Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 12, n° 6, 1995, p. 727-761. *Analyse non linéaire*

Sur l'équation générale $u_t = a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x + v$ dans L^1 : II. Le problème d'évolution

par

Philippe BÉNILAN

Équipe de Mathématiques, UA CNRS 741,
Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France.

et

Hamidou TOURÉ

Faculté des Sciences et Techniques, Université de Ouagadougou,
03 BP 7021 Ouagadougou 03, Burkina Faso.

RÉSUMÉ. – Nous étudions dans cet article l'équation générale $u_t = a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x+v$ de type parabolique pouvant dégénérer en hyperbolique du premier ordre pour certaines valeurs de (x,u). Utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^1, nous établissons des résultats d'existence, d'unicité et de dépendance continue par rapport aux données, d'une « bonne solution » du problème de Cauchy ou de problèmes aux limites associés à cette équation sous des hypothèses très générales sur les données. Avec des hypothèses complémentaires, nous montrons que cette « bonne solution » est « solution entropique », nous étudions l'unicité des solutions faibles et l'existence de solution forte.

Mots clés : Parabolique dégénéré, Hyperbolique non linéaire, Solution entropique, Semi-groupe non linéaire.

ABSTRACT. – We consider in this article, the general equation $u_t = a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x+v$ of parabolic type, which may degenerate into first order hyperbolic type for some values of (x,u). Under very general assumptions

Classification A.M.S.: Partial differential equations 35 K 65 et 35 L 65.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449
Vol. 12/95/06/$ 4.00/

on the data, we prove existence, uniqueness and continuous dependance results for mild solution of associated Cauchy Problem or Boundary Value Problems. With additionnal assumptions on the data, we show that this mild solution is an "entropy solution" . We study uniqueness of a weak solution and existence of strong solution.

INTRODUCTION

Nous poursuivons l'étude commencée dans [8] du problème général

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t = a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x + v & \text{sur } Q =]0,T[\times I \\ u = \ell \quad \text{sur } \Sigma =]0,T[\times\partial I, & u(0,.) = u_0 \quad \text{sur } I \end{cases}$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $v \in L^1(Q)$, $\ell : \partial I \to \mathbb{R}$, $u_0 \in L^1(I)$, $a : (x,k,\xi) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue et croissante (au sens large) en ξ, $\varphi : (x,k) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et croissante (au sens large) en k.

Comme nous l'indiquions dans [8], notre étude généralise les résultats de [7], [17] pour le problème

$$(2)\qquad \begin{cases} u_t + f(u)_x = \varphi(u)_{xx} + v & \text{sur } Q, \\ u = 0 \quad \text{sur } \Sigma, & u(0,.) = u_0 \quad \text{sur } I \end{cases}$$

où f, φ sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec φ croissante (au sens large). Considérant le cas $\varphi \equiv 0$, (2) se réduit à une loi de conservation

$$(3)\quad u_t + f(u)_x = v \quad \text{sur } Q, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \qquad u(0,.) = u_0 \quad \text{sur } I$$

de telle sorte qu'il est clair que nous incluons dans (1) des problèmes hyperboliques du premier ordre, pour lesquels (même sous des hypothèses de régularité $\mathcal{C}^\infty$ sur les données) il n'y a aucun espoir d'avoir existence de solutions fortes globales.

Utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^1, nous déduisons les résultats pour le « problème d'évolution » (1) des propriétés du « problème stationnaire »

$$(4)\qquad u = a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x + v \quad \text{sur } I, \qquad u = \ell \quad \text{sur } \partial I.$$

L'étude de (4) a fait l'objet du premier article [8]; nous en rappellerons rapidement les résultats dans la Section 1 de ce deuxième article où nous développerons la notion de « bonne solution » de (1) se déduisant immédiatement de l'application de la théorie générale des semi-groupes non linéaires.

Sous les hypothèses de [8] sur les données a et φ que nous repréciserons ci-dessous (dans le cas a et φ indépendant de x, elles se réduisent à la coercivité de a par rapport à ξ, uniformément pour k borné), il y a existence et unicité d'une « bonne solution » de (1) pour tout $(u_0, v) \in L^1(I) \times L^1(Q)$ et $\ell : \partial I \to \mathbb{R}$ (*cf.* théorème 1.2). Lorsque $u_0 \in L^\infty(I)$ et $\int_0^T \|v(t,.)\|_{L^\infty} dt < \infty$, cette bonne solution est bornée (*cf.* proposition 1.4).

Sous des hypothèses complémentaires sur les fonctions $\varphi(x,k)$ et $a(x,k,\xi)$ nous montrons dans la section 2 que cette bonne solution est « solution entropique » de (1) c'est-à-dire vérifie

$$
(5) \quad \begin{cases} \varphi(.,u)_x \in L^1_{loc}(Q), \quad h = a(.,u,\varphi(.,,u)_x) \in L^1_{loc}(Q) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \mid u-k \mid \leq \dfrac{\partial}{\partial x} \left(sign(u-k)(h - H(.,k))\right) \\ \qquad\qquad + sign(u-k)(v + H_x(.,k)) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q) \end{cases}
$$

pour tout $k \in \mathbb{R}$, où $H(x,k) = a(x,k,\varphi_x(x,k))$; nous préciserons également la condition entropique sur la condition au bord Σ lorsque $I \neq \mathbb{R}$ (*cf.* théorème 2.2)

Ces hypothèses complémentaires sont vérifiées pour les fonctions $a(x,k,\xi)$ satisfaisant aux conditions de type Leray-Lions considérées par [1] :

$$c_0(k)\mid \xi \mid^p - C_0(k) \leq \xi a(x,k,\xi) \leq C(k)(1 + \mid \xi \mid^p)$$

(avec $1 < p < +\infty$, c_0, C_0, $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $c_0 > 0$ sur $\mathbb{R}$).

Elle est aussi vérifiée par les fonctions de la forme

$$a(x,k,\xi) = a_0(\xi + g(k)) - f(k)$$

où f, $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $a_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante continue surjective, comme celles de [11] où $a_0(\xi) = \mid \xi \mid^{p-2}\xi$, $1 < p < \infty$.

Dans le cas d'une loi de conservation (3) avec $I = \mathbb{R}$, il y a unicité d'une solution entropique (*cf.* [4], [12]); l'unicité d'une solution entropique dans $BV(Q)$ est également connue pour le problème (3) avec $\partial I \neq \emptyset$ (*cf.* [3]). Pour le problème (2) avec $I = \mathbb{R}$ et des hypothèses de régularité sur les données φ et f, l'unicité des solutions entropiques dans $BV(Q)$

a été considérée dans [18]; nous ignorons si le même résultat est valable dans le cas général du problème (1) considéré ici, ni même d'ailleurs pour le cas particulier (2) sans les hypothèses restrictives de [18].

Lorsque u_0 est solution (entropique) d'un problème stationnaire (4) et la fonction v dans $BV(0,T;L^1(I))$, la bonne solution de (1) est lipschitzienne de $[0,T]$ dans $L^1(I)$. Dans la section 3 nous montrons que les bonnes solutions sont, sans la restriction de la section 2 sur les fonctions $\varphi(x,k)$ et $a(x,k,\xi)$, solutions entropiques de (1) (*cf.* théorème 3.1). Lorsque la fonction $\varphi(x,k)$ est strictement croissante en k, la bonne solution est continue sur $\overline{Q}$; généralisant les résultats de [17], nous montrons qu'il y a unicité d'une solution faible $u \in Lip(0,T;L^1(I)) \cap \mathcal{C}_b(\overline{Q})$ (*cf.* théorème 3.3). Enfin utilisant les techniques de [9], nous prouvons un résultat d'existence (et d'unicité) de solutions fortes de (1) sous des hypothèses très générales sur les fonctions $a(x,k,\xi)$ et $\varphi(x,k)$: elles sont en particulier satisfaites si $\dfrac{\partial a}{\partial k} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial k} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial k} > 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^2$.

Comme nous l'avons fait dans [8], les divers résultats des sections 1, 2 et 3 seront développés pour le problème (1) dans le cas I borné et $I = \mathbb{R}$, ainsi que pour le problème dans le cas $I =]0,\infty[$ où la condition de Dirichlet $u = \ell$ est remplacée par une condition plus générale $a(.,u,\varphi(.,u)_x)(.,0) \in \gamma(u(.,0))$ avec γ graphe maximal monotone à domaine borné.

SECTION 1. BONNES SOLUTIONS

On reprend les hypothèses de [8]. Dans tout cet article, on se donne

(1.1) $\quad a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues

et vérifiant

$$(1.2) \qquad \begin{cases} a(x,k,\xi) \text{ est croissante en } \xi,\ \varphi(x,k) \text{ est croissante en } k \\ \varphi(x,k) \text{ est continuement dérivable par rapport à } x. \end{cases}$$

On pose

$$(1.3) \qquad H(x,k) = a(x,k,\varphi_x(x,k)) \qquad \text{pour} \quad (x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On se donne d'autre part I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $0 < T < \infty$; on pose $Q =]0,T[\times I$ et pour $u_0 \in L^1(I)$, $v \in L^1(Q)$, on considère le problème

$$(E) \qquad \begin{cases} u_t = a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x + v & \text{sur } Q \\ u(.,0) = u_0 & \text{sur } I \\ \text{avec conditions au bord} & \text{sur } \Sigma =]0,T[\times \partial I. \end{cases}$$

Pour les conditions au bord, on considérera les trois cas suivants :
Cas 1 : $I = \mathbb{R}$ et donc $\Sigma = \emptyset$

Cas 2 : $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ avec $-\infty < \alpha_- < \alpha_+ < +\infty$,

$$u = \ell \quad \text{sur } \Sigma =]0, T[\times\{\alpha_-, \alpha_+\} \tag{1.4}$$

où $\ell : \{\alpha_-, \alpha_+\} \to \mathbb{R}$ est donnée

Cas 3 : $I =]0, \infty[$

$$a(., u, \varphi(., u)_x) \in \gamma(u) \quad \text{sur } \Sigma =]0, T[\times\{0\} \tag{1.5}$$

où γ est un graphe maximal monotone de $\mathbb{R}$ donné de domaine $D(\gamma)$ borné.

