Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 1, n° 6, 1984, p. 453-478. *Analyse non linéaire*

Problème de Cauchy pour des systèmes hyperboliques semi-linéaires

par

Alain BACHELOT
Université de Bordeaux I,
U. E. R. de Mathématiques et d'Informatique,
Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 040226,
351, Cours de la Libération, 33405, Talence Cedex

RÉSUMÉ — On résout le problème de Cauchy global pour des systèmes d'équations de Schroedinger et de Klein-Gordon sans conservation d'énergie et avec des données initiales peu régulières. On obtient également des solutions locales pour des systèmes de Dirac-Klein-Gordon avec non linéarités quadratiques généralisant l'interaction de Yukawa.

ABSTRACT. — We resolve the global Cauchy problem for systems of Schroedinger and Klein-Gordon equations without conserved energy, and for not very regular data. We also obtain local solutions for coupled Dirac-Klein-Gordon equations having quadratic non linearities generalizing the Yukawa interaction.

INTRODUCTION

On s'intéresse à des systèmes semi-linéaires qui apparaissent dans la théorie des champs: le système de Dirac-Klein-Gordon (D-KG) :

$$\text{(D-KG)} \qquad \begin{cases} -i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + \mathrm{M}\psi = \mathrm{F}(\psi, \varphi),\ x \in \mathbb{R}^3,\ 0 < \mathrm{M}, \\ \varphi_{tt} - \Delta\varphi + m^2\varphi = \mathrm{G}(\psi, \varphi), \qquad 0 < m, \end{cases}$$

le système de Schroedinger-Klein-Gordon (S-KG) qui est une version semi-relativiste du précédent:

$$\text{(S-KG)} \qquad \begin{cases} - i\psi_t - \Delta\psi = \mathrm{F}(\psi, \varphi), \\ \varphi_{tt} - \Delta\varphi + m^2\varphi = \mathrm{G}(\psi, \varphi), \end{cases}$$

le système de Schroedinger-Schroedinger (S-S) :

$$\text{(S-S)} \qquad \begin{cases} - i\psi_t - \Delta\psi = \mathrm{F}(\psi, \varphi) \\ - i\varphi_t - \Delta\varphi = \mathrm{G}(\psi, \varphi). \end{cases}$$

Un exemple important de couplage est l'interaction de Yukawa (Y) :

$$\text{(Y)} \qquad \begin{cases} \mathrm{F}(\psi, \varphi) = g\psi\varphi,\ g \in \mathbb{R}, \\ \mathrm{G}(\psi, \varphi) = g\overline{\psi} \cdot \psi \end{cases}$$

où $\overline{\psi}$ est remplacé par ${}^t\overline{\psi}\gamma^0$ si ψ est un spineur de Dirac. Dans le cas où F et G sont des interactions polynomiales on peut résoudre facilement le problème de Cauchy local dans $\mathrm{C}^0(0, \mathrm{T}; \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^3))$ pour $s > \frac{3}{2}$ en utilisant la structure d'algèbre de $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^3)$ à l'aide des théorèmes abstraits de SEGAL [*23*]. Si, de plus, la valuation de F et G est assez grande, on peut utiliser la théorie du scattering et résoudre le problème de Cauchy global pour des données initiales assez petites et régulières pour qu'à $t = \pm \infty$ l'interaction soit négligeable (voir par exemple [*7*] [*14*] [*21*]). Dans le cas de l'interaction de Yukawa, Baillon et Chadam [*2*], en utilisant la conservation de l'énergie, ont établi l'existence de solutions globales de (S-KG)-(Y) dans $\mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^3))$ (le problème de Cauchy-Dirichlet est traité également à l'aide de la conservation de l'énergie dans [*13*]). D'autre part, Holder [*16*] a résolu le problème de Cauchy global dans $\mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^3))$ pour le système (S-S) avec une classe d'interaction comprenant notamment $\mathrm{F}(\psi, \varphi) = \psi|\varphi|$, $\mathrm{G}(\psi, \varphi) = \varphi|\psi|$ ou $\varphi \sin|\psi|$, et des données initiales dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^3)$. Dans la première partie on montre l'existence et l'unicité de solutions globales faibles dans $\mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathrm{L}^4(\mathbb{R}^3))$ pour (S-KG) et (S-S) avec des couplages généralisant les cas ci-dessus. En particulier, on ne fait pas d'hypothèse de conservation d'énergie ou de données initiales petites. On utilise principalement la conservation de la charge de ψ et les estimations $\mathrm{L}^{4/3} - \mathrm{L}^4$ des propagateurs $\mathrm{S}(t)$ et $\mathrm{R}(t)$ associés respectivement à l'équation de Schroedinger et à l'équation de Klein-Gordon [*19*]:

