Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 8, n° 5, 1991, p. 419-441. *Analyse non linéaire*

Un principe de concentration-compacité pour les suites de surfaces Riemanniennes

par

M. TROYANOV

Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal, C.P. 8888, Succursale A, Montréal H3C 3P8, Canada

RÉSUMÉ. — Nous étudions dans cet article des suites de métriques à aire et courbure bornées sur une surface compacte S. Nous démontrons que, si la structure conforme reste bornée, alors ou bien il existe une sous-suite convergente, ou bien il existe un point où une certaine quantité positive de courbure se concentre. Ce niveau de concentration est calculé. (dans le cas où la courbure est bornée uniformément, ce niveau est 2π).

Mots clés : Courbure, Concentration-Compacité, Suites de métriques.

ABSTRACT. — In this paper, we study sequences of metrics on a compact surface S, with bounded area and curvature. We prove that, if the conformal structure of these metrics remains bounded, then either the sequence has a convergent subsequence or there exists a point at which a certain amount of positive curvature concentrates. This level of concentration is computed. (When the curvature is uniformely bounded, then this level is 2π.)

Classification A.M.S. : 53 C, 35 J, 58 G.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449
Vol. 8/91/05/419/23/$4.30/

1. INTRODUCTION

L'objet de cet article est d'apporter une contribution à l'étude des suites divergentes de métriques sur une surface compacte dont l'aire et la courbure restent bornées. Lorsque la courbure varie entre deux constantes négatives, la suite de métriques diverge si et seulement si la structure conforme associée diverge. On peut considérer que ce phénomène est bien compris (il existe plusieurs compactifications naturelles de l'espace de Taichmüller qui ont été abondamment étudiées).

Lorsque la structure conforme reste bornée, le schéma qui se dégage est le suivant : si $\{g_j\}$ est une suite de métriques à aire et courbure bornée sur une surface compacte S, alors il existe une sous-suite $\{g_{j'}\}$ telle que *ou bien* $\{(S, g_{j'})\}$ converge, *ou bien* il existe, au moins un point de S où une quantité positive de courbure se concentre.

Lorsqu'on dit que $\{(S, g_j)\}$ converge, on entend par là (sauf précision contraire) qu'elle converge au sens uniforme-riemannien, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{\varphi_j\}$ de difféomorphismes de S tel que la suite de métriques $\{\varphi_j^*(g_i)\}$ converge dans la topologie C^0 vers une métrique g_∞ de classe C^0 non dégénérée.

Afin de pouvoir formuler notre résultat, nous adopterons la

1.1. DÉFINITION. – *Soit* $\{g_j\}$ une suite de métriques de classe $L_2^1 \cap C^0$ sur une surface S. Observons que ces métriques possèdent une courbure K_j de classe L^1. Soit α un réel positif. On dit que cette suite vérifie le *principe de concentration-compacité* de niveau α si l'alternative suivante a lieu :

– ou bien il existe une sous-suite $\{g_{j'}\}$ telle que $\{(S, g_{j'})\}$ converge,

– ou bien pour tout $k<\alpha$, il existe un point $x\in S$ tel que pour tout voisinage U de x on ait

$$\limsup_{j \to \infty} \int_U K_j^+ \, dA_j > k.$$

(On utilise dA_j pour désigner l'élément d'aire de g_j, et, pour presque tout x, on définit $K_j^+(x) := \max\{K_j(x), 0\}$. On note encore $\mathscr{A}_j$ l'aire de (S, g_j)).

Lorsque $\{g_j\}$ vérifie le principe de concentration-compacité de niveau α, on dira en abrégé que $\{g_j\}$ vérifie $CC(\alpha)$.

Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal de cet article :

1.2. THÉORÈME A. – *Soit* $\{g_j\}$ *une suite de métriques riemanniennes de classe* $L_2^1 \cap C^0$ *sur une surface compacte* S. *Supposons qu'il existe des constantes positives* C, a, a', p $(1<p\leqq\infty)$ *telles que*

(*a*) *la structure conforme de* (S, g_j) *reste bornée;*

(*b*) $\|K_j\|_{L^p(S, g_0)} \leqq C$;

(*c*) $a \leqq \mathscr{A}_j \leqq a'$.

Alors (S, g_j) *vérifie* $CC\left(\frac{2\pi}{p^*}\right)$ *où* $\frac{1}{p^*}+\frac{1}{p}=1$.

Remarques. – (i) La condition (*a*) de l'énoncé sera précisée au paragraphe 4 (définition 4.1).

(ii) Dans la condition (*b*), g_0 est une métrique de référence sur S.

1.3. Corollaire. – *Soit* $\{g_j\}$ *une suite de métriques* C^2 *sur une surface compacte S telle que*

(*a*) *la structure conforme de* (S, g_j) *reste bornée;*

(*b*) $-c_1 \leqq K_j \leqq -c_2 < 0$.

Alors (S, g_j) *contient une sous-suite convergente.*

Preuve. – La formule de Gauss-Bonnet, avec les inégalités (*b*), nous donne les estimées nécessaires pour appliquer le théorème A.

Ce corollaire est en fait une conséquence assez faible du théorème A, la version du lemme de Schwarz donnée par Ahlfors (*cf.* [A]) suffirait à le démontrer. On peut donc considérer que le théorème A est une extension du lemme de Schwarz au cas où la courbure n'est pas nécessairement négative.

On peut mettre le corollaire ci-dessus en parallèle avec le résultat suivant :

1.4. Proposition. – *Soit* $\{g_j\}$ *une suite de métriques* C^2 *sur une surface compacte* S *telle que*

$$0 < c_1 \leqq K_j \leqq c_2.$$

Alors (S, g_j) *contient une sous-suite convergente.*

Preuve. – L'aire de (S, g_j) est bornée inférieurement (par Gauss-Bonnet). D'autre part, le diamètre de (S, g_j) est inférieur à $\pi/\sqrt{c_1}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence de Gromov (rappelé au paragraphe 2 ci-dessous).

Ces résultats suggèrent que le phénomène de concentration est lié à une annulation ou un changement de signe de la courbure.

Dans le cas où la suite $\{g_j\}$ est strictement conforme à une métrique g_0 fixe, le théorème A prend une forme un peu plus précise.

1.5. Théorème B. – *Soit* $\{g_j := e^{2u_j} g_0\}$ *une suite de déformations conformes d'une métrique* g_0 *(de classe* C^2*) sur une surface compacte* S *telles que* $u_j \in L_2^1(S, g_0)$. *Supposons qu'il existe des constantes positives* C, a, a', $p\,(1 < p \leqq \infty)$ *telles que*

(i) $\|K_j\|_{L^p(S, g_0)} \leqq C$;

(ii) $a \leqq \mathscr{A}_j \leqq a'$.

Alors

– ou bien *il existe* $\delta \in]0, 1[$ *et une sous-suite* $\{u_{j'}\}$ *telle que* $\{u_{j'}\}$ *converge dans* $C^\delta(S)$;

– ou bien *pour tout* $k < 2\pi/p^*$, *avec* $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$, *il existe un point* $x \in S$ *tel que pour tout voisinage* U *de* x *on ait*

$$\limsup_{j \to \infty} \int_U K_j^+ \, dA_j > k.$$

Même lorsque la structure conforme est fixe, le contenu géométrique des théorèmes A et B n'est pas tout à fait identique (à cause de l'existence d'un groupe non compact de transformations conformes sur la sphère). Voici un exemple expliquant cette nuance :

On considère la sphère $S = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ munie de sa métrique canonique

$$g_0 = \frac{4 |dz|^2}{(1 + |z|^2)^2}.$$

Soit F la transformation conforme de S donnée par $F(z) = 2z$, et $g_j = (F^j)^* (g_0)$. Alors

$$g_j = e^{2u_j} g_0 \qquad \text{où} \qquad u_j = j \log(2) + \log(1 + |z|^2) - \log(1 + 4^j |z|^2)$$

est une suite non bornée. Malgré cela, $\{(S, g_j)\}$ est une suite convergente puisque toutes ces surfaces sont isométriques à la sphère standard.