On fait les hypothèses suivantes (*cf.* dans [8] les hypothèses (2.7), (2.9), (2.10), (2.11), (3.3), (3.4), (3.5), (3.13), (3.14), (3.15)):

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \inf_{I\times]-R,R[} |a(., ., \xi)| = +\infty \qquad \forall R > 0 \tag{$H1$}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2) \text{ et} \\ (sign_0\ k)\dfrac{\partial H}{\partial x} \leq c_0 + \omega|k| \quad \text{p.p. sur } I \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{$H2$}$$

où $c_0 \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ sont des constantes;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} \in BV_{loc}(\mathbb{R}^2) \text{ et pour tout } R > 0 \\ \left|\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right| \leq \mu(R),\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial k} \leq C(R) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(I\times]-R, R[) \end{cases} \tag{$H3$}$$

où $\mu(R)$ est une mesure positive finie sur I et $C(R)$ une constante; enfin on fait l'hypothèse lorsque $|x| \to +\infty$ qui n'intervient que dans le cas $I = \mathbb{R}$ ou $I =]0, \infty[$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{(|x|,k)\to(\infty,0)} \frac{\varphi(x,k)}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{(x,k,\xi)\to(\pm\infty,0,0)} a(x, k, \xi) = h_\pm \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ H(., 0) \in AC(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{$H4$}$$

On définit l'opérateur (univoque) A de $L^1(I)$ par $Au = -a(., u, \varphi(., u)_x)_x$ où $D(A)$ est l'ensemble des $u \in L^1(I) \cap L^\infty(I)$ vérifiant :

(i) $w = \varphi(., u) \in W^{1,\infty}_{loc}(I)$, $a(., u, w_x) \in AC(I)$

(ii) il existe $\widetilde{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ réglée , $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$u = \widetilde{u}, \qquad h = a(., u, w_x) \text{ p.p. sur } I$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $\widetilde{u}(x+) \neq \widetilde{u}(x-)$, on a

$$(\tilde{u}(x+) - \tilde{u}(x-))(h(x) - H(x,k)) \geq 0 \qquad \forall k \in \mathcal{I}(u(x+), u(x-))$$

(iii) dans les cas 2 et 3, les conditions au bord sont satisfaites :
$\varphi(., \tilde{u})$ est continue sur $\mathbb{R}$, et
cas 2 : $\widetilde{u} = \ell(\alpha_-)$ sur $]-\infty, \alpha_-[$, $\widetilde{u} = \ell(\alpha_+)$ sur $]\alpha_+, +\infty[$
cas 3 : il existe $\ell \in D(\gamma)$ tel que $h(0) \in \gamma(\ell)$ et $\widetilde{u} = \ell$ sur $]-\infty, 0[$.

On a noté $\mathcal{I}(u_+, u_-) =]\inf(u_+, u_-), \sup(u_+, u_-)[$.

Rappelons les résultats de [8] (*cf.* proposition 2.8, théorèmes 3.1 et 3.4) :

LEMME 1.1. – *Sous les hypothèses* (H1)-(H4), *l'opérateur A défini ci-dessus vérifie*

(i) *A est T-accrétif,* i.e.

$$\int_I (u_1 - u_2)^+ \leq \int_I (u_1 - u_2 + \lambda(Au_1 - Au_2))^+ \quad \forall u_1,\, u_2 \in D(A),\, \lambda > 0.$$

(ii) *$R(I + \lambda A)$ est dense dans $L^1(I)$ pour tout $\lambda > 0$*

(iii) *$D(A)$ est dense dans $L^1(I)$.*

Appliquant la théorie des semi-groupes non linéaires (*cf.* [4], [6]), en interprétant le problème (E) sous la forme de l'équation d'évolution dans $L^1(I)$

$$\frac{du}{dt} + Au \ni v \quad \text{sur } [0, T], \qquad u(0) = u_0;$$

on en déduit immédiatement

THÉORÈME 1.2. – *Sous les hypothèses* (H1)-(H4), *pour tout $u_0 \in L^1(I)$, $v \in L^1(Q)$, il existe une unique « bonne solution » $u \in C([0,T]; L^1(I))$ de (E) qui est caractérisée par la propriété :*

$$(1.6) \qquad \begin{cases} u(0) = u_0 \text{ et pour tout } \underline{u} \in D(A), \zeta \in \mathcal{D}(]0,T[), \zeta \geq 0, \\ \text{il existe } \alpha \in L^\infty(Q), \alpha \in sign(u - \underline{u}) \text{ sur } Q \text{ tel que} \\ \displaystyle\iint \alpha\{(u - \underline{u})\zeta_t + (v - A\underline{u})\zeta\} dx dt \geq 0 \end{cases}$$

De plus, si u_1, u_2 sont les bonnes solutions correspondant à $(u_{0,1}, v_1)$, $(u_{0,2}, v_2)$, on a

$$(1.7) \quad \max_{t\in[0,T]} \int_I (u_1(t) - u_2(t))^+ \le \int_I (u_{0,1} - u_{0,2})^+ + \iint_Q (v_1 - v_2)^+;$$

en particulier

$$(1.8) \qquad \begin{array}{c} u_{0,1} \le u_{0,2} \text{ p.p. sur } I, \\ v_1 \le v_2 \text{ p.p. sur } Q \Rightarrow u_1(t) \le u_2(t) \text{ p.p. sur } I \end{array}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

On se donne maintenant des suites (a_n), (φ_n) de fonctions vérifiant (1.1), (1.2); dans les cas 2 (resp. 3) des conditions au bord sur Σ, on se donne également une suite (ℓ_n) (resp. (γ_n)) d'applications de $\{\alpha_-, \alpha_+\}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. de graphes maximaux monotones de $\mathbb{R}$, à domaine borné); on se donne enfin des suites $(u_{0,n})$ et (v_n) dans $L^1(I)$ et $L^1(Q)$ respectivement. On suppose que (a_n, φ_n) vérifient les hypothèses (H1)-(H4) uniformément par rapport à n; ceci signifie dans (H2) et (H4) que les limites sont uniformes par rapport à n, et enfin dans (H4) que $\left(\dfrac{d}{dx} H_n(.,0)\right)$ est équi-intégrable sur $\mathbb{R}$; dans le cas 3 des conditions au bord, on suppose également que $D(\gamma_n)$ est borné uniformément par rapport à n.

On suppose maintenant que :

$$\begin{cases} a_n \to a \quad \text{dans } C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \\ \varphi_n \to \varphi, \qquad \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x} \to \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{dans } C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \\ u_{0,n} \to u_0 \quad \text{dans } L^1(I), \qquad v_n \to v \quad \text{dans } L^1(Q) \end{cases}$$

et dans les cas 2 et 3 des conditions au bord

$$\begin{array}{l} \ell_n \to \ell \ \text{ dans } \ \{\alpha_-, \alpha_+\} \\ \gamma_n \to \gamma \ \text{ au sens des graphes maximaux monotones }, \end{array}$$

c'est-à-dire $(I + \gamma_n)^{-1} \to (I + \gamma)^{-1}$ sur $\mathbb{R}$. Appliquant le théorème de dépendance continue des solutions d'équation d'évolution dans un espace de Banach (*cf.* [4], [6]), et utilisant les théorèmes de la section 4 de [8], on obtient immédiatement :

THÉORÈME 1.3. – *Avec les données et hypothèses ci-dessus, la bonne solution* u_n *du problème* (E) *correspondant à* $(a_n, \varphi_n, u_{0,n}, v_n, \ell_n, \gamma_n)$

converge dans $\mathcal{C}([0,T];L^1(I))$ *vers la bonne solution* u *du problème* (E) *correspondant à* $(a,\ \varphi,\ u_0,\ v,\ \ell,\ \gamma)$.

On suppose maintenant que les données u_0, v vérifient

$$(1.9)\qquad \begin{cases} u_0 \in L^1(I) \cap L^\infty(I), \qquad v \in L^1(Q) \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_0^T \|v(t,.)\|_{L^\infty(I)} dt < \infty. \end{cases}$$

Alors la bonne solution u de (E) est essentiellement bornée; plus précisément on a l'estimation suivante :

PROPOSITION 1.4. – *Supposant* (1.9) *et soit* u *la bonne solution de* (E), *alors la fonction* u *est dans* $L^\infty(Q)$ *et*

$$(1.10)\qquad \begin{cases} \|u\|_{L^\infty(Q)} \le e^{\omega T} \quad \max\bigl(M,\ \|u_0\|_{L^\infty(I)}\bigr) \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_0^T e^{\omega(T-t)}(c_0 + \|v(t,.)\|_{L^\infty(I)}\ )\ dt \end{cases}$$

où M *est donné suivant les conditions au bord :*

Cas 1 : $M = 0$
Cas 2 : $M = \max\bigl(|\ell(\alpha_-)|,\ |\ell(\alpha_+)|\bigr)$
Cas 3 : $M = \max\{|k|;\ k \in D(\gamma)\}$

Preuve. – Définissons la fonctionnelle N sur $L^1(I)$ par

$$N(u) = \max\{M,\ \|u\|_{L^\infty(I)}\} \in [0,\ +\infty]$$

où M désigne la constante donnée dans la proposition 1.4. Il est clair que N est s.c.i. sur $L^1(I)$. D'après [8] (*cf.* proposition 2.3, preuve des propositions 3.2 et 3.6)

$$(1.11)\qquad \|u\|_{L^\infty(I)} \le \max\left\{M,\ \frac{\lambda c_0 + \|u + Au\|_{L^\infty}}{1 - \lambda\omega}\right\}$$

pour tout $u \in D(A)$, $\lambda > 0$ avec $\lambda\omega < 1$, où c_0, ω sont les constantes de l'hypothèse (H2). On en déduit

$$(1.12)\qquad N\bigl((I + \lambda A)^{-1} u\bigr) \le \frac{1}{1 - \lambda\omega}\ (Nu + \lambda c_0)$$

pour $\lambda > 0$, $\lambda\omega < 1$ et $u \in R(I + \lambda A)$.

La fermeture $\overline{A}$ de A dans $L^1(I)$ est m-accrétive; notons $J_\lambda = (I + \lambda\overline{A})^{-1}$ sa résolvante. Fixons $R > M$; d'après [8] (*cf.* théorème 2.4, proposition 3.2 et proposition 3.6), il existe $\lambda_R > 0$, $\lambda_R\, \omega < 1$

$$R(I + \lambda A) \supset \{u \in L^1(I) \cap BV(I) \ ; \ \|u\|_{L^\infty} \leq R\}$$

pour tout $\lambda \in]0, \lambda_R]$.

Par approximation dans (1.12) on obtient

$$N(J_\lambda u) \leq \frac{1}{1 - \lambda\omega}\,(N(u) + \lambda c_0) \tag{1.13}$$

pour $\lambda \in\,]0, \lambda_R]$ et $u \in L^1(I)$ avec $N(u) \leq R$.

Considérons maintenant une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n \leq T$ et $u_1, \ldots, u_n,\ v_1, \ldots, v_n \in L^1(I)$ telle que

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \overline{A}u_i \ni v_i \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.14}$$

où u_0 est la donnée initiale du problème (E).

