
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2006 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1227: Ein Kreissektor mit Radius ρ und Zentriwinkel α sei aus dünnem homogenem Draht; er habe seinen Scheitel im Koordinatenursprung und ein Schenkel liege auf der positiven x -Achse. Welche Kurve beschreibt der Massenschwerpunkt, wenn α im Intervall $(0, 2\pi)$ variiert, und für welches α_0 liegt der Massenschwerpunkt im Koordinatenursprung?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1228: Eine Folge ganzer Zahlen sei durch die Anfangswerte $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = c^2$ und die Rekursion

$$a_n = (c^2 + d)a_{n-1} + d(c^2 + d)a_{n-2} - d^3a_{n-3} \quad (c, d \in \mathbb{Z}, n \geq 3)$$

definiert. Man beweise, dass alle Folgenglieder perfekte Quadrate sind.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1229 (Die einfache dritte Aufgabe): In der (reellen euklidischen) Ebene seien $n \geq 3$ Punkte in allgemeiner Lage gegeben. Diese Punkte bestimmen $\binom{n}{3}$ Dreiecke und $3\binom{n}{3}$ Winkel. Wie viele dieser Winkel sind mindestens verschieden?

Hanfried Lenz, Berlin, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2005

Aufgabe 1215. Man ermittle alle ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung

$$x^7 + y^4 = \left(\left(\left(2005^{2005} \right)^{2005} \right)^{2005} \right)^{2005}.$$

Eckard Specht, Magdeburg, D

Weil keine Lösung eingegangen ist, drucken wir den Lösungsweg des Autors: Es gibt keine ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung. Betrachtet man die Gleichung modulo 29, dann gilt wegen $2005 \equiv 4 \pmod{29}$ für die rechte Seite

$$\left(\left(\left(2005^{2005} \right)^{2005} \right)^{2005} \right)^{2005} = 2005^{(2005^4)} \equiv 4^{(2005^4)} \pmod{29}.$$

Wegen $4^{14} \equiv 1 \pmod{29}$ und $2005^4 \equiv 11 \pmod{14}$ hat man nun

$$4^{(2005^4)} = 4^{14 \cdot n + 11} \equiv 4^{11} \equiv 5 \pmod{29}.$$

Weiter stellt man durch Ausrechnen der ersten 29 vierten und siebten Potenzen fest, dass als Reste nur

$$x^7 \equiv \{0, 1, 12, 17, 28\} \pmod{29}$$

$$y^4 \equiv \{0, 1, 7, 16, 20, 23, 24, 25\} \pmod{29}$$

in Frage kommen. Wie man sich leicht überzeugt, liefert kein Paar von Resten aus beiden Mengen die Summe 5.

Aufgabe 1216. Falls $p = \ell^2 + \ell + 1$ für natürliche Zahlen $\ell \geq 2$ eine Primzahl ist, betrachten wir im endlichen Körper $GF(p) = \{0, 1, 2, \dots, \ell^2 + \ell\}$ das lineare $\ell \times \ell$ -Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \ell \\ \ell + 1 & \ell + 2 & \ell + 3 & \cdots & 2\ell \\ 2\ell + 1 & 2\ell + 2 & 2\ell + 3 & \cdots & 3\ell \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\ell - 1)\ell + 1 & (\ell - 1)\ell + 2 & (\ell - 1)\ell + 3 & \cdots & \ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell^2 + 1 \\ \ell^2 + 2 \\ \ell^2 + 3 \\ \vdots \\ \ell^2 + \ell \end{pmatrix}.$$

- Wie viele Lösungstupel $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_\ell)^T$ besitzt dieses System?
- Bestimme jenes Lösungstupel $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_\ell)^T$, welches eine arithmetische Folge (im Sinne von $(27, 37, 47, 57, 67)^T \equiv (27, 6, 16, 26, 5)^T \pmod{31}$) bildet.
- Unter welcher Bedingung für ℓ gibt es Lösungstupel, die eine geometrische Folge bilden?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 6 Lösungen eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH) und Albert Stadler (Dübendorf, CH).

