Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 9, n° 1, 1992, p. 29-50. *Analyse non linéaire*

Sur une généralisation de l'inégalité de Wirtinger

par

B. DACOROGNA et W. GANGBO

École Polytechnique Fédérale de Lausanne,
1015 Lausanne, Suisse.

et

N. SUBÍA

Escuela Politécnica Nacional,
P.O. Box 2759, Quito, Equateur.

RÉSUMÉ. — Soient

$$\alpha_{\mathrm{I}}=\alpha_{\mathrm{I}}(p, q)=\min\left\{\frac{\|u'\|_{\mathrm{L}^p}}{\|u\|_{\mathrm{L}^q}}\,\middle|\, u\in \mathrm{W}^{1,p}(-1, 1)\setminus\{0\},\ u(-1)=u(1),\ \int_{-1}^{1} u|u|^{q-2}=0\right\}$$

$$\alpha_{\mathrm{II}}=\alpha_{\mathrm{II}}(p, q)=\min\left\{\frac{\|u'\|_{\mathrm{L}^p}}{\|u\|_{\mathrm{L}^q}}\,\middle|\, u\in \mathrm{W}^{1,p}(-1, 1)\setminus\{0\},\ u(-1)=u(1),\ \int_{-1}^{1} u=0\right\}.$$

On calcule explicitement α_{I} et on montre que pour $q\leqq 2p$, $\alpha_{\mathrm{I}}=\alpha_{\mathrm{II}}$, mais pour q suffisamment grand $\alpha_{\mathrm{II}}<\alpha_{\mathrm{I}}$.

Mots clés : Inégalité de Wirtinger, meilleure constante de Sobolev.

Classification A.M.S. : 49.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449
Vol. 9/92/01/29/22/$4.20/

ABSTRACT. — *A generalization of Wirtinger's inequality.* — Let

$$\alpha_I=\alpha_I(p, q)=\min\left\{\frac{\|u'\|_{L^p}}{\|u\|_{L^q}}\,\middle|\, u\in W^{1,p}(-1, 1)\setminus\{0\},\right.$$
$$\left. u(-1)=u(1), \int_{-1}^{1} u|u|^{q-2}=0\right\}$$

$$\alpha_{II}=\alpha_{II}(p, q)=\min\left\{\frac{\|u'\|_{L^p}}{\|u\|_{L^q}}\,\middle|\, u\in W^{1,p}(-1, 1)\setminus\{0\},\right.$$
$$\left. u(-1)=u(1), \int_{-1}^{1} u=0\right\}.$$

We compute explicitly α_I and we show that for $q\leqq 2p$, $\alpha_I=\alpha_{II}$, while for q sufficiently large $\alpha_{II}<\alpha_I$.

1. INTRODUCTION

Dans cet article, nous étudierons les problèmes suivants :

(I) $$\alpha_I=\alpha_I(p, q)=\min\left\{\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q}\,\middle|\, u\in W_{per}^{1,p}\setminus\{0\}, \int_{-1}^{1} u|u|^{q-2}=0\right\}$$

(II) $$\alpha_{II}=\alpha_{II}(p, q)=\min\left\{\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q}\,\middle|\, u\in W_{per}^{1,p}\setminus\{0\}, \int_{-1}^{1} u=0\right\}$$

où

$$p, q>1,\ \|u\|_p=\left[\int_{-1}^{1}|u|^p\right]^{1/p},$$
$$W_{per}^{1,p}=\{u\,|\,u, u'\in \mathbb{L}^p(-1, 1) \text{ et } u(-1)=u(1)\}.$$

Lorsque $p=q=2$, les problèmes (I) et (II) coïncident et ne sont rien d'autre que l'inégalité de Wirtinger; on a alors

$$\alpha_I=\alpha_{II}=\pi.$$

Des problèmes analogues à (I) et (II) ont été étudiés par Talenti [1], [2] qui a notamment considéré :

(T) $$\alpha_T=\alpha_T(p, q)=\inf\left\{\frac{\|u'\|_{L^p(0, 1)}}{\|u\|_{L^q(0, 1)}}\,\middle|\, u\in W_0^{1,p}(0, 1)\setminus\{0\}\right\},$$

où $W_0^{1,p}(0, 1)=\{u\,|\,u, u'\in \mathbb{L}^p(0, 1) \text{ et } u(0)=u(1)=0\}$.

Dans le cas $p=q=2$, on reconnait l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, et l'on a aussi $\alpha_T=\pi$.

Décrivons maintenant brièvement les résultats du présent article : nous montrons que (I) et (II) admettent des minimas notés respectivement u_I et u_{II} et que :

$$\alpha_I=2\left(\frac{1}{p'}\right)^{1/q}\left(\frac{1}{q}\right)^{1/p'}\left(\frac{2}{p'+q}\right)^{((1/p)-(1/q))}\left[\frac{\Gamma(1/p')\,\Gamma(1/q)}{\Gamma(1/p'+1/q)}\right] \tag{1}$$

où Γ est la fonction Γ usuelle. Ce calcul explicite de α_I est le résultat principal de la section 2.

On montre aussi que, pour tout p, $q>1$, la fonction u_I qui réalise le minimum de (I), satisfait non seulement $\int_{-1}^{1} u_I\,|u_I|^{q-2}=0$ mais aussi

$$\int_{-1}^{1} u_I=0. \tag{2}$$

Cette identité implique immédiatement que

$$\alpha_{II}\leqq\alpha_I \quad \text{pour tout } p,\ q>1. \tag{3}$$

Dans la section 3 nous montrerons en fait que :

1) si $q\leqq 2p$ on a $\alpha_I=\alpha_{II}$, et si u_{II} est la fonction qui réalise le minimum de (II) on a non seulement $\int_{-1}^{1} u_{II}=0$ mais aussi $\int_{-1}^{1} u_{II}\,|u_{II}|^{q-2}=0$.

2) Par contre, pour chaque $p\geqq 1$ on peut trouver $q_0(p)>2p$ tel que pour tout $q>q_0(p)$ on ait $\alpha_{II}<\alpha_I$ et, en particulier $\int_{-1}^{1} u_{II}=0$ mais $\int_{-1}^{1} u_{II}\,|u_{II}|^{q-2}\neq 0$.

En d'autres termes nous obtenons le résultat suivant, qui est assez surprenant : si $q>q_0(p)$, il y a une certaine perte de symétrie entre (I) et (II), alors que si $q\leqq 2p$, les deux problèmes sont totalement équivalents.

Les démonstrations de ces résultats, utilisent les méthodes classiques du calcul des variations et, en particulier, nécessitent une étude fine des solutions de l'équation d'Euler associée à (I) et (II).

Enfin nous rappellerons en appendice (suivant en cela Dacorogna-Pfister [3]) que la résolution du problème (I) (avec l'obtention de la meilleure constante donnée par (1)) est équivalente à la démonstration d'une inégalité isopérimétrique connue sous le nom de théorème de Wulff qui remonte à 1901 et est très utile en cristallographie. Ce théorème affirme que pour tout $A\subset\mathbb{R}^2$ tel que ∂A soit une courbe simple fermée dont une représentation paramétrique est $(x(\theta), y(\theta))$, $(\theta \in (-1, 1))$, en posant :

$$L(\partial A) = \int_{-1}^{1} (|x'(\theta)|^p + |y'(\theta)|^p)^{1/p} d\theta$$

$$M(A) = 1/2 \int_{-1}^{1} (y'(\theta)x(\theta) - x'(\theta)y(\theta))\, d\theta,$$

l'inégalité isopérimétrique :

$$L^2(\partial A) - 4\alpha_I(p, p')M(A) \geqq 0 \qquad \text{où} \quad p' = \frac{p}{p-1} \tag{4}$$

est vraie.

