

Un problème aux limites mixte des surfaces minimales avec une multiple projection plane et le dessin optimal des escaliers tournants

Friedrich Sauvigny

Mathematisches Institut der Brandenburgischen Technischen Universität, Konrad-Wachsmann-Allee 1, D-03044 Cottbus, Germany

Reçu le 26 juin 2009 ; reçu en forme révisée le 1^{er} juin 2010 ; accepté le 1^{er} juin 2010

Disponible sur Internet le 9 juin 2010

Dédié à Mme Christine Binswanger

Abstract

One admires rotational staircases in classical buildings since centuries. In particular, we are fascinated and inspired by the beautiful winding staircase (please, regard the picture below) in the center of the recently constructed University Library of the Brandenburgian Technical University at Cottbus by the bureau of architects Herzog & de Meuron from Basel. The sophisticated mathematician directly recognizes this staircase being a rotational minimal surface – namely the well-known helicoid – with a multiply covering projection onto the plane, solving a semi-free boundary value problem. We now ask the question, in which class of surfaces this helicoid is uniquely determined. Furthermore, we examine in how far the boundary values can be perturbed such that neighboring surfaces still exist. Both questions being affirmatively answered, we receive the stability of this boundary value problem. Finally, we investigate that our surface realizes a global minimum of area in the class of all parametric minimal surfaces solving an adequate mixed boundary value problem. Here we study one-to-one harmonic mappings onto the universal covering of the plane. This is achieved on the basis of our joint investigations with Professor Stefan Hildebrandt from the University of Bonn. Since H. Catalan was the first to classify the helicoid among ruled minimal surfaces and J. Plateau contributed, besides his inspiring experiments with soap bubbles, also his name to our central problem, I would like to present this treatise in the French language. During the construction of our University Library I got acquainted to the responsible architect for this project from the bureau Herzog & de Meuron, Frau Christine Binswanger and would like to dedicate this work to her with great respect. In her home city of Basel, classical Analysis could originally be developed by members of the Bernoulli family and Leonhard Euler.

© 2010 L'Association Publications de l'Institut Henri Poincaré. Published by Elsevier B.V. All rights reserved.

MSC: 35J60; 53A10

1. Introduction aux questions géométriques

Regardons l'escalier tournant dans la nouvelle Bibliothèque de l'Université Technique Brandebourgeoise à Cottbus (Fig. 1). Nous devons la merveilleuse photographie aux bibliothécaires de cette institution, et je voudrais remercier cordialement Mme Frewer-Sauvigny, Mme Kornitschuk, et M. Kuhn.

Adresse e-mail : sauvigny@math.tu-cottbus.de.

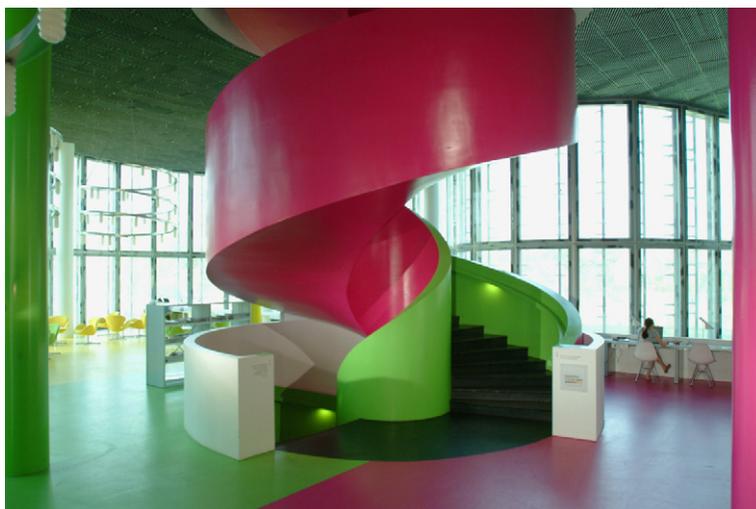


Fig. 1. L'ESCALIER TOURNANT DU CENTRE POUR L'INFORMATION, LA COMMUNICATION, ET LES MÉDIAS DANS L'UNIVERSITÉ TECHNIQUE BRANDEBOURGEOISE À COTTBUS, construit par le bureau architectural Herzog & de Meuron à Bâle. Cette photographie est autorisée par le Informations-, Kommunikations- und Medien-Zentrum der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus.

La forme centrale de cet escalier, si nous faisons abstraction des marches, représente une surface minimale avec une multiple projection sur le plan. Elle apparaît comme un graphe au-dessus d'un anneau circulaire : Sa hauteur fournit une *fonction linéaire*, dépendant de la circonférence pour le cercle extérieur de cet anneau. Nous interprétons la spirale, délimitant l'escalier de l'extérieur, comme une courbe fixe Γ : Ses points terminaux sont situés sur le cylindre circulaire \mathcal{Z} qui touche l'escalier de l'intérieur. Nous réalisons Γ par un fil de fer mince et \mathcal{Z} par un verre artificiel afin que Γ rencontre \mathcal{Z} verticalement dans deux points du dehors. Puis nous plongeons cette configuration $\langle \Gamma, \mathcal{Z} \rangle$ dans un liquide de savon, et il s'installe une pellicule de savon qui minimise l'aire et est délimitée par le fil de fer Γ . En outre, cette surface minimale possède une trace sur le cylindre \mathcal{Z} et rencontre verticalement la surface de support \mathcal{Z} . Maintenant, nous allons perturber la frontière fixe Γ , et nous examinerons la stabilité de la surface minimale tendue dans cette configuration $\langle \Gamma, \mathcal{Z} \rangle$. L'expérience physique cherche sa solution dans la classe des surfaces paramétriques et ne se contente pas seulement de la classe des graphes. L'existence d'une surface minimale semble établie par cette expérience ; mais il n'est pas du tout évident que la solution soit uniquement déterminée dans une classe de surfaces suffisamment grande ! L'inspiration particulière de cet escalier consiste à visualiser *un graphe minimal avec une multiple projection* sur le plan dans son extension entière.

La théorie des graphes minimaux aux conditions du type mixte à la frontière de G. Dirichlet et C. Neumann est bien connue ; ici nous recommandons notre livre [1] et ses deux ouvrages postérieurs [2,3]. Dans la situation géométrique de notre escalier tournant, un graphe minimal au-dessus d'une surface de Riemann \mathcal{R} apparaît. Cette surface recouvre infiniment le plan gaussien $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et possède l'origine comme point de branchement. Nous construirons \mathcal{R} dans la Section 3 et parlerons du *plan étale*.

L'équation des graphes minimaux, dans la forme non paramétrique au-dessus de \mathcal{R} en forme de divergence, permet une estimation de son aire dans le Théorème 2. La Section 2 contient la rétraction de \mathcal{R} , sous la fonction exponentielle relevée sur le plan étale, au plan gaussien \mathbb{C} . Au moyen de la théorie des solutions fortes dans le livre [4], nous résoudrons le problème de stabilité de notre graphe minimal avec une petite perturbation des valeurs aux limites fixes dans le Théorème 1. Ici notre équation des graphes minimaux rétractés permettra un contrôle global de la solution au problème aux limites mixte par ses valeurs au bord fixe et l'unicité en particulier.

Dans la Section 4 nous allons introduire des paramètres isothermes dans notre graphe minimal et établirons la compacité du problème aux limites mixte en démontrant notre Théorème 4. À l'aide d'une méthode de continuité non linéaire, nous résoudrons le problème aux limites mixte pour toutes distributions continues au bord et présenterons un critère si notre surface est plongée dans l'espace euclidien. Au moyen des méthodes [5–7] de S. Hildebrandt et F. Sauvigny, nous allons étudier l'injectivité des applications harmoniques dans le plan étale dépendant de leurs valeurs aux limites dans le Théorème 3. Ce résultat implique que le graphe minimal en paramètres conformes, résolvant le

problème aux limites mixte, représente la seule solution du problème paramétrique demi-libre des surfaces minimales, selon la Définition 7 de la Section 4.

Ici je voudrais remercier cordialement le Professeur Bernard Dacorogna et aussi ses collègues amicaux à Lausanne pour leur intérêt dans mes investigations. En outre, je dois au Prof. Dr. B. Dacorogna des suggestions précieuses pour améliorer mon style français. Je voudrais également associer à mes remerciements les éditeurs des ‘Annales de L’Institut Henri Poincaré – Analyse Non Linéaire’ pour m’avoir conseillé de formuler ce texte plus élégamment. Dans ce contexte, je témoigne ma sincère gratitude au Professeur Dr. Eric Séré. Enfin je voudrais remercier vivement Monsieur Benoît Chiron, qui a également proposé de nombreuses améliorations dans mon manuscrit.

2. La stabilité des graphes minimaux au-dessus du plan étale

Nous commençons avec l’application exponentielle complexe

$$x + iy = g(s + it) = g(s, t) := \exp(s + it) = e^s(\cos t + i \sin t), \quad s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Celle-ci transforme topologiquement le plan gaussien des (s, t) -points sur la surface de Riemann, recouvrant universellement le plan au dehors du point singulier 0. Nous appelons la dernière simplement le **plan étale**, qui possède l’origine comme point de branchement et fournit localement un difféomorphisme conforme avec les coordonnées locales $x + iy$. Dans la Section 3 nous construirons cette surface de Riemann par des formules explicites.

Avec les quantités s_0, t_0 positives et réelles, on introduit le rectangle ouvert

$$R(s_0, t_0) := \{s + it \in \mathbb{C}: 0 < s < s_0, 0 < t < t_0\}, \tag{2.2}$$

qui est transformé sous la fonction exponentielle sur un anneau circulaire multiples fois recouvert. On obtient la surface

$$A(s_0, t_0) := g(R(s_0, t_0)) = \{e^s(\cos t + i \sin t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: 0 < s < s_0, 0 < t < t_0\} \tag{2.3}$$

dans le plan étale avec le rayon intérieur 1 ou extérieur $r_0 := \exp(s_0) > 1$ et l’angle couvrant l’intervalle $0 < t < t_0$. Maintenant, considérons les **graphes au-dessus du plan étale** d’équation

$$Z(s, t) := (g(s, t), \zeta(s, t)) = g(s, t) + \zeta(s, t)E, \quad (s, t) \in R(s_0, t_0) \tag{2.4}$$

avec le vecteur unitaire $E = (0, 0, 1)$ suivant l’axe des z et une **fonction de hauteur** dans la classe

$$\zeta = \zeta(s, t) \in C^2(R(s_0, t_0)). \tag{2.5}$$

Dans les calculs suivants on identifie le plan complexe de Gauss avec l’espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, et la différentiation partielle rend

$$Z_s(s, t) = g(s, t) + \zeta_s(s, t)E, \quad Z_t(s, t) = ig(s, t) + \zeta_t(s, t)E. \tag{2.6}$$

Désignant les produits extérieurs et intérieurs dans \mathbb{R}^3 par les symboles \wedge ou \cdot , nous calculons

$$\begin{aligned} Z_s(s, t) \wedge Z_t(s, t) &= (g(s, t) + \zeta_s(s, t)E) \wedge (ig(s, t) + \zeta_t(s, t)E) \\ &= e^{2s}E - \zeta_s(s, t)g(s, t) - \zeta_t(s, t)ig(s, t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nous obtenons l’**élément superficiel**

$$\begin{aligned} W(s, t) &:= |Z_s(s, t) \wedge Z_t(s, t)| = |e^{2s}E - \zeta_s(s, t)g(s, t) - \zeta_t(s, t)ig(s, t)| \\ &= e^s \sqrt{e^{2s} + \zeta_s^2(s, t) + \zeta_t^2(s, t)} > 0, \quad (s, t) \in R(s_0, t_0). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Déterminons les coefficients de la **première forme fondamentale**

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= |Z_s|^2 ds^2 + 2(Z_s \cdot Z_t) ds dt + |Z_t|^2 dt^2 \quad \text{avec} \\ |Z_s(s, t)|^2 &= |g(s, t) + \zeta_s(s, t)E|^2 = |g(s, t)|^2 + \zeta_s^2(s, t) = e^{2s} + \zeta_s^2(s, t), \\ Z_s(s, t) \cdot Z_t(s, t) &= (g(s, t) + \zeta_s(s, t)E) \cdot (ig(s, t) + \zeta_t(s, t)E) = \zeta_s(s, t)\zeta_t(s, t), \\ |Z_t(s, t)|^2 &= |ig(s, t) + \zeta_t(s, t)E|^2 = |ig(s, t)|^2 + \zeta_t^2(s, t) = e^{2s} + \zeta_t^2(s, t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

En général, la métrique riemannienne $d\sigma^2$ n'apparaît pas dans la forme isotherme. Finalement, déterminons les dérivées partielles secondes

$$\begin{aligned} Z_{ss}(s, t) &= g(s, t) + \zeta_{ss}(s, t)E, \\ Z_{st}(s, t) &= ig(s, t) + \zeta_{st}(s, t)E, \\ Z_{tt}(s, t) &= -g(s, t) + \zeta_{tt}(s, t)E. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notre surface $Z(s, t)$ dans (2.4) représente une surface minimale si et seulement si sa courbure moyenne $H(s, t)$ s'annule. Par conséquent, le numérateur dans la formule classique pour H devient zéro selon

$$|Z_t|^2(Z_s, Z_t, Z_{ss})(s, t) - 2(Z_s \cdot Z_t)(Z_s, Z_t, Z_{st})(s, t) + |Z_s|^2(Z_s, Z_t, Z_{tt})(s, t) = 0, \quad (s, t) \in R(s_0, t_0). \quad (2.11)$$