Observons que, dans cet exemple, le « niveau de concentration » de courbure est 4π et non 2π.

Une question naturelle se pose au sujet des théorèmes A et B : que se passe-t-il si l'on supprime le contrôle L^p sur la courbure (pour le remplacer, par exemple, par un contrôle L^1) ?

Dans le cas des domaines de **C**, une réponse est apportée par Youri Rechtnjack qui démontre le résultat suivant :

1.6. THÉORÈME [**R** 1, TH. III]. – *Soit* $M \subset \mathbf{C}$ *un domaine compact du plan dont le bord est formé d'un nombre fini de courbes fermées simples à rotations bornées. Soient* $\{d\omega_j^+\}$ *et* $\{d\omega_j^-\}$ *deux suites de mesures à support dans le disque unité* $\{|z| < 1\}$ *et convergeant faiblement vers* $d\omega^+$ *et* $d\omega^-$. *Notons* u_j *le potentiel logarithmique de* $d\omega_j := d\omega_j^+ - d\omega_j^-$, *et* u *celui de* $d\omega := d\omega^+ - d\omega^-$. *On note encore* $ds_j^2 := e^{2u_j} |dz|^2$ *et* $ds^2 := e^{2u} |dz|^2$.

Alors (M, ds_j^2) *converge vers* (M, ds^2) *sur tout compact de* M *ne contenant aucun point* $z \in M$ *tel que* $d\omega^+(z) \geqq 2\pi$ *dans le sens suivant :*

la fonction distance $d_j : M \times M \to \mathbf{R}$ *associée à* ds_j^2 *converge uniformément sur tout compact de* $M \times M$ *(exempt de point* (z_1, z_2) *t.q.* $d\omega^+(z_i) \geqq 2\pi$*) vers la fonction distance* $d : M \times M \to \mathbf{R}$ *associée à* ds^2.

La définition du potentiel logarithmique est rappelée au paragraphe 4.

La convergence dont il s'agit dans cet énoncé est plus faible que la convergence uniforme-riemannienne (la métrique limite peut par exemple posséder des singularités coniques).

Remarques historiques. — Ce genre de *« principe de concentration-compacité »* apparaît dans plusieurs situations géométriques. A la fin des années 1970 Sacks et Uhlenbeck ont mis ce principe en évidence dans l'étude des applications harmoniques de S^2 dans une variété riemannienne (*voir* [SU]); puis Uhlenbeck a remarqué que ce type de phénomène apparaissait pour les champs de Yang-Mills [U]; ce principe à ensuite été observé dans le problème de Yamabe [BC], dans celui de Nirenberg [CY] et dans l'étude des courbes pseudo-holomorphes [G]. P. L. Lions en a fait une étude systématique [L]. Remarquons toutefois que le théorème de Rechetnjack, qui date des années 1955-1960, est bien antérieur à ces travaux.

Je remercie le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique pour son soutient financier durant la réalisation de ce travail; je remercie également l'Institut des Hautes Études Scientifiques de l'École Polytechnique pour leur hospitalité.

Ce travail a bénéficié de nombreuses conversations que j'ai eues avec Pierre Pansu, il m'a en particulier expliqué le lemme de Schwarz qui joue un rôle clef dans ce travail. Qu'il soit ici vivement remercié.

2. RAPPELS SUR LES THÉORÈMES DE GROMOV ET DE BAVARD-PANSU

Afin de situer l'étude des suites de métriques dans son contexte, nous rappelons certains résultats connus.

2.1. Théorème de convergence de Gromov ([GLP], [GW], [P]). — *Soit* $\{g_j\}$ *une suite de métrique* C^2 *sur une variété compacte* M *telle que l'on ait pour tout j :*

(i) $\|K_j\|_{L^\infty} \leqq C$;

(ii) $V_j \geqq a$;

(ii) $\operatorname{diam}(M, g_j) \leqq d$,

où C, *a et d sont trois constantes positives*, K_j *est la courbure sectionnelle de* V_j *le volume de* (M, g_j).

Alors $\{(M, g_i)\}$ *possède une sous-suite convergente.*

Dans [GLP], la convergence de $\{(M, g_j)\}$ est au sens de Lipschitz, mais Peters obtient une convergence au sens uniforme-métrique (et même au sens $C^{1,\delta}$, *cf.* [P, th. 4.4]). Remarquons que, si cet énoncé est dû à Gromov, ce type de résultat était déjà implicite au début des années 1970 dans les travaux de J. Cheeger.

Christophe Bavard et Pierre Pansu se sont intéressés aux suites *divergentes* de surfaces. Plus précisément, ils se sont penchés sur le problème suivant :

Décrire les suite divergentes $\{g_j\}$ *de métriques sur une surface compacte* S *vérifiant les conditions :*

(i) $\|K_j\|_{L^\infty} \leqq C$;

(ii) $a \leqq \mathcal{A}_j \leqq a'$,

où C, *a*, *a'* *sont trois constantes positives*, K_j *est la courbure et* $\mathcal{A}_j$ *l'aire de* (S, g_j).

Leur résultat peut s'énoncer de la façon suivante :

2.2. THÉORÈME [BP]. — *Soit* $\{g_j\}$ *une suite de métriques* C^2 *sur une surface compacte* S *vérifiant les conditions* (i) *et* (ii) *ci-dessus.*

Alors ou bien $\{(S, g_j)\}$ *contient une sous-suite qui converge au sens de Lipschitz vers une surface riemannienne; ou bien* $\{(S, g_j)\}$ *contient une sous-suite qui, après homothéties, converge au sens de Hausdorff vers un graphe.*

L'exemple classique est le suivant : Considérons une surface hyperbolique (*i.e.* riemannienne à courbure -1) S de genre 2, et choisissons sur S une géodésique γ séparant S. Alors on peut déformer S en faisant varier la longueur $l(\gamma)$ de cette géodésique.

En faisant tendre $l(\gamma)$ vers 0, on obtient une famille de surfaces qui, après homothéties, converge vers un segment (*fig.* 1).

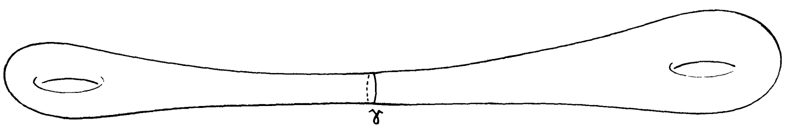

FIG. 1

Dans cet exemple, comme la courbure est négative, le corollaire I.4.2 implique que la structure conforme doit diverger (ce qui se prouve facilement à l'aide de la théorie de Teichmüller).

3. UNE SUITE DIVERGENTE DE MÉTRIQUES SUR LA SPHÈRE

Dans ce paragraphe, nous construisons une famille de surfaces homéomorphes à la sphère. Ces surfaces donnent un exemple de divergence par concentration; elles dépendent de deux paramètres ε et l; la surface $S_{[\varepsilon, l]}$ est divisée en trois régions $B_{[\varepsilon, \rho]}$, $B'_{[\varepsilon, \rho]}$ et $C_{[d, l]}$ (*fig.* 2).