On peut de plus noter que dans (4), l'égalité a lieu si et seulement si :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{p'} + |y|^{p'} < 1\}.$$

Dans le cas $p=2$ (4) n'est rien d'autre que l'inégalité isopérimétrique classique, et alors $L(\partial A)$ est la longueur usuelle de la courbe ∂A, $M(A)$ étant l'aire de A.

2. CALCUL DE α_I ET α_T

THÉORÈME 2.1. — *Soient $p, q > 1$ et*

$$\alpha_I = \inf\left\{ \frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q} \,\middle|\, u \in W^{1,p}_{\text{per}} \setminus \{0\},\ \int_{-1}^{1} u|u|^{q-2} = 0 \right\}.$$

Alors α_I est un minimum et

$$\alpha_I = 2\left(\frac{1}{p'}\right)^{1/q}\left(\frac{1}{q}\right)^{1/p'}\left(\frac{2}{p'+q}\right)^{((1/p)-(1/q))}\left[\frac{\Gamma(1/p')\Gamma(1/q)}{\Gamma((1/p')+(1/q))}\right].$$

Où l'on a posé :

1. p' l'exposant conjugué de $p>1$, c'est-à-dire : $p' = p/(p-1)$ et

$$\|u\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |u|^p\right)^{1/p}.$$

2. $W^{1,p} = \{u \mid u, u' \in \mathbb{L}^p(-1, 1)\}$, et est muni de la norme $\|.\|$ donnée par : $\|u\|^p = \|u\|_p^p + \|u'\|_p^p$.
3. $W^{1,p}_0 = \{u \mid u, u' \in \mathbb{L}^p(-1, 1) \text{ et } u(-1) = u(1) = 0\}$.
4. $W^{1,p}_{\text{per}} = \{u \mid u, u' \in \mathbb{L}^p(-1, 1) \text{ et } u(1) = u(1)\}$.

Remarque 2.2. — La démonstration du théorème fera l'objet du présent paragraphe et l'on procédera par étapes. On montrera que :

1. α_I est un minimum (lemme 2.3).

2. La fonction u qui réalise le minimum vérifie l'équation d'Euler associée au problème et cette équation admet une intégrale première (lemme 2.4).

3. On donne finalement des propriétés qualitatives de la fonction u (lemme 2.6).

LEMME 2.3. — *Il existe* $u \in W_0^{1,p} \setminus \{0\}$ *tel que :*

$$\int_{-1}^{1} u|u|^{q-2}=0, \qquad et \qquad \|u'\|_p^p-\lambda\|u\|_q^p=0$$

où $\lambda=\alpha_I^p$.

Démonstration :

On procédera en deux étapes.

Première étape : on va d'abord montrer qu'il existe $u \in W_{per}^{1,p}$ satisfaisant :

$$\int_{-1}^{1} u|u|^{q-2}=0, \qquad \text{et} \qquad \|u'\|_p^p-\lambda\|u\|_q^p=0.$$

On pose, pour alléger les notations : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $v \in W_{per}^{1,p}$,

$$G(v)=\int_{-1}^{1} v|v|^{q-2}, \; F_a(v)=\|v'\|_p^p-a\|v\|_q^p.$$

On a immédiatement que :

$$\inf\{F_a(v) \mid v \in W_{per}^{1,p}, G(v)=0\}=\begin{cases} -\infty & \text{si } a>\lambda \\ 0 & \text{si } a \leqq \lambda. \end{cases} \tag{5}$$

Pour conclure la première étape, on procède comme suit :

• D'après (5), pour tout $\varepsilon>0$, il existe $u_\varepsilon \in W_{per}^{1,p}$ tel que $G(u_\varepsilon)=0$ et $F_{\lambda+\varepsilon}(u_\varepsilon)<0$ (on a donc $u'_\varepsilon \neq 0$). Posons : $v_\varepsilon=\dfrac{u_\varepsilon}{\|u'_\varepsilon\|_p}$, comme $G(u_\varepsilon)=0$ on a alors :

$$\|v_\varepsilon\|^p=1+\frac{\|u_\varepsilon\|_p^p}{\|u'_\varepsilon\|_p^p} \leqq 1+2^p.$$

Comme $W^{1,p}$ muni de la norme $\|.\|$ est un espace de Banach réfléxif, il existe une sous-suite extraite de $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, notée $(v_{\varepsilon_n})_n$, telle que, pour un certain $u \in W_{per}^{1,p}$:

$(v_{\varepsilon_n})_n$ convergence faiblement dans $W^{1,p}$ vers u;

$(v_{\varepsilon_n})_n$ convergence fortement dans $\mathbb{L}^\infty$ vers u.

• On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{G}(v_{\varepsilon_n}) = \frac{1}{\| u'_{\varepsilon_n} \|_p^{q-1}} \mathrm{G}(u_{\varepsilon_n}) = 0 \Rightarrow \mathrm{G}(u) = 0.$$

• On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{\lambda+\varepsilon_n}(v_{\varepsilon_n}) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \mathrm{F}_{\lambda+\varepsilon_k}(v_{\varepsilon_k}) \leqq 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{F}_\lambda(u) \leqq 0. \end{aligned}$$

De la définition de λ, on déduit que : $\mathrm{F}_\lambda(u) = 0$.

• Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\lambda+\varepsilon_n}(v_{\varepsilon_n}) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\| u'_{\varepsilon_n} \|_p^p} \left(\| u'_{\varepsilon_n} \|_p^p - (\lambda + \varepsilon_n) \| u_{\varepsilon_n} \|_q^p \right) < 0 \\ &\Rightarrow \quad 1 < (\lambda + \varepsilon_n) \frac{\| u_{\varepsilon_n} \|_q^p}{\| u'_{\varepsilon_n} \|_p^p} = (\lambda + \varepsilon_n) \| v_{\varepsilon_n} \|_q^p \\ &\Rightarrow \quad 1 \leqq \lambda \| u \|_q^p \\ &\Rightarrow \quad \lambda > 0 \quad \text{et} \quad \| u \|_q > 0. \end{aligned}$$

D'où la première étape du lemme.

Deuxième étape : montrons maintenant qu'on peut prendre, sans perte de généralité $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}$.