Ici le symbole (\dots) dénote le déterminant ou le produit triple dans l'espace euclidien. Dans ce contexte, nous recommandons le traité [8] Chapter XII, Section 1 aux lecteurs. Nous évaluons les produits triples par les formules (2.7) et (2.10) dans l'équation (2.11) et ensuite substituons les coefficients (2.9) de la première forme fondamentale dans cette relation. Puis nous arrivons à **l'équation aux dérivées partielles** (notre abréviation : é.d.p.) suivante

$$\begin{aligned} (e^{2s} + \zeta_t^2(s, t))(e^{2s}\zeta_{ss}(s, t) - \zeta_s(s, t)e^{2s}) - 2\zeta_s(s, t)\zeta_t(s, t)(e^{2s}\zeta_{st}(s, t) - \zeta_t(s, t)e^{2s}) \\ + (e^{2s} + \zeta_s^2(s, t))(e^{2s}\zeta_{tt}(s, t) + \zeta_s(s, t)e^{2s}) = 0, \quad (s, t) \in R(s_0, t_0). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nous obtenons l'é.d.p. équivalente

$$\begin{aligned} 0 &= (e^{2s} + \zeta_t^2(s, t))(\zeta_{ss}(s, t) - \zeta_s(s, t)) \\ &\quad - 2\zeta_s(s, t)\zeta_t(s, t)(\zeta_{st}(s, t) - \zeta_t(s, t)) + (e^{2s} + \zeta_s^2(s, t))(\zeta_{tt}(s, t) + \zeta_s(s, t)) \\ &= (e^{2s} + \zeta_t^2(s, t))\zeta_{ss}(s, t) - 2\zeta_s(s, t)\zeta_t(s, t)\zeta_{st}(s, t) + (e^{2s} + \zeta_s^2(s, t))\zeta_{tt}(s, t) \\ &\quad + |\nabla\zeta(s, t)|^2\zeta_s(s, t), \quad (s, t) \in R(s_0, t_0), \end{aligned} \quad (2.13)$$

où $\nabla := (\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t})$ symbolise le gradient.

Remarque 1. Si on spécialise notre é.d.p. (2.13) sur les solutions $\zeta = \zeta(t)$, $0 < t < t_0$ indépendantes du paramètre s , nous obtenons

$$0 = e^{2s}\zeta_{tt}(t), \quad 0 < t < t_0.$$

Cette équation différentielle possède l'espace des solutions

$$\zeta(t) := \alpha + \beta t, \quad 0 < s < s_0, \quad 0 < t < t_0 \text{ avec les constantes } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Dans la forme

$$Z(s, t) := (e^s \cos t, e^s \sin t, \alpha + \beta t), \quad 0 < s < s_0, \quad 0 < t < t_0, \quad (2.15)$$

apparaît un **hélicoïde au-dessus de l'anneau circulaire** $A(s_0, t_0)$. Celui est construit par une famille de lignes droites à un paramètre, une propriété caractérisant les surfaces réglées. H. Catalan, un des grands géomètres français, démontrait en 1848 que les hélicoïdes sont les seules surfaces minimales dans cette classe. Quand nous regardons l'escalier pittoresque et intéressant de la Section 1, on découvre un tel hélicoïde. En outre, nous reconnaissons que cette fonction (2.14) résout le problème central pour les valeurs aux limites linéaires :

Définition 1. Sur l'intervalle fermé $I = I(s_0, t_0) := \{(s_0, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq t_0\}$ au bord du rectangle $R(s_0, t_0)$ à droite, nous prescrivons les valeurs aux limites de Dirichlet continues $\Phi = \Phi(t) : I \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(I, \mathbb{R})$. Puis cherchons une solution classique

$$\zeta = \zeta(s, t) \in C^2(R(s_0, t_0)) \cap C^1(\overline{R(s_0, t_0)} \setminus I(s_0, t_0)) \cap C^0(\overline{R(s_0, t_0)}) \quad (2.16)$$

de l'é.d.p.

$$\begin{aligned} & (e^{2s} + \zeta_t^2(s, t))\zeta_{ss}(s, t) - 2\zeta_s(s, t)\zeta_t(s, t)\zeta_{st}(s, t) + (e^{2s} + \zeta_s^2(s, t))\zeta_{tt}(s, t) \\ & = -|\nabla\zeta(s, t)|^2\zeta_s(s, t), \quad (s, t) \in R(s_0, t_0), \end{aligned} \tag{2.17}$$

avec les **conditions de Dirichlet** suivantes

$$\zeta(s_0, t) = \Phi(t), \quad 0 \leq t \leq t_0; \quad \zeta(s, 0) = \Phi(0), \quad 0 \leq s \leq s_0; \quad \zeta(s, t_0) = \Phi(t_0), \quad 0 \leq s \leq s_0, \tag{2.18}$$

et une **condition de Neumann**

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s, t)|_{s=0} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \tag{2.19}$$

au bord du rectangle $R(s_0, t_0)$. Nous appelons la combinaison (2.16)–(2.19) un **problème aux limites mixte** $\mathcal{P}(\Phi)$ et utilisons l’abréviation **p.l.m.**

Remarque 2. Avec une constante $\gamma \in \mathbb{R}$, on transforme une solution $\zeta(s, t)$, $(s, t) \in R(s_0, t_0)$ de (2.17) à une autre solution $\zeta(s, t) + \gamma$, $(s, t) \in R(s_0, t_0)$ de la même équation. Par conséquent, nous pouvons imposer la condition de Dirichlet homogène

$$\zeta(s, 0) = \Phi(0) = 0, \quad 0 \leq s \leq s_0,$$

dans notre p.l.m. sans perte de généralité. Pour notre région $R(s_0, t_0)$ nous définissons le **domaine réfléchi par rapport à l’axe des s**

$$R(s_0, -t_0) := \{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 0 < s < s_0, -t_0 < t < 0\};$$

puis nous considérons la **réflexion impaire du graphe par rapport à l’axe des s** dans la formule

$$\zeta^{**}(s, t) := \zeta(s, t), \quad (s, t) \in R(s_0, t_0) \quad \text{et} \quad \zeta^{**}(s, t) := -\zeta(s, -t), \quad (s, t) \in R(s_0, -t_0). \tag{2.20}$$

On s’aperçoit avec l’équation (2.17) que la prescription (2.20) étend notre solution au rectangle entier

$$R(s_0, |t_0|) := \{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 0 < s < s_0, |t| < t_0\}$$

résolvant cette é.d.p. là. Une itération des réflexions par rapport au bord linéaire du graphe fournit une solution de l’équation (2.17) sur la **bande entière**

$$R(s_0, |\infty|) := \{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: 0 < s < s_0\}.$$

Remarque 3. La réflexion concernant la variable s est plus difficile, parce que l’équation (2.17) ne reste pas invariante sous la transformation $s \rightarrow -s$. Relativement à cette substitution, il faut symétriser nos opérateurs en introduisant le **rectangle symétrique**

$$\Omega = R(|s_0|, t_0) := \{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: |s| < s_0, 0 < t < t_0\}. \tag{2.21}$$

Nous utilisons l’espace de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$ aux exposants $1 < p < \infty$, avec les deuxièmes dérivées faibles dans l’espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$. Les équations sont valables seulement **presque partout**, et nous écrivons brièvement p.p. ici. Nos considérations suivantes sont fondées sur la théorie des **solutions fortes**, avec une régularité située entre les solutions faibles et classiques. Cette théorie est présentée dans ‘Chapter 9 : Strong Solutions’ du traité Gilbarg–Trudinger [4].

Définition 2. Pour des fonctions

$$\zeta = \zeta(s, t) \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \tag{2.22}$$

nous introduisons l’**opérateur symétrisé**

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\zeta(s, t) := & (e^{2|s|} + \zeta_t^2(s, t))\zeta_{ss}(s, t) - 2(\zeta_s(s, t)\zeta_t(s, t))\zeta_{st}(s, t) + (e^{2|s|} + \zeta_s^2(s, t))\zeta_{tt}(s, t) \\ & + \chi(s)\zeta_s(s, t)(\nabla\zeta(s, t) \cdot \nabla\zeta(s, t)), \quad (s, t) \in \Omega \text{ p.p.}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

utilisant la **fonction de saut**

$$\chi(s) := \begin{cases} +1, & s \in (0, +\infty), \\ 0, & s = 0, \\ -1, & s \in (-\infty, 0). \end{cases} \quad (2.24)$$

Remarque 4. L'opérateur quasi-linéaire \mathcal{Q} est elliptique ; il possède des coefficients continus pour les termes de second ordre mais seulement bornés, plus précisément dans la classe $L^\infty(\Omega)$, pour les termes du premier ordre. Ceci nécessite la théorie des solutions fortes [4] sur le rectangle Ω symétrique. Cependant, l'é.d.p.

$$\mathcal{Q}\zeta = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad (2.25)$$

ne conserve pas le caractère du graphe minimal dans le demi-plan gauche

$$\mathbb{C}_- := \{s + it \in \mathbb{C} : s < 0\},$$

où un **graphe virtuel** $\zeta : R(-s_0, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ au-dessus du **domaine réfléchi par rapport à l'axe des t**

$$R(-s_0, t_0) := \{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -s_0 < s < 0, 0 < t < t_0\} \quad (2.26)$$

apparaît. On peut étendre chaque solution ζ du p.l.m. $\mathcal{P}(\Phi)$ avec une **réflexion paire par rapport au (t, z) -plan**

$$\zeta^*(s, t) := \zeta(s, t), \quad (s, t) \in R(s_0, t_0) \quad \text{et} \quad \zeta^*(s, t) := \zeta(-s, t), \quad (s, t) \in R(-s_0, t_0) \quad (2.27)$$

sur le domaine $R(-s_0, t_0)$, réfléchi par rapport à l'axe des t . On vérifie par le calcul (2.47) ci-dessous que cette fonction satisfait l' **é.d.p. symétrisée**

$$\mathcal{Q}\zeta^*(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \Omega \quad \text{p.p.} \quad (2.28)$$

Nous observons que la fonction ζ^* de (2.27) résout le problème symétrisé suivant.

Définition 3. Sur l'intervalle fermé $I = I(s_0, t_0) := \{(s_0, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq t_0\}$ au bord du rectangle $\Omega = R(|s_0|, t_0)$ à droite, nous prescrivons les valeurs aux limites de Dirichlet continues $\Phi = \Phi(t) : I \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(I, \mathbb{R})$. Puis considérons une solution

$$\zeta^* = \zeta^*(s, t) \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad (2.29)$$

de l'é.d.p. symétrisée

$$\mathcal{Q}\zeta^*(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \Omega \quad \text{p.p.} \quad (2.30)$$

avec les **conditions de Dirichlet symétriques**

$$\zeta^*(\pm s_0, t) = \Phi(t), \quad 0 \leq t \leq t_0; \quad \zeta^*(s, 0) = \Phi(0) \quad \text{et} \quad \zeta^*(s, t_0) = \Phi(t_0), \quad -s_0 \leq s \leq s_0, \quad (2.31)$$

au bord du rectangle Ω . La combinaison (2.29), (2.30), (2.31) représente le **problème $\mathcal{P}_*(\Phi)$ aux limites symétrisé**.

Maintenant, nous étudions la stabilité du problème aux limites mixte.

Théorème 1. *Nous avons les assertions suivantes :*

1. Pour chaque fonction $\Phi \in C^0(I, \mathbb{R})$ prescrite au bord, le p.l.m. $\mathcal{P}(\Phi)$ de la Définition 1 possède au plus une solution ζ . En outre, une solution de $\mathcal{P}(\Phi)$ dépend continûment des valeurs aux limites Φ dans la C^0 -topologie selon l'estimation (2.35) ci-dessous.
2. Si une solution $\zeta \in \mathcal{P}(\Phi)$ existe déjà pour la fonction différentiable

$$\Phi : I \rightarrow \mathbb{R} \in C^2(I, \mathbb{R}) \quad (2.32)$$

prescrite au bord, il y a exactement une solution $\xi = \zeta + \eta$ du problème $\mathcal{P}(\Psi)$ pour toutes les valeurs aux limites perturbées

$$\Psi = \Psi(t) : I \rightarrow \mathbb{R} \in C^2(I, \mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \|\Psi - \Phi\|_{C^2(I, \mathbb{R})} \leq \epsilon. \quad (2.33)$$

L'existence est établie par une itération, où le nombre $\epsilon = \epsilon(\Phi) > 0$ est choisi suffisamment petit. Si $2 < p < \infty$ dénote un exposant de Sobolev arbitraire, la $W^{2,p}(\Omega)$ -norme de la fonction de perturbation symétrisée $\eta^* \in W^{2,p}(\Omega)$ est majorée par $\|\Psi - \Phi\|_{C^2(I, \mathbb{R})}$.

Démonstration.