Appliquant (1.13), pour $i = 1, \ldots, n$ on a

$$\lambda_i = t_i - t_{i-1} \leq \lambda_R \qquad \text{et} \qquad N(u_{i-1}) + \lambda_i \|v_i\|_{L^\infty} \leq R,$$

il en résulte alors

$$N(u_i) \leq \frac{1}{1 - \lambda_i\omega}\,\big(N(u_{i-1}) + \lambda_i(c_0 + \|v_i\|_{L^\infty})\big).$$

En itérant, on a donc

$$\begin{aligned} \rho_i N(u_i) \leq{} & N(u_0) \\ & + \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \rho_j \big(c_0 + \|v_j\|_{L^\infty}\big) \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.15}$$

à condition que

$$\max \lambda_i \leq \lambda_R \qquad \text{et} \qquad N(u_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i \big(c_0 + \|v_i\|_{L^\infty}\big) \leq R\rho_n \tag{1.16}$$

où on a posé

$$\rho_i = \prod_{j=1}^{i} (1 - \lambda_j \omega). \tag{1.17}$$

Choisissant $R > R_0 = e^{\omega T} N(u_0) + \int_0^T e^{\omega(T-t)} \left(c_0 + \|v(t,.)\|_{L^\infty(I)}\right) dt$;
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n \leq T$ et $v_1, \ldots, v_n \in L^1(I)$ tels que (1.16) soit satisfaite et

$$\max \lambda_i \leq \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_I |v(t,x) - v_i(x)| dx\, dt \leq \varepsilon \; ; \tag{1.18}$$

il existe $u_1, \ldots, u_n \in L^1(I)$ uniques tels que (1.14) soit satisfaite; d'après (1.15) on a

$$N(u_i) \leq R \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.19}$$

D'après le théorème de Crandall-Liggett, notant u_ε la fonction de [0,T] dans $L^1(I)$ définie par $u_\varepsilon(0) = u_0$, $u_\varepsilon(t) = u_i$ pour $t \in]t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, on sait que

$$u_\varepsilon(t) \to u(t) \text{ dans } L^1(I) \text{ uniformément pour } t \in [0,T];$$

passant à la limite dans (1.19), on obtient

$$N(u(t)) \leq R \qquad \text{pour tout} \quad t \in [0,T];$$

ceci étant vrai pour tout $R > R_0$ on obtient bien (1.10). □

SECTION 2. SOLUTIONS ENTROPIQUES

On reprend les données de la Section 1. Dans cette section, on renforce les hypothèses de la Section 1. On introduit tout d'abord l'hypothèse suivante qui n'interviendra que dans le cas I non borné:

$$\varphi(.,k) \text{ est borné sur } I \text{ pout tout } \; k \in \mathbb{R}. \tag{$H5$}$$

Notons que ceci implique la première partie de (H4).

D'autre part, on introduit la fonction

$$G(x,k,\eta) = \sup_{\xi \in \mathbf{R}} \left(\eta\xi - \int_0^\xi a(x,k,r) dr \right) \tag{2.1}$$

c'est-à-dire que pour $(x,k) \in \mathbb{R}^2, G(x,k,.)$ est la fonction convexe conjuguée de la fonction convexe

$$\xi \to G^*(x,k,\xi) = \int_0^\xi a(x,k,r) dr. \tag{2.2}$$

On fait l'hypothèse suivante

$$(H6)\qquad \begin{cases} \text{pour tout } R > 0, \text{il existe } G_R : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ \text{convexe croissante}, c_R > 0 \text{ et } C_R \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ c_R G_R(|\eta|) - C_R \leq G(x,k,\eta) \leq G_R(|\eta|) \\ \text{pour tout } (x,k,\eta) \in I \times [-R,R] \times \mathbb{R} \end{cases}$$

Il est clair que l'hypothèse (H6) implique (H1). En effet pour tout $(x,k) \in I \times [-R,R]$ on a

$$(2.3)\qquad |a(x,k,\xi)| \geq \frac{1}{|\xi|}\int_0^\xi a(x,k,r)dr \geq \eta - \frac{G_R(\eta)}{|\xi|}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}, \xi \neq 0$ et $\eta \geq 0$. Cette formule montre d'ailleurs aussi que G_R est coercive, c'est-à-dire

$$(2.4)\qquad \lim_{\eta\to\infty} \frac{G_R(\eta)}{\eta} = +\infty.$$

De façon équivalente, l'inégalité (H6) peut s'écrire

$$G_R^*(|\xi|) \leq G^*(x,k,\xi) \leq C_R + c_R G_R^*\Big(\frac{|\xi|}{c_R}\Big)$$

où G_R^* est la fonction convexe conjuguée de G_R; ceci montre que l'hypothèse (H6) implique aussi que $a(x,k,\xi)$ est borné sur $I \times [-R,R] \times [-M,M]$: plus précisément on a

$$(2.5)\qquad |a(x,k,\xi)| \leq C_R + c_R G_R^*\left(\frac{|\xi|+1}{c_R}\right) + G_R(0)$$

pour tout $(x,k,\xi) \in I \times [-R,R] \times \mathbb{R}$.

Remarque 2.1. – Notons que l'hypothèse (H6) est impliquée par les hypothèses de type Leray-Lions,

$$(2.6)\qquad c_0(k)\,|\xi|^p - C_0(k) \leq \xi\, a(x,k,\xi) \leq C(k)(1+|\xi|^p)$$

$(1 < p < \infty, c_0, C_0, C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), c_0 > 0$ sur $\mathbb{R})$ telles qu'on les trouve dans [1]. Elle est aussi satisfaite par les fonctions de la forme

$$(2.7)\qquad a(x,k,\xi) = a_0(\xi + g(x,k)) - f(x,k)$$

où $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(I; \mathcal{C}(\mathbb{R}))$ et $a_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante continue surjective, telles qu'on les trouve dans [11] avec

$$a_0(\xi) = | \xi |^{p-2} \xi, \qquad 1 < p < \infty.$$

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. – *Sous les hypothèses* (H2) *à* (H6) (*qui implique* (H1)) *soient* u_0 *et* v *vérifiant* (1.9) . *Alors la bonne solution* u *de* (E) *est « solution entropique », c'est-à-dire plus précisément :*

(1) $w = \varphi(., u) \in L^\infty_{loc}(\overline{Q}), w_x \in L^\infty_{loc}(\overline{Q}), h = a(., u, w_x) \in L^1_{loc}(\overline{Q})$ *et*

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \mid u - k \mid \leq \dfrac{\partial}{\partial x} \left(sign_0(u - k)(h - H(., k)) \right) \\ \qquad\qquad +sign_0(u - k)(v + H_x(., k)) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q) \end{cases}$$

pour tout $k \in \mathbb{R}$.

(2) *Dans le cas* 2 *des conditions au bord, on a*

$$(2.9) \qquad w(t, \alpha) = \varphi(\alpha, \ell(\alpha)) \ p.p.t \in]0, T[\qquad \text{pour} \quad \alpha \in \partial I$$

et

$$(2.10) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int\int_Q sign_0(u - k) \\ \quad \left\{ (u - k)\zeta_t - (h - H(., k))\zeta_x + (v + H_x(., k)) \ \zeta \ \right\} dtdx \\ \displaystyle \geq \sum_{\alpha \in \partial I} \epsilon(\alpha) sign_0(\ell(\alpha) - k) \langle h(., \alpha) - H(\alpha, k), \zeta(., \alpha) \rangle \end{cases}$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(]0, T[\times\mathbb{R}), \zeta \geq 0$ *et* $k \in \mathbb{R}$, *où* $\epsilon(\alpha_+) = -1, \epsilon(\alpha_-) = +1$.

(3) *Dans le cas* 3, *des conditions au bord, il existe* $\ell \in L^\infty(0, T)$ *avec* $\gamma(\ell) \in L^1(0, T)$ *tel que*

$$(2.11) \qquad w(t, 0) = \varphi(0, \ell) \ p.p.t \in]0, T[$$

et

$$(2.12) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int\int_Q sign_0(u - k) \\ \quad \left\{ (u - k)\zeta_t - (h - H(., k))\zeta_x + (v + H_x(., k))\zeta \right\} dtdx \\ \geq sign_0(\ell_0 - k) \langle h(., 0) - H(0, k), \zeta(., 0) \rangle \\ \displaystyle + \int_0^T sign_0(\ell(t) - k)(z_0 - H(0, k))\zeta(t, 0) dt \end{cases}$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(]0, T[\times\mathbb{R}, \zeta \geq 0,\ k \in \mathbb{R},\ \ell_0 \in D(\gamma)$ *et* $z_0 \in \gamma(\ell_0)$.

Dans le deuxième membre des inégalités (2.10) et (2.12), $\langle\ ,\ \rangle$ est le crochet de dualité entre $\mathcal{D}'(]0,T[)$ et $\mathcal{D}(]0,T[)$; en effet, appliquant (2.8) avec $k = \pm \| u \|_{L^\infty(Q)}$, il est clair que

$$u_t = h_x + v \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q). \tag{2.13}$$

Il en résulte que h admet une trace dans $\mathcal{D}'(]0,T[)$ sur ∂I :
pour tout $\alpha \in \partial I, h(.,\alpha)$ est défini par

$$\left\{\begin{aligned} \langle h(.,\alpha),\zeta\rangle = \epsilon(\alpha)\int\int_Q \{ & u(t,x)\zeta'(t)\rho(x) \\ & -h(t,x)\zeta(t)\rho(x) + v(t,x)\zeta(t)\rho(x)\ \}dxdt \end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

où $\rho \in \mathcal{D}(I \cup \{\alpha\}), \rho(\alpha) = 1$. Dans le cas 3 des conditions au bord, $\alpha = 0$ et $\epsilon(\alpha) = 1$.

Remarque 2.3.

(i) Dans le cas $I = \mathbb{R}$ (cas 1) et d'un problème du premier ordre ($\varphi(x,k) \equiv 0$), il y a unicité des « solutions entropiques », c'est-à-dire des fonctions $u \in \mathcal{C}([0,T]; L^\infty(\mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ vérifiant (2.8) : ceci a été prouvé par S. N. Kruskhov ([12], [13]) sous des hypothèses de Lipschitz continuité de $H(x,k) = a(x,k,0)$ par rapport à k; dans le cas $H(x,k) = H(k)$ seulement continue, l'unicité a été prouvée dans [4]; compte tenu de l'hypothèse (H4), le raisonnement peut s'étendre au cas d'une dépendance en x. Nous ignorons dans le cas des problèmes du second ordre s'il y a encore unicité des solutions entropiques, au moins dans la situation générale considérée ici; en effet sous des hypothèses de régularités sur les données, l'unicité des solutions entropiques BV est prouvée dans [18]. Pour le cas 2 des conditions au bord, la condition eutropique (2.10) correspond à celle considérée dans [3] pour des problèmes du premier ordre et pour lesquels ils prouvent l'unicité sous des hypothèses de régularité sur H et u.

(ii) Le point (1) du théorème 2.2 étend le résultat analogue de [7] dans le cas $a(x,k,\xi) = \xi - f(k)$. Notons également que ce théorème prouve l'existence de solutions faibles de (E) sous des hypothèses très générales et à ce titre étend en dimension 1 d'espace les résultats de [1], [11], etc.

Preuve du théorème 2.2.

Notons par R_0 le second membre de (1.10) et fixons $R > R_0$.