Soit u, définie dans la première étape du lemme. On pose (*cf.* figure 1) :

$$\alpha_1 = \min \{ x \in [-1, 1] \mid u(x) = 0 \}$$

$$v(x) = \begin{cases} u(x + \alpha_1 + 1) & \text{si} \quad -1 \leqq x \leqq -\alpha_1 \\ u(x + \alpha_1 - 1) & \text{si} \quad -\alpha_1 \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

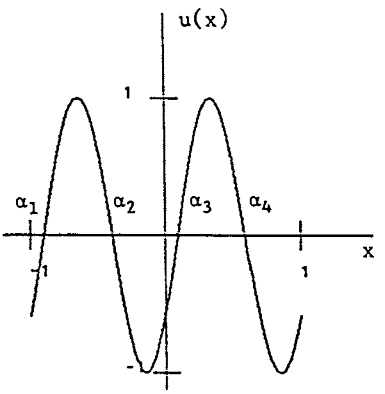

Figure 1.a

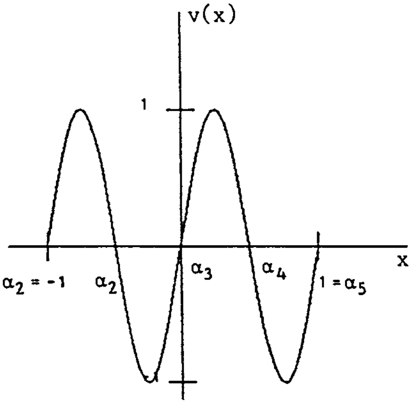

Figure 1.b

La fonction v ainsi définie vérifie : $v \in W_0^{1,p}$. On a en outre :

$$G(u)=G(v) \qquad \text{et} \qquad \lambda=J(v)=J(u)\equiv\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_q^p}.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. ■

LEMME 2.4. — *Soit* $u \in W_{per}^{1,p}$ *tel que* $u \not\equiv 0$,

$$F_\lambda(u)\equiv\|u'\|_p^p-\lambda\|u\|_q^p=0 \qquad et \qquad G(u)=\int_{-1}^{1} u|u|^{q-2}=0.$$

Alors :

$$\langle F'_\lambda(u);\varphi\rangle=0,\ \forall \varphi\in W_{per}^{1,p}.$$

De plus, si $M=\max_{x\in[-1,1]}|u(x)|$, *alors u satisfait :*

(i) $u,\ u'|u'|^{p-2}\in C^1[-1,1]$.

(ii) $(u'|u'|^{p-2})'=-\tilde{\lambda}u|u|^{q-2}$, *où* $\tilde{\lambda}=\lambda\|u\|_q^{p-q}$.

(iii) $\dfrac{1}{p'}|u'|^p+\dfrac{\tilde{\lambda}}{q}|u|^q=\dfrac{\tilde{\lambda}}{q}M^q$.

Démonstration :

Première étape : montrons d'abord que :

$\forall\varphi\in W_{per}^{1,p}$, $\forall t\in]0,1[$, $\exists c'_t\in\mathbb{R}$ tel que $c'_t\in\mathrm{Im}(-\varphi)$ et $G(u+t(\varphi+c'_t))=0$ où Im $(-\varphi)$ désigne l'image de $-\varphi$.

— Montrons l'existence de $c'_t\in\mathbb{R}$.

On considère :

$$\begin{aligned}\phi:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ \beta&\mapsto G(u+t\varphi+\beta)\end{aligned}$$

ϕ est continue et on a :

$$\phi(-1-\|u+t\varphi\|_\infty)<0,\ \phi(1+\|u+t\varphi\|_\infty)>0.$$

Par conséquent il existe $\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\phi(\beta)=0$. On pose : $c'_t=\beta/t$.

— Montrons que $c'_t\in\mathrm{Im}(-\varphi)$. Supposons par l'absurde que

$$\varphi(x)+c'_t>0 \quad \text{pour tout } x\in[-1,1],$$

on a donc : $u(x)+t[\varphi(x)+c'_t]>u(x)$ pour tout $x\in[-1,1]$.

Étant donné que $g(x)\equiv|x|^q$ est strictement convexe, on a :

$$g'(u(x)+t[\varphi(x)+c'_t])>g'(u(x))\Rightarrow G(u+t[\varphi+c'_t])>G(u)=0$$

ce qui est absurde. On fait le même raisonnement dans le cas $\varphi(x)+c'_t<0$.

On en déduit qu'il existe $x_t\in[-1,1]$ tel que $\varphi(x_t)+c'_t=0$.

Deuxième étape : (première partie du lemme) : soit $\varphi\in W_{per}^{1,p}$ fixé, alors, d'après la première étape du lemme, on sait que pour tout $t\in]0,1[$, il existe $c'_t \in \mathbb{R}$ tel que $G(u+t(\varphi+c'_t))=0$, $c'_t=-\varphi(x'_t)$, pour un certain $x'_t \in [-1, 1]$ bien choisi.

On peut extraire de la suite $(x'_t)_{t \in]0, 1[}$ une sous-suite $x_n = x'_{t_n}$ convergeant dans $[-1, 1]$ vers x quand $t_n \to 0$. Posons : $c_n = -\varphi(x_n)$, alors, $c = \lim_{n \to \infty} c_n$ existe car φ est continue.

On a pour tout $\varphi \in W^{1, p}_{\text{per}}$:

$$\langle F'_\lambda(u); \varphi \rangle = p \int_{-1}^{1} u' |u'|^{p-2} \varphi' - \lambda p \|u\|_q^{p-q} \int_{-1}^{1} u |u|^{q-2} \varphi$$

et

$$0 \leqq \lim_{n \to \infty} \frac{F_\lambda(u+t_n(\varphi+c_n)) - F_\lambda(u)}{t_n} = \langle F'_\lambda(u); \varphi \rangle - \lambda cp \|u\|_q^{p-q} \int_{-1}^{1} u |u|^{q-2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqq \langle F'_\lambda(u); \varphi \rangle, \qquad \text{car} \int_{-1}^{1} u |u|^{q-2} = 0.$$

On a donc : $0 = \langle F'_\lambda(u); \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in W^{1, p}_{\text{per}}$.

Troisième étape : notons enfin que (i) et (ii) se déduisent immédiatement de la deuxième étape. (iii) se déduit alors en multipliant (ii) par u' et en l'intégrant. ■

Remarque 2.5.

1. Noter que l'on n'a pas utilisé le multiplicateur de Lagrange explicitement, car G′ n'est pas bien définie pour $q<2$. Noter que dans tous les cas, le multiplicateur de Lagrange est implicitement 0.

2. L'égalité $(u'|u'|^{p-2})' = -\tilde{\lambda} u |u|^{q-2}$ implique

$$u'|u'|^{p-2}(1) - u'|u'|^{p-2}(-1) = 0 \qquad \text{et} \qquad u'(-1) = u'(1).$$

3. On a : $u'(x) = 0 \Leftrightarrow |u(x)| = M$.

4. Il est facile de voir que la fonction u admet un nombre fini de zéros.

5. Soit $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ la liste complète de tous les zéros de u, supposons, pour fixer les idées que $u>0$ sur l'intervalle (α_j, α_{j+1}), pour un certain j, $1 \leqq j \leqq n-1$, alors :

– Il existe un unique $\eta_j \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$ tel que $u(\eta_j) = M$;

– Pour tout $x \in [\alpha_j, \eta_j)$ on a : $u'(x) < 0$ et pour tout $x \in (\eta_j, \alpha_{j+1}]$ on a : $u'(x) > 0$.

– On a : $u < 0$ dans $(\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2})$.

– $\max_{x \in [-1, 1]} u(x) = -\min_{x \in [-1, 1]} u(x) = M$.

LEMME 2.6. – *Il existe* $u \in W_0^{1, p}$ *tel que* $J(u) \equiv \dfrac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_q^p} = \lambda$, $G(u) = 0$, $u \not\equiv 0$ *et* $\max_{x \in [-1, 1]} |u(x)| = 1$. *De plus si* $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ *est la liste complète de* *tous les zéros de u, alors* (cf. *fig.* 2) :

(i) $\alpha_{j+1}-\alpha_j=\alpha_2-\alpha_1$, $j=1, \ldots, n-1$

(ii) $u(x+L)=-u(x)$, si $L=\alpha_2-\alpha_1$ et $x\in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$, $j=1, \ldots, n-1$.

