Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
Ann. I. H. Poincaré – AN 27 (2010) 705–718
ANNALES DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ
ANALYSE NON LINÉAIRE
www.elsevier.com/locate/anihpc

Extension d'une classe d'unicité pour les équations de Navier–Stokes

Ramzi May

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Bizerte, Jarzouna 2001, Bizerte, Tunisie

Reçu le 11 juin 2009 ; reçu en forme révisée le 26 octobre 2009 ; accepté le 26 octobre 2009

Disponible sur Internet le 10 novembre 2009

Résumé

Récemment, Q. Chen, C. Miao et Z. Zhang (2009) [4] ont montré l'unicité des solutions faibles de Leray dans l'espace $L^{\frac{2}{1+r}}([0,T], B_{\infty}^{r,\infty}(\mathbb{R}^3))$ avec $r \in]-\frac{1}{2}, 1]$. Nous proposons dans le présent travail d'étendre ce critère d'unicité au cas $r \in]-1, -\frac{1}{2}]$.

Abstract

Recently, Q. Chen, C. Miao and Z. Zhang (2009) [4] have proved that weak Leray solutions of the Navier–Stokes are unique in the class $L^{\frac{2}{1+r}}([0,T], B_{\infty}^{r,\infty}(\mathbb{R}^3))$ with $r \in]-\frac{1}{2}, 1]$. In this paper, we establish that this criterion remains true for $r \in]-1, -\frac{1}{2}]$.

Keywords: Navier–Stokes equations; Besov spaces; Bony's paraproduct

1. Introduction et énoncé des résultats

On considère les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible évoluant dans l'espace entier $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla(u \otimes u) + \vec{\nabla} p = 0, \\ \vec{\nabla} \cdot u = 0, \\ u(0,.) = u_0(.) \end{cases} \tag{NS}$$

où u_0 est la vitesse initiale des particules du fluide, $u = u(t,x)$ désigne la vitesse d'une particule située au point $x \in \mathbb{R}^d$ à l'instant $t \geqslant 0$, $p = p(t,x)$ est la pression au point $x \in \mathbb{R}^d$ à l'instant $t \geqslant 0$, $\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient, $\vec{\nabla}\cdot$ est l'opérateur divergence et $\nabla(u \otimes u)$ est la fonction vectorielle définie par : $\nabla(u \otimes u) = (w_1, \ldots, w_d)$ et

$$w_i \equiv \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_k}(u_k u_i) = \vec{\nabla} \cdot (u_i u).$$

Adresse e-mail : Ramzi.May@fsb.rnu.tn.

0294-1449/$ – see front matter
doi:10.1016/j.anihpc.2009.11.007

Rappelons maintenant la notion des solutions faibles des équations de Navier–Stokes que nous adoptons dans notre travail.

Définition 1.1. Soient $T \in]0,+\infty]$ et $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0d})$ une distribution tempérée à divergence nulle. Une solution faible sur $]0,T[$ des équations (NS) est une fonction mesurable $u : Q_T \equiv]0,T[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) $u \in L^2_{loc}(\tilde{Q}_T)$ où $\tilde{Q}_T \equiv [0,T[\times \mathbb{R}^d$.
(2) $u \in C([0,T[, S'(\mathbb{R}^d))$.
(3) $u(0) = u_0$.
(4) $\forall t \in [0,T[, \vec{\nabla} \cdot u(t) = 0$ dans $S'(\mathbb{R}^d)$.
(5) $\exists p \in D'(Q_T)$ tel que $\partial_t u - \Delta u + \nabla(u \otimes u) + \vec{\nabla} p = 0$ dans $D'(Q_T)$.

En 1934, J. Leray [16] a montré que, pour toute donnée initiale u_0 appartenant à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et de divergence nulle, les équations de Navier–Stokes admettent au moins une solution u faible et globale en temps qui appartient, pour tout $T > 0$, à l'*espace d'énergie* $\mathcal{L}_T$ défini par :

$$\mathcal{L}_T \equiv L^\infty\big([0,T], L^2(\mathbb{R}^d)\big) \cap L^2\big([0,T], H^1(\mathbb{R}^d)\big).$$

Ceci nous amène à introduire la notion suivante de solutions faibles de Leray.

Définition 1.2. Soient $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\vec{\nabla} \cdot u_0 = 0$. On appelle une solution faible de Leray sur $]0,T[$ des équations (NS) toute solution faible sur $]0,T[$ des équations (NS) appartenant à l'espace $\mathcal{L}_T$.

Naturellement se pose la question de l'unicité des solutions faibles de Leray. Dans le cas où la dimension de l'espace $\mathbb{R}^d$ est égale à 2, il est bien connu que ces solutions sont uniques (voir par exemple [22]). Dans le cas où la dimension de $\mathbb{R}^d$ est supérieure à 3, la question reste d'une trés grande actualité. On dispose seulement de réponses partielles. En effet, l'unicité est obtenue sous des hypothèses supplémentaires sur la régularité des solutions. A titre d'exemples, nous citons les travaux de J. Serrin [21], de W. Von Wahl [24], de J.Y. Chemin [2], de I. Gallagher et F. Planchon [8] et de P. Germain [10]. Dans cette direction, Q. Chen, C. Miao et Z. Zhang [4] viennent de montrer le résultat d'unicité suivant.

Théorème 1.1. *(Voir [4, théorème 1.4].) Soient $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\vec{\nabla} \cdot u_0 = 0$. Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles de Leray sur $]0,T[$ des équations* (NS). *On suppose que*

$$u_1 \in L^{\frac{2}{1-r_1}}\big([0,T], B_\infty^{-r_1,\infty}(\mathbb{R}^3)\big) \quad et \quad u_2 \in L^{\frac{2}{1-r_2}}\big([0,T], B_\infty^{-r_2,\infty}(\mathbb{R}^3)\big)$$

où $r_1, r_2 \in [0,1[$ tels que $r_1 + r_2 < 1$. Alors $u_1 = u_2$ sur l'intervalle $[0,T]$.

Il en résulte en particulier que les espaces $L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], B_\infty^{-r,\infty}(\mathbb{R}^3))$ avec $r \in [0, \frac{1}{2}[$ forment une classe d'unicité pour les solutions faibles de Leray. Dans le présent travail, nous nous proposons d'étendre ce critère d'unicité aux valeurs $r \in [\frac{1}{2}, 1]$. Ce qui répond positivement à la question posée dans la remarque 1.7 de [4].

Avant d'énoncer nos résultats, nous introduisons la notation suivante :

Notation 1. Soient $T > 0$ et $r \in]0,1]$. On pose

$$\mathcal{P}_{r,T} = L^{\frac{2}{1-r}}\big([0,T], B_\infty^{-r,\infty}(\mathbb{R}^d)\big), \quad \text{si } r \neq 1,$$
$$\mathcal{P}_{r,T} = C\big([0,T], B_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^d)\big), \quad \text{si } r = 1.$$

Théorème 1.2. *On suppose ici que $d \leqslant 4$. Soient $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\vec{\nabla} \cdot u_0 = 0$. Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles de Leray sur $]0,T[$ des équations* (NS). *On suppose qu'il existe $r_1, r_2 \in]0,1]$ tels que $u_1 \in \mathcal{P}_{r_1,T}$ et $u_2 \in \mathcal{P}_{r_2,T}$. Alors $u_1 = u_2$ sur l'intervalle $[0,T]$.*

Grâce aux inégalités de Sobolev précisées de Gérard, Meyer et Oru [9], ce théorème va être une conséquence du résultat d'unicité plus général suivant.

Théorème 1.3. *Soient $T > 0$, $(r_1, r_2) \in]0, 1]^2$ et $(p_i, q_i)_{i=1,2}$ deux couples de réels tels que, pour tout i, $q_i \geqslant d$ et $p_i \geqslant \frac{4}{1+r_i}$ si $r_i \neq 1$ et $p_i > 2$ si $r_i = 1$. Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles sur $]0, T[$ des équations* (NS) *associées à la même donnée initiale u_0 telles que*

$$u_1 \in L^{p_1}\big([0,T], L^{q_1}(\mathbb{R}^d)\big) \cap \mathcal{P}_{r_1,T} \quad et \quad u_2 \in L^{p_2}\big([0,T], L^{q_2}(\mathbb{R}^d)\big) \cap \mathcal{P}_{r_2,T}.$$

Alors $u_1 = u_2$ sur l'intervalle $[0, T]$.

