + \sum_{\beta \in \Delta_P^S} (\alpha, \beta)\xi_\beta(H - X).$$

Considérons $H \in C(P, Q, R, X)$, $\alpha \in \Delta_P^S$ et X dans l'adhérence la chambre de Weyl positive. Comme Δ_P^R est une base obtuse, on a

$$\alpha(H) \leq 0, \quad \alpha(X) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\beta \in \Delta_P^Q} (\alpha, \beta)\xi_\beta(H - X) \geq 0,$$

ce qui implique

$$\sum_{\beta \in \Delta_P^S} (\alpha, \beta)\langle \xi_\beta, H - X \rangle \leq 0.$$

Pour toute famille de scalaires positifs $\{c_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta_P^S\}$ on a donc

$$\sum_{\alpha \in \Delta_P^S} (\eta, \alpha)\xi_\alpha(H - X) \leq 0 \quad \text{avec} \quad \eta = \sum_{\alpha \in \Delta_P^S} c_\alpha \alpha.$$

Les restrictions $\overline{\xi}_\alpha$ des ξ_α au sous-espace $\mathfrak{a}_P^S \subset \mathfrak{a}_P^R$ forment la base duale de Δ_P^S, qui est aigüe puisque Δ_P^S est obtuse [25, lemme 1.2.5]. On choisit

$$\eta = \sum_{\alpha \in \Delta_P^S} \overline{\xi}_\alpha, \quad \text{c'est-à-dire} \quad c_\alpha = \sum_{\beta \in \Delta_P^S} (\overline{\xi}_\alpha, \overline{\xi}_\beta) > 0.$$

Dans ce cas, $(\eta, \alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^S$, ce qui fournit l'inégalité

$$\sum_{\alpha \in \Delta_P^S} \xi_\alpha(H - X) \leq 0.$$

Comme $\xi_\alpha(H - X) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^S$, c'est une contradiction si Δ_P^S est non vide. ■

Err (ii) – Dans l'énoncé du corollaire 3.6.7 de [25], page 74, lire $n, n' \in N_0(\mathbb{A}_F)$.

Err (iii) – Dans l'énoncé de [25, lemme 4.2.2], page 86 apparaît un signe $(-1)^{a_Q - a_G}$ qui est erroné, il faut le supprimer. L'erreur est engendrée par une faute de frappe dans la preuve : dans la formule (1) en haut de la page 87 on doit lire $(-1)^{a_R - a_Q}$ au lieu de $(-1)^{a_R - a_G}$.

Err (iv) – Il a été observé par Delorme que dans la proposition 4.3.3 de [25] il faut ajouter une condition sur T. Non seulement T doit être « régulier », mais il doit être « loin des murs ». De fait, il est supposé implicitement que $\mathbf{d}_{P_0}(T) > 0$, mais il faut, de plus, fixer une constante c (positive assez grande) et se limiter à des T vérifiant

$$\|T\| \leq c\, \mathbf{d}_{P_0}(T),$$

ou, ce qui revient au même, imposer (pour une autre constante)

$$\langle \alpha, T \rangle \leq c \langle \beta, T \rangle$$

pour tous les α et $\beta \in \Delta$. L'argument qui suit, corrigeant la preuve de [25, proposition 4.3.3], est emprunté à un message de Waldspurger à Delorme.

Démonstration. On reprend la preuve et les notations de la proposition [25, proposition 4.3.2]. On doit majorer

$$\|x\|^B |A_{Q,R}(x)|$$

pour $Q \subsetneq R$. L'expression $A_{Q,R}(x)$ est donnée par une somme sur $\xi \in Q(F)\backslash G(F)$, mais pour x fixé, il y a au plus un ξ modulo $Q(F)$, tel que

$$F_{P_0}^Q(\xi x, T)\sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(\xi x - T)) = 1.$$