1. Considérons les deux solutions $\zeta_j \in \mathcal{P}(\Phi_j)$ pour leurs valeurs aux limites $\Phi_j \in C^0(I, \mathbb{R})$ avec les indices $j = 1, 2$. Parce que ces fonctions résolvent la même é.d.p. quasi-linéaire, leur différence $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$ satisfait une é.d.p. linéaire et elliptique, accessible au principe du maximum (comparez [8] Chapter VI, Section 2). Plus précisément, nous obtenons les équations

$$\begin{aligned} \zeta(s, t) &:= \zeta_1(s, t) - \zeta_2(s, t) \in C^2(R(s_0, t_0)) \cap C^1(\overline{R(s_0, t_0)} \setminus I(s_0, t_0)) \cap C^0(\overline{R(s_0, t_0)}), \\ \mathcal{L}(\zeta) &= 0 \quad \text{dans } R(s_0, t_0) \text{ avec un opérateur } \mathcal{L} \text{ linéaire et elliptique,} \\ &\text{telles que les conditions de Dirichlet } \zeta(s_0, t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t), \quad 0 \leq t \leq t_0; \\ \zeta(s, 0) &= \Phi_1(0) - \Phi_2(0), \quad 0 \leq s \leq s_0; \quad \zeta(s, t_0) = \Phi_1(t_0) - \Phi_2(t_0), \quad 0 \leq s \leq s_0, \\ &\text{et la condition de Neumann } \frac{\partial}{\partial s} \zeta(s, t)|_{s=0} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0 \text{ sont satisfaites.} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Le principe du maximum selon E. Hopf, particulièrement son lemme au points frontières pour les conditions aux limites libres de Neumann, entraîne que la fonction ζ ne peut atteindre son maximum ni dans le domaine $R(s_0, t_0)$ ni sur la frontière libre $\{(0, s) : 0 < s < s_0\}$ (voyez [8] Chapter VI, Section 1 s.v.p.). Puis nous déduisons l'estimation

$$\sup\{|\zeta_1(s, t) - \zeta_2(s, t)| : (s, t) \in R(s_0, t_0)\} \leq \sup\{|\Phi_1(t) - \Phi_2(t)| : t \in I(s_0, t_0)\}, \tag{2.35}$$

démontrant l'unicité de $\mathcal{P}(\Phi)$ aussi bien que la dépendance continue des valeurs aux limites Φ .

2. Nous réfléchissons la solution ζ du p.l.m. $\mathcal{P}(\Phi)$ avec ses valeurs aux limites (2.32) selon la Remarque 4, et nous obtenons une solution $\zeta^* \in \mathcal{P}_*(\Phi)$ du problème symétrisé dans Définition 3. On utilise la mise en équation de perturbation

$$\eta \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \tag{2.36}$$

et résout le problème $\mathcal{P}_*(\Psi)$ symétrisé pour les valeurs aux limites (2.33) perturbées. Dans ce contexte nous déterminons **l'équation de perturbation** (2.37) suivante : Nous arrangeons les termes dans cette équation selon leurs puissances des dérivées $\eta_s, \eta_t, \eta_{ss}, \eta_{st}, \eta_{tt}$. La somme des termes d'ordre 0 s'annule parce que ζ^* est une solution de notre é.d.p. ; les termes d'ordre 1 constituent **l'opérateur linéaire** \mathcal{L} et ceux d'ordre 2 et 3 sont assemblés à **l'opérateur non linéaire** \mathcal{K} . Puis nous calculons

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{Q}[\zeta^*(s, t) + \eta(s, t)] = (e^{2|s|} + (\zeta_t^*(s, t) + \eta_t(s, t))^2)(\zeta_{ss}^*(s, t) + \eta_{ss}(s, t)) \\ &\quad - 2[\zeta_s^*(s, t) + \eta_s(s, t)][\zeta_t^*(s, t) + \eta_t(s, t)](\zeta_{st}^*(s, t) + \eta_{st}(s, t)) \\ &\quad + (e^{2|s|} + (\zeta_s^*(s, t) + \eta_s(s, t))^2)(\zeta_{tt}^*(s, t) + \eta_{tt}(s, t)) \\ &\quad + \chi(s)[\zeta_s^*(s, t) + \eta_s(s, t)][(\nabla \zeta^*(s, t) + \nabla \eta(s, t)) \cdot (\nabla \zeta^*(s, t) + \nabla \eta(s, t))] \\ &= (e^{2|s|} + (\zeta_t^*(s, t))^2)\eta_{ss}(s, t) - 2\zeta_s^* \zeta_t^* \eta_{st}(s, t) + (e^{2|s|} + (\zeta_s^*(s, t))^2)\eta_{tt}(s, t) \\ &\quad + 2\zeta_t^*(s, t)\zeta_{ss}^*(s, t)\eta_t(s, t) - 2\zeta_{st}^*(\zeta_s^* \eta_t(s, t) + \zeta_t^* \eta_s(s, t)) + 2\zeta_s^*(s, t)\zeta_{tt}^*(s, t)\eta_s(s, t) \\ &\quad + 2\chi(s)\zeta_s^*(s, t)(\nabla \zeta^*(s, t) \cdot \nabla \eta(s, t)) + \chi(s)(\nabla \zeta^*(s, t) \cdot \nabla \zeta(s, t))\eta_s(s, t) - \mathcal{K}(\eta) \\ &=: \mathcal{L}(\eta) - \mathcal{K}(\eta) \quad \text{pour presque tous } (s, t) \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.37}$$

3. L'opérateur linéaire \mathcal{L} possède seulement le coefficient discontinu $\chi \in L^\infty(\Omega)$, mais tous les autres sont continus. Selon [4] Theorem 9.15, on peut résoudre uniquement le problème de Dirichlet

$$\mathcal{L}(\eta) = \omega \quad \text{p.p. in } \Omega \quad \text{avec } \eta \in W^{2,p}(\Omega) \quad \text{et } (\eta - \varphi) \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

pour tous les membres à droite $\omega \in L^p(\Omega)$ et pour toutes les valeurs au bord

$$\varphi = \varphi(t) \in C^2(I, \mathbb{R}) \quad \text{étendues constamment dans la variable } s \text{ sur } \Omega. \tag{2.38}$$

Le résultat [4] Lemma 9.17 révèle que l'opérateur inverse \mathcal{L}^{-1} existe sur cet espace avec des valeurs aux limites homogènes, lequel est borné relativement aux normes données :

Une solution de $\mathcal{L}(\eta) = \omega$ p.p. in Ω avec $\eta \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfait l'estimation $\|\eta\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \|\omega\|_{L^p(\Omega)}$ pour tous $\omega \in L^p(\Omega)$. (2.39)

L'espace de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$ est continûment plongé dans l'espace de Hölder $C^{1,\mu}(\Omega)$ avec l'exposant höldérien $\mu = 1 - \frac{2}{p} \in (0, 1)$. Ce théorème d'immersion de Sobolev et Morrey est contenu dans [4] Theorem 7.26. Finalement, [4] Corollary 9.18 induit que les valeurs aux limites dans (2.38) sont continûment atteintes.

4. L'opérateur non linéaire \mathcal{K} représente une somme de termes homogènes de deuxième ou troisième degré en $\eta_s, \eta_t, \eta_{ss}, \eta_{st}, \eta_{tt}$, où les coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ dépendent de la solution initiale ζ et sa continuation ζ^* réfléchie. Nous observons que tout au plus une des deuxièmes dérivées $\eta_{ss}, \eta_{st}, \eta_{tt}$ apparaît comme facteur dans chaque terme et que la $W^{2,p}(\Omega)$ -norme domine la $C^1(\Omega)$ -norme. Puis nous arrivons à l'**inégalité de contraction**

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(\eta_1) - \mathcal{K}(\eta_2)\|_{L^p(\Omega)} &\leq C(\rho) \|\eta_1 - \eta_2\|_{W^{2,p}(\Omega)} \\ \text{pour tous } \eta_j \in W^{2,p}(\Omega) \text{ satisfaisant } \|\eta_j\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq \rho \quad \text{et } j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

avec $C(\rho) \rightarrow 0+$ pour $\rho \rightarrow 0+$ et $\mathcal{K}(0) = 0$.

5. Alors nous suivons la démonstration de Proposition 4 dans le livre [8] Chapter XII, Section 9, où nous remplaçons les estimations de J. Schauder par les résultats ci-dessus sur les solutions fortes. Pour chaque Ψ de (2.33) nous résolvons le problème

$$\mathcal{L}(\eta_0) = 0 \quad \text{p.p. in } \Omega \quad \text{avec } \eta_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{et } \eta_0 = \Psi - \Phi \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.41)$$

Nous observons que notre solution dépend continûment des valeurs aux limites, relativement aux normes données. Puis nous résolvons l'équation itérative

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\eta_{k+1}) &= \mathcal{K}(\eta_k) \quad \text{p.p. in } \Omega \quad \text{avec } \eta_{k+1} \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \\ \eta_{k+1} &= \Psi - \Phi \text{ sur } \partial\Omega \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.42)$$

Avec les assertions (2.38), (2.39), (2.40) on s'aperçoit immédiatement, que la suite $\{\eta_k\}_{k=1,2,\dots}$ converge dans l'espace banachien $W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ à la solution unique

$$\mathcal{L}(\eta) = \mathcal{K}(\eta) \quad \text{p.p. in } \Omega \quad \text{avec } \eta \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{et } \eta = \Psi - \Phi \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.43)$$

On obtient une solution du problème symétrisé

$$\xi = \xi(s, t) := \zeta^*(s, t) + \eta(s, t) \in \mathcal{P}_*(\Psi) \quad (2.44)$$

pour les valeurs aux limites (2.33) perturbées. Le théorème du point fixe de Banach fournit aussi bien l'existence d'une telle solution.

6. Considérons la **fonction réfléchie**

$$\xi^- = \xi^-(s, t) := \xi(-s, t), \quad (s, t) \in \Omega, \quad (2.45)$$

qui satisfait la même condition à la frontière que ξ . Nous calculons pour $s > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\xi^-(s, t) &= (e^{2s} + \xi_t^2(-s, t))\xi_{ss}(-s, t) - 2(\xi_s(-s, t)\xi_t(-s, t))\xi_{st}(-s, t) \\ &\quad + (e^{2s} + \xi_s^2(-s, t))\xi_{tt}(-s, t) + \chi(-s)\xi_s(-s, t)(\nabla\xi(-s, t) \cdot \nabla\xi(-s, t)) \\ &= \mathcal{Q}\xi|_{(-s,t)} = 0 \quad \text{pour presque tous } (s, t) \in R(s_0, t_0). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ensuite nous évaluons pour $s < 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\xi^-(s, t) &= (e^{-2s} + \xi_t^2(-s, t))\xi_{ss}(-s, t) - 2(\xi_s(-s, t)\xi_t(-s, t))\xi_{st}(-s, t) \\ &\quad + (e^{-2s} + \xi_s^2(-s, t))\xi_{tt}(-s, t) + \chi(-s)\xi_s(-s, t)(\nabla\xi(-s, t) \cdot \nabla\xi(-s, t)) \\ &= \mathcal{Q}\xi|_{(-s,t)} = 0 \quad \text{pour presque tous } (s, t) \in R(-s_0, t_0). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Par conséquent, la fonction ξ^- fournit une solution du problème symétrisé $\mathcal{P}_*(\Psi)$ aussi bien que la fonction ξ . Nous savons de [4] Theorem 9.5, que le problème de Dirichlet possède au plus une solution forte pour les opérateurs linéaires, respectivement aux coefficients continus ou bornés du premier ou second ordre. Avec les considérations dans la Section 1, cette assertion reste valable pour notre problème $\mathcal{P}_*(\Psi)$ quasi-linéaire. Ainsi nous obtenons l'identité

$$\xi^-(s, t) \equiv \xi(s, t), \quad (s, t) \in \Omega, \tag{2.48}$$

et ensuite la condition de Neumann

$$\frac{\partial}{\partial s} \xi(s, 0)|_{s=0} = 0, \quad 0 < s < s_0. \tag{2.49}$$

Par une reconstruction locale on peut établir la régularité classique :

$$\xi \in C^2(R(s_0, t_0)). \tag{2.50}$$

Finalement, la restriction

$$\xi|_{\overline{R(s_0, t_0)}} \tag{2.51}$$

résout le problème perturbé $\mathcal{P}(\Psi)$ aux limites mixte. \square

3. Visualisation du plan étale et l'aire de ses graphes minimaux non paramétriques

Si nous avons une solution au problème $\mathcal{P}(\Psi_k)$ avec la fonction Ψ_k continue pour tous $k = 1, 2, \dots$ et les valeurs Ψ_k aux limites convergent uniformément à la fonction $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$, est-ce qu'il existe une solution du problème $\mathcal{P}(\Psi)$? Nous répondrons positivement à cette question dans la Section 4. Dans ce contexte, nous relevons la fonction exponentielle sur le revêtement universel \mathcal{R} du plan $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour le confort du lecteur, nous construisons explicitement cette surface \mathcal{R} et l'appelons *plan étale*, parce que cette surface de Riemann existe globalement dans son extension naturelle.