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur le résultat de régularité suivant.

Théorème 1.4. *Soient $T > 0$, $r \in]0, 1]$ et $q \geqslant d$ des réels et soit p un réel supérieur à $\frac{4}{1+r}$ si $r \neq 1$ et strictement supérieur à 2 si $r = 1$. Si $u \in L^p([0,T], L^q(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{P}_{r,T}$ est une solution faible sur $]0, T[$ des équations* (NS)*, alors $\sqrt{t}u \in L^\infty([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^d))$ et $\sqrt{t}\|u(t)\|_\infty$ tend vers 0 lorsque $t \to 0$.*

Remarque 1.1. Ce théorème implique, en particulier, que toute solution u des équations de Navier–Stokes appartenant à l'espace $L^p([0,T], L^q(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{P}_{r,T}$ est, en effet, une solution classique des équations (NS) sur le cylindre $\tilde{Q}_T \equiv]0, T] \times \mathbb{R}^d$ i.e. $u \in C^\infty(\tilde{Q}_T)$ (voir la démonstration de ce théorème dans la dernière section de cet article).

Remarque 1.2. Dans le cas où $r = 1$, le théorème 1.4 a été récemment démontré par P.G. Lemarié-Rieusset [13] lorsque $q > d$ puis par l'auteur de cet article [18] dans le cas limite $q = d$. Ainsi, on se limitera, dans la suite de ce travail, à démontrer ce théorème dans le cas $r \in]0, 1[$. Nous signalons que la démonstration du théoréme dans ce cas utilise des techniques différentes de celles utilisées dans [13] et dans [18] pour montrer le théorème dans le cas limite $r = 1$.

Remarque 1.3. P. Germain [10] a montré l'unicité de solutions faibles de Leray dans la classe $L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], X_r)$ avec $r \in [-1, 1[$ où

$$X_r \equiv \begin{cases} M(H^r, L^2), & \text{si } r \in]0,1[, \\ \Lambda^r BMO, & \text{si } r \in]-1,0], \\ \mathbf{Lip}, & \text{si } r = -1, \end{cases}$$

où $\Lambda^r = (1-\Delta)^{\frac{r}{2}}$ et $M(\dot{H}^r, L^2)$ est l'espace de fonctions $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telles que, pour tout $g \in H^r(\mathbb{R}^d)$, $fg \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $X_r \subset B_\infty^{-r,\infty}$, le théorème 1.4 du présent papier combiné avec les théorèmes 1.2 et 1.4 de [4] constituent une extension de la classe d'unicité de P. Germain [10].

Remarque 1.4. H. Miura [20] a montré l'unicité des solutions faibles des équations de Navier–Stokes appartenant à l'espace

$$\mathcal{M}_T \equiv L^2\big([0,T], L^2_{u\,loc}\big) \cap C\big([0,T], vmo^{-1}\big) \cap L^\infty_{loc}\big(]0,T], L^\infty\big),$$

où vmo^{-1} est l'ensemble des distributions $f \in S'(\mathbb{R}^d)$ vérifiant :

$$\forall T > 0, \quad \|f\|_{BMO_T^{-1}} \equiv \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^d,\ 0 < R^2 < T} R^{-\frac{d}{2}} \left(\int_{[0,R^2] \times B(x_0,R)} \left|e^{t\Delta} f\right|^2 dt\, dy \right)^{1/2} < \infty$$

et

$$\lim_{T \to 0} \|f\|_{BMO_T^{-1}} = 0.$$

Le théorème 1.4 permet d'étendre ce résultat d'uncité ; en effet comme vmo^{-1} est inclus dans $B_\infty^{-1,\infty}$, alors toute solution faible des équations de Navier–Stokes appartenant à l'espace

$$\mathcal{M}^T_{p,q} \equiv L^2\big([0,T], L^2_{u\,loc}\big) \cap C\big([0,T], vmo^{-1}\big) \cap L^p_{loc}\big(]0,T], L^q\big)$$

avec $p > 2$ et $q \geqslant d$, appartient aussi à l'espace de Miura $\mathcal{M}_T$. Il en résulte ainsi que les espaces $(\mathcal{M}^T_{p,q})_{p>2,\ q\geqslant d}$ constituent une classe d'unicité pour les équations de Navier–Stokes.

Cet article s'organise comme suit : dans la section suivante, nous rappelons en premier lieu la notion des solutions mild des équations de Navier–Stokes introduite dans [6], puis nous introduisons les espaces de Besov et les espaces de Chemin–Lerner et nous citons quelques propriétés de ces espaces dont on fait usage. Dans la troisième section, nous montrons comment le théorème principal 1.4 implique le théorème 1.3 puis le théorème 1.2. La dernière section est consacrée à la preuve du théorème 1.4 dans le cas où $r \in]0,1[$.

2. Préliminaires

2.1. Notations

(1) Tous les espaces fonctionnels utilisés dans ce travail sont définis sur l'espace entier $\mathbb{R}^d$. Ainsi, pour alléger l'écriture, nous écrivons par exemple L^q_x, H^s et $B^{s,q}_p$ pour désigner respectivement les espaces $L^q(\mathbb{R}^d)$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $B^{s,q}_p(\mathbb{R}^d)$.
(2) Si X est un espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit souvent $(f_1, \dots, f_n) \in X$ à la place de $(f_1, \dots, f_n) \in X^n$.
(3) Si X est un espace de Banach, T est un réel positif et $p \in [1, +\infty]$, on notera par $L^p_T(X)$ et $L^p_T X$ l'espace $L^p([0,T], X)$.
(4) Soit p un réel supérieur à 1. On désigne par $\mathbf{E}_p$ l'espace de fonctions $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\|f\|_{\mathbf{E}_p} \equiv \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^d} \|1_{B(x_0,1)} f\|_p < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{\|x_0\| \to \infty} \|1_{B(x_0,1)} f\|_p = 0.$$

(5) Si A et B sont des fonctions réelles, on écrit $A \lesssim B$ lorsque $A \leqslant CB$ où C une constante strictement positive indépendante des paramètres qui définissent A et B.

2.2. Solutions mild des équations de Navier–Stokes

On désigne par $\mathbb{P}$ le projecteur de Leray sur l'espace des distributions à divergence nulle. On rappelle que $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ est défini à l'aide des transformations de Riesz $(\mathcal{R}_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ par la relation :

$$\mathbb{P}_{ij}(f) = \delta_{ij} f - \mathcal{R}_i \mathcal{R}_j(f)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Soit $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0d}) \in S'(\mathbb{R}^d)$ une distribution à divergence nulle. En appliquant formellement l'opérateur de Leray $\mathbb{P}$ aux équations (NS) on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -\mathbb{P}\nabla(u \otimes u), \\ u(0,.) = u_0(.). \end{cases}$$

Ensuite, en utilisant la formule de Duhamel, nous transformons formellement ces équations en des équations intégrales :

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \mathbf{B}(u,u)(t), \tag{NSI}$$

où $(e^{t\Delta})_{t\geqslant 0}$ est le semi-groupe de la chaleur et $\mathbf{B}$ est l'application bi-linéaire définie par :

$$\mathbf{B}(u,v)(t) = \mathbb{L}_{Oss}(u \otimes v)(t).$$

$\mathbb{L}_{Oss}$ est l'opérateur linéaire défini par :

$$\mathbb{L}_{Oss}(f) = -\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\nabla(f)\, ds. \tag{2.1}$$

Dans la suite, on appellera $\mathbb{L}_{Oss}$ « *l'opérateur intégral d'Oseen* ».

Dans [6], G. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo ont montré que, dans la classe des solutions $L^2_{loc}([0,T[,\mathbf{E}_2)$, les équations (NS) et leur forme intégrale (NSI) sont équivalentes. Ce qui nous conduit à introduire la notion suivante des solutions *mild* que nous adoptons dans notre travail.

Définition 2.1. Soient $T>0$ et $u_0\in S'(\mathbb{R}^d)$. Une solution mild des équations de Navier–Stokes (NS) sur l'intervalle $]0,T[$ est une fonction $u\in L^2_{loc}([0,T[,\mathbf{E}_2)$ solution dans $D'(Q_T)$ des équations intégrales (NSI) où $Q_T=\,]0,T[\times\mathbb{R}^d$.