Wir folgen *Peter Bundschuh* und *Stefan Grieder*:

- a) Beim vorgelegten Gleichungssystem handelt es sich um ein lineares inhomogenes Gleichungssystem, das über dem Körper $P := GF(p)$ zu betrachten ist. Wie unten gezeigt wird, ist der Rang der links stehenden $\ell \times \ell$ -Matrix und der um die rechts stehende Spalte erweiterten $\ell \times (\ell + 1)$ -Matrix gleich 2; deshalb ist das System lösbar, und der Lösungsraum ist ein $(\ell - 2)$ -dimensionaler affiner Unterraum von P^ℓ , besteht also aus $p^{\ell-2}$ Elementen. Subtrahieren wir in der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \ell & \ell^2 + 1 \\ \ell + 1 & \ell + 2 & \ell + 3 & \cdots & 2\ell & \ell^2 + 2 \\ 2\ell + 1 & 2\ell + 2 & 2\ell + 3 & \cdots & 3\ell & \ell^2 + 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\ell - 1)\ell + 1 & (\ell - 1)\ell + 2 & (\ell - 1)\ell + 3 & \cdots & \ell^2 & \ell^2 + \ell \end{pmatrix}$$

die erste Zeile von allen anderen, so ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \ell & \ell^2 + 1 \\ \ell & \ell & \ell & \cdots & \ell & 1 \\ 2\ell & 2\ell & 2\ell & \cdots & 2\ell & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\ell - 1)\ell & (\ell - 1)\ell & (\ell - 1)\ell & \cdots & (\ell - 1)\ell & \ell - 1 \end{pmatrix},$$

in welcher die dritte bis ℓ -te Zeile Vielfache der zweiten Zeile sind. Multipliziert man noch die zweite Zeile mit $-(\ell - 1)$ und beachtet $\ell^2 + \ell + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, ist das Gleichungssystem äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + \ell x_\ell &= -\ell, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_\ell &= -(\ell + 1). \end{aligned}$$

- b) Für die Bestimmung des Lösungstupels, welches eine arithmetische Folge ist, setzen wir $x_k = x_1 + (k - 1)d$, wobei $d \in P$ die Differenz aufeinanderfolgender Glieder der Folge ist. Es ergeben sich die beiden Gleichungen

$$x_1 \underbrace{\sum_{k=1}^{\ell} k}_{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} + d \underbrace{\sum_{k=1}^{\ell} k(k-1)}_{\frac{(\ell-1)\ell(\ell+1)}{3}} = -\ell \quad \text{und} \quad \ell x_1 + d \underbrace{\sum_{k=0}^{\ell-1} k}_{\frac{(\ell-1)\ell}{2}} = -(\ell + 1),$$

welche unter Verwendung der bekannten Summenformeln und der Kongruenz $\ell(\ell + 1) \equiv -1 \pmod{p}$ übergehen in

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{\ell - 1}{3}d = \ell \quad \text{und} \quad x_1 + \frac{\ell - 1}{2}d = \ell.$$

Dieses System besitzt die Lösung $x_1 = -2\ell$ und $d = -2(\ell - 1)$. Das Lösungstupel lautet deshalb

$$(-2\ell, -4\ell + 2, -6\ell + 4, \dots, -2\ell^2 + 2(\ell - 1) \equiv 4\ell \pmod{p}).$$

- c) Hier machen wir den Ansatz $x_k = x_1 q^{k-1}$, wobei $q \neq 1$ der Quotient der geometrischen Folge ist. (Der Fall $q = 1$ würde auf eine arithmetische Folge mit $d = 0$ führen, was gemäss b) ausgeschlossen ist.) Damit ergeben sich die beiden Gleichungen

$$x_1(1 + 2q + 3q^2 + \dots + \ell q^{\ell-1}) = -\ell \quad \text{und} \quad x_1 \frac{q^\ell - 1}{q - 1} = -(\ell + 1).$$

Für die erste Gleichung beachten wir

$$\begin{aligned} 1 + 2q + 3q^2 + \dots + \ell q^{\ell-1} &= \frac{d}{dq} (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^\ell) \\ &= \frac{d}{dq} \left(\frac{q^{\ell+1} - 1}{q - 1} \right) = \frac{\ell q^{\ell+1} - (\ell + 1)q^\ell + 1}{(q - 1)^2}. \end{aligned}$$

Die mit $q - 1$ multiplizierte erste Gleichung und die zweite Gleichung lauten nun

$$x_1 \frac{\ell q^{\ell+1} - (\ell + 1)q^\ell + 1}{q - 1} = -\ell(q - 1) \quad \text{und} \quad x_1 \frac{q^\ell - 1}{q - 1} = -(\ell + 1).$$