Pour une meilleure visualisation, nous prescrivons le **niveau des feuilles** de notre plan étale par

$$-\infty \leq \theta_{-\infty} < \dots < \theta_{-2} < \theta_{-1} < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_\infty \leq \infty. \tag{3.1}$$

Ensuite nous définissons **la n-ième feuille**

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n := \{ \mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathbb{R}^3 : x = r \cos t, y = r \sin t; 0 < r < \infty, 0 \leq t < 2\pi \} \\ \text{pour } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nous obtenons le **plan étale**

$$\mathcal{R} := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_n \tag{3.3}$$

au-dessous du plan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \theta_\infty\}$ avec la **projection étale** surjective

$$\Theta : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{définie par } \mathcal{R} \ni (x, y, \theta_n) = \mathbf{x} \rightarrow \Theta(\mathbf{x}) = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{3.4}$$

Chaque point $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$ est situé dans exactement une feuille et possède la représentation

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = (r \cos t, y = r \sin t, \theta_n) \quad \text{avec les nombres uniquement déterminés :} \\ 0 < r < \infty, 0 \leq t < 2\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Par conséquent, nous pouvons définir **l'angle étale**

$$\tau(\mathbf{x}) := 2\pi n + t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}, \tag{3.6}$$

aussi bien que **le rayon étale**

$$\rho(\mathbf{x}) := r \in (0, +\infty), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}, \tag{3.7}$$

qui ensemble caractérisent les points dans \mathcal{R} uniquement. Bien sûr, la projection étale Θ ne fournit pas une injection mais une recouvrance infinie du plan $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, avec l'origine comme point de branchement. Plus précisément, chaque point $(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ possède **la fibre**

$$\Theta^{-1}((x, y)) = \{(x, y, \theta_n) : n \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.8)$$

Pour chaque point $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}$ on introduit le **voisinage**

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_0) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{R} : |\tau(\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{x}_0)| < \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (3.9)$$

La restriction de la projection étale sur ce voisinage

$$\Theta_{\mathbf{x}_0} : \mathcal{V}(\mathbf{x}_0) \rightarrow V(x_0, y_0) := \{(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid (x, y) \cdot (x_0, y_0) > 0\} \quad (3.10)$$

fournit une bijection sur le demi-plan $V(x_0, y_0)$. Par conséquent, sa transformation inverse

$$\Theta_{\mathbf{x}_0}^{-1} : V(x_0, y_0) \rightarrow \mathcal{V}(\mathbf{x}_0) \quad (3.11)$$

représente un **relèvement de $V(x_0, y_0)$ sur \mathcal{R} autour du point $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}$** . Pour notre surface de Riemann \mathcal{R} , nous obtenons un **atlas conforme** avec l'ensemble des cartes

$$\{\Theta_{\mathbf{x}_0}^{-1} : \mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}\}, \quad (3.12)$$

où les changements des cartes sont localement conformes. En particulier, les feuilles \mathcal{R}_n sont recollées continûment près des **fentes**

$$\mathcal{F}_n := \{\mathbf{x} = (r, 0, \theta_n) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < \infty\} \quad \text{pour } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.13)$$

La famille continue des **cercles étales au rayon r**

$$\mathcal{C}_r := \{\mathbf{x} \in \mathcal{R} : \rho(\mathbf{x}) = r\}, \quad 0 < r < \infty, \quad (3.14)$$

fournit un balayage du plan étale aussi bien que les **demi-droites étales** au paramètre t

$$\mathcal{D}_t := \{\mathbf{x} \in \mathcal{R} : \tau(\mathbf{x}) = t\}, \quad -\infty < t < +\infty; \quad (3.15)$$

leur combinaison représente un **réseau orthogonal** sur notre surface \mathcal{R} . Nous définissons **l'anneau circulaire relevé**

$$\mathcal{A}(r, t) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{R} : 1 < \rho(\mathbf{x}) < r, 0 < \tau(\mathbf{x}) < t\} \quad \text{avec } r > 1 \text{ et } t > 0, \quad (3.16)$$

qui est délimité par certains segments sur les lignes droites ou circulaires $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_r, \mathcal{D}_0, \mathcal{D}_t$. Le **cercle-unité étale \mathcal{C}_1** est contenu dans le **cylindre-unité**

$$\mathcal{Z} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\},$$

où nous introduisons le **champ normal**

$$\mathcal{N} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \quad \text{avec } \mathcal{N}(\mathbf{x}) := (x, y, 0) \quad \text{pour tous } \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathcal{Z}. \quad (3.17)$$

Maintenant, nous relevons la fonction exponentielle sur cette surface de Riemann, et nous obtenons globalement sa inverse.

Définition 4. Considérons la fonction discrète

$$\theta : \mathbb{R} \rightarrow \{\theta_n : n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{avec } \theta(t) := \theta_n \quad \text{si } t \in [2\pi n, 2\pi(n+1)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.18)$$

Nous introduisons **la fonction exponentielle relevée**

$$\text{Exp}_{\mathcal{R}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \text{Exp}_{\mathcal{R}}(s + it) := (\exp(s + it), \theta(t)) = (e^s \cos t, e^s \sin t, \theta(t)), \quad s + it \in \mathbb{C}, \quad (3.19)$$

laquelle fournit une application conforme du plan \mathbb{C} gaussien sur le plan étale \mathcal{R} de Riemann. En particulier, cette application transforme conformément le rectangle plan $R(s_0, t_0)$ aux longueurs $s_0 > 0$ et $t_0 > 0$ sur l'anneau circulaire relevé $\mathcal{A}(r_0, t_0)$ avec $r_0 := \exp(s_0) > 1$.

La fonction inverse de $\text{Exp}_{\mathcal{R}}$ définit le **logarithme étale**

$$\text{Log}_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \text{Log}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) := s + it, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R} \quad \text{si} \quad \text{Exp}_{\mathcal{R}}(s + it) = \mathbf{x}, \quad s + it \in \mathbb{C}, \tag{3.20}$$

représentant une application conforme de \mathcal{R} sur \mathbb{C} .

Avec ces fonctions nous relevons le p.l.m. de Définition 1 dans Section 2 sur la surface de Riemann. Premièrement, nous relevons les valeurs aux limites

$$\Phi = \Phi(t) : I = I(s_0, t_0) \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(I, \mathbb{R}) \tag{3.21}$$

sur la **frontière fixe** par

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) := \Phi(\tau(\mathbf{x})) - \theta(\tau(\mathbf{x})) \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{A}(r_0, t_0) \setminus \mathcal{C}_1. \tag{3.22}$$

Deuxièmement, nous relevons la solution

$$\zeta \in C^2(R(s_0, t_0)) \cap C^1(\overline{R(s_0, t_0)} \setminus I(s_0, t_0)) \cap C^0(\overline{R(s_0, t_0)}) \tag{3.23}$$

du p.l.m. $\mathcal{P}(\Phi)$ de Définition 1 dans Section 2 à la **solution non paramétrique**

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} : \overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)} &\rightarrow \mathbb{R} \in C^2(\mathcal{A}(r_0, t_0)) \cap C^1(\overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)} \setminus \mathcal{C}_{r_0}) \cap C^0(\overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)} \setminus \{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots\}) \\ &\text{avec la prescription } \tilde{\zeta}(\mathbf{x}) := (\zeta - \theta) \circ (\text{Log}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x})) \\ &= \zeta(\text{Log}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x})) - \theta(\text{Log}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x})) \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Si nous relevons les graphes $Z = Z(s, t) : \overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ au-dessus du plan étale en (2.4) sur \mathcal{R} , nous calculons

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\mathbf{x}) := Z \circ \text{Log}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) &= [(g(s, t), \theta(t)) + (\zeta(s, t) - \theta(t))E] \circ \text{Log}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) \\ &= [\text{Exp}_{\mathcal{R}}(s + it) + (\zeta(s, t) - \theta(t))E] \circ \text{Log}_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \tilde{\zeta}(\mathbf{x})E, \quad \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nous obtenons un graphe au-dessus des feuilles dans notre plan étale, et la représentation (3.25) justifie l'attribut *non paramétrique* de la solution $\tilde{\zeta}$ en (3.24).

Utilisons le signe $[t] \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ pour tout $t > 0$ réel, qui indique le *nombre maximal* n satisfaisant $n \leq t$. Nous reconnaissons de (3.24) les équations suivantes

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\mathbf{x}) &:= \zeta(\text{Log}_{\mathcal{R}}(x, y, \theta_n)) - \theta_n \quad \text{si} \quad \mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)} \cap \mathcal{R}_n \\ &\text{sur les feuilles d'ordre } n = 0, \dots, n_0 := \left\lceil \frac{t_0}{2\pi} \right\rceil \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dans le **premier cas** où $t_0 \neq 2\pi k$ soient valables pour tous $k \in \mathbb{N}$, l'intersection $\mathcal{A}(r_0, t_0) \cap \{\mathcal{R}_{n_0} \setminus \mathcal{F}_{n_0}\}$ fournit un non-vide ensemble ouvert. Dans le **second cas** où $t_0 \in 2\pi \mathbb{N}$ soit un multiple entier de 2π , l'intersection $\overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)} \cap \mathcal{R}_{n_0}$ ci-dessus est réduite à un segment droit dans la fente \mathcal{F}_{n_0} .

Pour $n = 0, 1, \dots, n_0 - 1$, le **feuille** $\mathcal{G}_n := \mathcal{A}(r_0, t_0) \cap \{\mathcal{R}_n \setminus \mathcal{F}_n\}$ ouvert est transformé conformément sous la projection étale Θ sur le domaine plan

$$\Omega_n := \{(x, y) \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) : 1 < x^2 + y^2 < r_0^2\}, \tag{3.27}$$

avec une fente sur le demi-axe positif des x .

Dans le premier cas, le **feuille** $\mathcal{G}_{n_0} := \mathcal{A}(r_0, t_0) \cap \{\mathcal{R}_{n_0} \setminus \mathcal{F}_{n_0}\}$ est transformé sous la projection conforme Θ sur le **secteur de l'anneau circulaire** suivant

$$\Omega_{n_0} := \{(x, y) \in \mathbb{C} : x = r \cos t, y = r \sin t, 1 < r < r_0, 0 < t < (t_0 - 2\pi n_0)\}. \tag{3.28}$$

Dans le second cas, les deux ensembles \mathcal{G}_{n_0} et Ω_{n_0} sont vides.

Tous ces relèvements sur \mathcal{R} sont achevés par les applications

$$\overset{n}{\Theta}(x, y) := \Theta|_{\overline{\mathcal{G}_n}}^{-1}(x, y) = (x, y, \theta_n) : \Omega_n \rightarrow \mathcal{G}_n, \quad n = 0, \dots, n_0, \tag{3.29}$$

où nous omettons $\overset{n_0}{\Theta}$ au second cas.

La fonction $\tilde{\zeta} : \overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ de (3.26) possède des **sauts de hauteur** $(\theta_n - \theta_{n-1})$ en transition sur les fentes \mathcal{F}_n pour $n = 1, \dots, n_0$. La différentiation de $\tilde{\zeta}$ est possible à l'aide des cartes (3.10) et (3.11) dans l'atlas complexe (3.12) par une rétraction ; mais ceci n'est pas possible sur les fentes ! Cette différentiation concerne seulement les variables x et y , mais n'affecte pas la dernière variable θ_n discrète. Puis nous employons **le gradient**

$$\text{grad } \tilde{\zeta}(\mathbf{x}) := (\tilde{\zeta}_x, \tilde{\zeta}_y)|_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathcal{G}_n, \quad n = 0, 1, \dots, n_0, \tag{3.30}$$

où le feuillet \mathcal{G}_{n_0} n'apparaît pas au second cas. En outre, nous définissons **la divergence**

$$\text{div } \tilde{h}(\mathbf{x}) := (\tilde{f}_x + \tilde{g}_y)|_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathcal{A}(r_0, t_0) \tag{3.31}$$

des champs vectoriels

$$\tilde{h} = \tilde{h}(\mathbf{x}) := (\tilde{f}(\mathbf{x}), \tilde{g}(\mathbf{x})) \in C^1(\mathcal{A}(r_0, t_0), \mathbb{R}^2). \tag{3.32}$$

Au-dessus de chaque feuillet \mathcal{G}_n , $n = 0, \dots, n_0$ la fonction $\tilde{\zeta}$ représente un graphe minimal non paramétrique, et nous obtenons l'é.d.p. en forme de divergence

$$\text{div} \left(\frac{\text{grad } \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)}{\sqrt{1 + |\text{grad } \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2}} \right) = 0, \quad \mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathcal{G}_n, \quad n = 0, \dots, n_0. \tag{3.33}$$

La **normale** positive de $\tilde{\zeta}$

$$\tilde{N}(\mathbf{x}) := \{1 + |\text{grad } \tilde{\zeta}(\mathbf{x})|^2\}^{-\frac{1}{2}} (\text{grad } \tilde{\zeta}(\mathbf{x}), 1)|_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathcal{G}_n, \quad n = 0, \dots, n_0, \tag{3.34}$$

est continûment prolongeable, à travers des fentes, sur l'espace topologique $\overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)} \setminus \mathcal{C}_{r_0}$. Par conséquent, l'équation (3.33) reste valable sur les fentes, et nous parlons de **l'équation des graphes minimaux en forme de divergence** sur $\mathcal{A}(r_0, t_0)$.