Remarque 2.1. Il est bien connu (voir par exemple [6,12]) que toute solution mild u des équations de Navier–Stokes sur $]0,T[$ appartient à l'espace $C([0,T[,B_\infty^{-d-1,\infty}(\mathbb{R}^d))$ et que, pour tout $t\in[0,T[$,

$$u(t)=e^{t\Delta}u_0+\mathbf{B}(u,u)(t)\quad\text{dans } B_\infty^{-d-1,\infty}\big(\mathbb{R}^d\big).$$

Remarque 2.2. Toutes les solutions des équations de Navier–Stokes que nous considérons dans ce travail sont des solutions mild. Ainsi, dans la suite, étant donnée $u\in L^2_{loc}([0,T[,\mathbf{E}_2)$, nous écrivons souvent u est une solution des équations (NS) pour signifier que u est une solution mild sur $]0,T[$ des équations (NS).

Remarque 2.3. Soit u une solution mild sur $]0,T[$ des équations (NS). En utilisant la propriété du semi-groupe de $(e^{t\Delta})_{t\geqslant 0}$, on vérifie aisément que pour tous $t_0\leqslant t\in[0,T[$,

$$u(t)=e^{(t-t_0)\Delta}u(t_0)-\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(u\otimes u)\,ds.$$

Ce qui implique que la fonction $u_{t_0}\equiv u(.+t_0)$ est une solution mild sur $]0,T-t_0[$ des équations de Navier–Stokes associées à la donnée initiale $u(t_0)$.

Remarque 2.4. Dans la suite de notre travail, nous oublierons la condition de nullité de la divergence du champs de vecteur u

$$\vec{\nabla}\cdot u=0$$

qui n'aura aucun rôle.

2.3. *Espaces de Besov et espaces de Chemin–Lerner*

Nous rappelons tout d'abord la décomposition de Littlewood–Paley. Soit $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 sur un voisinage de l'origine. On considère ensuite la fonction $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par $\psi(\xi)=\varphi(\frac{\xi}{2})-\varphi(\xi)$. Pour $j\in\mathbb{N}$, on désigne par S_j et Δ_j les multiplicateurs de Fourier définis pour $f\in S'(\mathbb{R}^d)$ et $v\in S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ par :

$$S_jf=\mathcal{F}^{-1}\bigg(\varphi\bigg(\frac{\xi}{2^j}\bigg)\mathcal{F}(f)\bigg),\qquad \Delta_jf=\mathcal{F}^{-1}\bigg(\psi\bigg(\frac{\xi}{2^j}\bigg)\mathcal{F}(f)\bigg),$$
$$S_jv=\mathcal{F}_x^{-1}\bigg(\varphi\bigg(\frac{\xi}{2^j}\bigg)\mathcal{F}_x(v)\bigg),\qquad \Delta_jv=\mathcal{F}_x^{-1}\bigg(\psi\bigg(\frac{\xi}{2^j}\bigg)\mathcal{F}_x(v)\bigg),$$

où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont la transformation de Fourier et son inverse définies sur $S'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}_x$ et $\mathcal{F}_x^{-1}$ sont la transformation de Fourier et son inverse par rapport à la variable x définies sur $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$.

Notation 2. Dans la suite, on notera souvent l'opérateur S_0 par Δ_{-1}.

Nous pouvons maintenant rappeler la définition d'une classe des espaces de Besov.

Définition 2.2. Soient $s\in\mathbb{R}$ et $q\in[1,+\infty]$. L'espace de Besov $B_q^{s,\infty}$ est l'espace de distributions $f\in S'(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|f\|_{B_q^{s,\infty}} \equiv \sup_{j\geqslant -1} 2^{sj}\|\Delta_j f\|_q < \infty.$$

On désigne par $\tilde{B}_q^{s,\infty}$ l'adherence de $S(\mathbb{R}^d)$ dans $B_q^{s,\infty}$.

Nous rappelons aussi la définition d'une classe des espaces de Chemin et Lerner [5,2,3].

Définition 2.3. Soient $T>0$, $s\in\mathbb{R}$ et $p,q\in[1,+\infty]$. L'espace de Chemin–Lerner $\tilde{L}_T^p B_q^{s,\infty}$ est l'espace de distributions $v\in S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|v\|_{\tilde{L}_T^p B_q^{s,\infty}} \equiv \sup_{j\geqslant -1} 2^{sj}\|\Delta_j v\|_{L_T^p L_x^q} < \infty.$$

On désigne par $\tilde{\mathbf{L}}_T^p B_q^{s,\infty}$ l'ensemble de distributions $v\in\tilde{L}_T^p B_q^{s,\infty}$ telles que :

$$\|v\|_{\tilde{L}_{T_1}^p B_q^{s,\infty}} \to 0 \quad \text{lorsque } T_1\to 0.$$

La proposition suivante regroupe quelques propriétés simples et utiles des espace de Besov et de Chemin–Lerner.

Proposition 2.1. *Soient $T>0$, $s\in\mathbb{R}$, $(p,q)\in[1,+\infty]^2$ et $p_1\in[1,+\infty[$. Les assertions suivantes sont vraies* :

(1) $L_T^p B_q^{s,\infty}\subset\tilde{L}_T^p B_q^{s,\infty}$, $L_T^\infty B_q^{s,\infty}=\tilde{L}_T^\infty B_q^{s,\infty}$ *et* $L_T^{p_1} B_q^{s,\infty}\subset\tilde{\mathbf{L}}_T^{p_1} B_q^{s,\infty}$.
(2) *Les opérateurs* $\mathbb{P}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}$ *envoient continûment* $B_q^{s,\infty}$ (*respectivement* $L_T^p B_q^{s,\infty}$) *dans* $B_q^{s-1,\infty}$ (*respectivement* $L_T^p B_q^{s-1,\infty}$).
(3) *(Injections de Bernstein) Pour tout $m\in[q,\infty]$, on a*

$$B_q^{s,\infty}\subset B_m^{s+d(\frac{1}{m}-\frac{1}{q}),\infty} \quad \textit{et} \quad \tilde{L}_T^p B_q^{s,\infty}\subset\tilde{L}_T^p B_m^{s+d(\frac{1}{m}-\frac{1}{q}),\infty}.$$

De plus, les normes des injections et des applications linéaires considérées dans cette proposition ne dépendent pas de T.

La démonstration de cette proposition est tout à fait classique.

Il est bien connu (voir par exemple [1,12,23]) que le semi-groupe de la chaleur $(e^{t\Delta})_{t\geqslant 0}$ permet de caractériser les espaces de Besov. Nous rappelons dans la proposition suivante un cas particulier de cette caractérisation.

Proposition 2.2. *Soient $q\in[1,+\infty]$ et s un réel strictement positif. Alors, pour tout $\delta>0$, la quantité*

$$\sup_{0<\theta<\delta}\theta^{\frac{s}{2}}\|e^{\theta\Delta}f\|_q$$

définit une norme sur $B_q^{-s,\infty}$ équivalente à la norme originale.

Pour pouvoir établir des estimations de produit de type « estimations douces » dans les espaces de Besov et les espaces de Chemin–Lerner, nous introduisons une version simplifiée du paraproduit de Bony : Pour f et g dans $S'(\mathbb{R}^d)$ (ou dans $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$), on définit formellement $\Pi_1(f,g)$ et $\Pi_2(f,g)$ par :

$$\Pi_1(f,g)=\sum_{j\geqslant -1} S_{j+1}f\,\Delta_j g \quad \text{et} \quad \Pi_2(f,g)=\sum_{j\geqslant 0} S_j f\,\Delta_j g.$$

On obtient, au moins formellement, l'égalité suivante : $fg=\Pi_1(f,g)+\Pi_2(g,f)$. On appellera dans la suite Π_1 et Π_2 les « *opérateurs du paraproduit de Bony* ».

La proposition suivante décrit quelques propriétés d'opérances de ces opérateurs sur les espaces de Besov et les espaces de Chemin–Lerner.