Quitte à remplacer x par ξx, on peut supposer

$$F_{P_0}^{Q}(x,T)=1, \tag{A.1}$$

$$\sigma_Q^R(\mathbf{H}_0(x)-T)=1. \tag{A.2}$$

D'après [25, lemme 3.6.2], on peut aussi supposer $x=n_1ak$ avec $n_1\in N_Q(\mathbb{A}_F)$, $a\in\mathfrak{A}_0^G$ et $k\in\Omega$ un compact (qui ne dépend que du choix du sous-groupe parabolique Q). Pour les majorations, on peut aussi bien supposer $k=1$. On impose aussi que n_1 est dans un compact, ce que l'on peut assurer en le multipliant à gauche par un élément de $N_Q(F)$. D'après [25, lemme 4.3.1], pour tout entier $r\geq 1$, il existe un opérateur différentiel $X_{Q,R}$ de degré r, qui ne dépend que de Q, R, r, tel que

$$|A_{Q,R}(x)|\leq\sup_{n_1'\in N_Q(\mathbb{A}_F)}|\boldsymbol{\rho}(\mathrm{Ad}(a^{-1})X_{Q,R})\varphi(n_1'a)|.$$

L'opérateur $X_{Q,R}$ est de la forme $X_{Q,R}=\sum_m Z_m$ avec

$$\mathrm{Ad}(e^{H_1})Z_m=e^{\lambda_m(H_1)}Z_m\quad\text{pour}\quad H_1\in\mathfrak{a}_Q^R,$$

où λ_m est une combinaison linéaire à coefficients entiers $\geq r$ des racines dans Δ_Q^R. On en déduit bien une majoration

$$|A_{Q,R}(x)|\ll\sup_{n_1',m}e^{-r\sum_{\alpha\in\Delta_Q^R}\langle\alpha,\mathbf{H}_0(a)\rangle}|\boldsymbol{\rho}(Z_m)\varphi(n_1'a)|,$$

où les Z_m ne dépendent que de Q, R, r. D'où

$$|x|^B|A_{Q,R}(x)|\ll e^{C(a)}\sup_{n_1',m}|\boldsymbol{\rho}(Z_m)\varphi(n_1'a)|\,|x|^{-A}, \tag{A.3}$$

où l'on a posé

$$C(a)=c(B+A)\|H_0(a)\|-r\sum_{\alpha\in\Delta_Q^R}\langle\alpha,H_0(a)\rangle,$$

c étant une constante telle que $|a|\leq e^{c\|H_0(a)\|}$. La proposition 4.3.3 résulte de (A.3), à condition de prouver que

$$C(a)\leq -A\cdot\mathbf{d}_{P_0}(T).$$

Écrivons

$$H_0(a)=H_Q+H_Q^R+H_R$$

avec $H_Q\in\mathfrak{A}_Q$, $H_Q^R\in\mathfrak{A}_Q^R$ et $H_R\in\mathfrak{A}_R$. La condition (A.1) impose $\|H_Q\|\ll\|T\|$. La condition (A.2) impose (d'après [25, lemme 2.11.6]) que

$$\|H_R-T_R\|\ll\|H_Q^R-T_Q^R\|,$$

avec des définitions évidentes de T_R et T_Q^R. D'où $\|H_R\| \ll \|H_Q\| + \|T\|$. Elle impose aussi que $\langle \alpha, H_Q^R - T_Q \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_Q^R$. On en déduit

$$C(a) \leq c_1(A+B)\|H_Q^R\| + c_2(A+B)\|T\| - \frac{r}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_Q^R} \langle \alpha, H_Q + T_Q \rangle,$$

où c_1, c_2 sont des constantes positives qui ne dépendent de rien. En choisissant $r \geq c_3(A+B)$ pour une constante c_3 convenable, on a

$$c_1(A+B)\|H_Q\| - \sum_{\alpha \in \Delta_Q^R} \langle \alpha, H_Q \rangle \leq 0.$$

Pour $\alpha \in \Delta_Q^R$, soit $\beta \in \Delta$ se projetant sur α. On sait que α est la somme de β et d'une combinaison linéaire des $\gamma \in \Delta_Q$ à coefficients positifs ou nuls. Donc

$$\langle \alpha, T_Q \rangle \geq \langle \beta, T \rangle \geq \mathbf{d}_{P_0}(T).$$

Alors

$$C(a) \leq c_2(A+B)\|T\| - \mid \Delta_Q^R \mid \frac{r}{2} \mathbf{d}_{P_0}(T).$$