D'après la preuve de la proposition 1.4, pour $\epsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier u_ϵ, v_ϵ constantes sur les intervalles $]t_{i-1}, t_i]$ d'une subdivision

$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n \leq T$ tels que

$$\frac{u_\epsilon(t_i) - u_\epsilon(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} + \overline{A}u_\epsilon(t_i) \ni v_\epsilon(t_i)$$

$$(2.15) \qquad \| u_\epsilon \|_{L^\infty(Q)} \leq R$$

$$(2.16) \qquad \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \| u_\epsilon - u \|_{L^\infty(0,T;L^1(I))} + \| v_\epsilon - v \|_{L^1(Q)} \right\} = 0.$$

On peut d'ailleurs toujours choisir $u_\epsilon(0), v_\epsilon(t_i) \in BV(I)$ avec les propriétés (1.16); puisque $R(I + \lambda A) \supset \{v \in L^1(I) \cap BV(I); \| v \|_\infty \leq R\}$ pour $0 < \lambda < \lambda_R$ (*cf.* [8], théorème 2.4 et lemme 2.6), on peut toujours supposer

$$\frac{u_\epsilon(t_i) - u_\epsilon(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} + Au_\epsilon(t_i) \ni v_\epsilon(t_i).$$

Notant

$$\widetilde{u}_\epsilon(t) = \frac{(t - t_{i-1})u_\epsilon(t_i) + (t_i - t)u_\epsilon(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \qquad \text{pour} \quad t \in [t_{i-1}, t_i],$$

$$w_\epsilon = \varphi(., u_\epsilon), \qquad h_\epsilon = a(., u_\epsilon, w_{\epsilon,x},)$$

on a

$$\widetilde{u}_\epsilon \in W^{1,\infty}(0, T; L^1(I)),$$

et

$$\widetilde{u}'_\epsilon(t) + Au_\epsilon(t) \ni v_\epsilon(t) \;\; p.p.t \in (0, T).$$

D'après le corollaire 1.5 de [8] et la définition de A, on a en particulier

$$(2.17) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int sign_0(u_\epsilon(t) - k) \\ \{(v_\epsilon(t) - \widetilde{u}'_\epsilon(t) + H_x(., k))\zeta - (h_\epsilon(t) - H(., k))\zeta_x\} \geq 0 \\ p.p.t \in (0, T), \forall \zeta \in \mathcal{D}(I), \zeta \geq 0 \text{ et } k \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

puisque

$$sign_0(u_\epsilon(t) - k)\widetilde{u}'_\epsilon(t) \geq \frac{d}{dt} \mid \widetilde{u}_\epsilon(t) - k \mid,$$

on a donc

$$(2.18)\qquad \int\int sign_0(u_\epsilon - k)\{(v_\epsilon + H_x(.,k))\zeta - (h_\epsilon - H(.,k))\zeta_x\} + \int\int | \widetilde{u}_\epsilon - k | \zeta_t \geq 0$$

$\forall \zeta \in \mathcal{D}(Q), \zeta \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$.

Dans le cas 2 des conditions au bord, on peut remplacer (2.17) par

$$\int_I sign_0(u_\epsilon(t) - k)\{(v_\epsilon(t) - \widetilde{u}'_\epsilon(t) + H_x(.,k))\zeta - (h_\epsilon(t) - H(.,k)\zeta_x\} \geq \sum_{\alpha\in\partial I} \epsilon(\alpha) sign_0(\ell(\alpha) - k)(h_\epsilon(t,\alpha) - H(\alpha,k))\zeta(\alpha)$$

$p.p.t \in (0,T), \forall \zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \zeta \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$ et donc (2.18) par

$$(2.19)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int\int_Q sign_0(u_\epsilon - k)\{(v_\epsilon + H_x(.,k))\zeta - (h_\epsilon - H(.,k))\zeta_x\} \\ \displaystyle +\int\int_Q | \widetilde{u}_\epsilon - k | \zeta_t \\ \displaystyle \geq \sum_{\alpha\in\partial I} \epsilon(\alpha) sign_0(\ell(\alpha) - k) \int_0^T (h_\epsilon(t,\alpha) \\ -H(\alpha,k))\zeta(t,\alpha)dt \end{cases}$$

$\forall \zeta \in \mathcal{D}(]0,T[\times\mathbb{R}), \zeta \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$.

Notons également que $w_\epsilon(t,\alpha) = \varphi(\alpha, \ell(\alpha))$ pour $\alpha \in \partial I$.

Enfin dans le cas 3 des conditions au bord, il existe $\ell_\epsilon :]0,T[\to \mathbb{R}$ constante sur les intervalles $]t_{i-1}, t_i[$ telle que $h_\epsilon(t,0) \in \gamma(\ell_\epsilon(t)), w_\epsilon(t,0) = \varphi(0, l_\epsilon(t))$ pour tout $t \in]0,T[$ et

$$(2.20)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int\int_Q sign_0(u_\epsilon - k)\ \{(v_\epsilon + H_x(.,k))\zeta - (h_\epsilon - H(.,k))\zeta_x\} \\ \displaystyle +\int\int_Q | \widetilde{u}_\epsilon - k | \zeta_t \\ \displaystyle \geq \int_0^T sign_0(\ell_\epsilon - k)(h_\epsilon(.,0) - H(0,k))\zeta(.,0)dt \quad ; \end{cases}$$

puisque

$$(sign_0(\ell_\epsilon - k) - sign_0(\ell_0 - k))(h_\epsilon(.,0) - z_0) \geq 0,$$

on en déduit que le deuxième membre de (2.20) est

$$(2.21)\qquad \begin{cases} \geq sign_0(\ell_0 - k)\displaystyle\int_0^T (h_\epsilon(.,0) - z_0)\zeta(.,0)dt \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^T sign_0(l_\epsilon - k)(z_0 - H(0,k))\zeta(.,0)dt. \end{cases}$$

Il est clair, compte tenu de (2.15) et (2.16) que

$$\widetilde{u}_\epsilon \to u \quad \text{dans } \mathcal{C}([0,T]; L^\infty(I))$$
$$w_\epsilon \to w = \varphi(.,u) \quad \text{dans } L^\infty(0,T; L^1_{loc}(I))$$

lorsque $\epsilon \to 0$. D'autre part, d'après (H5),

$$(2.22)\qquad (w_\epsilon) \text{ est borné dans } L^\infty(Q).$$

Le théorème s'obtiendra alors immédiatement à la limite dans (2.18), (2.19), (2.20) et (2.21) en démontrant les résultats suivants :

LEMME 2.4. – *Avec les notations ci-dessus,*

(i) $w_x \in L^1_{loc}(\overline{Q}), w_{\epsilon,x} \to w_x$ faiblement dans $L^1_{loc}(\overline{Q})$

(ii) $h = a(.,u,w_x) \in L^1_{loc}(\overline{Q}), h_\epsilon \to h$ fortement dans $L^1_{loc}(\overline{Q})$

(iii) Dans les cas 2 et 3 des conditions au bord
$h_\epsilon(.,\alpha) \to h(.,\alpha)$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[)$ pour $\alpha \in \partial I$, où $h(.,\alpha)$ est bien défini par (2.14) puisque (2.13) est évidemment satisfaite d'après (i) et (ii).

Première étape de la preuve. – Montrons d'abord que

$$(2.23)\qquad G_R(| h_\epsilon |) \text{ et } G^*_R(| w_\epsilon, x |) \text{ sont bornés dans } L^1_{loc}(\overline{Q}).$$

Par construction on a

$$h_\epsilon w_{\epsilon,x} = (h_\epsilon w_\epsilon)_x - \widetilde{u}_{\epsilon,t} w_\epsilon + v_\epsilon w_\epsilon.$$

Définissons

$$(2.24)\qquad j(x,r) = \int_0^r \varphi(x,s)ds$$

$$\widetilde{j}_\epsilon(t) = \frac{(t - t_{i-1})j(.,u_\epsilon(t_i)) + (t_i - t)j(.,u_\epsilon(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} \qquad \text{pour} \quad t \in [t_{i-1}, t_i];$$

on a

$$\widetilde{j}_\epsilon \in W^{1,\infty}(0,T;L^1(I)) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{u}_{\epsilon,t} w_\epsilon \ \geq \ \widetilde{j}_{\epsilon,t};$$

d'où

$$h_\epsilon w_{\epsilon,x} \leq (h_\epsilon w_\epsilon)_x - \widetilde{j}_{\epsilon,t} + v_\epsilon w_\epsilon \tag{2.25}$$

Enfin d'après (H6), puisque $h_\epsilon = a(.,u_\epsilon,w_{\epsilon,x})$,

$$\begin{cases} c_R G_R(|\ h_\epsilon\ |) - C_R \leq G(.,u_\epsilon,h_\epsilon) \leq G(.,u_\epsilon,0) \\ \qquad\qquad +h_\epsilon w_{\epsilon,x} \leq h_\epsilon w_{\epsilon,x} + G_R(0) \end{cases} \tag{2.26}$$

et

$$-G_R(0) \leq G_R^*(|\ w_{\epsilon,x}\ |) \leq G^*(.,u_\epsilon,w_{\epsilon,x}) \leq h_\epsilon w_{\epsilon,x}. \tag{2.27}$$

Étant donné $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \zeta \geq 0$, on a

$$\begin{cases} \displaystyle\int\int_Q \zeta h_\epsilon w_{\epsilon,x} \leq -\int\int_Q \zeta_x h_\epsilon w_\epsilon \\ \qquad \displaystyle - \sum_{\alpha\in\partial I} \zeta(\alpha) \int_0^T h_\epsilon(t,\alpha) w_\epsilon(t,\alpha) dt \\ \qquad \displaystyle + \int_I \zeta\ \left(j(.,u_0) - j(.,u_\epsilon(T)) \right) + \int\int_Q \zeta v_\epsilon w_\epsilon. \end{cases} \tag{2.28}$$

Dissocions maintenant les différents cas des conditions au bord.

Cas 1 : Fixons $a > 0$ et considérons la fonction

$$\zeta(x) = exp(-(|\ x\ | - a)^+).$$

Puisque $h_\epsilon, w_{\epsilon,x} \in L^\infty(Q)$, on peut appliquer (2.28) avec cette fonction $\zeta(x)$ et obtenir, grâce à (2.26),

$$c_R \int\int_Q \zeta G_R(|\ h_\epsilon\ |) \leq (C_R + G_R(0)) \int\int_Q \zeta$$

$$+ \int\int_{\{|x|>a\}} \zeta h_\epsilon w_\epsilon + \int_{\mathbb{R}} \zeta\ \left(j(.,u_0) - j(.,u_\epsilon(T)) \right) + \int\int_Q \zeta v_\epsilon w_\epsilon.$$

Étant donné que (w_ϵ) et $(j(.,u_\epsilon))$ sont bornés dans $L^\infty(Q)$, grâce à (H5), on a

$$c_R \int\int_Q \zeta G_R(|\, h_\epsilon \,|) \leq C\Big(1 + \int\int_Q \zeta \,|\, h_\epsilon \,|\Big).$$

Par inégalité de Young, on en déduit

$$\frac{c_R}{2}\int\int_Q \zeta G_R(|\, h_\epsilon \,|) \leq C + \frac{c_R}{2} G_R^*\left(\frac{2C}{c_R}\right)\int\int_Q \zeta$$

et donc

$$\int\int_{]0,T[\times]-a,a[} G_R(|\, h_\epsilon \,|) \leq \int\int_Q \zeta G_R(|\, h_\epsilon \,|)$$

est borné.

Puisque $|\, h_\epsilon \,| \leq G_R(|\, h_\epsilon \,|) + G_R^*(1), |\, h_\epsilon \,|$ est borné dans $L^1_{loc}(\overline{Q})$; utilisant à nouveau (2.28), on en déduit que $\int\int_Q \zeta h_\epsilon w_{\epsilon,x}$ est majoré pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\zeta \geq 0$, et donc d'après (2.27), $G_R^*(|\, w_{\epsilon,x} \,|)$ est borné dans $L^1_{loc}(\overline{Q})$.