Proposition 2.3 *(Lois du paraproduit de Bony). Soient $T>0$, $\sigma_1<\sigma_2$ deux réels strictement positifs et $(p_1,q_1),(p_2,q_2)\in[1,+\infty]^2$ tels que $\frac{1}{p}\equiv\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$ et $\frac{1}{q}\equiv\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$ soient inférieurs à 1. Alors on a les deux assertions suivantes* :

(1) *Les opérateurs du paraproduit de Bony Π_1 et Π_2 sont continus de $B_{q_1}^{-\sigma_1,\infty} \times B_{q_2}^{\sigma_2,\infty}$ dans l'espace $B_q^{\sigma_2-\sigma_1,\infty}$.*
(2) *Les opérateurs du paraproduit de Bony Π_1 et Π_2 sont continus de $\tilde{L}_T^{p_1} B_{q_1}^{-\sigma_1,\infty} \times \tilde{L}_T^{p_2} B_{q_2}^{\sigma_2,\infty}$ dans l'espace $\tilde{L}_T^{p} B_q^{\sigma_2-\sigma_1,\infty}$ et de $L_T^{p_1} L_x^{q_1} \times \tilde{L}_T^{p_2} B_{q_2}^{\sigma_2,\infty}$ dans l'espace $\tilde{L}_T^{p} B_q^{\sigma_2,\infty}$. De plus, leurs normes sont indépendantes de T.*

La démonstration de cette proposition est simple, voir par exemple [2] où des résultats similaires sont prouvés.

Nous étudions maintenant l'effet régularisant de l'équation de la chaleur sur les espaces de Besov et les espaces de Chemin–Lerner.

La première proposition concerne l'effet régularisant du semi-groupe de la chaleur $(e^{t\Delta})_{t\geqslant 0}$.

Proposition 2.4 *(Effet régularisant du semi-groupe de la chaleur). Soient $T > 0$ $(s, s_1, s_2) \in \mathbb{R}^3$ et $(p, q) \in [1, +\infty]^2$. On a les assertions suivantes* :

(1) *Si $s_1 \leqslant s_2$ alors la famille $(t^{\frac{s_2-s_1}{2}} e^{t\Delta})_{0<t\leqslant T}$ est bornée dans $\mathcal{L}(B_q^{s_1,\infty}, B_q^{s_2,\infty})$.*
(2) *L'opérateur linéaire $e^{t\Delta}$ envoie continûment $B_q^{s,\infty}$ dans $\tilde{L}_T^{p} B_q^{s+\frac{2}{p},\infty}$. De plus, si $p < \infty$, alors $e^{t\Delta}$ envoie continûment $\tilde{B}_q^{s,\infty}$ dans $\tilde{\mathbf{L}}_T^{p} B_q^{s+\frac{2}{p},\infty}$.*

La seconde proposition concerne l'effet régularisant de l'opérateur intégral d'Oseen $\mathbb{L}_{Oss}$ défini par (2.1).

Proposition 2.5 *(Effet régularisant de l'opérateur $\mathbb{L}_{Oss}$). Soient $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$ et $(p_1, p_2, q) \in [1, +\infty]^3$ tel que $p_1 \leqslant p_2$. On pose $s' = s + 1 - 2(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})$. Alors l'opérateur intégral d'Oseen $\mathbb{L}_{Oss}$ envoie continûment $\tilde{L}_T^{p_1} B_q^{s,\infty}$ dans $\tilde{L}_T^{p_2} B_q^{s',\infty}$ et sa norme est majorée par $C(1+T)$ où C est une constante positive indépendante de T.*

Pour la démonstration de ces deux propositions, nous renvoyons le lecteur aux références [2,5].

3. Démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3

Dans cette courte section, nous allons voir comment le théorème 1.4 (qui sera démontré dans la section suivante) permet de montrer le théorème 1.3, puis comment ce dernier implique à son tour le théorème 1.2.

3.1. Démonstration du théorème 1.3

Tout d'abord, d'après le théorème 1.4, on a pour $i = 1$ ou 2,

$$u_i \in L_T^p(\mathbf{E}_d), \quad \sqrt{t}u_i \in L_T^\infty L_x^\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} \sqrt{t}\|u_i(t)\|_\infty = 0,$$

où $p = \inf(p_1, p_2)$ (voir la sous section 2.1, pour la définition de $\mathbf{E}_d$). On considère ensuite la fonction $u \equiv u_1 - u_2$. Cette fonction vérifie l'équation

$$u = \mathbf{B}(u_1, u) + \mathbf{B}(u, u_2).$$

En utilisant alors le fait que la multiplication par une fonction $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et la convolution avec une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$ sont continues sur l'espace $\mathbf{E}_d$ et en rappelant que $e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla$ est un opérateur de convolution avec une fonction intégrable dont la norme $L^1(\mathbb{R}^d)$ est de l'ordre de $(t-s)^{-1/2}$ (voir par exemple [1,12,19]), on déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle, pour tout t dans $[0, T]$,

$$\|u(t)\|_{\mathbf{E}_d} \leqslant C\,\omega(t) \int_0^t \frac{\|u(s)\|_{\mathbf{E}_d}}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}}\,ds,$$

où

$$\omega(t) \equiv \sup_{0<s\leqslant t} \sqrt{s}\big(\|u_1(s)\|_\infty + \|u_2(s)\|_\infty\big).$$

Utilisons à ce stade la continuité de l'opérateur linéaire

$$\mathbf{L}(f)(t) \equiv \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}}\, ds$$

sur l'espace $L^p(\mathbb{R}^+)$ (voir par exemple lemme 5.2 [18]), on trouve que pour tout $\delta \in [0, T]$

$$\sup_{0<t\leqslant\delta} \left\|u(t)\right\|_{\mathbf{E}_d} \leqslant C_p\ \omega(\delta) \sup_{0<t\leqslant\delta} \left\|u(t)\right\|_{\mathbf{E}_d},$$

où C_p est une constante dépendant seulement de p.

Rappelons maintenant que $\omega(\delta)$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0, il résulte qu'il existe $\delta \in]0, T]$ tel que $u = 0$ (et par conséquent, $u_1 = u_2$) sur $[0, \delta]$. Enfin, en procédant à un argument classique de proche en proche (voir par exemple lemme 27.2 [12]), on conclut que $u_1 = u_2$ sur $[0, T]$.

3.2. Démonstration du théorème 1.2

Soit $i = 1$ ou 2. Tout d'abord, les inégalités classiques d'interpolation dans les espaces de Lebesgue et dans les espaces de Sobolev impliquent que u_i appartient à l'espace $L_T^{\frac{2}{r_i}} H^{r_i}$. Ainsi, en appliquant la version nonhomogène des inégalités de Sobolev précisées dues à P. Gérard, Y. Meyer et F. Oru [9] (voir aussi [13], pour une autre démonstration des ces inégalités) :

$$\|f\|_q \lesssim \left(\|f\|_{W^{\alpha,p}}\right)^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \left(\|f\|_{B_\infty^{\alpha-\beta,\infty}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

$$0<\alpha<\beta, \quad 1<p<\infty, \qquad \frac{p}{q} = \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

avec $\alpha = r_i$, $\beta = 2r_i$ et $p = 2$, et en utilisant ensuite les inégalités de Hölder, on trouve que :

$$u_i \in L^4\big([0, T], L^4\big(\mathbb{R}^d\big)\big).$$

Ce qui termine la preuve grâce au théorème 1.3.

4. Démonstration du théorème 1.4

Nous consacrons cette section à la preuve du théorème principal 1.4 dans le cas où $r \in]0, 1[$ (voir la remarque 1.2).

La démonstration de ce théorème nécessite que l'on établisse auparavant quelques résultats intermédiaires par ailleurs utiles en eux mêmes.

La première proposition est un résultat d'unicité locale sous une hypothèse supplémentaire sur la régularité de la donnée initiale.

Proposition 4.1. *Soient $T > 0, r \in]0, 1[, q \geqslant d$ et $p \geqslant \frac{4}{1+r}$ des réels. Si la donnée initiale $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et si $u_1, u_2 \in L_T^{\frac{2}{1-r}}(B_\infty^{-r,\infty}) \cap L_T^p L_x^q$ sont deux solutions mild sur $]0, T[$ des équations* (NS)*, alors il existe $\delta \in]0, T]$ tel que $u_1 = u_2$ sur* $[0, \delta]$.

Dans la seconde proposition, nous montrons un résultat de persistance de la régularité de la donnée initiale et un critère du contrôle d'explosion en temps fini des solutions régulières des équations de Navier–Stokes.