$$(1) \qquad |\mathrm{S}(t)u|_4 \leqslant \mathrm{C}|t|^{-3/4}|u|_{4/3},\ |\mathrm{R}(t)u|_4 \leqslant \mathrm{C}|t|^{-1/2}|u|_{4/3}$$

où

$$|\cdot|_p = |\cdot|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Dans les exemples précédents, on remarque d'une part que l'interaction est lipschitzienne, et d'autre part, que $\mathrm{F}(\psi, \varphi)$ est linéaire en ψ à coefficient réel si bien que la charge de ψ est conservée et que F et G satisfont

$$|\mathrm{F}(\psi, \varphi)|_{4/3} \leqslant \mathrm{C}|\psi|_2|\varphi|_4$$

et
$$|G(\psi, \varphi)|_{4/3} \leqslant C(|\psi|_2 |\varphi|_4 + |\psi|_2 |\psi|_4)\,;$$
à l'aide des estimations (1) on peut donc obtenir des estimations *a priori* de ψ et φ dans $L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$. Comme généralisation de ces exemples, on résout dans la première partie le problème de Cauchy global pour (S-KG) et (S-S) avec F et G satisfaisant (2) :

$$F(\psi, \varphi) = \psi f(\varphi),\ G(\psi, \varphi) = g_0(\psi)g_1(\varphi) + \psi h(\psi) \tag{2}$$

où f, g_0, g_1, h sont des applications uniformément lipschitziennes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, nulles en 0, f étant réelle.

On résout également (S-KG)-(Y) avec $\psi(0,.)$, $\varphi(0,.)$ dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ et $\varphi_t(0,.) \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Dans la deuxième partie on s'intéresse au problème de Cauchy local pour (D-KG). Dans le cas de l'interaction de Yukawa on peut résoudre (D-KG)-(Y) par la méthode employée par Gross [15] dans l'étude du système de Dirac-Maxwell (voir aussi [6] [8] [9] [10]). Cette méthode utilise la bilinéarité de $F(\psi, \varphi) = g\psi\varphi$ pour se ramener à résoudre un système semi-linéaire à non linéarité lipschitzienne. Dans le cas général il n'est pas possible d'utiliser la méthode itérative standard si les données ne sont pas assez régulières pour que l'interaction soit lipschitzienne. Néanmoins, on résout (D-KG) localement en supposant seulement que $F(\psi, \varphi)$ est linéaire en ψ et en appliquant un théorème de Kato-Yoshida au système de Dirac considéré comme système hyperbolique en ψ à coefficients variables. Plus précisément, on résout le problème de Cauchy local pour (D-KG) avec couplage vérifiant (3) :

$$\left\{\begin{array}{l} F(\psi, \varphi) = f(\varphi)\psi,\ G(\psi, \varphi) = g_0(\psi)g_1(\varphi) + {}^t\psi \cdot h(\psi) \\ \text{où } f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{R}),\ g_0 \in C^1(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}),\ g_1 \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}),\ h \in C^1(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4) \\ \text{et ces applications s'annulent en 0 et admettent des dérivées} \\ \quad \text{premières } L^\infty. \end{array}\right. \tag{3}$$

On considère les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour s réel et $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ pour m entier et $p \geqslant 1$ définis par :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\,;\, (1 + |\xi|^2)^{s/2}\,\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$$
$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\,;\, D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n),\ |\alpha| \leqslant m \}\,.$$

I. PROBLÈME DE CAUCHY GLOBAL POUR (S-KG) ET (S-S)

Le cadre fonctionnel naturel pour étudier les systèmes (S-KG) et (S-S) est l'espace $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ à cause du caractère quadratique des interactions (2) et des estimations $L^2 - L^2$ et $L^{4/3} - L^4$ de $S(t)$ et $R(t)$.