Si on impose, comme dit plus haut, une condition $\|T\| \leq c\,\mathbf{d}_{P_0}(T)$, alors pour $r \geq c4(2A+B)$, on a bien

$$C(a) \leq -A \cdot \mathbf{d}_{P_0}(T). \qquad \blacksquare$$

Err (v) – La formule pour le produit scalaire $\langle \Phi, \Psi \rangle_P$, en bas de la page 93, donnée par une intégrale sur $\mathbf{X}_P = \mathfrak{A}_P P(F) N_P(\mathbb{A}_F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$ n'a pas de sens si $P \neq G$. En effet, le groupe $\mathfrak{A}_P P(F) N_P(\mathbb{A}_F)$ n'est pas unimodulaire et il n'y a pas de mesure $G(\mathbb{A}_F)$-invariante à droite sur $\mathbf{X}_P$ (cf. section 5.1). Il convient de poser

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_P = \int_{\mathbf{K}} \int_{\mathbf{X}_M} \Phi(mk) \overline{\Psi(mk)} \,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k.$$

En revanche, sur $\mathbf{X}_{P,G} = \mathfrak{A}_G P(F) N_P(\mathbb{A}_F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$, on dispose de la mesure quotient et on a la formule d'intégration

$$\int_{\mathbf{X}_{P,G}} e^{\langle 2\rho_P, \mathbf{H}_P(x) \rangle} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{K}} \int_{\mathbf{X}_{M,G}} \phi(mk)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k,$$

qui est utilisée dans la preuve du théorème 5.4.2 de [25].

Err (vi) – Page 104. Dans la définition de l'opérateur $\boldsymbol{\rho}_{P,\sigma,\mu}(\delta, y, \omega)$, il manque le caractère ω dans la définition de l'espace d'arrivée.

Err (vii) – Page 106, ligne 16, il faut lire

$$K_{\widetilde{G}}(f,\omega;x,y)=\sum_i\int_{\mathbf{X}_G}K_{\widetilde{G}}(g_i,\omega;x,z)K^*_{G}(\omega h_i;z,y)\,\mathrm{d}z.$$

Err (viii) – Page 111. Dans l'énoncé de la proposition 7.2.2 de [25] il faut prendre pour K_1 et K_2 des noyaux sur $\boldsymbol{X}_{\theta(P),G}\times\boldsymbol{X}_{P,G}$ et sur $\mathbf{X}_{P,G}\times\mathbf{X}_{P,G}$ et remplacer les intégrales sur $\mathbf{X}_P$ par des intégrales sur $\mathbf{X}_{P,G}$.

Err (ix) – Page 112. Il faut remplacer $\mathcal{B}^P(\sigma)$ par $\mathcal{B}^S(\sigma)$ dans la définition de H_σ : ici M est un sous-groupe de Levi de S avec $S\subset P$. Cette erreur, due à un copier-coller intempestif, s'est propagée dans toute la suite de [25].

Err (x) – Page 126, ligne 2. Il faut remplacer $\mathfrak{n}(\mathbb{A}_F)$ par $\mathfrak{n}_P(\mathbb{A}_F)$, où $\mathfrak{n}_P$ est l'algèbre de Lie de $N=N_P$ (rappel : on a noté $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N_{Q^+}).

Err (xi) – Page 128, ligne −15. La définition de $j_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x)$ n'a pas de sens. Il faut la remplacer par

$$j_{\widetilde{P},\mathfrak{o}}(x)=\sum_{\delta\in\mathfrak{o}\cap\widetilde{M}_P(F)}\int_{N(\delta,\mathbb{A}_F)}\omega(x)f^1(x^{-1}\delta nx)\,\mathrm{d}n.$$

De même, dans l'énoncé du lemme 9.2.2, page 129, il faut remplacer la première expression par

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)}\sum_{\delta\in\mathfrak{o}\cap\widetilde{M}_P(F)}\int_{N(\delta,\mathbb{A}_F)}\phi(n^{-1}\delta n_1 n)\,\mathrm{d}n_1\,\mathrm{d}n.$$

Err (xii) – Page 128, ligne −13. Lire : *la partie quasi semi-simple δ_s de δ.*

Err (xiii) – Page 129. Dans la preuve du lemme 9.2.2, il convient de dire (même si c'est implicite) que l'application du lemme 9.2.1 de [25] induit une application surjective sur les groupes des points adéliques.

Err (xiv) – Page 130, ligne −10. Lire $s(\delta)$ au lieu de δ_s.