La condition de Neumann (2.19) pour la solution ζ se transforme pour la solution $\tilde{\zeta}$ à la **condition frontière libre**

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{N}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pour tous } \mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \partial \mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_1, \quad n = 0, \dots, n_0, \tag{3.35}$$

et reste continue à travers des fentes. L'équation (3.35) révèle que le graphe minimal rencontre verticalement notre cylindre-unité \mathcal{Z} à la **frontière libre relevée** $\partial \mathcal{A}(r_0, t_0) \cap \mathcal{C}_1$.

Nous rappelons la **condition frontière fixe**, équivalent aux équations (2.18), avec

$$\tilde{\zeta}(\mathbf{x}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{A}(r_0, t_0) \setminus \mathcal{C}_1, \tag{3.36}$$

à la **frontière fixe relevée** $\partial \mathcal{A}(r_0, t_0) \setminus \mathcal{C}_1$.

Combinons les équations ci-dessus à la

Définition 5. Pour les valeurs aux limites $\tilde{\Phi}$ en (3.22) prescrites, une solution (3.24) ou (3.26) de l'équation non paramétrique (3.33) pour nos graphes minimaux, avec respectivement les conditions frontières libre (3.35) et fixe (3.36), se trouve dans la classe $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\Phi})$. Nous appelons $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\Phi})$ le **problème relevé aux limites mixte**, ou nous parlons brièvement du **p.r.l.m.** ici.

Les considérations précédentes démontrent l'équivalence des problèmes $\mathcal{P}(\Phi)$ et $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\Phi})$.

À l'aide du théorème de transformation pour les intégrales doubles, nous évaluons l'aire de la surface $Z(s, t)$, $(s, t) \in R(s_0, t_0)$ en (2.4) par l'intégrale $\Sigma(\tilde{\zeta}, \mathcal{A}(r_0, t_0))$.

Définition 6. Avec les domaines plans Ω_n pour $n = 0, \dots, n_0$ en (3.27) et (3.28), la **formule aréolaire non paramétrique**

$$\Sigma(\tilde{\zeta}, \mathcal{A}(r_0, t_0)) := \sum_{n=0}^{n_0} \int_{\Omega_n} \sqrt{1 + |\text{grad } \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2} \, dx \, dy \tag{3.37}$$

détermine l'aire du graphe $\tilde{\zeta} : \overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)} \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\mathcal{A}(r_0, t_0))$ non paramétrique.

La brillante méthode de R. Finn (comparez [8] Chapter XII, Section 9, Proposition 1), appliquée sur chaque feuillet, nous permet une estimation de l’aire pour les solutions du p.r.l.m.

Théorème 2. *On peut borner l’aire de la solution $\tilde{\zeta}$ du p.r.l.m. $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\Phi})$ par ses valeurs $\tilde{\Phi}$ en (3.22) sur la frontière fixe :*

$$\begin{aligned} \Sigma(\tilde{\zeta}, \mathcal{A}(r_0, t_0)) &\leq \sum_{n=0}^{n_0} |\Omega_n| + (r_0 - 1) |\Phi(0) - \theta_0| \\ &\quad + (r_0 - 1) \sum_{n=0}^{n_0-1} (\theta_{n+1} - \theta_n) + (r_0 - 1) |\Phi(t_0) - \theta_{n_0}| + \sum_{n=0}^{n_0} \alpha_n. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Dans cette estimation, $|\Omega_n|$ signifie l’aire plane du domaine Ω_n , et les aires cylindriques sont données par

$$\alpha_n := \int_{\mathcal{H}_n} |\tilde{\Phi}(\mathbf{x})| d\sigma(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{H}_n} |\Phi(\tau(\mathbf{x})) - \theta_n| d\sigma(\mathbf{x}) \tag{3.39}$$

pour $n = 0, \dots, n_0$. Notre n -ième intégrale s’étend sur la courbe circulaire $\mathcal{H}_n := \partial\mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_{r_0}$, en orientation positive, avec l’élément de l’arc $d\sigma(\mathbf{x})$.

Démonstration.

1. Nous allons multiplier l’é.d.p. (3.33) avec la solution et intégrer ce produit séparément sur chaque feuillet \mathcal{G}_n . Pour $n = 0, \dots, n_0$ on rétracte l’intégration au feuillet \mathcal{G}_n dans le domaine plan Ω_n en (3.27) et (3.28) sous la projection (3.29). La frontière du feuillet, parcourue avec l’orientation positive, induit la décomposition suivante :

$$\partial\mathcal{G}_n = \partial^+\mathcal{G}_n \cup \mathcal{H}_n \cup \partial^-\mathcal{G}_n \cup (\partial\mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_1) \quad \text{pour } n = 0, \dots, n_0. \tag{3.40}$$

Les segments droits $\partial^+\mathcal{G}_n$ et $\partial^-\mathcal{G}_n$ sur les demi-droites correspondantes sont parcourus respectivement en direction positive ou négative. En outre, les segments circulaires \mathcal{H}_n et $\partial\mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_1$ sont parcourus respectivement sur le cercle \mathcal{C}_{r_0} en direction positive et sur le cercle-unité \mathcal{C}_1 en direction négative. Au feuillet \mathcal{G}_n avec cette frontière orientée $\partial\mathcal{G}_n$, le théorème de Stokes est applicable : Celui-ci peut être réduit au théorème de Gauss par la rétraction (3.29) et une exhaustion suivante des domaines $\Omega_n, n = 0, \dots, n_0$. Ces derniers possèdent des fentes et des frontières singulières.

2. D’abord nous multiplions l’é.d.p. (3.33) avec la solution $\tilde{\zeta}$ et dérivons partiellement.

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n) \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2}} \right) \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\tilde{\zeta}(x, y, \theta_n) \operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2}} \right) - \frac{|\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2}} \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{\tilde{\zeta}(x, y, \theta_n) \operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2}} \right) - \sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(\mathbf{x})|^2}} \end{aligned} \tag{3.41}$$

pour tous $\mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathcal{G}_n, n = 0, \dots, n_0$.

Ensuite nous arrivons à l’estimation centrale :

$$\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2} \leq 1 + \operatorname{div} \left(\frac{\tilde{\zeta}(x, y, \theta_n) \operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2}} \right) \tag{3.42}$$

pour tous $\mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathcal{G}_n, n = 0, \dots, n_0$.

3. Pour $n = 0, \dots, n_0$ nous introduisons les formes pfaffiennes

$$\omega_n(x, y) := \frac{\tilde{\zeta}(x, y, \theta_n) \tilde{\zeta}_x(x, y, \theta_n)}{\sqrt{1 + |\text{grad } \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2}} dy - \frac{\tilde{\zeta}(x, y, \theta_n) \tilde{\zeta}_y(x, y, \theta_n)}{\sqrt{1 + |\text{grad } \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2}} dx$$

pour tous $\mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathcal{G}_n$.

(3.43)

L'intégration de notre inégalité (3.42), au moyen du théorème de Stokes, fournit le résultat

$$\int_{\Omega_n} \sqrt{1 + |\text{grad } \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)|^2} dx dy \leq |\Omega_n| + \int_{\mathcal{G}_n} d\omega_n$$

$$= |\Omega_n| + \int_{\partial \mathcal{G}_n} \omega_n(x, y, \theta_n) \quad \text{pour } n = 0, \dots, n_0.$$
(3.44)

Maintenant, nous évaluons les intégrales curvilignes au côté droit dans (3.44). Introduisons le **champ de vecteurs**

$$\tilde{M}(\mathbf{x}) = (\tilde{l}(\mathbf{x}), \tilde{m}(\mathbf{x})) := \{1 + |\text{grad } \tilde{\zeta}(\mathbf{x})|^2\}^{-\frac{1}{2}} (\tilde{\zeta}_x(\mathbf{x}), \tilde{\zeta}_y(\mathbf{x}))$$

pour tous $\mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathcal{G}_n, n = 0, \dots, n_0$,

(3.45)

qui représente la projection plane de la normale et satisfait

$$|\tilde{M}(\mathbf{x})| < 1 \quad \text{pour tous } \mathbf{x} = (x, y, \theta_n) \in \mathcal{G}_n, n = 0, \dots, n_0.$$
(3.46)

4. Nous paramétrons le segment circulaire $\partial \mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_1$ de la frontière libre par

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), \theta_n) := (\cos t, \sin t, \theta_n), \quad 0 \leq t < \beta_n,$$
(3.47)

ou $\beta_n := 2\pi$ pour $n = 0, \dots, n_0 - 1$ et $\beta_{n_0} = (t_0 - 2\pi n_0)$. Utilisant l'orientation négative aussi bien que la condition frontière (3.35) libre, nous obtenons

$$\int_{\partial \mathcal{G}_n \cap \mathcal{C}_1} \omega_n = - \int_0^{\beta_n} \tilde{\zeta}(\mathbf{x}(t)) \{ \tilde{l}(\mathbf{x}(t)) y'(t) - \tilde{m}(\mathbf{x}(t)) x'(t) \} dt$$

$$= - \int_0^{\beta_n} \tilde{\zeta}(\mathbf{x}(t)) \{ \tilde{N}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathcal{N}(\mathbf{x}(t)) \} dt = 0 \quad \text{pour } n = 0, \dots, n_0.$$
(3.48)

Avec la paramétrisation

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), \theta_n) := (r_0 \cos t, r_0 \sin t, \theta_n), \quad 0 \leq t < \beta_n,$$

nous estimons les intégrales le long du cercle \mathcal{C}_{r_0} . À l'aide de (3.46) et (3.36) nous reconnaissons

$$\left| \int_{\mathcal{H}_n} \omega_n \right| = \left| \int_0^{\beta_n} \tilde{\zeta}(\mathbf{x}(t)) \{ \tilde{l}(\mathbf{x}(t)) y'(t) - \tilde{m}(\mathbf{x}(t)) x'(t) \} dt \right|$$

$$\leq \int_0^{\beta_n} |\tilde{\zeta}(\mathbf{x}(t))| | \tilde{l}(\mathbf{x}(t)) y'(t) - \tilde{m}(\mathbf{x}(t)) x'(t) | dt$$

$$\leq \int_0^{\beta_n} |\tilde{\zeta}(\mathbf{x}(t))| | \tilde{M}(\mathbf{x}(t)) | \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^{\beta_n} |\tilde{\Phi}(\mathbf{x}(t))| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_{\mathcal{H}_n} |\tilde{\Phi}(\mathbf{x})| d\sigma(\mathbf{x}) \quad \text{pour } n = 0, \dots, n_0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

5. Avec la méthode ci-dessus, nous arrivons aux inégalités correspondantes

$$\left| \int_{\partial^+ \mathcal{G}_0} \omega_0 \right| \leq (r_0 - 1) |\tilde{\Phi}(0)| \quad \text{et} \quad \left| \int_{\partial^- \mathcal{G}_{n_0}} \omega_{n_0} \right| \leq (r_0 - 1) |\tilde{\Phi}(t_0)|. \tag{3.50}$$

Finalement, nous contrôlons les intégrales en transition sur les fentes \mathcal{F}_{n+1} pour $n = 0, \dots, n_0 - 1$. Le champ de vecteurs \tilde{M} est continu à travers ces segments droits ; mais la fonction $\tilde{\zeta}$ possède un saut de hauteur $(\theta_{n+1} - \theta_n)$ près des fentes. Les symboles $\tilde{\zeta}^-$ et $\tilde{\zeta}^+$ désignent respectivement les extensions continues de la fonction $\tilde{\zeta}$ du feuillet \mathcal{G}_n ou \mathcal{G}_{n+1} jusqu'à la fente \mathcal{F}_{n+1} . Nous utilisons la paramétrisation

$$\mathbf{x}(r) = (x(r), y(r), \theta_{n+1}) := (r, 0, \theta_{n+1}), \quad 1 \leq r < r_0,$$

sur la fente \mathcal{F}_{n+1} et parcourons un segment $\partial^- \mathcal{G}_n$ dans la direction négative et l'autre $\partial^+ \mathcal{G}_{n+1}$ dans la direction positive. Ainsi nous reconnaissons

$$\begin{aligned} \int_{\partial^- \mathcal{G}_n} \omega_n + \int_{\partial^+ \mathcal{G}_{n+1}} \omega_{n+1} &= \int_1^{r_0} \tilde{\zeta}^-(\mathbf{x}(r)) \tilde{m}(\mathbf{x}(r)) dr - \int_1^{r_0} \tilde{\zeta}^+(\mathbf{x}(r)) \tilde{m}(\mathbf{x}(r)) dr \\ &= \int_1^{r_0} (\tilde{\zeta}^-(\mathbf{x}(r)) - \tilde{\zeta}^+(\mathbf{x}(r))) \tilde{m}(\mathbf{x}(r)) dr \end{aligned} \tag{3.51}$$

à l'aide de (3.43) et (3.45). En observant (3.46), nous arrivons à l'estimation

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial^- \mathcal{G}_n} \omega_n + \int_{\partial^+ \mathcal{G}_{n+1}} \omega_{n+1} \right| &\leq \int_1^{r_0} |\tilde{\zeta}^+(\mathbf{x}(r)) - \tilde{\zeta}^-(\mathbf{x}(r))| |\tilde{m}(\mathbf{x}(r))| dr \\ &\leq (r_0 - 1)(\theta_{n+1} - \theta_n) \quad \text{pour } n = 0, \dots, n_0 - 1. \end{aligned} \tag{3.52}$$

6. Au moyen de la Définition 6 nous additionnons (3.44) de 0 jusqu'à n_0 en observant (3.40) et (3.48)

$$\begin{aligned} \Sigma(\tilde{\zeta}, \mathcal{A}(r_0, t_0)) &\leq \sum_{n=0}^{n_0} |\Omega_n| + \sum_{n=0}^{n_0} \int_{\partial \mathcal{G}_n} \omega_n \leq \sum_{n=0}^{n_0} |\Omega_n| \\ &\quad + \int_{\partial^+ \mathcal{G}_0} \omega_0 + \sum_{n=0}^{n_0-1} \left(\int_{\partial^- \mathcal{G}_n} \omega_n + \int_{\partial^+ \mathcal{G}_{n+1}} \omega_{n+1} \right) + \int_{\partial^- \mathcal{G}_{n_0}} \omega_{n_0} + \sum_{n=0}^{n_0} \int_{\mathcal{H}_n} \omega_n. \end{aligned} \tag{3.53}$$

À l'aide de (3.50), (3.52), et (3.49) nous arrivons à notre assertion (3.38), où nous rappelons (3.22) à la frontière fixe.