Cas 2 : Appliquant (2.28) avec $\zeta \equiv 1$, on a puisque $w_\epsilon(t,\alpha) = \varphi(\alpha, \ell(\alpha))$ pour $\alpha \in \partial I$,

$$\int\int_Q h_\epsilon w_{\epsilon,x} \leq -\sum_{\alpha\in\partial I} \epsilon(\alpha)\zeta(\alpha)\varphi(\alpha,\ell(\alpha)) \int_0^T h_\epsilon(t,\alpha)dt$$
$$+ \int_I \zeta\ \big(j(.,u_0) - j(.,u_\epsilon(T))\ \big) + \int\int_Q v_\epsilon w_\epsilon$$

D'autre part choisissant $\rho_\alpha \in \mathcal{D}(I \cup \{\alpha\}), \rho_\alpha(\alpha) = 1$, on a

$$\epsilon(\alpha)\int_0^T h_\epsilon(t,\alpha)dt = \int\int_Q (v_\epsilon \rho_\alpha - h_\epsilon \rho_{\alpha,x}) + \int_I \rho_\alpha(u_0 - u_\epsilon(T)) \quad ;$$

donc

$$\int\int_Q h_\epsilon w_{\epsilon,x} \leq C\Big(1 + \int\int_Q |\, h_\epsilon \,|\Big).$$

On en conclut la preuve de (2.23) comme dans le cas 1 .

Cas 3 : Étant donné que $D(\gamma)$ est borné, il existe $\ell_0 \in D(\gamma)$ tel que $0 \in \gamma(\ell_0)$; par monotonie de γ, on a

$$h_\epsilon(t,0)\ \big(w_\epsilon(t,0) - \varphi(0,\ell_0)\ \big) \geq 0;$$

d'après (2.28), on a pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \zeta \geq 0$

$$\int\int_Q \zeta h_\epsilon w_{\epsilon,x} \leq -\int\int_Q \zeta_x h_\epsilon w_\epsilon - \zeta(0)\varphi(0,\ell_0)\int_0^T h_\epsilon(t,0)dt$$

$$+\int_{\mathbb{R}^+} \zeta(j(.,u_0) - j(.,u_\epsilon(T))) + \int\int_Q \zeta v_\epsilon w_\epsilon.$$

Remplaçant

$$\zeta(0)\int_0^T h_\epsilon(t,0)dt \quad \text{par} \quad \int\int_Q (v_\epsilon\zeta - h_\epsilon\zeta_x) + \int_{\mathbb{R}^+} \zeta(u_0 - u_\epsilon(T)),$$

et raisonnant comme dans le cas 1, on obtient (2.23) .

Puisque G_R et G_R^* sont coercives, (2.23) montre en particulier que (h_ϵ) et $(w_{\epsilon,x})$ sont relativement faiblement séquentiellement compacts dans $L^1_{loc}(\overline{Q})$. Ceci montre déjà le point (i) du lemme .

Deuxième étape de la preuve. – Montrons que

$$\text{(2.29)} \qquad \begin{cases} h = a(.,u,w_x) \in L^1_{loc}(\overline{Q}) \text{ et} \\ h_\epsilon \rightarrow h \text{ faiblement dans } L^1_{loc}(\overline{Q}). \end{cases}$$

Considérons $\epsilon_n \rightarrow 0$ tel que $h_{\epsilon_n} \rightarrow h$ faiblement dans $L^1_{loc}(\overline{Q})$ et montrons que $h = a(.,u,w_x)$. Appliquant le lemme A de l'appendice, avec Ω compact de $\overline{Q}$, $G_n(.,\eta) = G(.,u_{\epsilon_n}(.),\eta)$, on voit que

$$\text{(2.30)} \qquad \int\int G(.,u,h)\zeta \leq \liminf_{n\to\infty} \int\int G(.,u_{\epsilon_n},h_{\epsilon_n})\zeta$$

pour tout $\zeta \in L^\infty(Q)$ à support borné .

Prenant $\zeta \in \mathcal{D}(Q), \zeta \geq 0$ et $\xi \in L^\infty(Q)$ on a

$$G(.,u_\epsilon,h_\epsilon) \leq G(.,u_\epsilon,\xi) + w_{\epsilon,x}(h_\epsilon - \xi);$$

donc en utilisant (2.25),

$$\text{(2.31)} \qquad \begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} \int\int G(.,u_{\epsilon_n},h_{\epsilon_n})\,\zeta \leq \int\int G(.,u,\xi)\zeta \\ \qquad\qquad + \int\int \{-hw\zeta_x + j(.,u)\zeta_t + vw\zeta - w_x\xi\zeta\} \end{cases}$$

De (2.30) et (2.31), on déduit

$$
\begin{aligned}
(2.32) \qquad & G(.,u,h) + j(.,u)_t \\
& \quad \leq G(.,u,\xi) + (hw)_x - w_x\xi + vw \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q)
\end{aligned}
$$

pour tout $\xi \in L^\infty(Q)$.

D'un autre côté, d'après (2.18), $\widetilde{u}_{\epsilon,t} = h_{\epsilon,x} + v_\epsilon$ p p. sur Q, et donc à la limite $u_t = h_x + v$ dans $\mathcal{D}'(Q)$.

Pour $\delta > 0$, considérons

$$
j_\delta(t,x) = \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} j(x,u(\tau,x))d\tau;
$$

on a $j_\delta \in \mathcal{C}^1([0,T-\delta];L^1(I))$, et

$$
(2.33) \quad \begin{cases}
\dfrac{d}{dt}j_\delta(t) = \dfrac{j(.,u(t+\delta)) - j(.,u(t))}{\delta} \\
\qquad \geq w(t)\dfrac{u(t+\delta)-u(t)}{\delta} \\
\qquad = w(t)\left(\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_t^{t+\delta} h(\tau)d\tau\right)_x + w(t)v(t) \\
= \left(\dfrac{w(t)}{\delta}\displaystyle\int_t^{t-\delta} h(\tau)d\tau\right)_x + w(t)v(t) - \dfrac{w(t)_x}{\delta}\displaystyle\int_t^{t+\delta} h(\tau)d\tau.
\end{cases}
$$

Utilisant les inégalités de Young et Jensen, on a

$$
\left|\frac{w(t)_x}{\delta}\int_t^{t+\delta} h(\tau)d\tau\right| \leq G_R^*(\mid w(t)_x \mid) + \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} G_R(\mid h(\tau) \mid)d\tau;
$$

puisque $G_R(\mid h \mid)$ et $G_R^*(\mid w_x \mid) \in L^1_{loc}(\overline{Q})$,

$$
\frac{w(t)_x}{\delta}\int_t^{t+\delta} h(\tau)d\tau \to w(t)_x h(t) \quad \text{dans } L^1(0,T;L^1_{loc}(\overline{I}))
$$

lorsque $\delta \to 0$. A la limite dans (2.33), on obtient

$$
(2.34) \qquad \frac{\partial}{\partial t}j(.,u) \geq (wh)_x + wv - w_x h \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q).
$$

Reportant cette inégalité dans (2.32) on obtient

$$
G(.,u,h) \leq G(.,u,\xi) + w_x(h-\xi) \; p.p. \text{ sur } \quad Q
$$

pour tout $\xi \in L^\infty(Q)$; donc $h = a(.,u,w_x)$.

FIN DE LA PREUVE DU LEMME.

Pour montrer la convergence forte $h_\epsilon \to h$ dans $L^1_{loc}(\overline{Q})$, notons que d'après (2.30), (2.31) et (2.34),

$$\int\int G(.,u,h)\zeta \le \liminf_{\epsilon\to 0}\int\int G(.,u_\epsilon,h_\epsilon)\zeta$$

$$\le \limsup_{\epsilon\to 0}\int\int G(.,u_\epsilon,h_\epsilon)\zeta \le \int\int G(.,u,\xi)\zeta + w_x(h-\xi)\zeta$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(Q), \zeta \ge 0$ et $\xi \in L^\infty(Q)$.

Appliquant l'inégalité précédente avec $\xi = (h\wedge n)\vee(-n)$ et faisant $n \to +\infty$, on obtient

$$\int\int G(.,u_\epsilon,h_\epsilon)\zeta \to \int\int G(.,u,h)\zeta$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(Q), \zeta \ge 0$.

Appliquant le lemme B de l'appendice, avec Ω compact de Q et $G_\epsilon(.,\eta) = G(.,u_\epsilon(.),\eta)$, puisque $\xi \to G^*(.,u(.),\xi) = \int_0^\xi a(.,u(.),r)dr$ est continûment dérivable *p.p.* sur Q, on en déduit $\zeta h_\epsilon \to \zeta h$ dans $L^1(Q)$ pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(Q)$, et donc $h_\epsilon \to h$ dans $L^1_{loc}(Q)$ puisque $h_\epsilon \to h$ faiblement dans $L^1_{loc}(\overline{Q})$, on a bien $h_\epsilon \to h$ fortement dans $L^1_{loc}(\overline{Q})$.

Enfin le point (iii) est immédiat par passage à la limite dans la relation

$$\int_0^T h_\epsilon(t,\alpha)\zeta(t)dt = \epsilon(\alpha)\int\int_Q \{\widetilde{u}_\epsilon(t,x)\zeta'(t)\rho(x)$$

$$-h_\epsilon(t,x)\zeta(t)\rho(x) + v_\epsilon(t,x)\zeta(t)\rho(x)\}dxdt$$

obtenue en intégrant l'équation $\widetilde{u}_{\epsilon,t} = h_{\epsilon,x} + v_\epsilon$. □

SECTION 3. SOLUTIONS DANS $\mathbf{Lip(0,T;L^1(I))\cap L^\infty(Q)}$

On reprend les données et hypothèses de la section 1. Rappelons que l'on définit le domaine généralisé de l'opérateur A par :

$$\widehat{D}(A) = \{u_0 \in L^1(I);\ \text{il existe } (u_n)\subset D(A),\ \text{tel que } u_n \to u_0 \\ \text{dans } L^1(I),\ Au_n \text{ est bornée dans } L^1(I)\}.$$

Si $v \in BV(0,T;L^1(I))$ et $u_0 \in \widehat{D}(A)$, alors d'après la théorie générale des équations d'évolution, la bonne solution u de (E) est lipschitzienne de $[0,T]$ dans $L^1(I)$. Dans cette section nous supposerons

$$(3.1) \qquad \begin{cases} u_0 \in \widehat{D}(A) \cap L^\infty(I), \qquad v \in BV(0,T;L^1(I)) \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_0^T \|v(t,.)\|_{L^\infty}\, dt < \infty; \end{cases}$$

de telle sorte que la bonne solution u de (E) est dans $Lip(0,T;L^1(I)) \cap L^\infty(Q)$. La bonne solution u de (E) est alors solution entropique, plus précisément, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. – *Sous les hypothèses ci-dessus la bonne solution u de (E) est dans $Lip(0,T;L^1(I)) \cap L^\infty(Q)$ et vérifie :*

(1) $w = \varphi(.,u) \in \mathcal{C}(\overline{Q})$, $w_x \in L^\infty(Q)$, $h = a(.,u,w_x) \in \mathcal{C}([0,T];w^* - BV(I))$ et vérifie la condition entropique (2.8), en particulier

$$u_t = h_x + v \text{ dans } \mathcal{D}'(Q)$$

(2) Dans le cas 2 des conditions au bord :

$$w(t,\alpha) = \varphi(\alpha,\ell(\alpha)) \quad \text{pour tout } (t,\alpha) \in [0,T] \times \partial I$$

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\frac{d}{dt}\int |\, u(t,x) - k \,|\, \xi(x)dx \\ \displaystyle\quad + \int sign_0(u(t,x)-k))(h(t,x) - H(x,k))\xi'(x)dx \\ \displaystyle\quad + \sum_{\alpha\in\partial I} \varepsilon(\alpha) sign_0(\ell(\alpha)-k)(h(t,\alpha) - H(\alpha,k))\xi(\alpha) \\ \displaystyle\quad \leq \int sign_0(u(t,x)-k)(v(t,x) + H_x(x,k))\xi(x)dx \end{cases}$$

p.p. $t \in [0,T]$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{I})$ $\quad \xi \geq 0$ où $h(t,\alpha) = \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x\in I}} h(t,x)$ qui existe puisque $h(t,.) \in BV(I)$.