Proposition 4.2. *Soient $q \geqslant d$ un réel et $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors on a les assertions suivantes* :

(1) *Les équations de Navier–Stokes admettent une et une seule solution maximale $u \in C([0, T^*[, L^q(\mathbb{R}^d))$. De plus, pour tout $\sigma > 0$,*

$$u \in C^\infty\big(]0, T^*\big[, \tilde{B}_\infty^{\sigma,\infty}\big). \tag{4.1}$$

(2) *Si on suppose de plus que* $u_0 \in B_\infty^{-r,\infty}$ *avec* $r \in]0,1[$, *alors la solution maximale* u *appartient aussi à l'espace* $L^\infty_{loc}([0,T^*[, B_\infty^{-r,\infty})$.
(3) *Si le temps maximal d'existence* T^* *est fini, alors, pour tout* $r \in]0,1[$, *il existe une constante* $\varepsilon_{r,d} > 0$, *qui ne dépend que de* r *et* d, *telle que*

$$\underline{\lim}_{t \to T^*} \left(T^* - t\right)^{\frac{1-r}{2}} \left\|u(t)\right\|_{B_\infty^{-r,\infty}} \geqslant \varepsilon_{r,d}. \tag{4.2}$$

En particulier,

$$\int_{T^*/2}^{T^*} \left(\left\|u(t)\right\|_{B_\infty^{-r,\infty}}\right)^{\frac{2}{1-r}} dt = +\infty.$$

Remarque 4.1. L'estimation (4.2) améliore un résultat similaire dû à Y. Giga [11] où la norme dans l'espace de Besov $B_\infty^{-r,\infty}$ est remplacée par la norme dans l'espace $L^{\frac{d}{r}}(\mathbb{R}^d)$.

La dernière proposition concerne le comportement au voisinage de l'instant initiale des solutions régulières des équations de Navier–Stokes appartenant à l'espace $L_T^{\frac{2}{1-r}} B_\infty^{-r,\infty}$.

Proposition 4.3. *Soit* $r \in]0,1[$, $T > 0$ *et* $u \in C(]0,T], B_\infty^{1,\infty}) \cap L^{\frac{2}{1-r}}([0,T], B_\infty^{-r,\infty})$ *une solution mild sur* $]0,T[$ *des équations de Navier–Stokes. Alors* $\sqrt{t}\|u(t)\|_\infty \to 0$ *lorsque* $t \to 0$.

Admettons pour le moment ces propositions et voyons comment elles impliquent le théorème principal.

Démonstration du théorème 1.4. On pose $\Omega_{q,r} \equiv \{t_0 \in]0,T[$ tel que $u(t_0) \in L^q(\mathbb{R}^d) \cap B_\infty^{-r,\infty}\}$. Soit t_0 un élément quelconque mais fixe de $\Omega_{r,q}$. La proposition 4.2 nous apprend que les équations de Navier–Stokes associées à la donnée initiale $v_0 \equiv u(t_0)$ admettent une solution maximale v qui appartient à l'espace $C([0,T^*[, L^q) \cap L^\infty_{loc}([0,T^*[, B_\infty^{-r,\infty})$ où T^* est son temps maximal d'existence. La remarque 2.3 et la proposition 4.1 impliquent alors qu'il existe $\delta \in]0,\delta_0[$ tel que $v = u(.+t_0)$ sur $[0,\delta]$ où $\delta_0 \equiv \inf\{T^*, T - t_0\}$. Ce qui justifie la définition :

$$\delta_* \equiv \sup\bigl\{\delta \in]0,\delta_0[\bigm| v = u(.+t_0) \text{ sur } [0,\delta]\bigr\}.$$

Supposons par l'absurde que $\delta_* < \delta_0$. En utilisant la continuité de v sur $[0,\delta_0[$ à valeurs dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ et celle de $u(.+t_0)$ sur $[0,\delta_0[$ à valeurs dans l'espace de Besov $B_\infty^{-1-d,\infty}$ (voir la remarque 2.1), on en déduit alors que $v(\delta_*) = u(\delta_* + t_0) \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, en appliquant à nouveau la proposition 4.1 aux équations de Navier–Stokes associées à la nouvelle donnée initiale $v(\delta_*)$, on trouve qu'il existe $\delta' > \delta_*$ tel que $v = u(.+t_0)$ sur $[0,\delta']$. Ce qui contredit la définition de δ_*. On conclut alors que $v = u(.+t_0)$ sur $[0,\delta_0[$. Ce qui implique, vu l'hypothèse sur la solution u, que $v \in L^{\frac{2}{1-r}}([0,\delta_0[, B_\infty^{-r,\infty})$. Par conséquent, la troisième assertion de la proposition 4.2, implique que $T^* > \delta_0$. Il en résulte ainsi que $u(.+t_0) = v$ sur $[0, T-t_0]$. Utilisons maintenant la régularité de la solution v, assurée par la première assertion de la proposition 4.2, et la densité de $\Omega_{r,q}$ dans $]0,T]$, on conclut que la solution u appartient à $\bigcap_{\sigma>0} C^\infty(]0,T], \tilde{B}_\infty^{\sigma,\infty})$. La proposition 4.3 termine alors la preuve. □

4.1. Démonstration de la proposition 4.1

Pour démontrer cette proposition, nous allons suivre une approche inspirée du travail [2] de J.Y. Chemin. Nous décomposons la démonstration en deux étapes.

4.1.1. Première étape

Soit $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et soit $u \in L_T^{\frac{2}{1-r}}(B_\infty^{-r,\infty}) \cap L_T^p L_x^q$ une solution des équations de Navier–Stokes associées à la donnée initiale u_0. On se propose de montrer qu'il existe $T_0 \in]0,T]$ tel que $u \in \tilde{\mathbf{L}}_{T_0}^{\frac{2}{1+r}}(B_q^{1+r,\infty})$. Pour ce faire, les lemmes suivants nous seront fort utiles.

Lemme 4.1. *Soient $\delta \in]0, T]$, $\rho \in [\frac{2}{1+r}, \infty[$, $m \in [1, +\infty]$ et $\sigma > r$. Alors l'opérateur linéaire $\mathbb{L}_u$ défini par :*

$$\mathbb{L}_u(f) = \sum_{k=1}^{2} \mathbb{L}_{Oss}\big(\Pi_k(u, f)\big) \tag{4.3}$$

est continu sur l'espace $\tilde{\mathbf{L}}^{\rho}_{\delta}(B^{\sigma,\infty}_m)$ et sa norme est majorée par $C\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}_{\delta}(B^{-r,\infty}_{\infty})}$ où C est une constante indépendante de δ.

Lemme 4.2. *On pose $\omega = \mathbf{B}(u, u)$ et $\omega_0 = \mathbb{L}_u(e^{t\Delta}u_0)$ où $\mathbb{L}_u$ est l'opérateur défini par* (4.3). *Alors*

(1) $\omega \in \tilde{\mathbf{L}}^{\frac{p}{2}}_{T}(B^{1,\infty}_{q/2})$.
(2) $\omega_0 \in \tilde{\mathbf{L}}^{\frac{2}{1+r}}_{T}(B^{1+r,\infty}_{q})$.
(3) $\omega_0 \in \tilde{\mathbf{L}}^{\frac{p}{2}}_{T}(B^{1+\frac{2}{p},\infty}_{q/2})$.

Lemme 4.3. *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach et f une application définie sur $X_1 + X_2$. Si les applications $f : X_1 \to X_1$ et $f : X_2 \to X_2$ sont contractantes et si z est un point fixe de f dans X_1 alors $z \in X_2$.*

Admettons un instant ces lemmes et montrons qu'il existe $T_0 \in]0, T]$ tel que u soit dans l'espace $\tilde{\mathbf{L}}^{\frac{2}{1+r}}_{T_0}(B^{1+r,\infty}_{q})$. On pose $\omega = \mathbf{B}(u, u)$ et $\omega_0 = \mathbb{L}_u(e^{t\Delta}u_0)$. On considère la décomposition suivante de ω :

$$\omega = \omega_0 + \mathbb{L}_u(\omega) \equiv \digamma_u(\omega).$$

Les lemmes 4.1 et 4.2 assurent que, pour $T_0 > 0$ assez petit (de sorte que $\|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}_{T_0}(B^{-r,\infty}_{\infty})}$ soit inférieur à une constante absolue ε dépendant seulement de r, p, q), l'application affine $\digamma_u$ est contractante sur les espaces de Banach $\tilde{\mathbf{L}}^{\frac{2}{1+r}}_{T_0}(B^{1+r,\infty}_{q})$ et $\tilde{\mathbf{L}}^{\frac{p}{2}}_{T_0}(B^{1,\infty}_{q/2})$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse $p \geqslant \frac{4}{1+r}$). Or, d'après le lemme 4.2 et par construction de l'application $\digamma_u$, ω est un point fixe de cette application dans l'espace $\tilde{\mathbf{L}}^{\frac{2}{1+r}}_{T_0}(B^{1+r,\infty}_{q})$. Alors, le lemme 4.3 implique $\omega \in \tilde{\mathbf{L}}^{\frac{2}{1+r}}_{T_0}(B^{1+r,\infty}_{q})$. Ce qui nous permet de conclure puisque $e^{t\Delta}u_0$ appartient aussi à $\tilde{\mathbf{L}}^{\frac{2}{1+r}}_{T_0}(B^{1+r,\infty}_{q})$ (voir la démonstration du lemme 4.2).