7. Nous remarquons que nous avons besoin de la continuité du champ de vecteurs \tilde{M} jusqu'à la frontière \mathcal{C}_{r_0} pour l'estimation (3.49). Sous nos conditions générales, nous estimons

$$\Sigma(\tilde{\zeta}, \mathcal{A}(r, t_0)) \quad \text{pour suffisamment grands } 1 < r < r_0,$$

et ensuite on contrôle le passage $r \rightarrow r_0$ – à la limite. \square

4. Existence et unicité du problème variationnel demi-libre au moyen de difféomorphismes harmoniques

Maintenant il est avantageux d'introduire des paramètres conformes dans la surface en (2.4) $Z(s, t): R(s_0, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ou de transformer la métrique riemannienne (2.9) dans la forme isotherme. Puis nous obtenons une solution au *problème paramétrique demi-libre* que nous allons décrire :

Considérons le **demi-disque**

$$B := \{w = u + iv = (u, v) \in \mathbb{C}: |w| < 1, v > 0\}$$

délimité par le **demi-cercle**

$$C := \{w = u + iv = (u, v) \in \mathbb{C}: |w| = 1, v > 0\}$$

et l'**intervalle-unité**

$$J := \{w = u + iv = (u, v) \in \mathbb{C}: -1 < u < +1, v = 0\}.$$

Alors nous associons avec nos valeurs aux limites $\Phi = \Phi(t): I = I(s_0, t_0) \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(I)$ deux courbes qui ne fournissent pas des plongements, en général. D'abord, nous regardons la **courbe cylindrique**

$$\begin{aligned} \gamma_\Phi &= \gamma_\Phi(u): \bar{J} \rightarrow \mathcal{Z} \quad \text{définie par} \\ \gamma_\Phi(u) &:= \left(\cos \frac{(1-u)t_0}{2}, \sin \frac{(1-u)t_0}{2}, \Phi(0) + \frac{1-u}{2} [\Phi(t_0) - \Phi(0)] \right), \quad u \in \bar{J} \quad \text{avec} \\ \gamma_\Phi(-1) &= (\cos t_0, \sin t_0, \Phi(t_0)) =: P_2 \quad \text{et} \quad \gamma_\Phi(+1) = (1, 0, \Phi(0)) =: P_1; \end{aligned} \quad (4.1)$$

et puis nous décrivons la **courbe fixe**

$$\begin{aligned} \Gamma_\Phi &= \Gamma_\Phi(e^{it}): \bar{C} \rightarrow \mathbb{R}_*^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 > 0\} \quad \text{définie par} \\ \Gamma_\Phi(e^{it}) &:= \left(\frac{3}{\pi}(r_0 - 1)t + 1, 0, \Phi(0) \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}; \\ \Gamma_\Phi(e^{it}) &:= \left(r_0 \cos \left(\frac{3t_0}{\pi}t - t_0 \right), r_0 \sin \left(\frac{3t_0}{\pi}t - t_0 \right), \Phi \left(\frac{3t_0}{\pi}t - t_0 \right) \right), \quad \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}; \\ \Gamma_\Phi(e^{it}) &:= \left(\left[\frac{3}{\pi}(1 - r_0)t + 3r_0 - 2 \right] \cos t_0, \left[\frac{3}{\pi}(1 - r_0)t + 3r_0 - 2 \right] \sin t_0, \Phi(t_0) \right), \\ &\quad \text{pour tous } \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \pi; \text{ laquelle satisfait} \\ \Gamma_\Phi(+1) &= (1, 0, \Phi(0)) = P_1 \quad \text{et} \quad \Gamma_\Phi(-1) = (\cos t_0, \sin t_0, \Phi(t_0)) = P_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous observons que la trace

$$\|\Gamma_\Phi\| := \{\Gamma_\Phi(e^{it}) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq t \leq \pi\} \quad (4.3)$$

de cette application coïncide avec le graphe des valeurs aux limites en (3.22) relevées au plan étale

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3: \mathbf{y} = \mathbf{x} + \tilde{\Phi}(\mathbf{x})E, \mathbf{x} \in \overline{\partial \mathcal{A}(r_0, t_0)} \setminus \mathcal{C}_1\}. \quad (4.4)$$

Maintenant, nous présentons la conception fondamentale de cette section.

Définition 7. La classe $\widehat{\mathcal{P}}(\Gamma_\Phi)$ consiste des applications

$$X = X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)): \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}_*^3 \in C^2(B) \cap C^1(B \cup J) \cap C^0(\bar{B}) \quad (4.5)$$

avec les propriétés suivantes :

$$\Delta X = 0, \quad |X_u| = |X_v|, \quad X_u \cdot X_v = 0 \quad \text{in } B; \tag{4.6}$$

La restriction $X|_{\bar{J}} : \bar{J} \rightarrow \mathcal{Z}$ est homotope à $\gamma_\phi : \bar{J} \rightarrow \mathcal{Z}$ dans \mathcal{Z}

$$\text{en fixant les points } P_1 \quad \text{et} \quad P_2; \tag{4.7}$$

$$\text{Avec } \lambda : J \rightarrow \mathbb{R} \in C^0(J) \text{ nous avons : } X_v(u, 0) = \lambda(u)\mathcal{N}(X(u, 0)), \quad u \in J; \tag{4.8}$$

Il y a une fonction $T : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ faiblement croissante

$$\text{avec } T\left(\frac{\pi}{2}l\right) = \frac{\pi}{2}l \quad \text{pour } l = 0, 1, 2,$$

$$\text{telle que } X(e^{it}) = \Gamma_\phi(e^{iT(t)}), \quad 0 \leq t \leq \pi. \tag{4.9}$$

Nous nommons $\widehat{\mathcal{P}}(\Gamma_\phi)$ le **problème paramétrique demi-libre** pour la **courbe frontière** Γ_ϕ donnée.

Remarque 5. Il semble naturel à résoudre ce problème au moyen du *Principe de Dirichlet*. Mais notre espace des variations contient l’axe des z comme obstacle, qui ne peut pas être pénétré, et encore une condition frontière (4.7) non linéaire apparaît ! Ainsi les méthodes bien connues de R. Courant, de S. Hildebrandt, et d’autres auteurs doivent être essentiellement modifiées ; dans ce contexte comparez [1] s.v.p. Nous préférons ici une **méthode de continuité non linéaire** d’établir l’existence de $\mathcal{P}(\Gamma_\phi)$ pour nos courbes particulières. Dans notre Théorème 4, nous recevrons un résultat d’unicité pour nos surfaces minimales paramétriques aussi bien qu’un critère de plongement.

Fondée sur les méthodes [6] de S. Hildebrandt et F. Sauvigny, nous démontrons une proposition concernant les difféomorphismes harmoniques dans le plan étale ; laquelle pourrait être d’intérêt indépendant.

Théorème 3. *Considérons avec $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ l’application plane, associée à une solution $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \widehat{\mathcal{P}}(\Gamma_\phi)$ du problème paramétrique demi-libre. Puis les assertions suivantes sont valides :*

1. *On peut désigner l’angle unique $\tau(u, v) \in \mathbb{R}$ avec le demi-axe positif des x au point $(x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, en prolongeant continûment l’angle τ le long d’un chemin arbitraire en \bar{B} , du point $(1, 0)$ jusqu’au point (u, v) , avec la valeur $\tau(1, 0) := 0$ initiale.*
2. *Le relèvement de la fonction f sur le plan étale*

$$F : \bar{B} \rightarrow \mathcal{R} \quad \text{donné par } F(u, v) := (x(u, v), y(u, v), \theta(\tau(u, v))), \quad (u, v) \in \bar{B}, \tag{4.10}$$

est possible, et nous parlons de l’application plane relevée.

3. *Notre application (4.10) fournit un homéomorphisme de \bar{B} sur l’anneau circulaire relevé $\overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)}$ dans le plan étale et représente un C^2 -difféomorphisme*

$$\text{de } B \cup J \quad \text{sur } \overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)} \setminus \{\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{C}_{r_0} \cup \mathcal{D}_{t_0}\}.$$

Démonstration.

1. La continuation de notre angle $\tau(u, v) = \tau(x(u, v), y(u, v))$ le long d’un chemin est possible par l’intégrale curviligne sur la dérivée de la fonction $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est déterminée jusqu’à un multiple entier de 2π . Ainsi le changement de l’angle le long d’un chemin fermé est nécessairement $2\pi k$ avec un nombre $k \in \mathbb{Z}$. Maintenant, la courbe fermée $X : \partial B \rightarrow \mathbb{R}_*^3$ admet une contraction continue en \mathbb{R}_*^3 au chemin constant

$$Y(t) \equiv (1, 0, \Phi(0)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Par conséquent, chaque courbe $X \circ \omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_*^3$ composée avec le chemin plan

$$\omega : [0, 1] \rightarrow \bar{B} \in C^0([0, 1]) \quad \text{satisfaisant } \omega(0) = (1, 0) = \omega(1)$$

possède cette propriété. Ainsi il n’y a pas de changement d’angle après le parcours d’un tel chemin fermé. Finalement, nous pouvons définir l’angle par continuation le long d’un chemin arbitraire avec notre valeur initiale $\tau(1, 0) = 0$.

2. Maintenant, nous établissons l’inclusion

$$F(B \cup J) \subset \overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)} \setminus \{\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{C}_{r_0} \cup \mathcal{D}_{t_0}\}. \tag{4.11}$$

Premièrement, on observe la fonction

$$\rho(u, v) := \sqrt{x(u, v)^2 + y(u, v)^2}, \quad (u, v) \in \overline{B},$$

avec ses valeurs aux limites

$$\rho(u, v) \leq r_0, \quad (u, v) \in C \quad \text{et} \quad \rho(u, 0) = 1, \quad u \in J.$$

Cette fonction atteint son maximum à la frontière fixe du domaine B , parce que nous avons $\Delta \rho^2 \geq 0$ in B , et on obtient l’inégalité

$$\rho(u, v) < r_0 \quad \text{pour tous } (u, v) \in B \cup J. \tag{4.12}$$

Géométriquement, la famille des cercles $\{\mathcal{C}_r\}_{r_0 \leq r < \infty}$ balaye le plan étale au-dehors du cercle \mathcal{C}_{r_0} .

Deuxièmement, nous considérons la fonction $\tau(u, v) : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ avec ses valeurs aux limites

$$0 \leq \tau(u, v) \leq t_0, \quad (u, v) \in C \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial v} \tau(u, 0) = 0, \quad u \in J, \tag{4.13}$$

selon les conditions (4.8) et (4.9). L’harmonicité de X induit que cette fonction prend son maximum et minimum sur la frontière fixe C . Puis nous obtenons l’inégalité

$$0 < \tau(u, v) < t_0 \quad \text{pour tous } (u, v) \in B \cup J. \tag{4.14}$$

La famille des demi-droites $\mathcal{G}_{-\infty < t \leq 0}$ et la famille $\mathcal{G}_{t_0 \leq t < \infty}$ balaye respectivement le plan étale au-dessous de la ligne \mathcal{G}_0 d’en bas et au-dessus de la ligne \mathcal{G}_{t_0} d’en haut. Ces deux estimations (4.12) et (4.14) démontrent l’inclusion (4.11).