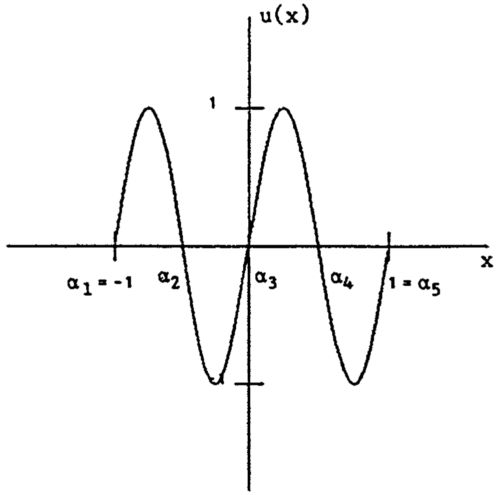

Figure 2

Démonstration. — On procédera par étapes.

— Soit $v\in W_0^{1,p}$ tel que $J(v)=\lambda$, $G(v)=0$, $v\not\equiv 0$ et $\max_{x\in[-1,1]}|v(x)|=M$; soit de plus $\alpha_1<\ldots<\alpha_n$ la liste complète de tous les zéros de v (un tel v existe d'après le lemme 2.3).

On définit $u=v/M$, on a alors :

- $u\in W_0^{1,p}$, $u\not\equiv 0$, $J(u)=\lambda$, $G(u)=0$;
- $\max_{x\in[-1,1]}|u(x)|=1$;
- $-1=\alpha_1<\ldots<\alpha_n=1$ est la liste complète de tout les zéros de u.

On pose : $\tilde{\lambda}=\lambda\|u\|_q^{p-q}$.

— On peut supposer sans perte de généralité que l'on a : $u>0$ dans (α_j, α_{j+1}). Soit $\eta_j\in(\alpha_j, \alpha_{j+1})$ l'unique solution sur cet intervalle de l'équation $u'(x)=0$. On sait d'après le point 5 de la remarque 2.5 que $u'>0$ dans (α_j, η_j) et $u'<0$ dans (η_j, α_{j+1}). D'après le lemme 2.4, on a :

$$\frac{1}{p'}|u'|^p+\frac{\tilde{\lambda}}{q}|u|^q=\frac{\tilde{\lambda}}{q} \text{ i.e. } \frac{|u'|}{[1-u^q]^{1/p}}=\left(p'\frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p}. \tag{6}$$

On en déduit que :

$$\int_{\alpha_j}^{\eta_j} \frac{u'}{[1-u^q]^{1/p}} = (\eta_j - \alpha_j)\left(p' \frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p}$$

c'est-à-dire :

$$\eta_j - \alpha_j = \left(p' \frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{-1/p} \int_0^1 \frac{du}{[1-u^q]^{1/p}}.$$

On a de même :

$$\alpha_{j+1} - \eta_j = \left(p' \frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{-1/p} \int_0^1 \frac{du}{[1-u^q]^{1/p}}$$

et donc :

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = 2\left(p' \frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{-1/p} \int_0^1 \frac{du}{[1-u^q]^{1/p}}$$

et $\eta_j = \dfrac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{2}$.

Finalement, $\alpha_{j+1} - \alpha_j$ est indépendant de j et l'on a :

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \alpha_2 - \alpha_1 = \mathrm{L}.$$

– En partant de l'équation (6) on a, si $x \in (\alpha_j, \eta_j)$ (dans ce cas $u'(x) > 0$) :

$$(x - \alpha_j)\left(p' \frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p} = \int_{\alpha_j}^{x} \frac{u'(s)\,ds}{[1-u(s)^q]^{1/p}} = \int_0^{u(x)} \frac{du}{[1-u^q]^{1/p}} \tag{7}$$

de même, si $y \in (\eta_j, \alpha_{j+1})$ (dans ce cas $u'(y) < 0$) :

$$(y - \alpha_{j+1})\left(p' \frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p} = -\int_0^{u(y)} \frac{du}{[1-u^q]^{1/p}}. \tag{8}$$

Donc, si $x \in (\alpha_j, \eta_j)$ en posant : $y = \alpha_j + \alpha_{j+1} - x$, on a $y \in (\eta_j, \alpha_{j+1})$, et on déduit de l'équation (8) que :

$$-(x - \alpha_j)\left(p' \frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p} = (y - \alpha_{j+1})\left(p' \frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p} = -\int_0^{u(y)} \frac{du}{[1-u^q]^{1/p}}. \tag{9}$$

On obtient finalement à partir des équations (7) et (9) que si :

$$x \in (\alpha_j, \eta_j) \quad \text{et} \quad y = \alpha_j + \alpha_{j+1} - x \quad \text{alors } u(x) = u(y). \tag{10}$$

De même, si $x \in (\eta_j, \alpha_{j+1})$, on a : $u(x) = u(\alpha_j + \alpha_{j+1} - x)$.

– Soit $x \in (\alpha_j, \eta_j)$, avec $j \leqq n-1$, on pose : $z = x + \mathrm{L}$, où $\mathrm{L} = \alpha_{j+1} - \alpha_j$. Puisque u est supposée positive dans (α_j, α_{j+1}), u est forcément négative dans $(\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2})$, et en définissant η_{j+1} comme l'unique solution de l'équation $u'(x)=0$ dans $(\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2})$, on conclut que : $u(t)<0$ pour tout $t\in(\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2})$, donc :

$$\frac{u'(t)}{(1-|u(t)|^q)^{1/p}}=-\left(p'\frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p}, \ \forall t\in(\alpha_{j+1}, \eta_{j+1}).$$

Ceci implique :

$$(z-\alpha_{j+1})\left(p'\frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p}=\int_{\alpha_{j+1}}^{z}\frac{-u'(t)\,dt}{(1-|u(t)|^q)^{1/p}}=\int_0^{-u(z)}\frac{du}{(1-|u|^q)^{1/p}}$$

puisque

$$z-\alpha_{j+1}=x+\alpha_{j+1}-\alpha_j-\alpha_{j+1}=x-\alpha_j,$$

on a :

$$(x-\alpha_j)\left(p'\frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p}=\int_0^{-u(z)}\frac{du}{(1-|u|^q)^{1/p'}},$$

et donc par (7)

$$-u(z)=u(x).$$

De même si $x\in(\eta_j, \alpha_{j+1})$, on a : $u(x)=-u(x+\alpha_{j+1}-\alpha_j)$.

On a alors le résultat :

$$u(x)=-u(x+\mathrm{L}), \qquad \forall x\in(\alpha_j, \alpha_{j+1}). \ \blacksquare \tag{11}$$

On va maintenant procéder à la démonstration du théorème 2.1.

Démonstration du théorème 2.1. — Soit u donnée par le lemme 2.6. Des lemmes précédents, on déduit que : $u(-1)=u(1)=0$. Comme $\int_{-1}^{1} u|u|^{q-2}=0$ et $u'(-1)=u'(1)$ alors $n\geqq 3$ et n est impaire (n étant le nombre de zéros de u).

On conclut que $n=3$, car sinon, en posant $v(x)=u\left(\frac{2(x+1)}{n-1}-1\right)$, $x\in[-1, 1]$, on a : v est solution du problème de minimisation et $\mathrm{J}(v)=\left(\frac{2}{n-1}\right)^p \mathrm{J}(u)<\mathrm{J}(u)$. Ce qui est absurde.