Montrons maintenant les lemmes 4.1, 4.2 et 4.3.

Démonstration du lemme 4.1. Elle est une conséquence immédiate de l'injection continue de $L^{\frac{2}{1-r}}_{T}(B^{-r,\infty}_{\infty})$ dans $\tilde{\mathbf{L}}^{\frac{2}{1-r}}_{T}(B^{-r,\infty}_{\infty})$, des lois du paraproduit de Bony dans les espaces de Chemin–Lerner (proposition 2.3) et de l'effet régularisant de l'opérateur intégral d'Oseen (proposition 2.5). □

Démonstration du lemme 4.2. Le premier point se démontre aisément en se servant du fait que $u^2 \in L^{p/2}_T L^{q/2}_x$ et en utilisant ensuite l'injection de cet espace dans $\tilde{\mathbf{L}}^{\frac{p}{2}}_{T}(B^{0,\infty}_{q/2})$ et l'effet régularisant de l'opérateur intégral d'Oseen (proposition 2.5). Pour montrer le second point, il suffit d'utiliser l'injection de $L^q(\mathbb{R}^d)$ dans $\tilde{B}^{0,\infty}_{q}$ qui implique, grâce à la proposition 2.4, que la *tendance* $U_0 \equiv e^{t\Delta}u_0$ appartienne à $\tilde{\mathbf{L}}^{\frac{2}{1+r}}_{T}(B^{1+r,\infty}_{q})$ (et à $\tilde{\mathbf{L}}^{p}_{T}(B^{\frac{2}{p},\infty}_{q})$ aussi), puis d'appliquer le lemme précédent. Enfin, le dernier point résulte du fait que $e^{t\Delta}u_0 \in \tilde{\mathbf{L}}^{p}_{T}(B^{\frac{2}{p},\infty}_{q})$, de la continuité des opérateurs du paraproduit de Bony

$$\Pi_k : L^p_T L^q_x \times \tilde{\mathbf{L}}^{p}_{T}\big(B^{\frac{2}{p},\infty}_{q}\big) \to \tilde{\mathbf{L}}^{\frac{p}{2}}_{T}\big(B^{\frac{2}{p},\infty}_{\frac{q}{2}}\big)$$

et de l'effet régularisant de l'opérateur intégral d'Oseen. □

Démonstration du lemme 4.3. On munit l'espace $X \equiv X_1 \cap X_2$ de la norme naturelle $\|x\| = \|x\|_{X_1} + \|x\|_{X_2}$. Il est clair que X est un espace de Banach et que f est contractante sur cet espace, d'où l'existence d'un point fixe z' de f dans X. Ensuite l'unicité du point fixe de f dans l'espace X_1 implique que $z = z'$. Ce qui termine la preuve. □

4.1.2. Deuxième étape

Soient $u_1, u_2 \in L_T^{\frac{2}{1-r}}(B_\infty^{-r,\infty}) \cap L_T^p L_x^q$ deux solutions des équations de Navier–Stokes associées à la même donnée initiale $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^d)$. D'après l'étape précédente, il existe $T_0 \in]0, T]$ tel que

$$u_1, u_2 \in \mathcal{Z}_{T_0} \equiv \tilde{\mathbf{L}}_{T_0}^{\frac{2}{1+r}}\big(B_q^{1+r,\infty}\big) \cap \tilde{\mathbf{L}}_{T_0}^{\frac{2}{1-r}}\big(B_\infty^{-r,\infty}\big).$$

Soit $\delta \in]0, T_0]$ un réel arbitraire à choisir dans la suite. Une application directe des lois du paraproduit de Bony dans les espaces de Chemin–Lerner (proposition 2.3) et de l'effet régularisant de l'opérateur d'Oseen (proposition 2.5), montre que l'application bilinéaire $\mathbf{B}$ est continue de $\mathcal{Z}_\delta \times \mathcal{Z}_\delta$ dans l'espace $\tilde{\mathbf{L}}_\delta^{\frac{2}{1+r}}(B_q^{1+r,\infty}) \cap \tilde{\mathbf{L}}_\delta^{\frac{2}{1-r}}(B_q^{1-r,\infty})$ et que sa norme est majorée par une constante C indépendante de δ. Ensuite, comme $q \geqslant d$ alors les injections de Bernstein (proposition 2.1) assurent que $\tilde{\mathbf{L}}_\delta^{\frac{2}{1-r}}(B_q^{1-r,\infty})$ s'injecte par continuité dans $\tilde{\mathbf{L}}_\delta^{\frac{2}{1-r}}(B_\infty^{-r,\infty})$ et que la norme de cette injection est indépendante de δ. En conclusion, l'application bilinéaire $\mathbf{B} : \mathcal{Z}_\delta \times \mathcal{Z}_\delta \to \mathcal{Z}_\delta$ est continue et sa norme est majorée par une constante C indépendante de δ. On a donc

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{Z}_\delta} \leqslant C\big(\|u_1\|_{\mathcal{Z}_\delta} + \|u_1\|_{\mathcal{Z}_\delta}\big)\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{Z}_\delta}.$$

Ce qui implique, en prenant δ assez petit, que $u_1 = u_2$ sur $[0, \delta]$.

4.2. Démonstration de la proposition 4.2

Le premier point est classique (voir par exemple [1,12,19]). Les démonstrations des deux autres points s'appuient principalement sur le lemme élémentaire suivant où l'on utilise la notation suivante :

Notation 3. Soient T et μ deux réels positifs. On désigne par $L^\infty_{\mu,T}$ l'espace des fonctions $f : [0, T[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telles que

$$\|f\|_{L^\infty_{\mu,T}} \equiv \sup_{0<s<T} s^{\mu/2}\big\|f(s)\big\|_\infty < \infty.$$

Lemme 4.4. *Soient $r \in]0, 1[$ et $T > 0$. Alors l'application bilinéaire $\mathbf{B}$ est continue de $L^\infty_{1,T} \times L^\infty_{r,T}$ (respectivement $L^\infty_{r,T} \times L^\infty_{r,T}$) dans $L^\infty_{r,T}$ et sa norme est majorée par $C_{r,d}$ (respectivement $C_{r,d}T^{\frac{1-r}{2}}$) où $C_{r,d}$ est une constante qui ne dépend que de r et de d.*

La démonstration de ce lemme est immédiate. Il suffit de rappeler que l'opérateur $e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla$ est un opérateur de convolution avec une fonction intégrable dont la norme $L^1(\mathbb{R}^d)$ est de l'ordre de $(t-s)^{-1/2}$.

Revenons à la démonstration de deux dernières assertions de notre proposition.