Zur Vereinfachung summieren wir einerseits die beiden Gleichungen und erhalten

$$x_1 \ell q^\ell = -(\ell q + 1), \tag{1}$$

und andererseits subtrahieren wir das $(\ell q^{\ell+1} - (\ell + 1)q^\ell + 1)$ -fache der zweiten Gleichung vom $(q^\ell - 1)$ -fachen der ersten Gleichung:

$$0 = \ell^2 q^{\ell+1} - \overbrace{(\ell^2 + \ell + 1)q^\ell}^{\equiv 0 \pmod{p}} + \ell q + 1,$$

was zur Bedingung

$$\ell^2 q^{\ell+1} = -(\ell q + 1) \tag{2}$$

führt. Der Vergleich von (1) mit (2) liefert $x_1 = q\ell$. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$\ell q \frac{q^\ell - 1}{q - 1} = -(\ell + 1)$$

oder nach Multiplikation mit $-(\ell + 1)$

$$q \frac{q^\ell - 1}{q - 1} = \ell \iff q + q^2 + \dots + q^\ell = \ell.$$

Somit besitzt das Gleichungssystem ein Lösungstupel in Form einer geometrischen Reihe, wenn die Kongruenz

$$q + q^2 + q^3 + \dots + q^\ell \equiv \ell \pmod{p}$$

eine Lösung $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ besitzt.

Beispiele bis $\ell = 15$					
		arithmetisch		geometrisch	
ℓ	p	x_1	d	x_1	q
2	7	3	5	3	5
3	13	7	9	–	–
5	31	21	23	–	–
6	43	31	33	–	–
8	73	57	59	48	6
12	157	133	135	134	142
14	211	183	185	25	47
15	241	211	213	239	32
				35	163

Aufgabe 1217 (Die einfache dritte Aufgabe). Einem Rechteck der Länge ℓ und der Breite h ($h < \ell$) sollen (alle vier Seiten berührende) Ellipsen einbeschrieben werden. In welcher Beziehung stehen die Halbachsen a und b der Ellipse und der Winkel φ , den die größere Halbachse a mit der Rechtecklänge einschließt?

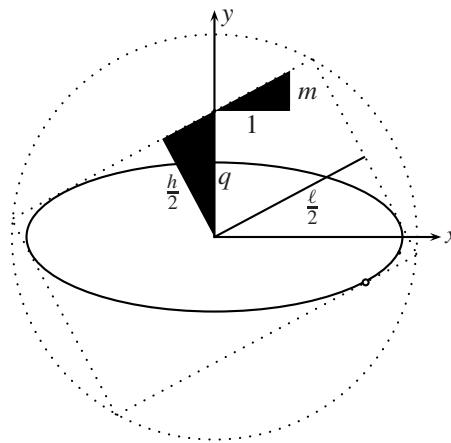
Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Zuschriften eingegangen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Wilfried Pigulla (Passau, D), Volkard Schindler (Berlin, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Die meisten Löser verwenden ganz intensiv Methoden der analytischen Geometrie. Wir folgen *Gerhard Wanner*, der mit elementaren Mitteln auskommt (siehe Figur auf der nächsten Seite).

Wir drehen das Rechteck (und nicht die Ellipse). Aus der Schule wissen wir, dass die Gerade $y = mx + q$ genau dann Tangente der Ellipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ ist, wenn die „Diskriminantenbedingung“ $a^2m^2 + b^2 = q^2$ erfüllt ist. Nun folgt aus ähnlichen Dreiecken und dem Satz von Pythagoras, dass $q^2 = (1 + m^2)\frac{h^2}{4}$. Somit haben wir

$$a^2m^2 + b^2 = (1 + m^2)\frac{h^2}{4},$$

$$a^2 + b^2m^2 = (1 + m^2)\frac{\ell^2}{4}.$$



(Für die zweite Gleichung wurde $a \leftrightarrow b$ und $h \leftrightarrow \ell$ vertauscht, d.h. die Figur wurde um 90° gedreht.) Addiert man die beiden Gleichungen, erhält man das interessante Ergebnis

$$a^2 + b^2 = \frac{\ell^2}{4} + \frac{h^2}{4}$$

Dieses Phänomen heisst in der französischen Literatur *le cercle de Monge*. Wenn wir die beiden Gleichungen subtrahieren, erhalten wir

$$(a^2 - b^2)(1 - m^2) = \left(\frac{\ell^2 - h^2}{4}\right)(1 + m^2).$$

Mit $m = \tan(\varphi)$ ergibt sich schliesslich

$$(a^2 - b^2) \cos(2\varphi) = \frac{\ell^2 - h^2}{4}.$$