3. Nous allons déterminer exactement l’é.d.p. pour notre fonction τ . D’abord nous introduisons la fonction $\sigma(u, v) := \ln|f(u, v)|$, $(u, v) \in B$ et dérivons

$$h(u, v) := \log f(u, v) = \ln|f(u, v)| + i \arg f(u, v) = \sigma(u, v) + i\tau(u, v), \quad (u, v) \in B,$$

deux fois. Nous déduisons

$$\begin{aligned} \sigma_u(u, v) + i\tau_u(u, v) &= h_u(u, v) = \frac{1}{f(u, v)} f_u(u, v), \\ \sigma_v(u, v) + i\tau_v(u, v) &= h_v(u, v) = \frac{1}{f(u, v)} f_v(u, v), \end{aligned} \quad (u, v) \in B, \tag{4.15}$$

et puis

$$\begin{aligned} \sigma_{uu}(u, v) + i\tau_{uu}(u, v) &= h_{uu}(u, v) = \frac{1}{f(u, v)} f_{uu}(u, v), \\ -\frac{1}{f^2(u, v)} f_u^2(u, v) &= \frac{1}{f(u, v)} f_{uu}(u, v) - h_u^2(u, v), \end{aligned} \quad (u, v) \in B, \tag{4.16}$$

aussi bien que

$$\sigma_{vv}(u, v) + i\tau_{vv}(u, v) = h_{vv}(u, v) = \frac{1}{f(u, v)} f_{vv}(u, v) - h_v^2(u, v), \quad (u, v) \in B. \tag{4.17}$$

Utilisant l’harmonicité de f , une addition de (4.16) et (4.17) implique l’équation

$$\begin{aligned} \Delta \sigma(u, v) + i \Delta \tau(u, v) &= -\left(h_u^2(u, v) + h_v^2(u, v)\right) \\ &= -\left(\sigma_u^2(u, v) + \sigma_v^2(u, v) - \tau_u^2(u, v) - \tau_v^2(u, v)\right) \\ &\quad - 2i\left(\sigma_u(u, v)\tau_u(u, v) + \sigma_v(u, v)\tau_v(u, v)\right) \quad \text{pour tous } (u, v) \in B. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ici une comparaison des parties imaginaires révèle l’é.d.p. suivante

$$\Delta\tau(u, v) + 2\sigma_u(u, v)\tau_u(u, v) + 2\sigma_v(u, v)\tau_v(u, v), \quad (u, v) \in B, \tag{4.19}$$

pour la fonction τ .

4. Montrons indirectement la centrale

Assertion intermédiaire. Nous avons $\tau_u(u, 0) > 0$ pour chaque $u \in J$.

Si cette assertion n’était pas correcte, nous pourrions trouver un zéro $u_0 \in J$ satisfaisant l’hypothèse contraire $\tau_u(u_0, 0) = 0$. Maintenant, nous prolongeons la fonction τ au **disque-unité**

$$\widehat{B} := \{w = u + iv = (u, v) \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$$

et au **demi-cercle réfléchi**

$$\widehat{C} := \{w = u + iv = (u, v) \in \mathbb{C} : |w| = 1, v < 0\}.$$

Ceci est achevé par la réflexion paire

$$\widehat{\tau}(u, v) := \begin{cases} \tau(u, v), & (u, v) \in \overline{B}, \\ \tau(u, -v), & (u, v) \in \widehat{B} \cup \widehat{C}. \end{cases} \tag{4.20}$$

L’hypothèse contraire, l’équation (4.19), et la condition (4.13) fournissent

$$|\Delta\widehat{\tau}(u, v)| \leq c_0 |\nabla\widehat{\tau}(u, v)|, \quad (u, v) \in \widehat{B} \quad \text{et} \quad \nabla\widehat{\tau}(u_0, 0) = 0 \quad \text{avec un } c_0 > 0, \tag{4.21}$$

pour le gradient $\nabla = (\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$ de notre fonction $\widehat{\tau}$. Un indispensable résultat de Hartman et Wintner implique l’expansion asymptotique

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_w(u, v) &:= \frac{1}{2}(\widehat{\tau}_u - i\widehat{\tau}_v)(u, v) = c(w - u_0)^k + o(|w - u_0|^k), \quad w = u + iv \rightarrow u_0, \quad w \neq u_0, \\ &\text{avec les nombres } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Alors on applique la géniale méthode de H. Kneser et considère l’ensemble ouvert

$$\widehat{B}' := \{w \in \widehat{B} : \widehat{\tau}(u, v) \neq \tau_0 := \widehat{\tau}(u_0, 0)\}. \tag{4.23}$$

L’intégration de (4.22) montre que \widehat{B}' possède, dans le voisinage du point u_0 , au moins quatre composantes connexes, alternant en niveau au-dessous et au-dessus de τ_0 . Nous reconnaissons que la fonction $\widehat{\tau}$ ne peut prendre ni son maximum ni son minimum dans \widehat{B} , à l’aide des arguments dans la part 2.) ou au moyen des équations (4.13) et (4.19). Par conséquent, les composantes connexes s’étendent jusqu’à la frontière $\partial\widehat{B}$ du disque-unité. Puis nous arrivons à une contradiction, parce que la fonction

$$\widehat{\tau} : \partial\widehat{B} = \{1\} \cup C \cup \{-1\} \cup \widehat{C} \rightarrow [0, t_0] \tag{4.24}$$

monte faiblement sur \overline{C} de 0 à t_0 et puis descend faiblement sur \widehat{C} de t_0 à 0, en parcourant positivement le cercle-unité. Dans ce contexte nous recommandons l’étude de [7] Proposition 3.

5. Maintenant, nous utilisons la méthode de la Proposition 4 du traité [7]. Nous savons grâce à notre assertion intermédiaire que

$$F : J \rightarrow \{\overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)} \cap \mathcal{C}_1\} \setminus \{\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_{t_0}\} \tag{4.25}$$

fournit un C^1 -difféomorphisme. Parce que les applications F et f coïncident au niveau des dérivées premières, mais pas au niveau topologique, presque tous les arguments dans la démonstration de [7] Proposition 4 restent valables. Avec ces idées on obtient :

$$\text{Le déterminant de Jacobi satisfait } \mathcal{J}_f(u, v) > 0 \text{ pour chaque } (u, v) \in B \cup J. \tag{4.26}$$

Seulement la formule sur la somme des indices topologiques nécessite le **degré de l’application** pour la fonction $F : \overline{B} \rightarrow \mathcal{R}$ dans le plan étale. Ce nombre est déterminé comme +1 pour tous points dans le rectangle $\mathcal{A}(s_0, t_0)$ et

0 au dehors, selon les conditions de l'application $F|_{\partial B}$ en (4.7) et (4.9) à la frontière. Nous recommandons le traité [8] Chapter III présentant la théorie du degré de l'application. Avec ces résultats topologiques au niveau de l'application continue, on peut suivre la méthode du traité [7] Proposition 4 et compléter la démonstration de l'assertion dernière. \square

En préparant le Théorème 4, nous convenons de la

Définition 8. Chaque fonction $\Phi \in C^0(I, \mathbb{R})$ prescrite au bord possède une continuation sur l'intervalle $\widehat{I} := \{t \in \mathbb{R} : t_0 \leq t \leq 2t_0\}$ par la réflexion impaire au point terminal $(t_0, \Phi(t_0))$ selon

$$\widehat{\Phi}(t) := \begin{cases} \Phi(t), & t \in I, \\ \Phi(t_0) - [\Phi(t_0 - [t - t_0]) - \Phi(t_0)], & t \in \widehat{I}. \end{cases} \tag{4.27}$$

En répétant infiniment cette réflexion impaire au point terminal respectif, on étend la fonction selon

$$\widehat{\Phi}(t + 2kt_0) := \widehat{\Phi}(t) + 2k[\Phi(t_0) - \Phi(0)], \quad 0 \leq t < 2t_0 \quad \text{pour } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{4.28}$$

Déclarons la **hauteur rotatoire minimale et maximale** par

$$\begin{aligned} \omega_-(\Phi) &:= \inf\{[\widehat{\Phi}(t + 2\pi) - \widehat{\Phi}(t)]: 0 \leq t \leq 2t_0\} \quad \text{et} \\ \omega_+(\Phi) &:= \sup\{[\widehat{\Phi}(t + 2\pi) - \widehat{\Phi}(t)]: 0 \leq t \leq 2t_0\}; \end{aligned} \tag{4.29}$$

ici on observe que la fonction $\widehat{\Phi}(t + 2\pi) - \widehat{\Phi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ possède la période $2t_0$. Nous reconnaissons $\omega_{\pm}(\Phi) = 2\pi\alpha_{\pm}$ pour ces fonctions $\Phi \in C^1(I, \mathbb{R})$ satisfaisant $\alpha_- \leq \Phi'(t) \leq \alpha_+$, $t \in I$.

Enfin, nous pouvons énoncer les résultats centraux de notre recherche.

Théorème 4. *Les assertions suivantes sont valables :*

1. Pour chaque fonction $\Phi \in C^0(I, \mathbb{R})$ prescrite au bord, le p.l.m. $\mathcal{P}(\Phi)$ de la Définition 1 possède exactement une solution ζ . En relevant Φ selon Section 3 formule (3.22) à la fonction $\tilde{\Phi} : \partial\mathcal{A}(r_0, t_0) \setminus \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, nous pouvons relever la solution $\zeta = \zeta(s, t) \in \mathcal{P}(\Phi)$ sur l'anneau circulaire relevé à une solution $\tilde{\zeta}(x, y, \theta_n) \in \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{\Phi})$ du p.r.l.m. équivalent en Définition 5.
2. Pour la courbe fixe Γ_{Φ} , il y a exactement une solution $X = X(u, v) \in \widehat{P}(\Gamma_{\Phi})$ au problème paramétrique demi-libre selon Définition 7, laquelle coïncide avec la solution ζ aux paramètres isothermes.
3. Pour les fonctions $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ faiblement croissantes avec $\omega_-(\Phi) > 0$, la représentation $X : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ fournit un plongement dans l'espace euclidien. Plus précisément, la hauteur entre les **feuilletts minimaux** des représentations non paramétriques

$$\tilde{\zeta}(x, y, \theta_n), \quad (x, y) \in \Omega_n, \quad n = 0, 1, \dots, n_0, \tag{4.30}$$

est contrôlée par ses valeurs aux limites Φ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 0 < \omega_-(\Phi) &\leq \min_{n=0, \dots, n_0-1} \inf\{[\tilde{\zeta}(x, y, \theta_{n+1}) - \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)]: (x, y) \in \Omega_{n+1}\} \\ &\leq \max_{n=0, \dots, n_0-1} \sup\{[\tilde{\zeta}(x, y, \theta_{n+1}) - \tilde{\zeta}(x, y, \theta_n)]: (x, y) \in \Omega_{n+1}\} \leq \omega_+(\Phi). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Démonstration.

1. Premièrement, nous résolvons le p.l.m. $\mathcal{P}(\Phi)$ pour toutes les fonctions

$$\Phi \in C^{2+\mu}(I, \mathbb{R}) \quad \text{avec un exposant höldérien } \mu \in (0, 1). \tag{4.32}$$

Nous utilisons une homotopie des valeurs aux limites fixes

$$\Phi[\] = \Phi[., \lambda] = \Phi[t, \lambda] := \lambda\Phi(t) : I \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \in C^{2+\mu}(I \times [0, 1], \mathbb{R}) \tag{4.33}$$

à l'aide du paramètre de déformation $\lambda \in [0, 1]$. Évidemment, le problème

$$\mathcal{P}(\Phi[., \lambda]), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \tag{4.34}$$

est résolu par la fonction $\zeta(s, t) \equiv 0, (s, t) \in \overline{R(s_0, t_0)}$ pour $\lambda = 0$.

Si nous avons déjà trouvé une solution pour un paramètre $\lambda_* \in [0, 1)$, la deuxième part du Théorème 1 démontre l'existence d'une solution (4.34) pour tous $\lambda \in (0, 1)$ satisfaisant $|\lambda - \lambda_*| \leq \epsilon$; avec un nombre $\epsilon = \epsilon(\lambda_*) > 0$ suffisamment petit. Maintenant, nous considérons le maximal $\lambda_* \in (0, 1]$ afin que le problème (4.34) soit résolu pour tous $0 \leq \lambda < \lambda_*$. Selon l'assertion de compacité ci-dessous, ce problème possède une solution pour λ_* aussi bien. Ainsi le cas $\lambda_* = 1$ entre nécessairement, et le problème $\mathcal{P}(\Phi)$ est résolu pour toutes les valeurs aux limites (4.32).

Deuxièmement, nous résolvons le problème $\mathcal{P}(\Phi)$ pour toutes les fonctions $\Phi \in C^0(I, \mathbb{R})$ continues au bord, invoquant la proposition de compacité encore une fois.

2. Assertion de compacité. Si le problème $\Psi_k \in C^0(I, \mathbb{R})$ possède une solution ζ_k pour chaque $k = 1, 2, \dots$ et ses valeurs aux limites $\Psi_k \in C^0(I, \mathbb{R})$ convergent uniformément à la fonction $\Psi \in C^0(I, \mathbb{R})$, aussi le problème $\mathcal{P}(\Psi)$ possède une solution ζ .

Avec la régularité $\Psi \in C^{2+\mu}(I, \mathbb{R})$, la solution $\zeta \in \mathcal{P}(\Psi)$ appartient à la classe $C^{2+\mu}(\overline{R(s_0, t_0)})$.