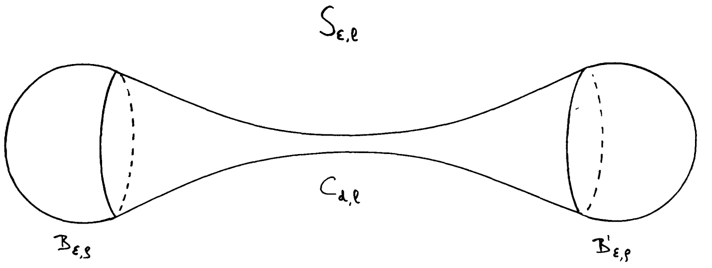

FIG. 2

B et B' sont des sphères de rayon ρ auxquelles on a retiré une calotte contenant une quantité $2\pi(1+\varepsilon)$ de courbure et C est un collier $S^1 \times [0, 1]$ à courbure -1, de diamètre d et contenant une unique géodésique fermée simple de longueur l.

Pour chaque valeur de ε et l, il existe un unique choix de ρ et d tel que les bords de B et C s'ajustent bien; *i. e.* ∂C et ∂B sont des cercles de même longueur et même courbure géodésique (au signe près).

Ainsi, pour chaque valeur de ε et l, fabrique-t-on une surface $S_{[\varepsilon, l]}$ de classe $C^{1, 1}$ (*i. e.* C^1 à dérivée Lipschitz), en recollant $B_{[\varepsilon, \rho]}$ et $B'_{[\varepsilon, \rho]}$ à $C_{[d, l]}$.

Fixons ε, et faisons tendre l vers 0 : alors la surface $S_{[\varepsilon, l]}$ diverge. Plus précisément, si on choisit un point base dans $B_{[\varepsilon, \rho]} \subset S_{[\varepsilon, l]}$, alors, au sens des espaces métriques pointés (*cf.* [GLP] p. 39), $S_{[\varepsilon, l]}$ converge vers la surface $\mathscr{P}_\varepsilon$ obtenue en recollant une pseudo-sphère de courbure -1 limitée par un horocycle de longueur $2\pi\varepsilon$ avec une calotte sphérique de rayon $\varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon^2}$ limitée par un cercle de longueur $2\pi\varepsilon$ et contenant une quantité $2\pi(1+\varepsilon)$ de courbure (*fig.* 3).

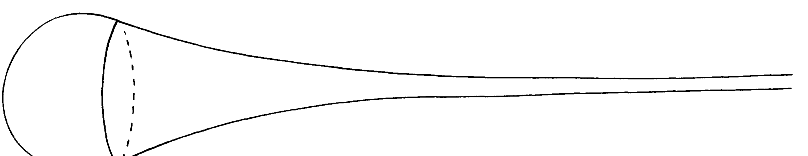

FIG. 3

On se rend compte en particulier, que lorsque ε est fixe et $l \to 0$, l'aire et la courbure de $S_{[\varepsilon, l]}$ restent bornées.

D'autre part, si $l \to 0$, alors $d \to \infty$ et la structure conforme de $C_{[d, l]}$ converge vers $\mathbf{C}^*$ ou $D^* = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\}$ ($C_{[d, l]}$ est une surface de

Riemann homéomorphe à un anneau dont le module tend vers l'infini). Ainsi, dans une représentation conforme de $S_{[\varepsilon, l]}$ sur $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, il est clair que $B_{[\varepsilon, \rho]}$ ou $B'_{[\varepsilon, \rho]}$ tend vers un point.

Soit donc $g_{[\varepsilon, l]}$ une métrique riemannienne conforme sur $\hat{\mathbf{C}}$ telle que $(\hat{\mathbf{C}}, g_{[\varepsilon, l]})$ soit isométrique à $S_{[\varepsilon, l]}$ (on verra que $g_{[\varepsilon, l]}$ est de classe $C^{1,1}$); alors on a la proposition suivante :

3.1. PROPOSITION. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe trois constantes positives* a, a' *et* C *telles que pour tout* $l < 1$, *on a :*

(i) $\| K_{[\varepsilon, l]} \|_{L^\infty} \leqq C$;

(ii) $a \leqq \mathscr{A}_{[\varepsilon, l]} \leqq a'$.

De plus, si $f_{[\varepsilon, l]} : (\hat{\mathbf{C}}, g_{[\varepsilon, l]}) \to S_{[\varepsilon, l]}$ *est une isométrie, alors on a :*

(iii) $f^{-1}_{[\varepsilon, l]}(B_{[\varepsilon, \rho]})$ *ou* $f^{-1}_{[\varepsilon, l]}(B'_{[\varepsilon, \rho]})$ *converge vers un point lorsque* l *tend vers* 0.

(iv) $\displaystyle\int_{f^{-1}_{[\varepsilon, l]}(B_{[\varepsilon, \rho]})} K^+ \, dA = 2\pi(1+\varepsilon)$ *pour tout* l.

Cette famille de surfaces illustre donc le théorème B; elle montre aussi que la valeur 2π figurant dans l'énoncé est optimale (puisque la courbure de $B_{[\varepsilon, \rho]}$ est égale à $2\pi(1+\varepsilon)$ et est donc arbitrairement proche de 2π).

Pour éviter une trop longue digression, nous présentons la preuve de la proposition 3.1 en appendice.

4. UN PEU DE THÉORIE DU POTENTIEL

Ce paragraphe contient les estimées nécessaires à la preuve des théorèmes A et B. Le résultat essentiel est le suivant : Si u est une fonction sur le disque unité telle que $\int (\Delta u)^+ < 2\pi$ et $\int e^{2u} < \infty$, alors il est possible de contrôler e^{2u} en norme L^q (proposition IV.2.13).

Soit $d\mu$ une mesure à support compact dans $\mathbf{C}$. On appelle *potentiel logarithmique* de $d\mu$ une fonction localement intégrable $v : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ telle que

$$(2\pi v(z) + \mu(\mathbf{C}) \log |z|) \to 0$$

lorsque $|z| \to \infty$ et $\Delta v = d\mu$ au sens des distributions $\left(\Delta = -4 \dfrac{\partial^2}{\partial z \, \partial \bar{z}} \text{ est le laplacien de } \mathbf{C} \text{ pour la métrique usuelle}\right)$.

Le potentiel logarithmique de $d\mu$ est unique, il est donné par la *formule de Riesz* :

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{C}} \log |z - \zeta| \, d\mu(\zeta).$$

4.1. LEMME. — *Soit* $d\mu$ *une mesure positive à support dans le disque unité* $D=\{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$. *Soit* v *son potentiel logarithmique; alors :*

$$v(z) \geqq -\frac{1}{2\pi}\log(1+|z|)\int_D d\mu.$$

Preuve. — On a $v(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_D \log|z-\zeta|\,d\mu(\zeta)$. Si $\zeta \in D$, alors $|z-\zeta| \leqq 1+|z|$, donc

$$v(z) \geqq -\frac{1}{2\pi}\int_D \log(1+|z|)\,d\mu(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\log(1+|z|)\int_D d\mu. \quad \blacksquare$$

4.2. LEMME (inégalité de Rechetnjack [R2, TH. 3.1]). — *Soit* $d\mu$ *une mesure positive à support dans le disque unité* D. *On suppose qu'il existe* $q>1$ *tel que*

$$0<M:=\int_D d\mu<\frac{2\pi}{q}.$$

Soit v *le potentiel logarithmique de* $d\mu$, *alors*

$$e^{2qv(z)} \leqq \frac{1}{M}\int_D |z-\zeta|^{\delta}\,d\mu(\zeta),$$

où $\delta=-\frac{q}{\pi}\int_D d\mu\,(>-2)$.