(3) Dans le cas 3 des conditions au bord :

Il existe $\ell \in L^\infty(0,T)$ tel que $w(t,0) = \varphi(0,\ell(t))$, $h(t,0) \in \gamma(\ell(t))$ p.p. $t \in [0,T]$ et

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int \mid u(t,x) - k \mid \xi(x)dx \\ \quad + \displaystyle\int sign_0(u(t,x) - k)(h(t,x) - H(x,k))\xi'(x)dx \\ \quad + sign_0(\ell(t) - k)(h(t,0) - H(.,k))\xi(0) \\ \quad \leq \displaystyle\int \; sign_0(u(t,x) - k)(v(t,x) + H_x(x,k))\xi(x)dx \end{cases}$$

p.p. $t \in [0,T]$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{I}) \quad \xi \geq 0$.

Remarque 3.2. – Notons bien que nous ne supposons pas que les conditions (H5) et (H6) de la section 2 sont vérifiées; ce résultat est donc différent du théorème 2.2 et comme nous allons le voir, est beaucoup plus élémentaire. L'inconvénient est que nous ne savons pas caractériser les éléments de $\widehat{D}(A)$ en général. Notons cependant que $D(A)$ et donc *a fortiori* $\widehat{D}(A)$, contient les fonctions $u_0 \in \mathcal{C}(\overline{I}) \cap L^1(I)$ vérifiant $w_0 = \varphi(.,u_0) \in W^{1,\infty}_{loc}$; $h = a(.,u_0,w_0') \in AC(I)$, et $u_0 = \ell$ sur ∂I, $h(0) \in \gamma(\ell)$ dans les cas 2,3 des conditions au bord

Preuve du théorème 3.1.

On reprend les notations de la démonstration du théorème 2.2. Par définition du domaine généralisé, on peut toujours choisir $u_\varepsilon(0) \in D(A)$ avec $Au_\varepsilon(0)$ borné dans $L^1(I)$. On peut également choisir v_ε borné dans $BV(0,T;L^1(I))$; par accrétivité il en résulte que Au_ε est borné dans $L^\infty([0,T];L^1(I))$ et donc h_ε est borné dans $L^\infty(0,T;BV(I))$. D'après l'hypothèse de coercivité (H1), $w_{\varepsilon,x}$ est donc borné dans $L^\infty(0,T;L^\infty(I))$. On en déduit que

$$w_\varepsilon(t) \to w(t) = \varphi(.,u(t)) \text{ dans } \mathcal{C}(\overline{I}) \text{ uniformément pour } t \in [0,T] ,$$

$$w_\varepsilon(t)_x \to w(t)_x \text{ faiblement dans } L^\infty(I) \quad \text{pour} \quad t \in [0,T] .$$

Il en résulte

$$(3.4) \qquad \begin{cases} w = \varphi(.,u) \in \mathcal{C}(\overline{Q}) \\ w_x \in L^\infty(Q) \\ w_\varepsilon \to w \quad \text{dans } \mathcal{C}([0,T];L^1_{loc}(\overline{I})). \end{cases}$$

D'autre part puisque $\{h_\varepsilon(t)\}$ est relativement compact dans $L^1_{loc}(\overline{I})$, on a compte tenu de la monotonie de a par rapport ξ :

$$h_\varepsilon(t) \to a(.,u(t),w(t)_x) \text{ dans } L^1(I) \text{ uniformément pour } t \in [0,T]$$

et donc

$$(3.5) \qquad \begin{cases} h = a(.,u,w_x) \in \mathcal{C}([0,T]; w^* - BV(I)) \text{ et} \\ h_\varepsilon(t) \to h(t) \text{ dans } w^* - BV(I) \\ \text{uniformément pour tout } t \in [0,T]. \end{cases}$$

D'après le corollaire 1.5 de [8] et la définition de A, on a d'autre part

$$(3.6) \qquad \int sign_0(u_\varepsilon(t)-k) \\ \{(v_\varepsilon(t) - \widetilde{u}'_\varepsilon(t) + H_x(.,k))\xi - (h_\varepsilon(t) - H(.,k))\xi_x\} \geq 0$$

p.p. $t \in [0,T]$ $\forall \xi \in \mathcal{D}(I)$, $\xi \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$;
puisque

$$sign(u_\varepsilon(t)-k)\widetilde{u}'_\varepsilon(t) \geq \frac{d}{dt} \mid \widetilde{u}_\varepsilon(t) - k \mid,$$

on a donc

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int \mid \widetilde{u}_\varepsilon(t,x) - k \mid \xi(x)dx \\ \quad + \displaystyle\int sign_0(u_\varepsilon(t,x)-k)(h_\varepsilon(t,x) - H(x,k))\xi'(x)dx \\ \quad \leq \displaystyle\int sign_0(u_\varepsilon(t,x)-k)(v_\varepsilon(t,x) + H_x(x,k))\xi(x)dx \end{cases}$$

p.p. $t \in [0,T]$ $\forall k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{I})$, $\xi \geq 0$.

Dans le cas 2 des conditions au bord, on a $w_\varepsilon(t,\alpha) = \varphi(\alpha, \ell(\alpha))$ et, à la place de (3.7), on obtient

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int \mid \widetilde{u}_\varepsilon(t,x) - k \mid \xi(x)dx \\ \quad + \displaystyle\int sign_0(u_\varepsilon(t,x)-k)(h_\varepsilon(t,x) - H(x,k))\xi'(x)dx \\ \quad + \displaystyle\sum_{\alpha \in \partial I} \varepsilon(\alpha) sign_0(\ell(\alpha)-k)(h_\varepsilon(t,\alpha) - H(\alpha,k))\xi(\alpha) \\ \quad \leq \displaystyle\int sign_0(u_\varepsilon(t,x)-k)(v_\varepsilon(t,x) + H_x(x,k))\xi(x)dx \end{cases}$$

p.p. $t \in [0,T]$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{I})$ $\xi \geq 0$.

Enfin dans le cas 3 des conditions au bord on a

$$(3.9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int \mid \widetilde{u}_\varepsilon(t,x)-k \mid \xi(x)dx \\ \quad +\displaystyle\int\ sign_0(u_\varepsilon(t,x)-k)(h_\varepsilon(t,x)-H(x,k))\xi'(x)dx \\ +sign_0(\ell_\varepsilon(t,0)-k)(h_\varepsilon(t,0)-H(0,k))\xi(0) \\ \qquad \leq \displaystyle\int sign_0(u_\varepsilon(t,x)-k)(v_\varepsilon(t,x)+H_x(x,k))\xi(x)dx \end{cases}$$

p.p. $t\in[0,T]$ $\forall k\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathcal{D}(\overline{I})$, $\xi\geq 0$ et pour $t\in]0,T[$ $w_\varepsilon(t,0)=\varphi(0,l_\varepsilon(t))$, $h_\varepsilon(t,0)\in\gamma(\ell_\varepsilon(t))$.

Passant à la limite dans les inégalités (3.7), (3.8), (3.9) et compte tenu de (3.4) et (3.5) on obtient la conclusion du théorème. □

On ignore s'il y a unicité des solutions entropiques $u\in Lip(0,T;L^1(I))\cap L^\infty(Q)$ dans le cas général, par contre dans le cas où φ est strictement croissante, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.3. – *En plus des hypothèses de la section* 1 *nous supposons que :*

(3.10) $\varphi(x,.)$ est strictement croissante pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Alors pour tout (u_0,v) vérifiant (3.1) la bonne solution u de (E) est l'unique solution de :

$$(P)\qquad \begin{cases} u\in Lip(0,T;L^1(I))\cap\mathcal{C}_b(\overline{Q}),\ u(0,.)=u_0 \\ w_x\in L^\infty(Q), \\ h=a(.,u,w_x)\in\mathcal{C}(0,T;w^*-BV(I)) \text{ où } w=\varphi(.,u) \text{ et} \\ u_t=h_x+v \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \\ \text{avec les conditions au bord} \end{cases}$$

cas 2 : $u=\ell$ sur $[0,T]\times\partial I$
cas 3 : $h(.,0)\in\gamma(u(.,0))$ sur $[0,T]$.

Preuve.

(1) **Existence**. On montre que la bonne solution u de (E) qui est dans $Lip(0,T;L^1(I))\cap L^\infty(Q)$ est solution de (P). En effet d'après le

théorème 3.1, $w = \varphi(.,u) \in \mathcal{C}(\overline{Q})$ et donc utilisant l'hypothèse (3.10) on a $u \in \mathcal{C}(\overline{Q})$; et d'autre part $w_x \in L^\infty(Q)$, $h \in \mathcal{C}([0,T]; w^* - BV(I))$ et $u_t = h_x + v$ dans $\mathcal{D}'(Q)$.

Dans le cas 2 des conditions au bord, puisque $w(t,\alpha) = \varphi(\alpha, \ell(\alpha))$ pour tout (t,α) dans $[0,T] \times \partial I$, compte tenu de (3.10), on a $u = \ell$ sur $[0,T] \times \partial I$. Dans le cas 3 des conditions au bord, il existe $\ell \in L^\infty(0,T)$ tel que $w(t,0) = \varphi(0,\ell(t))$ sur $[0,T]$ et p.p. $t \in [0,T]$, $h(t,0) \in \gamma(\ell(t))$. Étant donné que $h \in \mathcal{C}([0,T]; w^* - BV(I))$ et utilisant (3.10), on a $u(t,0) = \ell(t)$ pour tout $t \in [0,T]$, on a donc

$$h(t,0) \in \gamma(u(t,0)) \qquad \forall t \in [0,T].$$

(2) **Unicité**. Soient u_1, u_2 deux solutions du problème (P). Posons $w_i = \varphi(., u_i)$ qui satisfait $w_{i,x} \in L^\infty(Q)$, $i = 1, 2$; notons $h_i = a(., u_i, w_{i,x})$. Alors $u = u_1 - u_2 \in Lip(0,T; L^1(I)) \cap \mathcal{C}_b(\overline{Q})$, $h = h_1 - h_2 \in \mathcal{C}([0,T]; w^* - BV(I))$ et $u_t = h_x$ dans $\mathcal{D}'(Q)$.