Il est bien connu (voir par exemple [12]) qu'il existe $T_0 \in]0, T]$ tel que la solution u soit la limite dans l'espace $X_{T_0} \equiv L^\infty_{T_0} L^q_x \cap L^\infty_{1,T_0}$ de la suite $(u_{(n)})_n$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{(0)} = e^{t\Delta}u_0; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{(n+1)} = e^{t\Delta}u_0 + \mathbf{B}(u_{(n)}, u_{(n)}),$$

et que la série de terme général $\sigma_n \equiv \|u_{(n+1)} - u_{(n)}\|_{X_{T_0}}$ soit convergente. Montrons que la suite $(u_{(n)})_n$ est de Cauchy dans l'espace L^∞_{r,T_0}. Tout d'abord, comme $u_0 \in B_\infty^{-r,\infty}$, alors la caractérisation des espaces de Besov à l'aide du noyau de la chaleur assure que $u_{(0)} \in L^\infty_{r,T_0}$. Ensuite, en procédant par récurrence et en utilisant le lemme précédent, on montre aisément que la suite $(u_{(n)})_n$ est dans L^∞_{r,T_0} et vérifie l'inégalité suivante :

$$\|u_{(n+1)} - u_{(n)}\|_{L^\infty_{r,T_0}} \leqslant C_{r,d}\sigma_n\big(\|u_{(n)}\|_{L^\infty_{r,T_0}} + \|u_{(n-1)}\|_{L^\infty_{r,T_0}}\big).$$

Ce qui implique (voir [7,14]) que la suite $(u_{(n)})_n$ est de Cauchy dans L^∞_{r,T_0}. Rappelons à ce stade que L^∞_{r,T_0} est un espace de Banach, qu'il s'injecte par continuité dans L^∞_{1,T_0} et que la suite $(u_{(n)})_n$ converge vers u dans L^∞_{1,T_0}, il vient que $u \in L^\infty_{r,T_0}$. Montrons maintenant que $u \in L^\infty_{T_0}(B_\infty^{-r,\infty})$ ce qui achèvera la preuve de la deuxième assertion grâce à (4.1). Tout d'abord, on a bien d'après la proposition 2.4, $e^{t\Delta}u_0 \in L^\infty_{T_0}(B_\infty^{-r,\infty})$. D'autre part, la proposition 2.2, les inégalités de Young et le fait que la norme $L^1(\mathbb{R}^d)$ du noyau de l'opérateur $e^{t\Delta}\mathbb{P}\nabla$ soit de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{t}}$ impliquent que, pour tout $t \in]0, T_0]$,

$$\begin{aligned}\big\|\mathbf{B}(u,u)(t)\big\|_{B_\infty^{-r,\infty}} &= \sup_{0<\theta\leqslant 1} \theta^{r/2}\big\|e^{\theta\Delta}\mathbf{B}(u,u)(t)\big\|_\infty \\ &\lesssim \sup_{0<\theta\leqslant 1} \theta^{r/2}\int_0^t \frac{1}{s^{(r+1)/2}\sqrt{t+\theta-s}}\,ds\|u\|_{L^\infty_{r,T_0}}\|u\|_{L^\infty_{1,T_0}} \\ &\lesssim \|u\|_{L^\infty_{r,T_0}}\|u\|_{L^\infty_{1,T_0}}.\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du second point.

Passons enfin à la démonstration de la dernière assertion de notre proposition. Supposons que le temps maximal T^* soit fini. Soit $r \in]0,1[$ et soit t_0 un réel quelconque de l'intervalle $I_* \equiv]\max(0; T^*-1), T^*[$. D'après la remarque 2.3, la fonction $u_{t_0}(.) \equiv u(.+t_0)$ est une solution mild sur $[0, \delta_0 \equiv T^*-t_0[$ des équations de Navier–Stokes avec donnée initiale $u(t_0)$. Alors, pour tout $t \in [0, \delta_0[$,

$$u_{t_0}(t) = e^{t\Delta}u(t_0) + \mathbf{B}(u_{t_0}, u_{t_0})(t).$$

Ainsi, en utilisant la proposition 2.2 et en appliquant le lemme précédent, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de r et d telle que, pour tout $t \in [0, \delta_0[$,

$$t^{r/2}\big\|u_{t_0}(t)\big\|_\infty \leqslant C\Big(\big\|u(t_0)\big\|_{B_\infty^{-r,\infty}} + t^{\frac{1-r}{2}}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} s^{r/2}\big\|u_{t_0}(s)\big\|_\infty\Big)^2\Big).$$

Posons $f(t) \equiv \sup_{0\leqslant s\leqslant t} s^{r/2}\|u_{t_0}(s)\|_\infty$; il vient,

$$\forall t \in [0,\delta_0[,\quad f(t) \leqslant C\big(\big\|u(t_0)\big\|_{B_\infty^{-r,\infty}} + \big(T^*-t_0\big)^{\frac{1-r}{2}} f^2(t)\big).$$

Rappelons maintenant qu'il est bien connu [11,12,17] que $\|u(t)\|_\infty \to +\infty$ lorsque $t \to T^*$, ce qui implique que $f(t) \to +\infty$ lorsque $t \to \delta_0$, et utilisons ensuite le lemme 4.5 ci-dessous, il vient

$$\big\|u(t_0)\big\|_{B_\infty^{-r,\infty}}\big(T^*-t_0\big)^{\frac{1-r}{2}} \geqslant \varepsilon_{r,d} \equiv \frac{1}{4C^2}.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition 4.2.

Lemme 4.5. *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe deux réels A et $B > 0$ tels que* : $4AB < 1$, $f(0) \leqslant 2A$ *et* $\forall t \in [a,b[$, $f(t) \leqslant A + Bf^2(s)$. *Alors* $\forall t \in [a,b[$, $f(t) \leqslant 2A$.

La démonstration de ce lemme est simple. Il suffit de remarquer qu'en vertu de l'hypothèse $4AB < 1$, f ne peut pas prendre la valeur $2A$ et d'appliquer ensuite le théorème des valeurs intermédiaires.

4.3. Démonstration de la proposition 4.3

La démonstration de cette proposition s'inspire de l'article [13] de P.G. Lemarié-Rieusset. Soit $(t_n)_n \in]0, T/2]$ une suite qui tend vers 0. On considère la suite de fonctions $(u_n)_n$ définie sur $[0, T/2[$ par $u_n(t) = u(t+t_n)$. Il s'agit de montrer que $\sup_{0<t<\delta}\sqrt{t}\|u_n(t)\|_\infty$ tend vers 0 uniformément par rapport à n lorsque δ tend vers 0. Tout d'abord, pour alléger l'écriture, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}h_n(\mu,\delta) &\equiv \sup_{0<t\leqslant\delta} t^{\frac{\mu+1}{2}}\big\|u_n(t)\big\|_{B_\infty^{\mu,\infty}}, \\ \Theta(\delta) &= \sup_{0<t_0<\frac{T}{2}} \|u\|_{L^{\frac{2}{1-r}}([t_0,t_0+\delta], B_\infty^{-r,\infty})}.\end{aligned}$$

Soient $\sigma \in]r, 1[$ un réel fixe et $\delta_0 \in]0, T/2[$ à choisir ultérieurement. Soient $n \in \mathbb{N}$, $\delta \in]0, \delta_0]$ et $t \in]0, \delta]$. On désigne par $a = a(n,t)$ un réel appartenant à $[\frac{t}{4}, \frac{t}{2}]$ tel que

$$\|u_n(a)\|_{B_\infty^{-r,\infty}} = \inf_{s \in [\frac{t}{4}, \frac{t}{2}]} \|u_n(s)\|_{B_\infty^{-r,\infty}}.$$

Comme u_n est une solution mild des équations de Navier–Stokes, alors d'après la remarque 2.3,

$$u_n(t) = e^{(t-a)\Delta} u_n(a) - \int_a^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\nabla(u_n \otimes u_n)\, ds \tag{4.4}$$

$$\equiv I_n(t) + J_n(t). \tag{4.5}$$

Nous allons estimer les normes de $I_n(t)$ et $J_n(t)$ dans l'espace de Besov $B_\infty^{\sigma,\infty}$. D'après la première assertion de la proposition 2.4 et la définition de $a = a(n,t)$, on a

$$\begin{aligned}\|I_n(t)\|_{B_\infty^{\sigma,\infty}} &\lesssim (t-a)^{-\frac{r+\sigma}{2}} \|u_n(a)\|_{B_\infty^{-r,\infty}} \\ &\lesssim t^{-\frac{1+\sigma}{2}} \|u_n\|_{L^{\frac{2}{1-r}}([t/4,t/2], B_\infty^{-r,\infty})} \\ &\lesssim t^{-\frac{1+\sigma}{2}} \Theta(\delta).\end{aligned} \tag{4.6}$$