Preuve. — Pour tout $M>0$, on a :

$$e^{2qv(z)}=\exp\left[-\frac{2q}{2\pi}\int_D \log|z-\zeta|\,d\mu(\zeta)\right]$$
$$=\exp\left[\frac{1}{M}\int_D \log|z-\zeta|^{-(qM/\pi)}\,d\mu(\zeta)\right].$$

En particulier, pour $M=\int_D d\mu$ et $\delta=-qM/\pi$, on a

$$e^{2qv(z)}=\exp\left[\frac{1}{M}\int_D \log|z-\zeta|^{\delta}\,d\mu(\zeta)\right].$$

L'inégalité de Jensen [F, p. 91] entraîne donc

$$e^{2qv(z)} \leqq \frac{1}{M}\int_D |z-\zeta|^{\delta}\,d\mu(\zeta). \quad \blacksquare$$

4.3. COROLLAIRE. — *Soit* $d\mu$ *une mesure positive à support dans* D. *On suppose qu'il existe* $q>1$ *tel que* $0 \leqq M:=\int_D d\mu<\frac{2\pi}{q}$. *Soit* v *le potentiel* *logarithmique de* $d\mu$, *alors*

$$\| e^{2v} \|_{L^q(D)} \leqq \left(\frac{2\pi}{\delta+2} 2^{\delta+2} \right)^{1/q},$$

où $\delta = -\frac{q}{\pi} \int_D d\mu \, (> -2)$.

L'intérêt du résultat est que $\| e^{2v} \|_{L^q(D)}$ est estimée en fonction d'une quantité qui ne dépend que de q et de $\int_D d\mu$.

Preuve. — Si $d\mu \equiv 0$, alors $v \equiv 0$ et le résultat est immédiat (car $2^{\delta+2}/(\delta+2) > 1$). Sinon $0 < M < 2\pi/q$, et le lemme 4.2 entraîne

$$e^{2qv(z)} \leqq \frac{1}{M} \int_D |z-\zeta|^\delta \, d\mu(\zeta).$$

Notons $d\lambda := \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$ la mesure de Lebesgue, alors on a :

$$\begin{aligned} \| e^{2v} \|_{L^q(D)}^q &= \int_D e^{2qv(z)} \, d\lambda(z) \leqq \frac{1}{M} \int_D \int_D |z-\zeta|^\delta \, d\mu(\zeta) \, d\lambda(z) \\ &\leqq \frac{1}{M} \int_D \int_D |z-\zeta|^\delta \, d\lambda(z) \, d\mu(\zeta) \leqq \frac{1}{M} \int_D \left(\int_{|t|<2} |t|^\delta \, d\lambda(t) \right) d\mu(\zeta) \\ &\leqq \frac{1}{M} \int_D \left(\frac{2\pi}{\delta+2} 2^{\delta+2} \right) d\mu(\zeta) = \frac{2\pi}{\delta+2} 2^{\delta+2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous aurons besoin du lemme ci-dessous dû à Schwarz, Ahlfors et Gromov (*cf.* [A], [G]) :

4.4. Lemme de Schwarz. — *Soit* $a > 0$ *et* D' *une partie compacte du disque-unité* D. *Alors pour toute fonction* w, *sous-harmonique sur le disque unité* (i.e. $\Delta w \leqq 0$) *et telle que*

$$\int_D e^{2w} \, d\lambda \leqq a,$$

on a pour tout $z_0 \in D$:

$$e^{2w(z_0)} \leqq \frac{a}{\pi(1-|z_0|^2)^2}$$

Preuve. — Nous allons commencer par démontrer que

$$w(0) \leqq \frac{1}{2} \log \frac{a}{\pi}. \tag{4.5}$$

Posons pour cela

$$a(r) := \int_{D_r} e^{2w} \, d\lambda, \qquad \text{et} \qquad l(r) = \int_{\partial D_r} e^w \, |dz|$$

(où $D_r := \{z : |z| \leqq r\}$). On a évidemment

$$a(r) \leqq a. \tag{4.6}$$

D'autre part, on a

$$l^2(r) = \left(\int_{\partial D_r} e^u |dz|\right)^2 \leqq \left(\int_{\partial D_r} |dz|\right)\left(\int_{\partial D_r} e^{2u} |dz|\right) = 2\pi r \frac{da}{dr},$$

d'où

$$\frac{da}{dr} \geqq \frac{l^2(r)}{2\pi r}. \tag{4.7}$$

Posons à présent $F(r) := \log(a(r)/(4\pi^2 r^2))$.

Alors on a

$$\frac{dF}{dr} \geqq 0. \tag{4.8}$$

En effet (4.7) entraîne

$$\frac{dF}{dr} = \frac{1}{a(r)} \frac{da}{dr} - \frac{2}{r} \geqq \frac{l^2(r)}{2\pi r a(r)} - \frac{2}{r} = \frac{2}{r}\left(\frac{l^2(r)}{4\pi a(r)} - 1\right).$$

Or l'inégalité isopérimétrique (*cf.* [H 1, th. 1]) nous dit que

$$l^2(r) \geqq 4\pi a(r),$$

on a donc

$$\frac{dF}{dr} \geqq \frac{2}{r}\left(\frac{l^2(r)}{4\pi a(r)} - 1\right) \geqq 0.$$

On a par ailleurs

$$e^{2w(0)} = \lim_{r \to 0} \frac{a(r)}{\pi r^2}, \tag{4.9}$$

cette identité (qui n'est autre que le théorème de la moyenne dans le cas où w est continue) est démontrée dans le cas des fonctions sous-harmoniques dans [H 2, lemme 2].

Finalement, par (4.6) on a

$$F(1) \leqq \log\left(\frac{a}{4\pi^2}\right). \tag{4.10}$$

Ainsi, (4.8), (4.9) et (4.10) entraînent

$$F(0) = 2w(0) - \log(4\pi) \leqq F(1) \leqq \log\left(\frac{a}{4\pi^2}\right),$$

ce qui montre (4.5).

Passons au cas général, nous devons montrer que, pour tout $z_0 \in \mathrm{D}$, on a

$$(4.11) \qquad w(z_0) \leqq \frac{1}{2} \log \left(\frac{a}{\pi (1 - |z_0|^2)^2} \right);$$

Soit donc $z_0 \in \mathrm{D}$ fixé, posons $\gamma := (1 - |z_0|^2)^{-1/2}$, et $\tau := \gamma z_0$. Soit f la transformation homographique définie par

$$f(z) := \frac{\gamma z + \tau}{\bar{\tau} z + \gamma}.$$

Remarquons les propriétés suivantes de f :

$$(4.12) \qquad \begin{cases} f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}; \\ f(0) = z_0; \\ |f'(0)| = \gamma^{-2} = 1 - |z_0|^2. \end{cases}$$

Soit $w^* : \mathrm{D} \to \mathbf{R}$ la fonction telle que f soit une isométrie entre $(\mathrm{D}, e^w |dz|)$ et $(\mathrm{D}, e^{w^*} |dz|)$, *i. e.*

$$w^*(z) := w(f(z)) + \log \left| \frac{df}{dz} \right|,$$

alors on a

$$\Delta w^* \leqq 0,$$

et

$$\int_{\mathrm{D}} e^{2w^*} d\lambda \leqq a.$$

On peut donc appliquer l'inégalité (4.3) pour w^*, c'est-à-dire :

$$(4.13) \qquad w^*(0) \leqq \frac{1}{2} \log \frac{a}{\pi},$$

et, finalement,

$$\begin{aligned} w(z_0) &= w^*(0) - \log \left| \frac{df}{dz}(0) \right| = w^*(0) - \log(1 - |z_0|^2) \\ &\leqq \frac{1}{2} \log \left(\frac{a}{\pi} \right) - \log(1 - |z_0|^2) \leqq \frac{1}{2} \log \left(\frac{a}{\pi (1 - |z_0|^2)} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.14. Proposition. — *Soit* $u \in \mathrm{L}^1(\mathrm{D})$ *une fonction telle que* $\Delta u \in \mathrm{L}^1(\mathrm{D})$. *Supposons*

$$\text{(i)} \qquad \int_{\mathrm{D}} (\Delta u)^+ \, d\lambda \leqq k < 2\pi,$$

où $(\Delta u)^+ := \max \{ \Delta u, 0 \}$ *et*

$$\text{(ii)} \qquad \int_{\mathrm{D}} e^{2u} d\lambda \leqq a',$$

alors, pour tout q tel que $1<q<2\pi/k$, *il existe une constante* B *ne dépendant que de q et k telle que*

$$\|e^{2u}\|_{L^q(D_{1/2})} \leqq B\,a'.$$

Preuve. — Soit $d\mu$ la mesure sur **C** définie par $(\Delta u)^+ \,d\lambda$ sur D et 0 sur $\mathbf{C}-D$, et soit u' le potentiel logarithmique de $d\mu$ et $u'' := u - u'$.

