

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2008 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

**Aufgabe 1248:** Es sei  $z \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 2$ ). Beweise:

$$\left| 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \right|^2 \leq \left( 1 + |z|^2 + \frac{2}{n-1} \Re(z) \right)^{n-1}.$$

Mihaly Bencze, Brasov, RO

**Aufgabe 1249:** Mit den Fibonacci-Zahlen  $f_1 = f_2 = 1$ ,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  ( $n \geq 3$ ) bilden wir im ebenen  $(x, y)$ -Gitter einen Streckenzug  $S_n$  wie folgt: Wir starten in  $(0, 0)$ , gehen um  $f_1$  nach oben, um  $f_2$  nach rechts, ..., um  $f_{2n-1}$  nach oben und schliesslich um  $f_{2n}$  nach rechts. Der Streckenzug  $S_n$ , die  $x$ -Achse und die Parallele zur  $y$ -Achse durch den Endpunkt von  $S_n$  begrenzen ein Gitterpolygon  $P_n$ . Bestimme die Anzahl  $i_n$  der Gitterpunkte im Innern von  $P_n$ .

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Aufgabe 1250 (Die einfache dritte Aufgabe):** Gegeben seien drei Zahlenfolgen  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  und  $(c_n)$ , welche alle einer Rekursion vom Typ  $r_n = 3r_{n-1} - 3r_{n-2} + r_{n-3}$  ( $n \geq 4$ ) genügen. Ihre Anfangswerte sind  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = 39$ ,  $a_3 = 95$ ,  $b_1 = 24$ ,  $b_2 = 80$ ,  $b_3 = 168$ ,  $c_1 = 25$ ,  $c_2 = 89$  und  $c_3 = 193$ . Zeige, dass alle Tripel  $(a_n, b_n, c_n)$  pythagoreisch sind.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

## Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2006

Aufgabe 1236. Welches ist das kleinste  $n \geq 3$ , für welches es  $n$  aufeinanderfolgende Quadratzahlen gibt, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist?

Peter Hohler, Aarburg, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 19 Lösungen eingetroffen, nämlich von Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH [zwei Lösungen]), Diego Rattaggi (Luzern, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Meilen, CH), Hans-Heiner Storrer (Greifensee, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Paul Weisenhorn (Fautenbach, D).

Fast alle Löser argumentieren wie *Walter Nohl*: Es sei

$$S_n(k) = (k+1)^2 + (k+2)^2 + \dots + (k+n)^2 \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Wir behaupten, dass es

- A) für  $n = 11$  Werte  $S_n(k)$  gibt, die Quadratzahlen sind.
- B) für  $3 \leq n \leq 10$  keine Werte  $S_n(k)$  gibt, die Quadratzahlen sind.

Wegen  $18^2 + 19^2 + 20^2 + \dots + 28^2 = 77^2$  ist A) bewiesen. Um B) zu beweisen, verwenden wir die bekannte Summenformel für Quadratzahlen. Sie liefert

$$S_n(k) = nk^2 + (n^2 + n)k + \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n). \quad (2)$$

Für jede zu betrachtende Zahl  $n$  geben wir nun eine natürliche Zahl  $m$  an, bezüglich der wir die Menge der Reste bestimmen, die der Term  $S_n(k)$  generiert. Wegen  $S_n(k+m) \equiv S_n(k) \pmod{m}$  ist es nur nötig, die Werte für  $m$  aufeinanderfolgende Werte von  $k$  zu bestimmen. Für den gleichen Modul bestimmen wir auch die Menge der Reste der Quadratzahlen. Weil die beiden Mengen jeweils leeren Durchschnitt haben, kann  $S_n(k)$  keine Quadratzahl sein.

$n$	Modul $m$	Menge der durch $S_n(k)$ erzeugten Reste $\pmod{m}$	Menge der Reste der Quadratzahlen $\pmod{m}$
3	3	{2}	{0,1}
4	4	{2}	{0,1}
5	4	{2,3}	{0,1}
6	4	{3}	{0,1}
7	16	{3,8,11,12}	{0,1,4,9}
8	9	{2,5,6,8}	{0,1,4,7}
9	9	{6}	{0,1,4,7}
10	25	{5,10,20}	{0,1,4,6,9,11,14,16,19,21,24}

**Aufgabe 1237.** Spieler  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  ziehen nach folgender Regel abwechselnd Karten aus  $n$  beliebig grossen Kartenstöcken: Der Spieler, der am Zug ist, wählt einen Stock aus und entnimmt ihm eine oder alle Karten; wer die letzte Karte zieht, hat verloren.

Für welche Ausgangssituationen hat  $\mathcal{B}$  eine Gewinnstrategie, falls  $\mathcal{A}$  zuerst zieht?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind sechs Zuschriften eingegangen, nämlich von Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH [zwei Lösungen]), Jürgen Spilker (Freiburg, D) und Paul Weisenhorn (Fautenbach, D).

Wir folgen *Walter Burgherr*: Zunächst werden die Ausgangssituationen nach ihren Eigenschaften in Klassen eingeteilt. Dabei wird ein Kartenstock gerader oder ungerader Stock genannt, je nachdem er eine gerade oder eine ungerade Anzahl Karten enthält.