Soient alors $-1=\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3=1$ la liste complète des zéros de u. On a : $\alpha_2=0$ car $\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2$ (d'après le point (ii) du lemme 2.6). D'après le point (iii) du lemme 2.4 on a :

$$\frac{1}{p'}|u'|^p+\frac{\lambda}{q}\|u\|_q^{p-q}|u|^q=\frac{\lambda}{q}\|u\|_q^{p-q} \tag{12}$$

et par intégration :

$$\frac{1}{p'}\|u'\|_p^p+\frac{\lambda}{q}\|u\|_q^p=\frac{2\lambda}{q}\|u\|_q^{p-q}. \tag{13}$$

Donc, en utilisant le fait que $\lambda\|u\|_q^p=\|u'\|_p^p$, on a :

$$\|u\|_q^q=\frac{2}{1+q/p'}. \tag{14}$$

On peut supposer sans perte de généralité que $u(x)>0$ pour tout $x\in(-1, 0)$. On tire de l'équation (12) que :

$$u'(x)=\left(p'\frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p}(1-|u(x)|^q)^{1/p},\ \forall x\in[-1, -1/2]; \qquad \text{où}\quad \tilde{\lambda}=\lambda\|u\|_q^{p-q}$$

donc,

$$\left(p'\frac{\tilde{\lambda}}{q}\right)^{1/p}=2\int_0^1\frac{du}{(1-u^q)^{1/p}}=\frac{2}{q}\,\frac{\Gamma(1/p')\Gamma(1/q)}{\Gamma((1/p')+(1/q))}. \tag{15}$$

En combinant les équations (14), (15) et sachant que $\tilde{\lambda}=\lambda\|u\|_q^{p-q}$ et $\lambda=\alpha_I^p$, on déduit le théorème. ■

On déduit du théorème 2.1, le résultat de Talenti.

COROLLAIRE 2.7. – *Soit*

$$\alpha_T=\inf\left\{\frac{\|u'\|_{L^p(0,1)}}{\|u\|_{L^q(0,1)}}\,\middle|\,u\in W_0^{1,p}(0, 1)\setminus\{0\}\right\}.$$

Alors :

$$\alpha_T=2^{1/q-1/p}\alpha_I.$$

Démonstration. – En prolongeant par imparité une fonction $u\in W_0^{1,p}(0, 1)$ qui donne le minimum α_T, on obtient une fonction $v\in W_0^{1,p}(-1, 1)$ telle que :

$$\int_{-1}^1 v|v|^{q-2}=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\|v'\|_p}{\|v\|_q}=2^{1/p-1/q}\frac{\|u'\|_{L^p(0,1)}}{\|u\|_{L^q(0,1)}},$$

donc $\alpha_I\leqq 2^{1/p-1/q}\alpha_T$.

De même, comme il existe $v\in W_0^{1,p}(-1, 1)$ réalisant le minimum α_I, avec $v(0)=0$, on obtient une fonction $u\in W_0^{1,p}(0, 1)$ par restriction de v à l'intervalle (0, 1), tel que :

$$\frac{\|v'\|_p}{\|v\|_q}=2^{1/p-1/q}\frac{\|u'\|_{L^p(0,1)}}{\|u\|_{L^q(0,1)}}.$$

Donc $\alpha_I\geqq 2^{1/p-1/q}\alpha_T$. ■

3. CALCUL DE α_{II}

THÉORÈME 3.1. — *Soient p, $q>1$ et*

$$\alpha_{II}=\inf\left\{\frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q}\,\middle|\, u\in W^{1,p}_{per}\setminus\{0\},\ \int_{-1}^{1} u=0\right\}.$$

Alors α_{II} est un minimum et :

(i) $\alpha_{II}=\alpha_I$ *si* $q\leqq 2p$.

(ii) *Pour tout* $p\geqq 2$, *il existe* $q(p)>1$ *tel que, pour tout* $q>q(p)$, $\alpha_{II}<\alpha_I$.

La démonstration du théorème fera l'objet du présent paragraphe et l'on procédera par étapes. On montera que :

1. α_{II} est un minimum (lemme 3.2).

2. La fonction u qui réalise le minimum vérifie l'équation d'Euler associée au problème et cette équation admet une intégrale première (lemme 3.3).

3. On donne finalement des propriétés qualitatives de la fonction u (lemme 3.5).

LEMME 3.2. — *Il existe $u\in W^{1,p}_0\setminus\{0\}$ tel que :*

$$\int_{-1}^{1} u=0 \qquad et \qquad \|u'\|_p^p-\lambda_2\|u\|_q^p=0$$

où $\lambda_2=\alpha_{II}^p$.

Démonstration. — Identique à celle du lemme 2.3. ■

LEMME 3.3. — *Si $u\in W^{1,p}_{per}\setminus\{0\}$ tel que $F_{\lambda_2}(u)\equiv\|u'\|_p^p-\lambda_2\|u\|_q^p=0$ et $\bar G(u)\equiv\int_{-1}^{1}u=0$, alors, la relation suivante a lieu pour tout $\varphi\in W^{1,p}_{per}$*

$$\langle F'_{\lambda_2}(u);\,\varphi\rangle=p\,\mu\,\langle \bar G'(u);\,\varphi\rangle, \qquad où \quad \mu=\frac{1}{2}\|u\|_p^{p-q}\lambda_2\int_{-1}^{1}u\,|u|^{q-2}.$$

De plus, si $\max_{x\in[-1,1]}|u(x)|=\max_{x\in[-1,1]}u(x)$, *en posant*

$$M=\max_{x\in[-1,1]}u(x) \qquad m=-\min_{x\in[-1,1]}u(x),$$

alors la fonction u vérifie les propriétés suivantes :

(i) $u,\ u'|u'|^{p-2}\in C^1[-1,1]$

(ii) $(u'|u'|^{p-2})'=-\tilde\lambda_2 u|u|^{q-2}+\mu$, *où* $\tilde\lambda_2=\lambda_2\|u\|_q^{p-q}$

(iii) $\frac{1}{p'}|u'|^p+\frac{\tilde\lambda_2}{q}|u|^q=\mu u+c$ *où* $c=\frac{\tilde\lambda_2}{q}M^q-\mu M=\frac{\tilde\lambda_2}{q}m^q+\mu m\neq 0$.

Démonstration. — On procédera en deux étapes.

Première étape : on va montrer que u vérifie l'équation d'Euler associé au problème de minimisation. Soit $\varphi \in W^{1,p}_{per}$ fixé, posons : $c = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi$.

Comme u est le minimum de (II), et comme $\bar{G}(\varphi + c) = 0$, on déduit immédiatement (voir la preuve du lemme 2.4) que :

$$0 = \langle F'_{\lambda_2}(u); \varphi + c \rangle = \langle F'_{\lambda_2}(u); \varphi \rangle - p\mu \langle \bar{G}'(u); \varphi \rangle.$$

Ce qui achève la démonstration de la première étape.

Deuxième étape : les propriétés (i), (ii), (iii) se déduisent aisément de la première partie du lemme. ■

Remarque 3.4.

1. Remarquons que $\mu = 0$ équivaut à $\int_{-1}^{1} u|u|^{q-2} = 0$ et dans ce cas, on a $\alpha_{II} = \alpha_I$.

2. L'égalité $(u'|u'|^{p-2})' = -\tilde{\lambda}_2 u|u|^{q-2} + \mu$ implique

$$u'|u'|^{p-2}(1) - u'|u'|^{p-2}(-1) = 0,$$

donc $u'(-1) = u'(1)$.

