
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2007 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1242: Beweise, dass für reelle Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BA

Aufgabe 1243: Es sei S eine schiefsymmetrische 3×3 -Matrix. Man finde alle 3×3 -Matrizen A mit reellen Elementen, so dass AS wieder schiefsymmetrisch ist. Man zeige ferner, dass für diese Matrizen $AS = s \cdot S$ gilt mit einem gewissen Skalar s .

Götz Trenkler, Dortmund, D und Dietrich Trenkler, Osnabrück, D

Aufgabe 1244 (Die einfache dritte Aufgabe): Es seien A, B, C und D vier verschiedene Punkte einer Ebene. Zeige, dass der Term

$$T = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$$

von einem einzigen Winkel abhängt.

Wie ist es, wenn die vier Punkte nicht in einer Ebene liegen?

Karl Wirth, Zürich, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2006

Aufgabe 1230. Leitet man aus einer Zufallsvariablen X weitere Zufallsvariablen $Y_1 := f_1(X)$, $Y_2 := f_2(X)$, ... ab, so sind diese im Allgemeinen abhängig.

- Es sei $\ell \geq 2$. Man finde eine Zufallsvariable X und Funktionen f_1, \dots, f_ℓ , für welche die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_ℓ unabhängig sind.
- Gesucht sind eine \mathbb{N}_0 -wertige Zufallsvariable X und eine Folge von Funktionen $f_1, f_2, \dots: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Zufallsvariablen $Y_1 := f_1(X)$, $Y_2 := f_2(X), \dots$ unabhängig sind.

Um Trivialbeispiele auszuschliessen, setze man in beiden Aufgabenteilen zusätzlich voraus, dass die abgeleiteten Zufallsvariablen Y_1, Y_2, \dots nicht mit Wahrscheinlichkeit 1 konstant sind.

Werner Schindler, Sinzig, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Henri Carnal (Bern, CH) und Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) haben Beiträge eingesandt.

Wir folgen *Henri Carnal*: Man geht aus von unabhängigen Zufallsvariablen Y_1, Y_2, \dots und konstruiert daraus $X = g(Y_1, Y_2, \dots)$, wobei g eine bijektive Funktion ist. Man benützt hierzu das

Lemma von Borel-Cantelli: Sind A_1, A_2, \dots Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit der Eigenschaft $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$, ist $B_\ell = \bigcup_{n \geq \ell} A_n$ und $B = \bigcap_{\ell \geq 1} B_\ell = \{\omega \mid \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n\}$, so ist $P(B) = 0$.

Die Ungleichungskette $P(B) \leq P(B_\ell) \leq \sum_{n \geq \ell} P(A_n) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$ liefert den Beweis für das Lemma.

Ist insbesondere $A_n = \{\omega \mid Y_n(\omega) \neq 0\}$, so ersetzt man Ω durch $\Omega' = \Omega \setminus B$; die Wahrscheinlichkeiten bleiben dabei unberührt, die Einschränkungen der Y_n auf Ω' also unabhängig, und man hat für $\omega \in \Omega' : \#\{n \mid Y_n(\omega) \neq 0\} < \infty$.

1. Beispiel: Y_1, Y_2, \dots sind unabhängig mit Werten in $\{0, 1\}$ und mit $P(Y_n = 1) = 2^{-n}$. Die Summe $X = Y_1 + 2 \cdot Y_2 + 4 \cdot Y_3 + \dots + 2^{n-1} \cdot Y_n + \dots$ existiert dann auf Ω' , weil sie mit lauter Nullen endet. (Hier ist $f_n(x)$ der Koeffizient von 2^{n-1} in der binären Schreibweise von x .)

2. Beispiel: Y_1, Y_2, \dots sind unabhängig und geometrisch verteilt:

$P(Y_n = k) = (1 - p_n) \cdot p_n^k$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$. Man nummeriert die Primzahlen: $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5, \dots$ und setzt

$$X = 2^{Y_1} \cdot 3^{Y_2} \cdot \dots \cdot q_n^{Y_n} \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} q_n^{Y_n}.$$

Wiederum existiert das Produkt auf Ω' , weil die letzten Faktoren alle 1 sind. (Hier ist also $f_n(x)$ der Exponent von q_n in der Primfaktorzerlegung von x .)

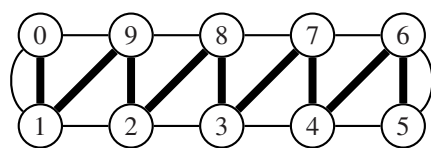
Aufgabe 1231. Welche minimale Anzahl $a(n)$ von Sitzordnungen bei $n = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$) Personen in einer Reihe gewährleistet, dass jede der n Personen genau einmal neben jeder anderen gesessen hat? Man gebe auch eine Konstruktionsvorschrift der dazu erforderlichen Sitzordnungen an.