On a

$$\Delta u'' \leqq 0, \tag{4.15}$$

et

$$\int_D e^{2u''}\,d\lambda = \int_D e^{2(u-u')}\,d\lambda \leqq \sup(e^{-2u'}) \int_D e^{2u}\,d\lambda \leqq a' \sup(e^{-2u'}).$$

Or le lemme 4.1 nous dit que

$$u'(z) \geqq -\frac{1}{2\pi}\log(1+|z|)\int_D d\mu \geqq -k\frac{1}{2\pi}\log 2,$$

donc

$$\int_D e^{2u''} \leqq a'\,2^{k/\pi}. \tag{4.16}$$

Par le lemme de Schwarz 4.4, il existe donc une constante c'' telle que $u''(z) \leqq c'' + \frac{1}{2}\log a'$ pour tout $z \in D_{1/2}$.

D'autre part, le corollaire 4.3 nous dit qu'il existe une constante c' dépendant de q et de k telle que

$$\|e^{2u'}\|_{L^q(D)} \leqq c'. \tag{4.17}$$

Ainsi

$$\|e^{2u}\|_{L^q(D_{1/2})} \leqq a'\,e^{2c''}\,\|e^{2u'}\|_{L^q(D)} \leqq a'\,e^{2c''}\,c'. \quad \blacksquare$$

Nous utiliserons une version globale de la proposition ci-dessus :

4.18. Proposition. — *Soit* (S, g_0) *une surface riemannienne compacte. Soient* $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *des ouverts de* S *tels qu'il existe pour* $\nu = 1, \ldots, n$ *un difféomorphisme conforme*

$$\varphi_\nu : \; D \to U_\nu$$

vérifiant :

(i) $\{\varphi_\nu(D_{1/2})\}_{\nu=1}^n$ *est un recouvrement de* S;

(ii) $\varphi_\nu^*(g_0) = \rho_\nu(z)\,|dz|^2$ *où* ρ_ν *est une fonction sur* D *telle que* $1/\beta \leqq \rho_\nu(z) \leqq \beta$ *pour tout* $z \in D$ (β *étant une constante*).

Alors, pour tout a', $k \leqq 2\pi$ *et* q *tel que* $1<q<2\pi/k$, *il existe une constante* b *ne dépendant que de* q, k, β *et* n *telle que pour toute fonction* $u \in L^1(S, g_0)$

vérifiant :

(iii) $\int_S e^{2u} \, dA_{g_0} \leqq a'$;

(iv) $\Delta_{g_0} u \in L^1(S, g_0)$;

(v) $\int_{U_\nu} (\Delta_{g_0} u)^+ \, dA_{g_0} \leqq k, \ \forall \nu$

on a

$$\| e^{2u} \|_{L^q(S, g_0)} \leqq b a'.$$

Remarque. — La constante b ne dépend ni de la métrique g_0, ni du choix de recouvrement $\{ U_\nu \}$.

Preuve. — Posons $v_\nu = u \circ \varphi_\nu : D \to \mathbf{R}$, alors

$$\int_D (\Delta v_\nu)^+ \, d\lambda = \int_{U_\nu} (\Delta_{g_0} u)^+ \, dA_{g_0} \leqq k,$$

d'autre part,

$$\int_D e^{2v_\nu} \, d\lambda \leqq \beta \int_D e^{2v_\nu} \rho_\nu(z) \, d\lambda = \beta \int_{U_\nu} e^{2u} \, dA_{g_0} \leqq \beta a'.$$

La proposition (4.14) implique alors

$$\| e^{2v_\nu} \|_{D_{1/2}} \leqq B a',$$

où B ne dépend que de β, q et k.

Par ailleurs, pour toute fonction $f \in L^q(S, g_0)$, on a

$$\| f \|^q_{L^q(\varphi_\nu(D_{1/2}), g_0)} = \int_{D_{1/2}} | f \circ \varphi_\nu |^q \rho_\nu \, d\lambda \leqq \beta \| f \circ \varphi_\nu \|^q_{L^q(D_{1/2}, g_0)},$$

et comme $S = \bigcup_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(D_{1/2})$, on obtient

$$\| e^{2u} \|_{L^q(S, g_0)} \leqq n \beta^{1/q} B a'. \quad \blacksquare$$

Nous terminons ce paragraphe en rappellant quelques résultats de théorie elliptique : soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension d.

4.19. Théorème (plongements de Sobolev). — *Soient* $k, l \in \mathbb{N}$, $p > 1$ *et* $0 < \delta < 1$ *tels que* $k - d/p > l + \delta$. *Alors on a une inclusion compacte* $L^p_k(M, g) \subset C^{l, \delta}(M)$. *En particulier, si* $p > d$, *alors* $L^p_1(M, g) \subset C^0(M)$.

Pour une définition des espaces de Sobolev, ainsi qu'une preuve du théorème, *voir* [GT].

4.20. Théorème (régularité du laplacien [GT]). — *Notons* Δ_g *le laplacien de* (M, g). *Alors, pour tout* p *tel que* $1 < p < \infty$ *et* $k \in \mathbb{Z}$, *il existe une* *constante $c_{p,k}$ telle que*

$$\|(u-\bar{u})\|_{L_k^p(M,g)} \leqq c_{p,k} \|\Delta_g u\|_{L_{k-2}^p(M,g)}$$

où $\bar{u}$ est la moyenne de u.

5. PREUVE DU THÉORÈME B

On suppose qu'il n'y a pas concentration. On peut donc trouver un atlas fini $\{\varphi_\nu : D \to U_\nu \subset S\}_{\nu=1}^n$ et un nombre $k < 2\pi/p^*$ tels que

$$\int_{U_\nu} K_j^+ \, dA_j + \int_{U_\nu} |K_0| \, dA_0 \leqq k,$$

ainsi qu'un nombre β tels que si $\varphi_\nu^*(g_0) = \rho_\nu(z) |dz|^2$. alors

$$1/\beta \leqq \rho_\nu(z) \leqq \beta, \qquad \forall z \in D.$$

On peut également supposer que $\{\varphi_\nu(D_{1/2})\}$ recouvre encore S.

La fonction u_j vérifie l'équation

$$\Delta_0 u_j \, dA_0 = K_j \, dA_j - K_0 \, dA_0,$$

où Δ_0 est le laplacien pour la métrique g_0.

On a donc

$$\int_{U_\nu} (\Delta_0 u_j)^+ \, dA_0 \leqq k,$$

pour tout j et tout ν, on a en outre l'inégalité

$$\int_S e^{2u_j} \, dA_0 = \int_S dA_{g_j} = \mathscr{A}_j \leqq a'.$$

On peut donc appliquer la proposition (4.18) qui nous dit que si $1 < q < 2\pi/k$, il existe une constante b telle que pour tout j,

(5.1) $$\|e^{2u_j}\|_{L^q(S, g_0)} \leqq ba'.$$

Choisissons q tel que $k < 2\pi/q < 2\pi/p^*$ et r tel que $1/r = 1/p + 1/q < 1$.