3. On a : $u'(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = M$ ou $u(x) = -m$.

4. Il est facile de voir que la fonction u admet un nombre fini de zéros.

5. Soit $\beta_1 < \ldots < \beta_n$ la liste complète des zéros de u, supposons, pour fixer les idées que $u > 0$ sur l'intervalle (β_j, β_{j+1}), pour un certain j, $1 \leqq j \leqq n-1$, alors :

– Il existe un unique $\eta_j \in (\beta_j, \beta_{j+1})$ tel que $u(\eta_j) = M$;

– Pour tout $x \in (\beta_j, \eta_j)$ on a : $u'(x) < 0$ et pour tout $x \in (\eta_j, \beta_{j+1})$ on a : $u'(x) > 0$.

– On a : $u < 0$ dans $(\beta_{j+1}, \beta_{j+2})$.

– Si $u(-1) = 0$ alors u admet un nombre impair de zéros $n = 2k+1$.

LEMME 3.5. – *Il existe* $u \in W^{1,p}_0$ *tel que :*

$$J(u) \equiv \frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_q^p} = \lambda_2, \quad \int_{-1}^{1} u = 0, \; u \not\equiv 0,$$

$$\max_{x \in [-1, 1]} |u(x)| = 1 = \max_{x \in [-1, 1]} u(x).$$

De plus u vérifie les propriétés suivantes (cf. *Fig.* 3) *:*

1) *u admet trois zéros* $-1 = \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 = 1$

2) $\frac{1}{p'}|u'|^p + \frac{\tilde{\lambda}_2}{q}|u|^q = \mu u + c$ *où* $c = \frac{\tilde{\lambda}_2}{q} s(m)$ *et* $\mu = \frac{\tilde{\lambda}_2}{q} r(m)$ *avec*

$$\min_{x \in [-1, 1]} u(x) = -m, \; r(m) = \frac{1 - m^q}{1 + m} \qquad et \qquad s(m) = 1 - r(m).$$

3) $\mathrm{J}(u)=[2s(m)]^{(1-p/q)}\dfrac{(1+q/p')^{p/q}}{1+p'/q}\left[\displaystyle\int_{-m}^{1}\frac{du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}\right]^p$
$\equiv \mathrm{L}(m, p, q)$

4) $\displaystyle\int_{-m}^{1}\frac{u\,du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}\equiv \mathrm{F}(m, p, q)=0.$

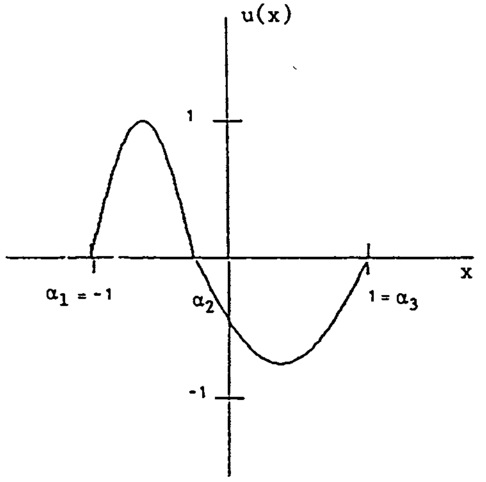

Figure 3

Démonstration. — On procèdera en deux étapes.

Première étape : on montre comme dans le lemme 2.6, que si $\beta_1 < \ldots < \beta_n$ est la liste complète des zéros de u, alors :

$$\beta_{2j+1}-\beta_{2j}=\beta_3-\beta_2 \qquad \text{et} \qquad \beta_{2j}-\beta_{2j-1}=\beta_2-\beta_1, \quad j=1, \ldots, k$$

u est périodique de période $\beta_3-\beta_1$.

On en déduit, comme dans la démonstration du théorème 2.1, que $n=3$. Ce qui achève la preuve du point 1).

La démonstration du point 2) est donnée par le point (iii) du lemme précédent d'où on obtient que :

$$c=\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}m^q+\mu m \qquad \text{et} \qquad c=\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}-\mu.$$

On en déduit alors que

$$c=\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}s(m) \qquad \text{et} \qquad \mu=\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}r(m).$$

Deuxième étape : supposons sans perte de généralité que $u'(-1)>0$. De la première partie du lemme, on sait :

$$\frac{1}{p'}|u'|^p+\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}|u|^q=\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}r(m)u+\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}s(m) \tag{16}$$

et par intégration

$$\frac{1}{p'}\|u'\|_p^p+\frac{\lambda_2}{q}\|u\|_q^p=2\frac{\lambda_2}{q}s(m)\|u\|_q^{p-q}.$$

On obtient donc

$$\|u\|_q^q=\frac{2}{q}\left(\frac{s(m)}{1/p'+1/q}\right). \tag{17}$$

Soient $\eta_1<\eta_2$ les zéros de u'. De (16), on a :

$$\frac{-u'}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}=\left(p'\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}\right)^{1/p}, \quad \text{dans } (\eta_1, \eta_2)$$

donc

$$\int_{-m}^{1}\frac{du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}=(\eta_2-\eta_1)\left(p'\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}\right)^{1/p}=\left(p'\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}\right)^{1/p}. \tag{18}$$

De (17) et (18), on a :

$$\mathrm{J}(u)=\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_q^p}=[2s(m)]^{(1-p/q)}\frac{(1+q/p')^{p/q}}{1+p'/q}\left[\int_{-m}^{1}\frac{du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}\right]^p.$$

Ce qui achève la démonstration du point 3). De même, par symétrie de u par rapport à η_1 et η_2, on a :

$$0=\int_{-1}^{1}u=2\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{uu'}{u'}=2\left(p'\frac{\tilde{\lambda}_2}{q}\right)^{-1/p}\int_{-m}^{1}\frac{u\,du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}$$

ce qui prouve le point 4). ■

Remarque 3.6.

On tire des relations (16) et (18) que u vérifie :

$$(\mathrm{E}_m): \quad |u'|^p=[1-|u|^q-r(m)(1-u)]\left[\int_{-m}^{1}\frac{du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}\right]^p.$$

Nous allons montrer réciproquement que, pour tout $m\in(0,1]$, l'équation (E_m) admet au moins une solution u_m et que $\mathrm{J}(u_m)=\mathrm{L}(m, p, q)$, de plus $\int_{-1}^{1}u_m=0$ s'écrit $\mathrm{F}(m, p, q)=0$. Pour cela, nous ferons dans le lemme qui suivra, l'étude de F et de L.

LEMME 3.7. — *Soient* F, L : $(0,1]\times(1,\infty)\times(1,\infty)\to\mathbb{R}$ *définies par*

$$\mathrm{F}:\quad (m,p,q)\mapsto\int_{-m}^{1}\frac{u\,du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}$$

$$\mathrm{L}:\quad (m,p,q)\mapsto[2\,s(m)]^{(1-p/q)}\frac{(1+q/p')^{p/q}}{1+p'/q}\times\left[\int_{-m}^{1}\frac{du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}\right]^p,$$

où $r(m)=\dfrac{1-m^q}{1+m}$, $s(m)=1-r(m)$.

F *et* L *ont alors les propriétés suivantes :*

(i) F *et* L *sont bien définies, continues dans* $(0,1]\times(1,\infty)\times(1,\infty)$.

(ii) $\mathrm{F}(1,p,q)=0$.

(iii) *L'équation* $\mathrm{F}(m,p,q)=0$ *admet l'unique solution* $m=1$ *si* $q\leqq 2p$.