D'autre part, en remarquant que $J_n(t) = \mathbb{L}_{Oss}(1_{[a,t]} u_n \otimes 1_{[a,t]} u_n)(t)$ et en utilisant la continuité des opérateurs du paraproduit de Bony Π_k de $\tilde{L}_T^{\frac{2}{1-r}}(B_\infty^{-r,\infty}) \times L_T^\infty(B_\infty^{\sigma,\infty})$ dans $\tilde{L}_T^{\frac{2}{1-r}}(B_\infty^{\sigma-r,\infty})$ (proposition 2.3) et la continuité de l'opérateur $\mathbb{L}_{Oss}$ de $\tilde{L}_T^{\frac{2}{1-r}}(B_\infty^{\sigma-r,\infty})$ dans $L_T^\infty(B_\infty^{\sigma,\infty})$ (proposition 2.5), on déduit aisément que

$$\begin{aligned}\|J_n(t)\|_{B_\infty^{\sigma,\infty}} &\lesssim \|u_n\|_{\tilde{L}^{\frac{2}{1-r}}([a,t], B_\infty^{-r,\infty})} \|u_n\|_{L^\infty([a,t], B_\infty^{\sigma,\infty})} \\ &\lesssim \|u_n\|_{L^{\frac{2}{1-r}}([a,t], B_\infty^{-r,\infty})} \sup_{a \leqslant s \leqslant t} \|u_n(s)\|_{B_\infty^{\sigma,\infty}} \\ &\lesssim t^{-\frac{1+\sigma}{2}} \Theta(\delta) h_n(\sigma, \delta) \\ &\lesssim t^{-\frac{1+\sigma}{2}} \Theta(\delta_0) h_n(\sigma, \delta).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Les inégalités (4.6) et (4.7) impliquent qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de t, δ et n telle que

$$h_n(\sigma, \delta) \leqslant C_1 \Theta(\delta) + C_1 \Theta(\delta_0) h_n(\sigma, \delta). \tag{4.8}$$

En choisissant alors δ_0 assez petit de sorte que $\Theta(\delta_0)$ soit inférieure à $\frac{1}{2C_1}$ (ce qui est possible puisque $\Theta(\delta_0) \to 0$ lorsque $\delta_0 \to 0$), l'inégalité précédente nous donne

$$h_n(\sigma, \delta) \leqslant 2C_1 \Theta(\delta). \tag{4.9}$$

Nous retournons maintenant aux égalités (4.4) et (4.5) pour estimer cette fois les normes de $I_n(t)$ et $J_n(t)$ dans l'espace de Besov $B_\infty^{-r,\infty}$. A nouveau, d'après la première assertion de la proposition 2.4 et la définition de $a = a(n,t)$, on a

$$\begin{aligned}\|I_n(t)\|_{B_\infty^{-r,\infty}} &\lesssim \|u_n(a)\|_{B_\infty^{-r,\infty}} \\ &\lesssim t^{-\frac{1-r}{2}} \Theta(\delta).\end{aligned} \tag{4.10}$$

D'autre part, en utilisant la continuité des opérateurs de Bony Π_k de $B_\infty^{-r,\infty} \times B_\infty^{\sigma,\infty}$ dans $B_\infty^{\sigma-r,\infty}$, l'action de l'opérateur pseudo-différentiel $\mathbb{P}\nabla$ sur les espaces de Besov (proposition 2.1) et la proposition 2.4 on en déduit aisément les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\|J_n(t)\|_{B_\infty^{-r,\infty}} &\lesssim \int_a^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{1-\sigma}{2}}} \|\mathbb{P}\nabla(u_n \times u_n)\|_{B_\infty^{\sigma-r-1,\infty}}\, ds \\ &\lesssim t^{\frac{1+\sigma}{2}} \sup_{\frac{t}{4} < s < t} \|u_n(s)\|_{B_\infty^{-r,\infty}} \sup_{\frac{t}{4} < s < t} \|u_n(s)\|_{B_\infty^{\sigma,\infty}}\end{aligned}$$

$$\lesssim t^{-\frac{1-r}{2}} h_n(-r,\delta) h_n(\sigma,\delta)$$
$$\lesssim t^{-\frac{1-r}{2}} h_n(-r,\delta) \Theta(\delta_0), \tag{4.11}$$

où nous avons utilisé (4.9) dans le dernier passage.

Alors, en combinant les inégalités (4.4) et (4.5), on en déduit qu'il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de t, δ et n telle que

$$h_n(-r,\delta) \leqslant C_2\Theta(\delta) + C_2\Theta(\delta_0) h_n(-r,\delta).$$

Ainsi, pour δ_0 assez petit, on a

$$h_n(-r,\delta) \leqslant 2C_2\Theta(\delta). \tag{4.12}$$

En résumé, en se servant, comme dans [13,15], de l'inégalité classique d'interpolation

$$\|f\|_\infty \leqslant \big(\|f\|_{B_\infty^{-r,\infty}}\big)^{\frac{\sigma}{r+s}} \big(\|f\|_{B_\infty^{\sigma,\infty}}\big)^{\frac{r}{r+\sigma}},$$

les inégalités (4.9) et (4.12) impliquent qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $\delta_0 \in]0, T/2]$ indépendantes de n telles que pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$ on ait

$$\sup_{0<t<\delta} \sqrt{t}\,\big\|u_n(t)\big\|_\infty \leqslant C\Theta(\delta).$$

Ce qui termine la preuve de la proposition 4.3.

Références

[1] M. Cannone, Ondelettes, paraproduit et Navier–Stokes, Diderot Editeur, Paris, 1995.
[2] J.Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier–Stokes tridimensionnel, J. Anal. Math. 77 (1999) 27–50.
[3] J.-Y. Chemin, N. Lerner, Flot de champs de vecteurs nonlipschitziens et équations de Navier–Stokes, J. Differential Equations 121 (1995) 314–328.
[4] Q. Chen, C. Miao, Z. Zhang, On the uniqueness of weak solutions for the 3D Navier–Stokes equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (6) (2009) 2165–2180.
[5] R. Danchin, A few remarks on the Camassa–Holm equation, Differential Integral Equations 14 (2001) 953–988.
[6] G. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset, E. Terraneo, Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier–Stokes, Rev. Mat. Iberoamericana 16 (2000) 605–667.
[7] G. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset, E. Zahrouni, A. Zhioua, Un théorème de persistance de la régularité en norme d'espaces de Besov pour les solutions de Koch et Tataru des équations de Navier–Stokes dans $\mathbb{R}^3$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 330 (2002) 339–342.
[8] I. Gallagher, F. Planchon, On global infinite energy solutions to the Navier–Stokes equations in two dimensions, Arch. Ration. Mech. Anal. 161 (2002) 307–337.
[9] P. Gérard, Y. Meyer, F. Oru, Inégalités de Sobolev précisées, Equations aux Dérivées Partielles, Séminaire de L'Ecole Polytechniques, 1996–1997, exposé n. IV.
[10] P. Germain, Multipliers, paramultipliers, and weak-strong uniqueness for the Navier–Stokes equations, J. Differential Equations 226 (2006) 373–428.
[11] Y. Giga, Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity pf weak solutions of the Navier–Stokes system, J. Differential Equations 62 (1986) 186–212.
[12] P.G. Lemarié-Rieusset, Recent Developments in the Navier–Stokes Problem, Chapman & Hall/CRC, 2002.
[13] P.G. Lemarié-Rieusset, Uniqueness for the Navier–Stokes problem: Remarks on a theorem of Jean-Yves Chemin, Nonlinearity 20 (2007) 1475–1490.
[14] P.G. Lemarié-Rieusset, The Picard iterates for the Navier–Stokes equations in $L^3(\mathbb{R}^3)$, Phys. D 237 (2008) 1334–1345.
[15] P.G. Lemarié-Rieusset, F. Marchand, Solutions auto-similaires non radiales pour l'équation quasi-géostrophique dissipative critique, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 341 (2005) 535–538.
[16] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63 (1934) 193–248.
[17] R. May, Rôle de l'espace de Besov $B_\infty^{-1,\infty}$ dans le contrôle de l'explosion éventuelle en temps fini des solutions régulières des équations de Navier–Stokes, C. R. Acad. Sci. Paris 323 (2003) 731–734.
[18] R. May, Unicité des solutions des équations de Navier–Stokes dans les espaces de Morrey-Campanato, Bull. Sci. Math. (2009), doi:10.1016/j.bulsci.2008.12.003.
[19] Y. Meyer, Wavelets, paraproducts and Navier–Stokes equations, in: Current Developments in Mathematics 1996, International Press, Cambridge, MA, 1999.
[20] H. Miura, Remark on uniqueness of mild solutions to the Navier–Stokes equations, J. Funct. Anal. 218 (2005) 110–129.
[21] J. Serrin, The initial value problem for the Navier–Stokes equations, in: R.E. Langer (Ed.), Nonlinear Problems, 1963, pp. 69–98.
[22] R. Temam, Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1977.
[23] H. Triebel, Theory of Function Spaces, Monogr. Math., vol. 78, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.
[24] W. Von Wahl, The Equations of Navier–Stokes and Abstract Parabolic Equations, Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.