Pour établir notre assertion, on regarde les **surfaces rétractées**

$$Z_k(s, t) := (\exp(s + it), \zeta_k(s, t)) = \exp(s + it) + \zeta_k(s, t)E, \quad (s, t) \in \overline{R(s_0, t_0)}, \tag{4.35}$$

pour $k = 1, 2, \dots$. Nous introduisons des paramètres conformes dans les premières formes fondamentales (2.9) respectives, à l'aide du théorème d'uniformisation (voyez [8] Chapter XII, Section 7 et Section 8 s.v.p.). On obtient des solutions

$$X_k = X_k(u, v) = (x_k(u, v), y_k(u, v), z_k(u, v)) = (f_k(u, v), z_k(u, v)) \in \widehat{\mathcal{P}}(\Gamma_{\Psi_k}) \tag{4.36}$$

du problème $\widehat{\mathcal{P}}(\Gamma_{\Psi_k})$ paramétrique et demi-libre pour la courbe fixe $\Gamma_{\Psi_k} : C \rightarrow \mathbb{R}_*^3$. Ces applications viennent des $C^2(B \cup J)$ -difféomorphismes

$$\begin{aligned} s_k + it_k &= s_k(u, v) + it_k(u, v) : \overline{B} \rightarrow \overline{R(s_0, t_0)} \\ \text{avec le jacobien } \frac{\partial(s_k, t_k)}{\partial(u, v)} &> 0 \text{ pour tous } (u, v) \in B \cup J \text{ satisfaisant} \\ f_k(u, v) &= x_k(u, v) + iy_k(u, v) = \exp(s_k(u, v) + it_k(u, v)), \quad (u, v) \in \overline{B}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

qui fournissent des homéomorphismes jusqu'à la fermeture des domaines. En outre, nous notons

$$z_k(u, v) = \zeta_k(s_k(u, v), t_k(u, v)), \quad (u, v) \in \overline{B}. \tag{4.38}$$

3. Premièrement, nous relevons notre solution ζ_k sur l'anneau circulaire $\overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)}$ et obtenons les solutions $\tilde{\zeta}_k \in \mathcal{P}(\tilde{\Psi}_k)$ non paramétriques. Avec le Théorème 2 on estime leur aire $\Sigma(\tilde{\zeta}_k, \mathcal{A}(r_0, t_0))$ respective par leurs valeurs $\tilde{\Psi}_k$ à la frontière; laquelle coïncide avec la demie intégrale de Dirichlet pour la surface X_k , à cause de sa paramétrisation isotherme. Puis nous recevons une borne uniforme des **intégrales de Dirichlet** pour les applications X_k aussi bien que leurs projections planes f_k selon

$$D(f_k) \leq D(X_k) := \int_B |\nabla X_k(u, v)|^2 du dv = 2\Sigma(\tilde{\zeta}_k, \mathcal{A}(r_0, t_0)) \leq c_1, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{4.39}$$

avec une constante $c_1 = c_1(\Psi) \in (0, \infty)$.

Deuxièmement, nous relevons l'application f_k dans le plan étale par la prescription

$$F_k : \overline{B} \rightarrow \overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)} \quad \text{avec} \quad F_k(u, v) := (x_k(u, v), y_k(u, v), \theta(t_k(u, v))), \quad (u, v) \in \overline{B}. \tag{4.40}$$

Cette fonction F_k fournit un $C^2(B \cup J)$ -difféomorphisme et un homéomorphisme, jusqu'à la fermeture des domaines, pour $k = 1, 2, \dots$. Au moyen du lemme d'oscillation de R. Courant et H. Lebesgue, on dérive un module de continuité pour la classe des applications

$$\{F_k \in C^0(\overline{B}, \overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)}): k = 1, 2, \dots\}. \tag{4.41}$$

Cette estimation est achevée à l’aide de la borne (4.39) pour les fonctions f_k en combinaison avec le caractère homéomorphe de nos applications F_k sur l’anneau circulaire relevé. La dérivation de ce module représente un exercice intéressant pour nos lecteurs.

La théorie des systèmes elliptiques non linéaires, laquelle fut fondée aussi bien que développée par E. Heinz, est présentée dans Chapter XII du traité [8]. Elle permet une sélection d’une sous-suite $1 \leq j(1) < j(2) < j(3) < \dots$ afin que la suite des fonctions $\{X_{j(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ converge dans l’espace $C^{2+\mu}(B \cup J) \cap C^0(\bar{B})$ à une solution $X = X(u, v) \in \mathcal{P}(\Gamma_\Psi)$ du problème paramétrique demi-libre pour la courbe fixe Γ_Ψ .

Troisièmement, nous avons besoin de la transformation inverse pour notre application

$$F(u, v) := \lim_{k \rightarrow \infty} F_{j(k)}(u, v), \quad (u, v) \in \bar{B}.$$

Ici nous invoquons l’assertion (4.25), dans la démonstration du Théorème 3, que $F|_J$ fournit déjà un difféomorphisme. Maintenant, nous observons la dernière composante de la normale $N_{j(k)}$ pour la surface $X_{j(k)}$, qui reste non négative pendant le passage à la limite. Parce que ces fonctions satisfont une équation elliptique bien connue, le *principe de la continuation unique* garantit que la dernière composante de la normale N pour la surface X apparaît positive. Le même phénomène s’observe à la frontière libre, où une condition de Neumann était dérivée pour la dernière composante de la normale (comparez Proposition 1 de S. Hildebrandt et F. Sauvigny [7] et aussi dans le livre [3] le Chapitre 2 s.v.p.). Dans ce contexte nous référons à Section 9 de Chapter XII dans le livre [8]. Puis nous arrivons à la proposition

$$N(u, v) \cdot E > 0 \quad \text{pour tous } (u, v) \in B \cup J. \tag{4.42}$$

On utilise une formule pour la somme des indices topologiques et obtient avec les méthodes citées ci-dessus : Notre application $F : \bar{B} \rightarrow \overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)}$ représente un homéomorphisme avec l’inverse F^{-1} et un $C^2(B \cup J)$ -difféomorphisme. Avec la fonction

$$\tilde{\zeta}(x, y, \theta_n) := z(F^{-1}(x, y, \theta_n)), \quad (x, y, \theta_n) \in \Omega_n \quad \text{pour } n = 0, \dots, n_0, \tag{4.43}$$

on obtient une solution du problème $\mathcal{P}(\tilde{\Psi})$ équivalent au problème $\mathcal{P}(\Psi)$.

4. Pour la question de régularité à la frontière fixe et libre, nous référons nos lecteurs au livre [1] ‘Minimal Surfaces’ de U. Dierkes, S. Hildebrandt, et F. Sauvigny aussi bien à l’ouvrage [2] suivant ‘Regularity Theory of Minimal Surfaces’ de U. Dierkes, S. Hildebrandt, et A. Tromba. Avec les transformations des paramètres dans la part 3.), on peut résoudre la question de régularité du problème $\mathcal{P}(\Phi)$ par réduction à celle du problème $\mathcal{P}(\Gamma_\Phi)$ semi-libre paramétrique. Notre assertion de compacité ci-dessus est démontrée complètement.

5. Maintenant, nous adressons l’unicité du problème $\mathcal{P}(\Gamma_\Phi)$. Regardant deux solutions $X_j = X_j(u, v) \in \mathcal{P}(\Gamma_\Phi)$ pour $j = 1, 2$, nous relevons leurs applications planes $f_j = f_j(u, v)$ dans le plan étale. Selon notre Théorème 3 les fonctions

$$F_j : \bar{B} \rightarrow \overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)} \quad \text{données par} \\ F_j(u, v) := (x_j(u, v), y_j(u, v), \theta(\tau_j(u, v))), \quad (u, v) \in \bar{B}, \tag{4.44}$$

fournissent des homéomorphismes aussi bien que des $C^2(B \cup J)$ -difféomorphismes ; elles possèdent les transformations inverses

$$F_j^{-1} = F_j^{-1}(x, y, \theta_n) : \overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)} \rightarrow \bar{B}. \tag{4.45}$$

En rétractant les fonctions

$$\tilde{X}_j := X_j \circ F_j^{-1} : \overline{\mathcal{A}(s_0, t_0)} \rightarrow \mathbb{R}_*^3 \tag{4.46}$$

dans le plan gaussien \mathbb{C} sous la fonction exponentielle relevée

$$\text{Exp} : \overline{\mathcal{R}(s_0, t_0)} \rightarrow \overline{\mathcal{A}(r_0, t_0)}, \tag{4.47}$$

nous considérons les surfaces

$$Z_j(s, t) := \tilde{X}_j \circ \text{Exp}(s, t) = (\exp(s + it), \zeta_j(s, t)) : \overline{\mathcal{R}(s_0, t_0)} \rightarrow \mathbb{R}_*^3. \tag{4.48}$$

Les deux fonctions ζ_j , $j = 1, 2$, résolvent le même problème $\mathcal{P}(\Phi)$ et coïncident selon la part 1.) du Théorème 1. Maintenant, les traces des deux surfaces sont identifiées

$$S := Z_1(\overline{R(s_0, t_0)}) = Z_2(\overline{R(s_0, t_0)}). \tag{4.49}$$

Les deux surfaces minimales $X_j = X_j(u, v) : \overline{B} \rightarrow S$, $j = 1, 2$, fournissent une transformation conforme avec la même trace. Évidemment l’application

$$h(u, v) := X_2^{-1} \circ X_1(u, v) : \overline{B} \rightarrow \overline{B} \tag{4.50}$$

est conforme ; ici on forme localement X_2^{-1} et prolongue continûment cette fonction le long d’un chemin arbitraire. En combinaison avec (4.9) nous reconnaissons

$$\begin{aligned} X_1(u, v) &= X_2 \circ h(u, v), \quad (u, v) \in \overline{B} \text{ avec une transformation conforme} \\ h : \overline{B} &\rightarrow \overline{B} \text{ satisfaisant } h\left(\exp\left(\frac{i\pi}{2}l\right)\right) = \exp\left(\frac{i\pi}{2}l\right) \text{ pour } l = 0, 1, 2. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Nous concluons $h(u, v) = (u, v)$, $(u, v) \in B$ et $X_1(u, v) \equiv X_2(u, v)$, $(u, v) \in \overline{B}$.

6. Pour vérifier la dernière assertion, nous étendons $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ à la fonction $\widehat{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, au moyen de réflexions impaires décrites dans la Définition 8. Selon notre Remarque 2 de la Section 2, nous réfléchissons la solution $\zeta = \zeta(s, t) \in \mathcal{P}(\Phi)$ d’une manière impaire au segments frontières droits. Puis nous obtenons un graphe minimal sur la bande demi-ouverte $\Omega' := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [0, s_0], t \in \mathbb{R}\}$ selon

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta}(s, t) &\in C^2(\Omega') \cap C^0(\overline{\Omega'}) \text{ satisfait l'é.d.p. (2.17) avec ses valeurs} \\ \text{aux limites } \widehat{\zeta}(s_0, t) &= \widehat{\Phi}(t), \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{\partial}{\partial s} \widehat{\zeta}(s, t)|_{s=0} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Enfin, nous considérons la fonction auxiliaire suivante :

$$\begin{aligned} \eta(s, t) &:= \widehat{\zeta}(s, t + 2\pi) - \widehat{\zeta}(s, t), \quad (s, t) \in \overline{\Omega'}, \\ \text{satisfait une é.d.p. elliptique et linéaire avec ses valeurs aux limites} \\ \omega_-(\Phi) &\leq \eta(s_0, t) \leq \omega_+(\Phi), \quad t \in \mathbb{R}; \quad \frac{\partial}{\partial s} \eta(s, t)|_{s=0} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Parce que cette fonction est périodique selon

$$\eta(s, t + 2t_0k) = \eta(s, t) \text{ pour tous } (s, t) \in \overline{\Omega'} \text{ et chaque } k \in \mathbb{Z}, \tag{4.54}$$

elle atteint son maximum et minimum au rectangle $[0, s_0] \times [0, 2t_0]$. Le principe correspondant selon E. Hopf, combiné avec son lemme sur les points frontières, implique l’estimation suivante

$$\omega_-(\Phi) \leq \eta(s, t) \leq \omega_+(\Phi) \text{ pour tous } (s, t) \in \overline{\Omega'}. \tag{4.55}$$

Si nous rappelons notre définition des ensembles Ω_n , $n = 0, \dots, n_0$ dans (3.27) et (3.28), on déduit l’inégalité (4.31) de l’estimation (4.55). □

Remarque 6. Il serait intéressant de résoudre le problème $\widehat{\mathcal{P}}(\Gamma)$, par la méthode variationnelle directe, pour une grande classe de courbes Γ avec ses points terminaux au cylindre \mathcal{Z} . Parallèlement au Théorème 3, on pourrait établir un critère de projection dans des situations spéciales.

Références

[1] U. Dierkes, S. Hildebrandt, F. Sauvigny, Minimal Surfaces, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 339, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
 [2] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Tromba, Regularity of Minimal Surfaces, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 400, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
 [3] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Tromba, Global Analysis of Minimal Surfaces, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 401, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

- [4] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, second ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [5] S. Hildebrandt, F. Sauvigny, Embeddedness and uniqueness of minimal surfaces solving a partially free boundary value problem, *J. Reine Angew. Math.* 422 (1991) 69–89.
- [6] S. Hildebrandt, F. Sauvigny, On one-to-one harmonic mappings and minimal surfaces, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II Math.-Phys. Klasse* 3 (1992) 73–93.
- [7] S. Hildebrandt, F. Sauvigny, Uniqueness of stable minimal surfaces with partially free boundaries, *J. Math. Soc. Japan* 47 (3) (1995) 423–440.
- [8] F. Sauvigny, *Partial Differential Equations. Part 1: Foundations and Integral Representations; Part 2: Functional Analytic Methods; With Consideration of Lectures by E. Heinz*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.