(iv) *Pour tout* $p>1$, *et* $\varepsilon=1/2\min\{1/p,\,1-1/p\}$ *il existe* $q_0>1$ *tel que* $q>q_0$ *implique, il existe* $m(q)\in(1-\varepsilon-1/p,\,1+\varepsilon-1/p)$ *tel que*

$$\mathrm{F}(m(q),p,q)=0\qquad et\qquad \mathrm{L}(m(q),p,q)<\mathrm{L}(1,p,q).$$

Démonstration. — Les points (i) et (ii) se vérifient aisément. On obtient le point (iii) en remarquant que,

$$\mathrm{F}(m,p,q)=\int_0^1\frac{u\,du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}-\int_0^1\frac{m^2\,u\,du}{[1-(mu)^q-r(m)(1+mu)]^{1/p}}$$

et on a

$$\frac{u}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}>\frac{m^2\,u}{[1-(mu)^q-r(m)(1+mu)]^{1/p}},$$

pour tout $m\in[0,1)$, pour tout $u\in(0,1)$ si $q\leqq 2p$.

Donc $\mathrm{F}(m,p,q)>0$ si $m\in[0,1)$. On obtient le point (iv) en remarquant que pour tout $p>1$ et pour tout $m\in(0,1)$ on a

$$\lim_{q\to\infty}\mathrm{F}(m,p,q)=\mathrm{F}(m,p,\infty)=\frac{(1+m)(1-m-1/p)}{(1-1/p)(2-1/p)}.$$

En particulier $\mathrm{F}(1-\varepsilon-1/p,p,\infty)>0$ et $\mathrm{F}(1+\varepsilon-1/p,p,\infty)<0$ donc il existe $q_1>1$ tel que pour tout $q>q_1$, $\mathrm{F}(1+\varepsilon-1/p,p,q)<0$ et $\mathrm{F}(1-\varepsilon-1/p,p,q)>0$.

Donc $\mathrm{F}(m(q),p,q)=0$ pour un certain $m(q)\in(1-\varepsilon-1/p,\,1+\varepsilon-1/p)$ bien choisi.

On vérifie sans peine que $\lim_{q\to\infty} m(q)=1-1/p$. On a alors :

$$\lim_{q\to\infty}\mathrm{L}(m(q),p,q)=2\left[\frac{2-1/p}{1-1/p}\right]^{p-1}<\lim_{q\to\infty}\mathrm{L}(1,p,q)=2^{p+1}.$$

Donc il existe $q_0>1$ tel que $q>q_0 \Rightarrow \mathrm{L}(m(q), p, q)<\mathrm{L}(1, p, q)$. ■

LEMME 3.8. — *Soit* $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{per}}^{1,p}$ *tel que* $u \not\equiv 0$, $\mathrm{J}(u)=\lambda_2$, $\int_{-1}^{1} u=0$, $\max_{x\in[0,1]} |u(x)|=\max_{x\in[0,1]} u(x)=1$; *alors : il existe* $m \in (0, 1]$ *tel que* u *soit solution de l'équation différentielle*

$$|u'|=\alpha h(u) \qquad \text{où} \quad h(u)=\left[\frac{1-|u|^q-r(m)(1-u)}{2s(m)}\right]^{1/p},$$

$$\alpha=\int_{-m}^{1} \frac{du}{h(u)},\ r(m)=\frac{1-m^q}{1+m},\ s(m)=1-r(m).$$

Réciproquement, pour tout $m \in (0, 1]$, *l'équation :*

$$(\Sigma_m) \qquad \left\{\begin{array}{c} |u'|=\alpha h(u) \\ u(0)=1 \\ u \in \mathrm{W}_{\mathrm{per}}^{1,p} \\ \max_{x\in[0,1]} |u(x)|=\max_{x\in[0,1]} u(x)=1 \end{array}\right.$$

admet au moins une solution u *qui vérifie*

$$\int_{-1}^{1} u=\frac{1}{\alpha}\int_{-m}^{1} \frac{u\,du}{h(u)}.$$

Si de plus, on suppose que $\int_{-1}^{1} u=0$ *alors*

$$\|u'\|_p/\|u\|_q=[2s(m)]^{1/p-1/q}\frac{(1+q/p')^{1/q}}{(1+p'/q)^{1/p}}\int_{-m}^{1} \frac{du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}.$$

Démonstration. — La démonstration de ce lemme se fera en deux étapes.

Première étape : nous montrerons que si u donne le minimum α_{II}, alors $|u'|=\alpha h(u)$.

Pour cela posons $m=-\min_{x\in[0,1]} u(x)$, on a : $m \in (0, 1]$. On conclut cette première étape en utilisant le point 3) du lemme 3.5.

Deuxième étape : nous montrerons que si $m \in (0, 1]$, alors, on peut construire un u solution de (Σ_m).

Pour cela $m \in (0, 1]$ étant fixé, soit

$$\mathrm{H}:[-m, 1] \rightarrow \mathbb{R},\ y \mapsto \int_{1}^{y} \frac{dx}{h(x)}.$$

1) H est bien définie, continue, strictement croissante dans $[-m, 1]$.
2) H est dérivable dans $]-m, 1[$ et $\mathrm{H}([-m, 1])=[-\alpha, 0]$.
3) Soit $\mathrm{K}=\mathrm{H}^{-1}$; K est dérivable dans $[-\alpha, 0]$.

4) Soit $u:[-m,\ 1]\to\mathbb{R}$, définie par :

$$u(x)=\begin{cases}\mathrm{K}(\alpha x), & \text{si}\quad x\in[-1,0)\\ \mathrm{K}(-\alpha x) & \text{si}\quad x\in[0,1]\end{cases}$$

alors u est solution de l'équation (Σ_m) et vérifie toutes les propriétés énoncées ci-dessus. ■

LEMME 3.9. — *Soient*

$$\lambda_2=\min\left\{\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_q^p}\,\middle|\, u\in \mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{per}}\setminus\{0\},\ \int_{-1}^{1}u=0\right\}$$
$$\lambda_3=\inf\{\mathrm{L}(m,p,q): m\in(0,1],\ \mathrm{F}(m,p,q)=0\}.$$

Alors $\lambda_2=\lambda_3$.

Démonstration. — Montrons que : $\lambda_3\leqq\lambda_2$.

On sait qu'il existe $u\in\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{per}}\setminus\{0\}$, tel que $\int_{-1}^{1}u=0$, $\mathrm{J}(u)=\lambda_2$,

$$\max_{x\in[0,1]}|u(x)|=\max_{x\in[0,1]}u(x)=1,\qquad \min_{x\in[0,1]}u(x)=-m_0\quad\text{et}\quad m_0\in(0,1].$$

Du lemme 3.5, on a $\lambda_3\leqq\lambda_2$.

Montrons que : $\lambda_2\leqq\lambda_3$.

On obtient que λ_3 est un minimum, et le minimum est atteint en $m\in(0,1]$ car $\mathrm{F}(.,p,q)$, $\mathrm{L}(.,p,q)$ sont continues dans le compact $[0,1]$ et $\mathrm{F}(0,p,q)\neq 0$. Du lemme 3.8, il existe u_m solution de (Σ_m) et on a $\mathrm{J}(u_m)=\lambda_3$.

Comme $\displaystyle\int_{-m}^{1}\frac{u\,du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}=0$ équivaut à $\displaystyle\int_{-1}^{1}u=0$, on en déduit que $\lambda_2\leqq\lambda_3$. ■

On va maintenant procéder à la démonstration du théorème 3.1.

Démonstration du théorème 3.1. — On va diviser la démonstration en deux parties.

Posons : $\lambda=\alpha_{\mathrm{I}}^p$, et $\lambda_2=\alpha_{\mathrm{II}}^p$.