Err (xv) – Page 130, ligne −11. Lire $I_{s(\delta)}(F)$ au lieu de I_{δ_s}.

Err (xvi) – Page 130, ligne −6. Pour une classe de conjugaison quasi semi-simple $\mathfrak{c}$, on doit préciser que $k^T_{\mathfrak{c}}$ est définie en remplaçant, dans la définition de $k^T_{\mathfrak{o}}$ [25, section 9.2], la somme sur $P\supset P_0$ par la somme sur les $P\supset P_0$, tels que $\widetilde{M}_P$ contienne un conjugué de $\widetilde{M}_\delta$ et l'ensemble $\mathfrak{o}$ par l'orbite $\mathfrak{c}$.

Err (xvii) – Page 150. Dans la formule pour $\hat{\tau}_{\widetilde{P}}(H-X)$, il faut sommer sur les $\widetilde{Q}\in\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{st}}$ tels que $\widetilde{P}\subset\widetilde{Q}$, i.e. prendre $\widetilde{R}=\widetilde{G}$.

Err (xviii) – Page 168, ligne 2. Lire : *et sera à l'œuvre...*

Err (xix) – Page 182. Dans l'énoncé du point (ii) du lemme 13.1.1, il faut lire : *Pour tout* $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$, etc.

Err (xx) – Pages 183–186 : l'indice Q_0 devrait être en exposant dans les termes à droite des équations (2), page 183, (7), page 185, et (8), page 186 de [25]. Elles correspondent ici aux équations (3) et (5) de la section 13.2.

Err (xxi) – Page 194, ligne 11, il faut lire : *holomorphe en* λ *et* ν.

Err (xxii) – Page 197, lignes 2 et 6 : les $+Y$ devraient être des $-Y$.

Err (xxiii) – Page 203. Dans l'inégalité de la ligne 12 et dans celle de la ligne -3, il faut remplacer $Y_{P',e}(T)$ par $-Y_{P',e}(T)$.

Err (xxiv) – Page 203, ligne -9. L'inégalité est stricte : il faut lire $\|U + V\| > \rho\|T\|$.

Err (xxv) – Page 205, majoration (1) : il faut lire $|A^T_{s,t} - E^T_1|$.

Err (xxvi) – Page 207 : $\widetilde{Y}_{S'}(X)$ est la projection de $u^{-1}X$ sur $t(\mathfrak{a}_S)^Q$.

Err (xxvii) – Page 219, ligne -6 : l'expression pour $\mathbf{A}^{Q_1}_M(T, \sigma, \widetilde{u}, \mu)$, faisant intervenir une trace, n'a de sens que si l'opérateur est un endomorphisme de l'espace $\mathcal{A}(\mathbf{X}_S, \sigma)$. La formulation correcte est celle du point (i) du lemme 14.1.4 de [25].

Index des notations

Références

[1] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. II. Applications of a truncation operator. *Compos. Math.* **40** (1980), n° 1, 87–121

[2] J. Arthur, On a family of distributions obtained from Eisenstein series. II. Explicit formulas. *Amer. J. Math.* **104** (1982), n° 6, 1289–1336

[3] J. Arthur, On the inner product of truncated Eisenstein series. *Duke Math. J.* **49** (1982), n° 1, 35–70

[4] J. Arthur, A measure on the unipotent variety. *Canad. J. Math.* **37** (1985), n° 6, 1237–1274

[5] J. Arthur, On a family of distributions obtained from orbits. *Canad. J. Math.* **38** (1986), n° 1, 179–214

[6] J. Arthur, The invariant trace formula. I. Local theory. *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), n° 2, 323–383

[7] J. Arthur, The invariant trace formula. II. Global theory. *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), n° 3, 501–554

[8] J. Arthur, A local trace formula. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1991), n° 73, 5–96

[9] J. Arthur, A stable trace formula. II. Global descent. *Invent. Math.* **143** (2001), n° 1, 157–220

[10] J. Arthur, A stable trace formula. I. General expansions. *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), n° 2, 175–277

[11] J. Arthur, A stable trace formula. III. Proof of the main theorems. *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), n° 3, 769–873

[12] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013

[13] J. G. Arthur, A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$. *Duke Math. J.* **45** (1978), n° 4, 911–952

[14] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles 1341, Hermann, Paris, 1969