De (5.1), de l'inégalité de Hölder et de l'équation $\Delta_0 u_j = K_j e^{2u_j} - K_0$, nous déduisons

(5.2) $$\|\Delta_0 u_j\|_{L^r(S, g_0)} < C',$$

car $\|K_j\|_{L^p(S, g_0)} \leqq C$.

Le théorème (4.20) nous dit alors qu'il existe une constante C″ telle que

$$\|(u_j - \bar{u}_j)\|_{L_2^r(S, g_0)} \leqq C'',$$

où $\bar{u}_j$ est la moyenne de u_j pour la métrique g_0.

Par compacité du plongement de Sobolev $C^{\delta}(S) \subset L_2^r(S, g_0)$, nous voyons que $\{(u_j - \bar{u}_j)\}$ possède une sous-suite uniformément convergente.

Il ne nous reste qu'à montrer que $\|\bar{u}_j\|$ est bornée; on a

$$0 < a \leqq \int_S dA_j = e^{2\bar{u}_j} \int_S e^{2(u_j - \bar{u}_j)}. \tag{5.3}$$

Comme $(u_j - \bar{u}_j)$ est uniformément bornée, (5.3) montre que $\bar{u}_j$ est minorée.

D'autre part, l'inégalité de Jensen entraîne

$$\exp 2\bar{u}_j = \exp\left(\frac{\int 2u_j\, dA_0}{\int dA_0}\right) \leqq \frac{\int e^{2u_j}\, dA_0}{\int dA_0} \leqq \frac{a'}{\mathscr{A}_0},$$

ce qui montre que $\bar{u}_j$ est majorée.

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A

Commençons par préciser ce qui signifie que la structure conforme d'une suite de métriques qur une surface reste bornée.

6.1. Définition. — La structure conforme d'une suite de métriques riemanniennes $\{g_j\}$ sur une surface compacte S est bornée s'il existe une suite de métriques à courbure constante (normalisées à -1, 0 ou 1) h_j sur S qui converge en topologie C^2, ainsi que des difféomorphismes $\Phi_j : S \to S$ et des fonctions $u_j : S \to \mathbf{R}$ tels que $g_j := \Phi_j^* (e^{2u_j} h_j)$.

Nous devons montrer que, sous les hypothèses du théorème A, lorsqu'il n'y a pas concentration de courbure, il existe une suite extraite j' telle que $\{u_{j'}\}$ converge uniformément.

La preuve est essentiellement la même que celle du théorème B; nous devons seulement vérifier que la proposition (4.18) est vraie uniformément sur une famille compacte de surfaces à courbure constante $\{(S, h_j)\}$, et que la constante de l'estimée elliptique (4.20) peut être choisie uniformément.

6.2. Lemme. — *Soit* $\{h_j\}$ *une suite compacte de métriques à courbure constante* $K = -1, 0$ *ou* 1 *sur une surface compacte* S. *Si* $K = 0$, *on supposera que le diamètre de* (S, h_j) *vaut* 1 *pour tout* j.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* j, *il existe n points* $x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n \in (S, h_j)$ *tels que*

(i) *la boule* $B^{h_j}(x_j^{\nu}, 2\varepsilon) \in S$ *est plongée;*

(ii) *les boules* $B^{h_j}(x_j^{\nu}, \varepsilon)$ *recouvrent* S.

Preuve. — Soit $\varepsilon > 0$ tel que le rayon d'injectivité de (S, h_j) soit $> 2\varepsilon$ pour tout j. Soit $d \in \mathbf{R}$ tel que le diamètre de (S, h_j) soit $< d$ pour tout j.

Alors il existe un nombre $N(\varepsilon, d)$ tel que le disque de rayon d dans le plan à courbure constante $(-1, 0$ ou $+1)$ puisse être recouvert par $N(\varepsilon, d)$ disques de rayon ε.

Pour tout j, on peut donc recouvrir un voisinage d'un domaine fondamental du revêtement universel de (S, h_j) par $n=N(\varepsilon, d)$ disques de rayons ε.

6.3. Proposition. — *Soit* $\{h_j\}$ *une suite convergente de métriques sur une variété compacte* M. *Alors il existe pour tout* $p\in]1, \infty[$ *une constante* c_p, *indépendante de j, telle que pour toute fonction* $u\in L_2^p(M, h_0)$,

$$\|(u-\bar{u})\|_{L_2^p(M, h_0)}\leqq c_p\|\Delta_{h_j}u\|_{L^p(M, h_j)}.$$

La proposition ci-dessus est une conséquence immédiate du

6.4. Lemme. — *Pour toute métrique h de classe* C^2 *sur* M, *il existe un voisinage* W_h *de h dans l'espace des métriques* C^2 *et une constante* $c_p(W_h)$ *tels que*

$$\|(u-\bar{u})\|_{L_2^p(M, h)}\leqq c_p(W_h)\|\Delta_{h'}u\|_{L^p(M, h')},$$

pour tout $u\in L_2^p(M, h)$ *et tout* $h'\in W_h$.

Preuve. — On sait (4.20) qu'il existe une constante $c_p(h)$ telle qu'on ait l'inégalité

$$\|(u-\bar{u})\|_{L_2^p(M, h)}\leqq c_p(h)\|\Delta_h u\|_{L^p(M, h)},$$

l'opérateur $\Delta_{h'}: L_2^p(M, h)\to L^p(M, h)$ varie continûment lorsque h' varie continûment (avec ses dérivées jusqu'à l'ordre 2), donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage W_h de h dans l'espace des métriques C^2 sur M tel que

$$\|\Delta_h-\Delta_{h'}\|<\varepsilon, \qquad \forall h'\in W_h,$$

où $\|\,.\,\|$ est la norme dans $\mathrm{Hom}(L_2^p(M, h), L^p(M, h))$.

Pour tout $u\in L_2^p(M, h)$, $h'\in W_h$ on a

$$\begin{aligned}\|(u-\bar{u})\|_{L_2^p(M, h)}&\leqq c_p(h)\|\Delta_h u\|_{L^p(M, h)}\\&\leqq c_p(h)\|\Delta_{h'}u+(\Delta_h-\Delta_{h'})u\|_{L^p(M, h)}\\&\leqq c_p(h)(\|\Delta_{h'}u\|_{L^p(M, h)}+\|(\Delta_h-\Delta_{h'})u\|_{L^p(M, h)})\\&\leqq c_p(h)(\|\Delta_{h'}u\|_{L^p(M, h)}+\varepsilon\|(u-\bar{u})\|_{L_2^p(M, h)}).\end{aligned}$$

Donc

$$(6.5)\qquad \|(u-\bar{u})\|_{L_2^p(M, h)}\leqq\frac{c_p(h)}{1-\varepsilon c_p(h)}\|\Delta_{h'}u\|_{L^p(M, h)}.$$

D'autre part, il existe une constante c_1 telle que

$$dA_h\leqq c_1\,dA_{h'}, \qquad \forall h'\in W_h.$$

Donc, pour toute fonction $f\in L^p(M, h)$, on a

$$(6.6)\qquad \|f\|_{L^p(M, h)}\leqq c_1^{1/p}\|f\|_{L^p(M, h')}.$$

Ainsi a-t-on par (6.5) et (6.6)

$$\|(u-\bar{u})\|_{L_2^p(M,h)} \leqq c_p(W_h)\,\|\Delta_{h'} u\|_{L^p(M,h')},$$

avec $c_p(W_h) := c_1^{1/p} \dfrac{c_p(h)}{1-\varepsilon\, c_p(h)}$.