Ainsi on est amené à résoudre le problème de Cauchy pour (S-KG) et (S-S) pour des données initiales caractérisées par le fait que les solutions libres de mêmes données appartiennent à $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. De nombreux auteurs ont étudié le problème de Cauchy dans les espaces L^p pour des systèmes linéaires d'évolution. En particulier, il y a deux résultats négatifs fondamentaux dus à Hörmander [*17*] dans le cas de l'équation de Schroedinger et à Littman [*18*] dans le cas de l'équation des ondes affirmant que le problème de Cauchy pour ces équations n'est pas bien posé dans $L^4(\mathbb{R}^3)$. Par contre, de nombreuses conditions suffisantes sur les données initiales pour que la solution reste dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ ont été établies (voir par exemple [*3*] [*4*] [*5*] [*11*] [*20*] et les bibliographies correspondantes). Nous énonçons à présent les résultats d'existence, unicité, régularité de cette partie.

THÉORÈME 1. — *Soient ψ_0 et φ_0 des solutions respectivement de l'équation de Schroedinger et de l'équation de Klein-Gordon. On suppose que ψ_0 et φ_0 appartiennent à $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ et que F et G vérifient* (2). *Alors il existe une unique solution (ψ, φ) de* (S-KG), *ψ et φ appartenant à $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ et vérifiant*

$$\psi(0,.) = \psi_0(0,.),\ \varphi(0,.) = \varphi_0(0,.),\ \varphi_t(0,.) = \varphi_{0_t}(0,.).$$

Si, de plus, ψ_0 et φ_0 appartiennent à $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$ et si f, g_0, g_1, h sont C^1, alors ψ et φ appartiennent à $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$.

Les propagateurs R(t) et S(t) vérifiant des estimations $L^2 - L^2$ et $L^{4/3} - L^4$ semblables, on montre de façon analogue l'existence et l'unicité des solutions de (S-S) :

THÉORÈME 2. — *Soient ψ_0 et φ_0 deux solutions de l'équation de Schroedinger dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. On suppose que F et G vérifient* (2). *Alors il existe une unique solution (ψ, φ) de* (S-S), *ψ et φ appartenant à $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ et vérifiant*

$$\psi(0,\cdot) = \psi_0(0,\cdot),\ \varphi(0,\cdot) = \varphi_0(0,\cdot).$$

Si, de plus, f, g_0, g_1, h sont C^1 et si ψ_0 et φ_0 appartiennent à $C^0(R, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$ alors ψ et φ appartiennent à $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$

Dans le cas de l'interaction de Yukawa pour (S-KG), la conservation de l'énergie permet d'estimer la norme de $\psi(t)$ dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ par les normes de $\psi(t)$ dans $L^4(\mathbb{R}^3)$ et de $\varphi(t)$ et $\varphi_t(t)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ sans avoir besoin de contrôler simultanément la norme de $\psi(t)$ dans $W^{1,4}(\mathbb{R}^3)$. On peut alors étendre le théorème de Baillon et Chadam [*2*] :

THÉORÈME 3. — *Soient ψ_0 et φ_0 dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ et φ_1 dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, φ_0 et φ_1*

étant réelles. Alors il existe une unique solution (ψ, φ) *de* (S-KG) *avec interaction de Yukawa* (Y) *et vérifiant :*

$$\psi,\ \varphi \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))\ ;\ \varphi_t \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))\ ;$$
$$\psi(0, .) = \psi_0(\,.\,)\ ;\ \varphi(0, .) = \varphi_0(\,.\,)\ ;\ \varphi_t(0, .) = \varphi_1(\,.\,)\,.$$

De plus ψ *et* φ *vérifient :*

$$\psi \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$$
$$\varphi \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3)),$$
$$|\nabla\psi(t)|_2^2 + \frac{1}{2}(|\nabla\varphi(t)|_2^2 + m^2|\varphi(t)|_2^2 + |\varphi_t(t)|_2^2) + g\int|\psi(t)|^2\varphi(t)dx = \text{constante}.$$

Remarque 1. — Dans le théorème précédent, l'interaction $F(\psi, \varphi) = g\psi\cdot\varphi$ appartient seulement à $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ ce qui semble en contradiction avec le fait que ψ est dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. Ce paradoxe apparent est levé si on remarque que l'équation vérifiée par ψ est linéaire en ψ ; cela permettra de résoudre le problème de Cauchy dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$ sans utiliser une méthode standard de point fixe inapplicable ici puisque l'interaction n'est pas lipschitzienne dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$.