Caroline Ryser, Langenbruck, CH und Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 8 Zuschriften eingetroffen:

Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Harald Friepertinger (Graz, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Henri Carnal und Gerhard Wanner argumentieren wie folgt: Die Antwort ist $a(n) = \ell$. Um dies zu zeigen, denken wir uns die Sitzreihe als Zickzacklinie und die Personen darum herum wie auf einer Raupenkette aufgefädelt:



Die erste Sitzordnung (für $\ell = 5$) ist also 0 1 9 2 8 3 7 4 6 5. Wenn man die Kette weiterdreht, die Personen also zyklisch vertauscht, erhält jede Person jedesmal zwei neue Nachbarn; ausgenommen jene, welche an der linken oberen oder an der rechten unteren Ecke ankommen, diese erhalten nur einen neuen Nachbarn. Nach der ℓ -ten Sitzordnung hatte also jede Person $2\ell - 1 = n - 1$ verschiedene Nachbarn.

0	1	9	2	8	3	7	4	6	5
1	2	0	3	9	4	8	5	7	6
2	3	1	4	0	5	9	6	8	7
3	4	2	5	1	6	0	7	9	8
4	5	3	6	2	7	1	8	0	9

Für die Beweisführung betrachten wir die von 0 bis $n - 1$ nummerierten Personen als Elemente von \mathbb{Z}_n . Die oben anschaulich beschriebenen Anordnungen erhält man durch

$$A_k : k \quad k + 1 \quad k - 1 \quad k + 2 \quad k - 2 \quad k + 3 \quad k - 3 \quad \dots \quad k - (\ell - 1) \quad k + \ell$$

($k = 0, 1, \dots, \ell - 1$).

Zwei verschiedene Personen i und j sind in A_k benachbart, falls $i + j = 2k$ oder $i + j = 2k + 1$. Wenn k von 0 bis $\ell - 1$ läuft, erscheinen auf der rechten Seite der Gleichungen die Werte $0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$, so dass i und j genau einmal Nachbarn sind.

Henri Carnal lässt nun zu den Personen $0, 1, \dots, n - 1$ noch eine Person n dazustossen. Es sei $m = \lceil \frac{\ell}{2} \rceil$, also $2m - \ell = 0$ oder $2m - \ell = 1$. Setze $j_k = k + m$ und $i_k = j_k - \ell$. Es ist $i_k + j_k = 2k + 2m - \ell \in \{2k, 2k + 1\}$, also sind i_k und j_k in A_k Nachbarn. Wir setzen

nun die neue Person n in A_k zwischen i_k und j_k ; sie erhält alle früheren Anwesenden als Nachbarn, wenn k von 0 bis $\ell - 1$ läuft. Um die zerstörten Nachbarschaften wieder herzustellen, bildet man am Schluss

$$A_\ell: 0 \ell 1 \ell + 1 \dots \ell - 1 2\ell - 1 n$$

(resp. 0 1 2 falls $\ell = 1$). Damit ist gezeigt, dass man bei $2\ell + 1$ Personen mit $\ell + 1$ Sitzordnungen sicher stellen kann, dass jede Person neben jeder anderen gegessen hat. Allerdings kann eine Person mehrmals denselben Nachbarn haben.

Harald Friperinger beweist für den Fall, dass $n + 1$ eine Primzahl ist, die Existenz einer interessanten Sitzordnung: Die Person mit der Nummer i ($i = 1, 2, \dots, n$) sitzt bei der Anordnung mit der Nummer j ($j = 1, 2, \dots, \ell$) auf dem Platz mit der Nummer $i \cdot j$, wobei die Platznummern modulo $n + 1$ zu nehmen sind. Für $\ell = 5$ ergibt sich:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
9	7	5	3	1	10	8	6	4	2

Aufgabe 1232 (Die einfache dritte Aufgabe). Beweise: Für die Winkel α, β, γ eines Dreiecks gilt

$$0 < \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)}{1 + \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hans Egli, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 21 Zuschriften eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BA), Gheorghe Bercea (München, D), Erhard Braune (Linz, A), Scott H. Brown (Montgomery AL, US), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Oleh Faynshteyn (Leipzig, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hongkong, CN), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Die meisten Löser greifen auf schon bekannte Ungleichungen zurück. Wir folgen *Kee-Wai Lau*, der einen direkten Weg findet:

Die linke Ungleichung ist klar. Zum Beweis der rechten Ungleichung benützen wir die beiden leicht zu beweisenden Identitäten

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) = \frac{\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma)}{4}, \quad (1)$$

$$1 + \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) = \frac{3 - \cos(2\alpha) - \cos(2\beta) - \cos(2\gamma)}{4}. \quad (2)$$

Mit ihnen schreibt sich die rechte Ungleichung als

$$\left(\sqrt{3} \sin(2\alpha) + \cos(2\alpha)\right) + \left(\sqrt{3} \sin(2\beta) + \cos(2\beta)\right) + \left(\sqrt{3} \sin(2\gamma) + \cos(2\gamma)\right) \leq 3$$

oder

$$\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\beta - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{3}{2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\beta - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{3}\right) \cos(\alpha - \beta) + \cos\left(2\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \cos(\alpha - \beta) + 1 - \sin^2\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right) \\ &\leq 2 \left|\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)\right| + 1 - \sin^2\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{3}{2} - 2 \left(\left|\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)\right| - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$