Première étape : calculons α_{II} en fonction de p, $q>1$ dans le cas $q\leqq 2p$.

D'après le lemme 3.5, il existe $m\in[0,1]$ tel que :

$$\lambda_2=[2s(m)]^{(1-p/q)}\frac{(1+q/p')^p}{1+p'/q}\left[\int_{-m}^{1}\frac{du}{[1-|u|^q-r(m)(1-u)]^{1/p}}\right]^p.$$

avec $\mathrm{F}(m,p,q)=0$. On tire du point (iii) du lemme 3.7 que si $q\leqq 2p$, l'unique solution de l'équation $\mathrm{F}(m,p,q)=0$ est $m=1$, d'où :

$$\lambda_2=2^{(1-p/q)}\frac{(1+q/p')^p}{1+p'/q}\left[\int_{0}^{1}\frac{2\,du}{[1-u^q]^{1/p}}\right]^p.$$

Ainsi, nous terminons la démonstration de la première étape. Remarquons donc que dans le cas $q \leqq 2p$, on a $\alpha_{\mathrm{I}}(p, q) = \alpha_{\mathrm{II}}(p, q)$.

Deuxième étape : nous montrerons que : $\forall p \geqq 2, \exists q(p) > 1$ tel que $\alpha_{\mathrm{II}} < \alpha_{\mathrm{I}}$ dès que $q > q(p)$. $p > 1$ étant fixé, du point (iv) du lemme 3.7, on a l'existence d'un $q(p) > 1$ tel que, pour tout $q > q(p)$ il existe $m \in (0, 1)$ avec

$$\int_{-m}^{1} \frac{u\,du}{[1 - |u|^q - r(m)(1-u)]^{1/p}} = 0, \quad \mathrm{L}(m, p, q) < \mathrm{L}(1, p, q).$$

D'après les lemmes 3.8 et 3.9, on a : $\lambda_2 \leqq \mathrm{L}(m, p, q) < \mathrm{L}(1, p, q) = \lambda$. Ainsi, nous terminons la démonstration de la deuxième étape. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1. ■

4. APPENDICE

Comme mentionné dans l'introduction, le calcul de la meilleure constante α_{I} donnée par le théorème 2.1, permet de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1 (*inégalité isopérimétrique*). — *Soit* $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2$ *tel que* $\partial \mathrm{A}$ *soit une courbe simple fermée admettant* $(x, y) \in [\mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{per}}(-1, 1)]^2$ *comme représentation paramétrique. Soient* $p > 1$ *et*

$$\mathrm{L}(\partial \mathrm{A}) = \int_{-1}^{1} (|x'(\theta)|^p + |y'(\theta)|^p)^{1/p}\, d\theta$$

$$\mathrm{M}(\mathrm{A}) = 1/2 \int_{-1}^{1} (y'(\theta)\,x(\theta) - x'(\theta)\,y(\theta))\, d\theta,$$

l'inégalité suivante a alors lieu :

$$\mathrm{L}^2(\partial \mathrm{A}) - 4\alpha_{\mathrm{I}}(p, p')\,\mathrm{M}(\mathrm{A}) \geqq 0 \qquad \text{où} \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{19}$$

De plus dans (19), *l'égalité a lieu si et seulement si :*

$$\mathrm{A} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{p'} + |y|^{p'} < 1 \},$$

à une translation et une homothétie près.

Remarque 4.2.

(i) Le théorème 4.1 est un cas particulier du théorème de Wulff (*cf.* Wulff [4], Dinghas [5], Taylor [6]), qui est une généralisation de l'inégalité isopérimétrique classique, (celle où $p = p' = 2$) et qui est un résultat standard en cristallographie.

(ii) Noter enfin que le théorème 2.1 donne

$$\alpha_1(p, p')=\frac{2}{p'}\frac{\Gamma(1/p')\Gamma(1/p')}{\Gamma(2/p')}.$$

Démonstration. — Nous allons juste indiquer l'idée de la démonstration et nous référons à l'article de Dacorogna-Pfister [1] pour plus de détails. La démonstration suit aussi celle de l'inégalité classique (*cf.* par exemple Hardy-Littlewood-Polya [7]).

Première étape : on commence par changer la paramétrisation de ∂A. On choisit une paramétrisation par la longueur de l'arc. On peut donc sans perte de généralité assurer que :

$$\frac{L^p(\partial A)}{2^p}\equiv|x'(s)|^p+|y'(s)|^p \; p.p. \quad s\in[-1, 1].$$

Quitte à faire une translation, on peut supposer que :

$$\int_{-1}^{1}|x|^{q-2}x=0. \tag{20}$$

L'inégalité (19) est alors équivalente à :

$$\frac{1}{2^{p-1}}[L^p-(4\alpha_1 M)^{p/2}]$$
$$=\left(\int_{-1}^{1}|x'(s)|^p+|y'(s)|^p\right)-2\left(\alpha_1\int_{-1}^{1}y'(s)x(s)\right)^{p/2}\geqq 0. \tag{21}$$

Deuxième étape : il reste à montrer que (21) se déduit du théorème 2.1. En effet, par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\int_{-1}^{1}(|x'|^p+|y'|^p)-2\left(\alpha_1\int_{-1}^{1}y'x\right)^{p/2}$$
$$\geqq\int_{-1}^{1}(|x'|^p+|y'|^p)-2\alpha_1^{p/2}\left(\int_{-1}^{1}|y'|^p\right)^{1/2}\left(\int_{-1}^{1}|x|^{p'}\right)^{p/2p'}$$
$$\geqq\left[\left(\int_{-1}^{1}|y'|^p\right)^{1/2}-\alpha_1^{p/2}\left(\int_{-1}^{1}|x|^{p'}\right)^{p/2p'}\right]^2$$
$$+\left[\int_{-1}^{1}|x'|^p-\alpha_1^p\left(\int_{-1}^{1}|x|^{p'}\right)^{p/p'}\right].$$

Comme dans l'inégalité ci-dessus le premier terme est trivialement positif et le second l'est grâce à (20) et au théorème 2.1, on en déduit immédiatement (21) et donc (19).

Il est facile de voir que : $A=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : |x|^{p'}+|y|^{p'}<1\}$ satisfait (19) avec égalité. Nous référons à Dacorogna-Pfister [1] pour l'unicité. ■

REMERCIEMENTS

Nous remercions F. Murat et C. E. Pfister pour les discussions intéressantes que nous avons eues lors de la réalisation de cet article.

RÉFÉRENCES

[1] G. TALENTI, Best constant in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.*, vol. **110**, 1976, p. 353-372.
[2] G. TALENTI, *Calcolo delle variazioni*, Pitagora Editrice, Bologna, 1977.
[3] B. DACOROGNA et C. E. PFISTER, Wulff theorem and best constant in Sobolev inequality, *J. Math. Pures Appl.*, vol. **71**, 1992.
[4] G. WULFF, Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachsturms und der Auflösung der Kristallflächen, *Z. Kristallogr.*, vol. **34**, 1901, p. 449-530.
[5] A. DINGHAS, Über einen geometrischen satz von Wulff für die Gleichgewichts form von Kristallen, *Z. Kristallogr.*, vol. **105**, 1944, p. 304-314.
[6] J. E. TAYLOR, Crystalline variational problems, *Bull. A.M.S.*, vol. **84**, 1978, p. 568-588.
[7] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.

(*Manuscrit reçu le* 11 *mai* 1990;
révisé le 4 *octobre* 1990.)