$E$ :  $n$  ist gerade; die Anzahl der geraden Stöcke verschwindet nicht und ist gerade.

$F$ :  $n$  ist ungerade; alle Stöcke sind ungerade.

$G_1$ :  $n$  ist gerade; die Anzahl der geraden Stöcke ist ungerade und grösser als 1.

$G_2$ :  $n$  ist gerade; die Anzahl der geraden Stöcke ist 1.

$G_3$ :  $n$  ist gerade; alle Stöcke sind ungerade.

$U_1$ :  $n$  ist ungerade; die Anzahl der geraden Stöcke verschwindet nicht und ist gerade.

$U_2$ :  $n$  ist ungerade; die Anzahl der geraden Stöcke ist ungerade und grösser als 1.

$U_3$ :  $n$  ist ungerade; es gibt genau einen geraden Stock.

$L$ : Alle Stöcke sind leer.

Auch die möglichen Strategien werden eingeteilt:

$S_1$ : Der Spieler, der am Zug ist, nimmt von einem geraden Stock eine Karte.

$S_2$ : Er nimmt von einem geraden Stock alle Karten.

$S_3$ : Er nimmt von einem ungeraden Stock, der mehrere Karten enthält, eine Karte.

$S_4$ : Er nimmt von einem ungeraden Stock alle Karten.

Nun wird gezeigt, dass bei den Ausgangssituationen  $E$  und  $F$  der Spieler  $\mathcal{B}$  gewinnen kann. Je nach Ausgangssituation pariert Spieler  $\mathcal{B}$  die anwendbaren Strategien von  $\mathcal{A}$  wie folgt:

Ausgangssituation	Spieler $\mathcal{A}$	Spieler $\mathcal{B}$
$E$	$S_1 \rightarrow G_1$	$S_1 \rightarrow E$
	$S_1 \rightarrow G_2$	$S_2 \rightarrow F$
	$S_2 \rightarrow U_2$	$S_1 \rightarrow E$
	$S_2 \rightarrow U_3$	$S_1 \rightarrow F$
	$S_3 \rightarrow G_1$	$S_1 \rightarrow E$
	$S_4 \rightarrow U_1$	$S_4 \rightarrow E$
$F$	$S_3 \rightarrow U_3$	$S_1 \rightarrow F$
	$S_4 \rightarrow G_3$	$S_4 \rightarrow F$
	$S_4 \rightarrow L$	

Es gelingt dem Spieler  $\mathcal{B}$  stets, die Situationen  $E$  und  $F$  wieder in solche überzuführen und schliesslich, da das Spiel abbricht, zu gewinnen.

Liegt dagegen eine der sechs anderen Ausgangssituationen vor, so kann der Spieler  $\mathcal{A}$  wie folgt die Situationen  $E$  oder  $F$  erreichen und somit gewinnen:

Ausgangssituation	Spieler $\mathcal{A}$
$G_1$	$S_1 \rightarrow E$
$G_2$	$S_2 \rightarrow F$
$G_3$	$S_4 \rightarrow F$
$U_1$	$S_4 \rightarrow E$
$U_2$	$S_2 \rightarrow E$
$U_3$	$S_1 \rightarrow F$

Somit gibt es für Spieler  $\mathcal{B}$  genau dann eine Gewinnstrategie, wenn eine der Ausgangssituationen  $E$  oder  $F$  vorliegt.

**Aufgabe 1238 (Die einfache dritte Aufgabe).** Man zeige, dass die Determinante der Vandermonde-Matrix  $\Omega$  der  $n$ -ten Einheitswurzeln reell oder rein imaginär ist:

$$\Omega = (w_{k\ell}), \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n, \quad \text{wobei } w_{k\ell} = \left( e^{\frac{2\pi i}{n}} \right)^{(k-1)(\ell-1)}.$$

Peter Nüesch, Lausanne, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** 18 Personen haben Lösungen eingesandt: Ulrich Abel (Wettenberg, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D [zwei Lösungen]), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D [zwei Lösungen]), Dieter Koller (Zürich, CH), Miklós Lévai (Tata, HU), Walter Nohl (Steffisburg, CH [zwei Lösungen]), Peter Nüesch (Lausanne, CH), Hansklaus Rummeler (Marly, CH [zwei Lösungen]), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Meilen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Peter Bundschuh* und *Hansklau Rummeler*: Mit  $\xi_n = e^{2\pi i/n}$  lautet die  $k$ -te Zeile der Matrix  $\Omega$

$$(1, \xi_n^{k-1}, \dots, \xi_n^{(k-1)(n-1)}),$$

und die  $\ell$ -te Spalte lautet

$$(1, \xi_n^{\ell-1}, \dots, \xi_n^{(n-1)(\ell-1)})^T.$$

Somit steht

$$\sum_{j=0}^{n-1} \xi_n^{j(k+\ell-2)} = \begin{cases} n & \text{falls } n|(k+\ell-2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

an der Stelle  $(k, \ell)$  der Matrix  $\Omega^2$ :

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & n & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix ist reell. Daraus folgt, dass  $\det(\Omega)$  reell oder rein imaginär ist.