[15] A. Borel, *Linear algebraic groups*. 2e éd., Grad. Texts in Math. 126, Springer, New York, 1991

[16] A. Borel and J. Tits, Groupes réductifs. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1965), n° 27, 55–150

[17] V. G. Drinfel′d, Cohomology of compactified moduli varieties of F-sheaves of rank 2 (in Russian). *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **162** (1987), 107–158, 189. English translation: *Journal of Soviet Mathematics* **46** (1989), 1789–1821

[18] V. G. Drinfel′d, Varieties of modules of F-sheaves (in Russian). *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **21** (1987), n° 2, 23–41. English translation: *Functional Analysis and Its Applications* **21** (1987), 107–122

[19] G. Harder, Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven. *Invent. Math.* **6** (1968), 107–149

[20] G. Harder, Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern. *Invent. Math.* **7** (1969), 33–54

[21] G. Harder, Chevalley groups over function fields and automorphic forms. *Ann. of Math. (2)* **100** (1974), 249–306

[22] H. Jacquet and R. P. Langlands, *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(2)$. Lecture Notes in Math. 114, Springer, Berlin-New York, 1970

[23] J.-P. Labesse, L-indistinguishable representations and trace formula for SL(2). In *Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971)*, pp. 331–338, Halsted Press, New York-Toronto, Ont., 1975

[24] J.-P. Labesse and R. P. Langlands, L-indistinguishability for $\mathrm{SL}(2)$. *Canad. J. Math.* **31** (1979), n° 4, 726–785

[25] J.-P. Labesse and J.-L. Waldspurger, *La formule des traces tordue d'après le* Friday Morning Seminar. CRM Monogr. Ser. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013

[26] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*. Astérisque 243, Soc. math. de France, 1997

[27] L. Lafforgue, Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands. *Invent. Math.* **147** (2002), n° 1, 1–241

[28] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*. Lecture Notes in Math. 544, Springer, Berlin-New York, 1976

[29] R. P. Langlands, *Base change for* $\mathrm{GL}(2)$. Ann. of Math. Stud. 96, Princeton University Press, Princeton, NJ ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1980

[30] G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part II*. Cambridge Stud. Adv. Math. 56, Cambridge University Press, Cambridge, 1997

[31] B. Lemaire and G. Henniart, *Représentations des espaces tordus sur un groupe réductif connexe* $\mathfrak{p}$*-adique*. Astérisque 386, Soc. math. de France, 2017

[32] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein*. Progr. Math. 113, Birkhäuser, Basel, 1994

[33] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *Stabilisation de la formule des traces tordue. Vol. 1*. Progr. Math. 316, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016

[34] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *La formule des traces locale tordue*. Mem. Amer. Math. Soc. 251, Amer. Math. Soc., 2018

[35] L. E. Morris, Eisenstein series for reductive groups over global function fields. I. The cusp form case. *Canad. J. Math.* **34** (1982), n° 1, 91–168

[36] L. E. Morris, Eisenstein series for reductive groups over global function fields. II. The general case. *Canad. J. Math.* **34** (1982), n° 5, 1112–1182

[37] T. Ngô Dac, Sur le développement spectral de la formule des traces d'Arthur-Selberg sur les corps de fonctions. *Bull. Soc. Math. France* **137** (2009), n° 4, 545–586

[38] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **20** (1956), 47–87

[39] T. A. Springer, Reduction theory over global fields. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **104** (1994), nº 1, 207–216

MEMOIRS OF THE EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY

Jean-Pierre Labesse, Bertrand Lemaire

La formule des traces tordue pour un corps global de caractéristique $p > 0$

Dans ce travail nous adaptons au cas d'un corps global F de caractéristique positive, c'est-à-dire un corps de fonctions sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, les résultats prouvés pour un corps de nombres dans le livre de Labesse-Waldspurger *La formule des traces tordue d'après le* Friday Morning Seminar. En d'autres termes, nous établissons la formule des traces pour un G-espace tordu $\widetilde{G}$ où G est un groupe réductif connexe défini sur F. C'est une première étape vers la forme stabilisée de la formule des traces tordue, nécessaire pour la plupart des applications, qui, elle, est l'objet de travaux en cours.

https://ems.press

ISSN 2747-9080

ISBN 978-3-98547-090-7

EMS PRESS