Appliquant le lemme 3 de [BT1] on a :

$$\frac{d}{dt} \int u(t)^+ = \int_{u(t,.)>0} h(t)_x \quad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

Pour prouver que $u \equiv 0$, il suffit donc de montrer que pour $t \in (0,T)$ et $]a,b[$ une composante connexe de l'ouvert $\{u(t,.) > 0\}$, on a

$$\int_a^b h(t)_x = h(t,b_-) - h(t,a+) \leq 0.$$

On va montrer que $h(t,a+) \geq 0$; on montrerait de la même manière que $h(t,b_-) \leq 0$ ce qui achèvera la preuve du théorème.

1^{er} **cas** : $a \in I$. Alors $w_1(t,.) > w_2(t,.)$ sur $]a,b[$ et $w_1(t,a) = w_2(t,a)$. Puisque $w_1(t)_x, w_2(t)_x \in L^\infty(I)$, il existe une suite (x_n) de points de Lebesgue de $w_1(t)_x$, $w_2(t)_x$ telle que $x_n \to a$ et $w_i(t,x_n)_x \to \xi_i$ avec $\xi_1 \geq \xi_2$. Ainsi par passage à la limite

$$h_1(a, u_1(t,a), \xi_1) = h_1(t,a+) \geq h_2(a, u_2(t,a), \xi_2) = h_2(t,a+)$$

et donc $h(t,a+) \geq 0$.

$2^{\text{ème}}$ **cas** : $a = \alpha_- > -\infty$. Si $u_1(t,\alpha_-) = u_2(t,\alpha_-)$ on est ainsi ramené au 1^{er} cas . Sinon, on est dans le cas 3 des conditions au bord et puisqu'on a $u_1(t,0) > u_2(t,0)$; par monotonie de γ on a $h(t,0+) \geq 0$.

$3^{\text{ème}}$ **cas** : $a = -\infty$. Reprenant maintenant la preuve du théorème 3.1 de [8], on a $h_i(t,a) = \lim_{x \to -\infty} h_i(t,x) = h_-$ pour $i = 1, 2$, où h_- est définie par $(H4)$. On en déduit $h(t,a_+) \leq 0$. $\square$

Nous poursuivons avec l'hypothèse (3.10) du théorème 3.3 et notons

$$\beta(x,.) = \varphi(x,.)^{-1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que la fonction G^* est définie par (2.2). Nous allons montrer que lorsque φ, β, G^* vérifient l'hypothèse complémentaire ci-après:

$$(H7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G^*}{\partial k} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3) \\ \exists c \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2),\ c > 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^2 \text{ telle que} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial k} \geq c,\ \dfrac{\partial \beta}{\partial k} \geq c \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

la solution u du problème (P) est solution forte.

THÉORÈME 3.4. – *Sous les hypothèses du théorème* 3.3, *on suppose que* (H7) *est vérifiée. Alors pour tout* (u_0, v) *vérifiant* (3.1), *la solution* u *du problème (P) est solution forte; plus précisément* $u_t \in L^\infty(0,T;L^1(I))$.

Preuve. – Soit u la solution du problème (P) donnée par le théorème 3.3. Posons

$$\Omega = \{(t,x); c(x,u(t,x)) > 0 \text{ et } c(x,w(t,x)) > 0\}$$

Étant donné que u, $w \in \mathcal{C}(\overline{Q})$, Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Pour prouver ce résultat on va adopter la méthode de [9].

1$^{\text{ère}}$ **étape** : Nous montrons tout d'abord que $|u_t(Q\backslash\Omega)| = 0$.

On adopte les notations et la démarche de [9]. Pour $x \in I$, posons :

$$\chi_x : t \to (t,x), \qquad V_x = \{t; (t,x) \in Q\backslash\Omega\}.$$

On a alors

$$|u_t(Q\backslash\Omega)| = \int_I \left| \frac{d}{dt}(u \circ \chi_x) \right| (V_x)dx.$$

Nous allons prouver que p.p. $x \in I$

$$(3.11) \qquad \left| \frac{d}{dt}(u \circ \chi_x) \right| (V_x) = 0$$

Fixons $x \in I$, tel que

$$N = \{k; c(x,k) = 0\} \text{ soit négligeable.}$$

Puisque

$$V_x = \{t; c(x,u(t,x)) = 0 \text{ ou } c(x,\varphi(x,u(t,x)) = 0\},$$

on a

$$V_x \subset (u \circ \chi_x)^{-1}\Big(N \cup \Big(\bigcup_{n\geq 1}\Big\{k; c(x,k) > \frac{1}{n}, \varphi(x,k) \in N\Big\}\Big)\Big).$$

L'ensemble $\left\{k; c(x,k) > \dfrac{1}{n}\right\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, c'est donc une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints $]k_1, k_2[$. D'après (H7), $\beta(x,.)$ est lipschitzienne sur $]\varphi(x,k_1); \varphi(x,k_2)[$ et donc

$$\{k \in]k_1, k_2[; \varphi(x,k) \in N\} = \beta(x, (N \cap (]\varphi(x,k_1), \varphi(x,k_2)[))$$

est négligeable. On en déduit que

$$\left\{k; c(x,k) > \frac{1}{n}, \varphi(x,k) \in N\right\}$$

est négligeable et donc

$$N \cup \Big(\bigcup_{n\geq 1}\Big\{k; c(x,k) > \frac{1}{n}, \varphi(x,k) \in N\Big\}\Big)$$

est aussi négligeable. Puisque

$$u \circ \chi_x \in \mathcal{C}([0,T]) \cap BV(0,T), \qquad \left|\frac{d}{dt}(u \circ \chi_x)\right|(V_x) = 0.$$

Ceci est vrai p.p. $x \in I$, d'où (3.11).

2e **étape :** On va montrer que $u_t \in L^2_{loc}(\Omega)$; ceci impliquera que la fonction u_t est dans $L^\infty(0,T; L^1(\Omega))$ puisque $u_t = u_t\chi_\Omega$ et $u \in Lip(0,T; L^1(I))$. On reprend les notations de la preuve des théorèmes 2.1 et 3.1.

On rappelle en particulier que

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) = \frac{(t - t_{i-1})u_i + (t_i - t)u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad \text{sur }]t_{i-1}, t_i]$$

$$w_\varepsilon(t) = \varphi(x, u_i) \quad \text{sur }]t_{i-1}, t_i]$$

$$\tilde{u}_\varepsilon, w_{\varepsilon,x} \text{ sont bornés dans } L^\infty(0,T; L^1(I)).$$

On a $\tilde{u}_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{C}(\overline{Q})$; en effet $\{w_\varepsilon(t)\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\overline{I})$ et donc $\{u_\varepsilon(t)\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\overline{I})$.

D'autre part

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) \to u(t) \text{ dans } L^1(I) \text{ uniformément pour } t \in [0,T].$$

Donc $\tilde{u}_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{C}(\overline{Q})$.

Fixons maintenant $(t_0, x_0) \in \Omega$, et posons $k_0 = u(t_0, x_0)$. On a

$$(3.12)\quad \begin{cases} \text{Il existe } c_0 > 0 \text{ et } \delta > 0 \text{ tels que } c(x,k) \geq c_0 \\ \text{et } c(x, \varphi(x,k)) \geq c_0 \\ \text{pour tout } (x,k) \in V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]k_0 - \delta, k_0 + \delta[\end{cases}$$

$$(3.13)\quad \begin{cases} \text{Il existe } \varepsilon_0 > 0 \text{ et } R = [T_1, T_2] \times [x_1, x_2] \text{ voisinage de } (t_0, x_0) \\ \text{tels que } (x, u_\varepsilon(t,x)) \in V \text{ pour tout } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, (t,x) \in R. \end{cases}$$

Considérons $\zeta \in \mathcal{D}(]x_1, x_2[)$ avec $0 \leq \zeta \leq 1$. Soit i tel que $T_1 \leq t_{i-1} < t - i \leq T_2$. On a

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) = \frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = a(., u_i, w_{i,x})_x + v_i \text{ sur }]t_{i-1}, t_i].$$

Multiplions par $\dfrac{w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \zeta^2$ et intégrons sur I.

$$\int \frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \frac{w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \zeta^2 = \int (v_i + a(., u_i, w_{i,x})_x) \frac{w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \zeta^2.$$

Puisque

$$G^*(., u_i, w_{i-1,x}) - G^*(., u_i, w_{i,x}) \geq a(., u_i, w_{i,x})(w_{i-1,x} - w_{i,x})$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} &\int \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)\left(\frac{w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)\zeta^2 \\ &\leq \int v_i \left(\frac{w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)\zeta^2 \\ &\quad - \int \left(\frac{w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right) a(., u_i, w_{i,x}) 2\zeta\zeta_x \\ &\quad + \int \left(\int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{\partial G^*}{\partial k}(., k, w_{i-1,x})\right) \frac{\zeta^2}{t_i - t_{i-1}} \\ &\quad + \int \frac{G^*(., u_{i-1}, w_{i-1,x}) - G^*(., u_i, w_{i,x})}{t_i - t_{i-1}} \zeta^2 \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

On a h_ε, $w_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$, d'où

$$I_1 \leq \|v\|_\infty \int \left| \frac{w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right| \zeta$$

$$I_2 \leq 2C\|\zeta_x\|_{L^\infty} \int \left| \frac{w_i - w_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right| \zeta$$

$$I_3 \leq C \int \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right| \zeta$$

Compte tenu de (3.12), (3.13) et (H7) on a

$$c_0|u_i - u_{i-1}| \leq |w_i - w_{i-1}| \leq c_0^{-1}|u_i - u_{i-1}|.$$

Il en résultera

$$c_0 \int \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 \zeta^2 \leq C_1 \int \left| \frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right| \zeta + I_4$$

et en utilisant l'inégalité de Young, il vient

$$\frac{c_0}{2} \int \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 \zeta^2 \leq C_2 + I_4.$$

Considérons maintenant i, j tel que

$$t_{i-2} < T_1 \leq t_{i-1} < t_i < \ldots < t_{j-1} < t_j \leq T_2 < t_{j+1}.$$

En intégrant les inégalités correspondantes entre $]t_{i-1}, t_i[$ et en faisant leur somme, on a

$$\frac{c_0}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_j} \int_{x_1}^{x_2} \tilde{u}_\varepsilon'(t)^2 \zeta^2 \leq C_2 T$$
$$+ \int_I (G^*(., u_{i-1}, w_{i,x}) - G^*(., u_j, w_{j,x}))\zeta.$$

Donc

$$\frac{c_0}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_j} \int_{x_1}^{x_2} \tilde{u}_\varepsilon(t)^2 \zeta^2 \leq C_2 T + C_3$$

Par passage à la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient $\frac{c_0}{2} \int\int_R u'(t)^2 \zeta^2 \leq C_2 T + C_3$. Donc la fonction u_t est dans $L^2_{loc}(\Omega)$. $\square$

APPENDICE

Nous donnons ici, deux résultats classiques d'analyse convexe, dont nous n'avons pas pu trouvé de références précises.