Démonstration du théorème A. — Rappelons la situation : nous avons une suite convergente $\{h_j\}$ de métriques à courbure constante ($-1, 0$ ou $+1$) sur une surface compacte S. Nous avons aussi une suite de difféomorphismes $\Phi_j : S \to S$ et des fonctions $u_j : S \to \mathbf{R}$ tels que la suite de métriques $g_j := \Phi_j^*(e^{2u_j} h_j)$ vérifie

$$\|K_j\|_{L^p(S,h_0)} \leqq C \qquad \text{et} \qquad (0<)\ a \leqq \mathscr{A}_j < a.$$

Nous devons montrer que, s'il n'y a pas concentration de courbure, $\{u_j\}$ possède une sous-suite uniformément convergente.

Dans la suite de la discussion, les difféomorphismes Φ_j ne jouent aucun rôle et nous pouvons supposer qu'ils sont tous égaux à l'identité.

Choisissons $\varepsilon > 0$ assez petit. Par le lemme (6.2), il existe un entier n tel qu'il soit possible de recouvrir toutes les surfaces (S, h_j) par n boules $B^{h_j}(x_{\nu j}, \varepsilon)$ de rayon ε telles que les boules de rayon 2ε soient encore plongées.

Toutes ces boules sont isométriques à un modèle standard (car à courbure constante), elles sont donc toutes isométriques à $(D, \rho(z)|dz|^2)$ où $\rho : D \to \mathbf{R}$ est une fonction positive bornée (*i.e.* il existe $\beta > 0$ tel que $1/\beta < \rho < \beta$).

Comme il n'y a par hypothèse pas de concentration, on peut (quitte à choisir ε plus petit) trouver un nombre positif $k < 2\pi/p^*$ tel que

$$\int_{B^{h_j}(x_j^\nu, 2\varepsilon)} K_j^+\, dA_j + \int_{B^{h_j}(x_j^\nu, 2\varepsilon)} |K_0|\, dA_0 \leqq k.$$

La fonction u_j vérifie l'équation

$$\Delta_{h_j} u_j\, dA_{h_j} = K_j\, dA_{g_j} - K_0\, dA_{h_j},$$

où K_0 est la courbure de $h_j (= -1, 0$ ou $+1)$.

On a donc

$$\int_{B^{h_j}(x_j^\nu, 2\varepsilon)} (\Delta u_j)^+\, dA_{h_j} \leqq k,$$

et aussi

$$\int_S e^{2u_j}\, dA_{h_j} = \int_S dA_{g_j} = \mathscr{A}_j \leqq a'.$$

La proposition (4.20) nous dit alors que, pour tout $q\,(1<q<2\pi/k)$, il existe une constante b telle que

$$\|e^{2u_j}\|_{L^q(S,\,g_0)} \leqq b, \qquad (\forall j).$$

On peut donc conclure comme dans la preuve du théorème B en utilisant (6.3) au lieu de (4.20).

APPENDICE : DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1

Dans cet appendice, nous donnons plus de détails sur la construction de la surface $S_{[\varepsilon,\,l]}$ décrite au paragraphe 3. Il est commode, pour les calculs à venir, de remplacer les paramètres ε et d par des paramètres θ et φ définis par

$$\cos(\theta) = -\varepsilon \qquad \text{avec} \quad \theta \in]\pi/2, \pi],$$

et

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,(e^{-2d}) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

On note $\mathscr{H}$ le demi-plan de Poincaré $\{\operatorname{Im}(z)>0\}$ muni de sa métrique hyperbolique $(|dz|/|z|)^2$. Pour tout $\varphi \in]0, \pi/2[$, $l>0$; on considère le quadrilatère $Q_{\varphi,\,l} := \{z \in \mathscr{H} : 1 \leqq |z| \leqq e^l \text{ et } \varphi \leqq \arg(z) \leqq \pi - \varphi\}$ (*fig.* 4).

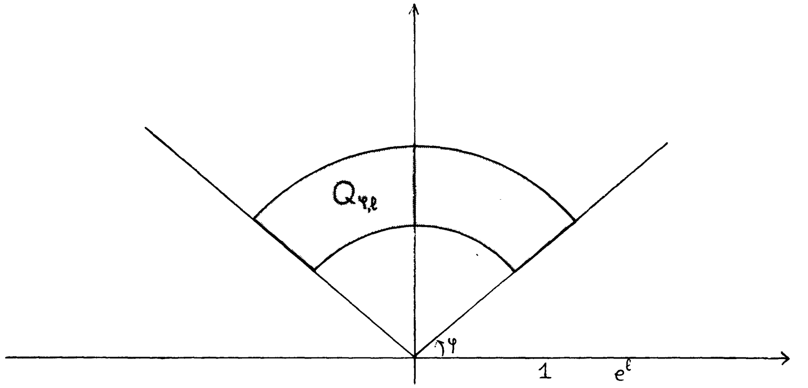

FIG. 4

On note $C_{\varphi,\,l}$ la surface obtenue à partir de $Q_{\varphi,\,l}$ en identifiant $z \in Q_{\varphi,\,l} \cap \{|z|=1\}$ à $e^l z$. Ainsi, $C_{\varphi,\,l}$ est un cylindre muni d'une métrique à courbure -1; la longueur de son unique géodésique fermée simple est l. Le bord de $C_{\varphi,\,l}$ est formé de deux cercles de longueur

$$L = \frac{l}{\sin\varphi}.$$

Ces cercles ont une courbure géodésique constante égale à

$$\kappa = \cos \varphi.$$

L'aire de $C_{\varphi, l}$ est

$$A^{-} = 2l \operatorname{cotg} \varphi.$$

Soient $\theta \in]\pi/2; \pi[$ et $\rho > 0$. On note $B_{\theta, \rho}$ l'ensemble des points x de la sphère de rayon ρ et centre o dans $\mathbf{R}^3$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{ox}$ et $\overrightarrow{on}$ (où n est le pôle nord) forment un angle au plus égal à θ (fig. 5).

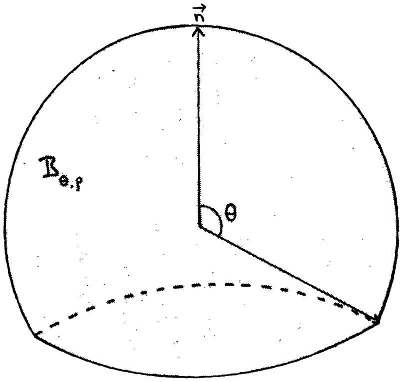

FIG. 5

Le bord de $B_{\theta, \rho}$ est un cercle de longueur

$$L = 2\pi\rho \sin \theta,$$

et dont la courbure géodésique est une constante (négative) égale à

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \operatorname{cotg} \theta.$$

L'aire de $B_{\theta, \rho}$ est

$$A^{+} = 2\pi\rho^2 (1 - \cos \theta).$$

Il est possible d'ajuster les surfaces $B_{\theta, \rho}$ et $C_{\varphi, l}$:

A.1. LEMME. — *Pour tout* $(\theta, \varphi) \in]0, \pi/2[\times]\pi/2, \pi[$, *il existe une unique valeur de* $(l, \rho) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ *telle que* $\partial B_{\theta, \rho}$ *et* $\partial C_{\varphi, l}$ *aient même longueur et même courbure géodésique* (*de signes opposés*).

Preuve. — Les nombres l et ρ sont déterminés par les contraintes voulues ($L = L'$ et $\kappa = -\kappa'$). La seule solution est $l = l(\theta, \varphi) = -2\pi \cos \theta \tan \varphi$ et $\rho = \rho(\theta, \varphi) = -\operatorname{cotg} \theta / \cos \varphi$.