Soient $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie et pour $n = 1, 2, \ldots$, $G_n : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ mesurable en x, convexe en $\eta \in \mathbb{R}^N$. On suppose

$$(A.1) \qquad G_n(x,\eta) \to G(x,\eta) \quad \mu \text{ p.p. } x \in \Omega,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^N \text{ lorsque } n \to \infty$$

$$(A.2) \qquad G_n(x,\eta) \leq G_0(\eta)\ \mu \text{ p.p. } x \in \Omega,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^N,\ \forall n$$

où $G_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ est convexe et coercive, *i.e.*

$$(A.3) \qquad \lim_{|\eta| \to +\infty} \frac{G_0(\eta)}{|\eta|} = +\infty.$$

Soit d'autre part une suite (h_n) de $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ telle que

$$(A.4) \qquad \int_\Omega G_0(h_n)\,d\mu \leq C < \infty \quad \text{pour tout } n.$$

Alors (h_n) est relativement faiblement séquentiellement compact dans $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$; on suppose

$$(A.5) \qquad h_n \to h \text{ faiblement dans } L^1(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

LEMME A. – *On a pour tout* $\zeta \in L^\infty(\Omega)$, $\zeta \geq 0$

$$(A.6) \qquad \int G(.,h))\,\zeta\,d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int G_n(.,h_n)\zeta\,d\mu.$$

Preuve. – D'après (A.2), on a

$$(A.7) \qquad |\,\xi\,| \leq G_0\Big(\eta + \frac{\xi}{|\,\xi\,|}\Big) \leq C_0(|\,\eta\,|) \quad \forall \xi \in \partial G_n(x,\eta),$$

et d'après (A.1), $\partial G_n(x,.) \to \partial G(x,.)$ au sens des graphes μ p.p. $x \in \Omega$ (*cf.* [2]). Quitte à prendre une suite extraite, et à remplacer $G_n(x,\eta)$ par

$$\zeta(x) \quad (G_n(x,\eta) - G_n(x,0) - \partial G_n^\circ(x,0)\eta),$$

on peut toujours supposer $\zeta \equiv 1$ et

$$G_n(x,0) = 0 \quad \mu \text{ p.p. } x \in \Omega \tag{A.8}$$

Pour $M > 0$, définissons

$$G_n^M(x,\eta) = \sup_{|\xi|\leq M} (\xi\eta - G_n^*(x,\xi)) \leq (M \mid \eta \mid) \wedge G_n(x,\eta).$$

On a

$$G_n^M(x,\eta) \to G^M(x,\eta) = \sup_{|\xi|\leq M} (\xi\eta - G^*(x,\xi)) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$

et

$$G^M(x,\eta) \uparrow G(x,\eta) \text{ lorsque } M \uparrow \infty.$$

D'après le lemme de Fatou, pour M fixé

$$\int G^M(.,h)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int G^M(.,h_n)d\mu \ ;$$

d'autre part

$$\mid G^M(.,h_n) - G_n^M(.,h_n) \leq M \mid h_n \mid$$

et

$$\mid G^M(.,h_n) - G_n^M(.,h_n) \mid \to 0 \ \mu \text{ p.p.};$$

donc d'après le théorème de Vitali

$$G^M(.,h_n) - G_n^M(.,h_n) \to 0 \text{ dans } L^1(\Omega)\ .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int G^M(.,h)d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int G_n^M(.,h_n)d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int G_n(.,h_n)d\mu \end{aligned}$$

et donc (A.6), à la limite lorsque $M \to \infty$.

LEMME B. – *Étant donné $\zeta \in L^\infty(\Omega)$, $\zeta \geq 0$, supposons*

$$\int G_n(.,,h_n)\zeta d\mu \to \int G(.,h)\zeta d\mu. \tag{A.9}$$

Si $G(x,.)$ est strictement convexe et coercive μ p.p. $x \in \Omega$, alors

$$\zeta h_n \to \zeta h \text{ dans } L^1(\Omega).$$

Preuve. – Comme dans la preuve du lemme B on peut toujours supposer $\zeta \equiv 1$. Il existe $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}^N$ mesurables tels que $\xi_n \in \partial G_n(.,h)$ μ p.p., $\xi_n \to \xi$ μ p.p.; on a alors

$$(A.10) \qquad G_n(.,h_n) - G_n(.,h) - \xi_n(h_n - h) \geq 0 \quad \mu \text{ p.p.}$$

Étant donné $M > 0$, d'après (A.5), (A.7) et (A.9)

$$(A.11) \quad \begin{cases} \limsup_{n\to+\infty} \int_{\{|h|\leq M\}} (G_n(.,h_n) - G_n(.,h) - \xi_n(h_n - h))d\mu \\ \quad \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{\{|h|>M\}} (G_n(.,h) - G_n(.,h_n))d\mu. \end{cases}$$

D'après (A.6),

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\{|h|>M\}} (G_n(.,h) - G_n(.,h_n))d\mu$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|h|>M\}} (G_n(.,h) - G(.,h))d\mu.$$

Enfin

$$G_n(.,h) - G(.,h) \to 0 \quad \mu \text{ p.p. }, \mid G_n(.,h) - G(.,h) \mid \leq G_0(\mid h \mid)$$

et par le lemme de Fatou et (A.4)

$$\int G_0(h)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int G_0(h_n)d\mu \leq C.$$

Donc, en reprenant (A.10) et (A.11),

$$\big(G_n(.,h_n)) - G_n(.,h) - \xi_n(h_n - h)\big)\chi_{\{|h|\leq M\}} \to 0$$

dans $L^1(\Omega)$.

Utilisant un procédé diagonal, de toute suite extraite, on peut extraire une suite (n_k) telle que

$$\zeta(G_{n_k}(.,h_{n_k}) - G_{n_k}(.,h) - \xi_{n_k}(h_{n_k} - h)) \to 0 \quad \mu \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Pour prouver le résultat, on peut donc supposer

$$(A.12) \qquad G_n(.,h_n) - G_n(.,h) - \xi_n(h_n - h) \to 0 \quad \mu \text{ p.p sur } \{\zeta > 0\},$$

et montrer alors que $h_n \to h$ μ p.p. sur $\{\zeta > 0\}$.

Fixons un point $x \in \Omega$, $\zeta(x) > 0$ tel que la convergence (A.12) ait lieu ainsi que

$$\xi_n(x) \to \xi(x), \quad G_n(x,\eta) \to G(x,\eta) \text{ pour tout } \eta \in \mathbb{R}^N$$

et $G(x,.)$ strictement convexe et coercive. Étant donné $z \in \partial G(x,\eta)$, il existe $z_n \in \partial G_n(x,\eta_n)$ tels que

$$(\eta_n,\, z_n) \to (\eta,\, z).$$

On a

$$G_n(x,h_n(x)) \geq G_n(x,\eta_n) + z_n(h_n(x) - \eta_n)$$

donc

$$\limsup_{n\to\infty}(z_n - \xi_n(x))h_n(x)) \leq z\eta - h(x)\xi(x) + G(x,h(x)) - G(x,\eta).$$

Puisqu'on peut prendre $z \in \mathbb{R}^N$ arbitraire et puisque $G(x,.)$ est coercive, on en déduit que $h_n(x)$ est borné. Si η est point limite de $(h_n(x))$ lorsque $n \to \infty$, on a alors

$$G(x,h(x)) \geq G(x,\eta) + \xi(x)(h(x) - \eta)$$

et donc, puisque $G(x,.)$ est strictement convexe, $\eta = h(x)$.

Il en résulte donc que $h_n(x) \to h(x)$ lorsque $n \to \infty$. □

RÉFÉRENCES

[1] H. W. Alt and S. Luckhaus, Quasilinear elliptic parabolic differential equations, *Math. Z.*, Vol. **183**, 1983, pp. 311-341.

[2] H. Attouch, Variational convergence for functions and operators, *Applicable Maths Series Pitmann*, London, 1984.

[3] C. L. Bardos, A. Y. Le Roux and J. C. Nedelec, First order Quasilinear Equations with boundary conditions, *Comm. in partial differential equations*, Vol. **4(9)**, 1979, pp. 1017-1043.

[4] Ph. Bénilan, Équation d'Évolution dans un espace de Banach quelconque et application, *Thèse de Doctorat d'état*, Orsay, 1972.

[5] Ph. BÉNILAN, Sur des problèmes non monotones dans un espace L^2, *Publi. Math. Besançon, Analyse non linéaire*, Vol. **3**, 1977.
[6] Ph. BÉNILAN, M. G. CRANDALL and A. PAZY, Evolution Equation governed by accretive Operators, (livre à paraître).
[7] Ph. BÉNILAN and H. TOURÉ, Sur l'équation générale $u_t = \varphi(u)_{xx} - \psi(u)_x + v.$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 299, série I, n 18, 1984.
[8] Ph. BÉNILAN and H. TOURÉ, Sur l'équation générale $u_t = a(.,u,\varphi(.,u)_x)_x$ dans L^1. I. Étude du problème stationnaire, à paraitre dans *Evolution Equations, Proceedings Conférence L.S.U.*, Janvier 1993, Marcel Dekker 1994.
[9] Ph. BÉNILAN and R. GARIEPY, Strong solutions in L^1 of degenerate parabolic equations, à paraître dans *J. Diff. Equation.*
[10] H. BRÉZIS, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert, *Math. Studies 5*, North-Holland, 1973.
[11] S. L. DIAZ and F. de THELIN, On a nonlinear parabolic problem arising in some models related to turbulent flows, à paraître dans *SIAM J. Math. Anal.*
[12] S. N. KRUSKOV, First order quasilinear equations with several independent variables, *Math. Sb. 81*, Vol. **123**, pp. 228-255. *Math USSR Sbornik*, Vol. **10**, 1970, pp. 217-243.
[13] S. N. KRUSKOV and E. Yu. PANOV, Conservative quasilinear first order laws with an infinite domain of dependence on the initial data, *Soviet Math. Dokl*, Vol. **42**, 1991, N. 2.
[14] J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
[15] O. A. OLEINIK, Discontinuous solutions of nonlinear differential Equations, *Amer. Math. Transl.*, Vol. **(2) 26**, 1963, pp. 95-172.
[16] M. PIERRE, Un Théorème général de génération de semi-groupes non linéaires, *Israël Journal of Mathematics*, Vol. **23**, n^0 3-4, 1976.
[17] H. TOURÉ, Étude des équations générales $u_t - \varphi(u)_{xx} + f(u)_x = v$ par la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^1, *Thèse de 3^e^ Cycle*, 1982, Université de Franche-Comté.
[18] A. I. VOL'PERT and S. I. HUDJAEV, Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations, *Math. USSR-Sbornik*, Vol. **7**, n° 3, 1969.

(Manuscrit reçu le 7 avril 1994.)