Soit $S_{\theta, \varphi}$ la surface obtenue en recollant une copie de $B_{\theta, \rho}$ sur chaque composante du bord de $C_{\varphi, l}$ (on a choisi ρ et l convenablement). On observe que $S_{\theta, \varphi}$ est une surface riemannienne de classe $C^{1,1}$ dont la courbure vérifie

$$-1 \leqq K \leqq \rho^{-2} = \left(\frac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}\theta}\right)^2,$$

et l'aire est

$$\mathscr{A} = A^- + 2A^+ = -4\pi\cos\theta + 4\pi\rho^2(1-\cos\theta)$$
$$= -4\pi\cos\theta + 4\pi\left(\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\cos(\varphi)}\right)^2(1-\cos\theta).$$

A.2. LEMME. — *Fixons* $\theta \in]\pi/2, \pi[$. *Alors il existe* $a, a', c>0$ *tels que pour tout* $\varphi \in]0, \pi/4[$, *la surface* $S_{\theta,\varphi}$ *vérifie les conditions :*

(i) $-1 \leqq K \leqq c^2$;

(ii) $a \leqq \mathscr{A} \leqq a'$.

De plus, lorsque $\varphi \to 0$, *la surface* $S_{\theta,\varphi}$ *converge au sens de Hausdorff* (*après reparamétrisation*) *vers un segment.*

Preuve. — On prend

$$c = -\sqrt{2}\operatorname{cotg}\theta, \qquad a = -4\pi\cos\theta + 4\pi\tan^2\theta(1-\cos\theta)$$

et

$$a' = -4\pi\cos\theta + 4\sqrt{2}\,\pi\tan^2\theta(1-\cos\theta).$$

Quant à la dernière assertion, elle est évidente. ■

Décrivons $S_{\theta,\varphi}$ en coordonnées isothermes. Choisissons $\theta \in]\pi/2, \pi[$ et $\varphi \in]0, \pi/2[$, et posons :

$$l := -2\pi\cos\theta\tan(\varphi), \qquad \rho := -\operatorname{cotg}\theta/\cos(\varphi),$$
$$L := -2\pi\cos\theta/\cos(\varphi) = 2\pi\rho\sin\theta$$

et

$$m := \exp\left(\frac{\varphi - \pi/2}{\cos\theta\tan(\varphi)}\right) = \exp\left(\frac{\pi}{l}(\pi - 2\varphi)\right) \qquad (>1).$$

Où L est la longueur de $\partial B_{\theta,\rho}$ et m est choisi pour que $C_{\varphi,l}$ soit conformément appliqué sur l'anneau $\{1/m \leqq |z| \leqq m\}$.

Posons $t = m(1/\sin\theta + \operatorname{cotg}\theta)$, en sorte que

$$L = 4\pi\rho\frac{mt}{m^2+t^2}, \tag{A.3}$$

alors $S_{\theta,\varphi}$ est isométrique à $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ muni de la métrique $g_{\theta,\varphi}$ définie par :

$$g_{\theta,\varphi} = \begin{cases} \dfrac{4\rho^2 t^2 |dz|^2}{(1+t^2|z|^2)^2} & \text{pour} \quad |z| \leqq 1/m; \\[2ex] \dfrac{l^2|dz|^2}{4\pi^2|z|^2\cos^2((l/2\pi)\log|z|)} & \text{pour} \quad 1/m \leqq |z| \leqq m; \\[2ex] \dfrac{4\rho^2 t^2 |dz|^2}{(t^2+|z|^2)^2} & \text{pour} \quad |z| \geqq m. \end{cases} \tag{A.4}$$

En effet, une projection stéréographique montre que le disque $(\{|z|:|z|\leqq 1/m\}, g_{\theta,\varphi})$ est isométrique à $B_{\theta,\rho}$ (et de même pour le disque $\{|z|:|z|\geqq m\}$). Observer que A.3 dit que $\{|z|=1/m\}$ et $\{|z|=m\}$ ont longueur L. Pour voir que l'anneau $(\{|z|:1/m\leqq|z|\leqq m\}; g_{\theta,\varphi})$ est isométrique à $C_{\varphi;l}$ on utilise l'application

$$\begin{aligned} Q_{\varphi;l} &\to \{|z|:1/m\leqq|z|\leqq m\} \\ w &\to (-iw)^{2i\pi/l}. \end{aligned}$$

On remarque en particulier que $g_{\theta,\varphi}$ est de classe $C^{1,1}$.

Preuve de la proposition 3.1.

Posons

$$\varepsilon = -\cos\theta \qquad \text{et} \qquad l = -2\pi\cos\theta\tan(\varphi).$$

Alors $S_{[\varepsilon,l]} = S_{\theta,\varphi}$. Si l'on fixe ε, l'aire et la courbure de $S_{[\varepsilon,l]}$ sont bornées par le lemme A.2, donc les conditions (i) et (ii) de la proposition 3.1 sont vérifiées. D'autre part, on a

$$\int_{|z|\leqq 1/m} K\,dA = 2\pi(1-\cos\theta) = 2\pi(1+\varepsilon),$$

ce qui montre l'assertion (iv).

Finalement, (iii) découle du fait que

$$m\to\infty \quad \text{lorsque } l\to 0. \quad \blacksquare$$

RÉFÉRENCES

[A] L. V. AHLFORS, An Extension of Schwarz' Lemma, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **43**, 1938, p. 359-364.

[BC] A. BAHRI et J. M. CORON, *The Scalar Curvature Problem on the Standard 3-Dimensional Sphere*, preprint, 1989.

[BP] C. BAVARD et P. PANSU, *Sur l'espace des surfaces à courbure et aire bornées*, *Ann. Inst. Fourier*, vol. **38**, 1988, p. 175-203.

[CY] S. A. CHANG et P. YANG, Conformal Deformation of Metrics on S^2, *J. Differential Geom.*, vol. **27**, 1988, p. 259-296.

[F] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer Verlag, 1969.

[G] M. GROMOV, *Pseudo-Holomorphic Curves in Symplectic Manifolds*, Inventiones *Math.*, vol. **82**, 1985, p. 307-347.

[GLP] M. GROMOV, J. LAFONTAINE et P. PANSU, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

[GT] D. GILBARG et N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order*, Springer Verlag, New York, 1977.

[GW] R. GREENE et H. H. WU, Lipschitz Convergence of Riemannian Manifolds, *Pacific J. Math.*, vol. **131**, 1988, p. 119-141.

[H1] A. HUBER, On the Isoperimetric Inequality on Surfaces of Variable Gaussian Curvature, *Ann. Math.*, vol. **60**, 1954, p. 237-247.

[H2] A. HUBER, Zum potentialtheoritischen Aspekt der Alexandrowschen Flächentheorie, *Comm. Math. Helv.*, vol. **34**, 1960, p. 99-126.

[L] P. L. LIONS, The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations, *Riv. mat. Ibero-americana*, vol. **1**, 1985, p. 145-201.

[P] S. PETERS, Convergence of Riemannian Manifolds, *Compositio Math.*, vol. **62**, 1987, p. 3-7.

[R1] Y. RECHETNJACK, Coordonnées isothermes sur les variétés à courbure bornée 1, (en russe), *Sib. Math. J.*, vol. **1**, 1960, p. 88-116.

[R2] Y. RECHETNJACK, Coordonnées isothermes sur les variétés à courbure bornée 2, (en russe), *Sib. Math. J.*, vol. **1**, 1960, p. 248-276.

[SU] J. SACKS et K. UHLENBECK, The Existence of Minimal Immersions of 2-Spheres, *Ann. Math.*, vol. **113**, 1981, p. 1-24.

[U] K. UHLENBECK, Connections with L^p Bounds on Curvarture, *Commun. Math. Phys.*, vol. **83**, 1982, p. 31-42.

(*Manuscrit reçu le* 4 *janvier* 1989)
(*Révisé le* 11 *mai* 1990.)