Preuve du théorème 1. — Si ψ et $\varphi \in C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$, alors $F(\psi, \varphi)$ et $G(\psi, \varphi) \in C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$. Donc les solutions de (S-KG) dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ sont aussi solutions des équations intégrales

$$(4)\qquad \begin{cases} \psi(t) = \psi_0(t) + \displaystyle\int_0^t S(t-s)F(\psi(s), \varphi(s))ds\,, \\ \varphi(t) = \varphi_0(t) + \displaystyle\int_0^t R(t-s)G(\psi(s), \varphi(s))ds\,. \end{cases}$$

Soient (ψ, φ) et $(\tilde\psi, \tilde\varphi)$ deux solutions de (4) dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ de mêmes données ψ_0, φ_0. On pose : $\Psi = \psi - \tilde\psi$; $\Phi = \varphi - \tilde\varphi$; Ψ et Φ sont solutions de :

$$\begin{cases} \Psi(t) = \displaystyle\int_0^t S(t-s)[F(\psi(s), \varphi(s)) - F(\tilde\psi(s), \tilde\varphi(s))]ds \\ \Phi(t) = \displaystyle\int_0^t R(t-s)[G(\psi(s), \varphi(s)) - G(\tilde\psi(s), \tilde\varphi(s))]ds\,. \end{cases} \qquad (5)$$

Grâce à l'hypothèse (2) il existe $C > 0$ tel que

$$|F(\psi(s), \varphi(s)) - F(\tilde\psi(s), \tilde\varphi(s))|_{4/3} \leqslant C(|\Psi(s)|_4|\varphi(s)|_2 + |\Phi(s)|_4|\tilde\psi(s)|_2)$$
$$|G(\psi(s), \varphi(s)) - G(\tilde\psi(s), \tilde\varphi(s))|_{4/3} \leqslant C(|\Psi(s)|_4|\varphi(s)|_2 + |\Phi(s)|_4|\tilde\psi(s)|_2 + |\Psi(s)|_4(|\psi(s)|_2 + |\tilde\psi(s)|_2))\,.$$

Sur $[0, T]$ on majore les normes L^2 de φ, ψ, $\tilde{\psi}$ et en appliquant les estimations (1) à l'égalité (5) on obtient pour $t \in [0, T]$:

$$|\Psi(t)|_4 \leqslant C \int_0^t |t - s|^{-3/4}(|\Psi(s)|_4 + |\Phi(s)|_4)ds,$$

$$|\Phi(t)|_4 \leqslant C \int_0^t |t - s|^{-\frac{1}{2}}(|\Psi(s)|_4 + |\Phi(s)|_4)ds.$$

En additionnant et en appliquant le lemme de Gronwall, on en déduit que $\Psi = \Phi = 0$ sur $[0, T]$ ce qui assure l'unicité des solutions de (S-KG). On peut démontrer de la même manière l'existence locale de solutions dans $C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ par la méthode habituelle de Picard pour T assez petit; on peut aussi montrer qu'une solution maximale définie sur $[0, T_M]$ appartient à $L^\infty(0, T_M; L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. Mais comme il est connu que $S(t)$ et $\frac{dR}{dt}(t)$ n'opèrent pas dans $L^4(\mathbb{R}^3)$ (voir *[17]* *[18]*), on ne peut en déduire que $T_M = +\infty$. On définit alors d'autres itérés. Pour cela on résout la suite de problèmes de Cauchy suivante :

$$(P_n)_{n \geqslant 1} \begin{cases} i\psi_t^n + \Delta\psi^n = \psi^n f(\varphi^{n-1}), \\ \varphi_{tt}^n - \Delta\varphi^n + m^2\varphi^n = G(\psi^{n-1}, \varphi^{n-1}), \\ \psi^n(0, .) = \psi_0(0, .), \ \varphi^n(0, .) = \varphi_0(0, .), \ \varphi_t^n(0, .) = \varphi_{0_t}(0, .), \end{cases}$$

et pour $n = 0$, on pose :

$$\psi^0 = \psi_0, \ \varphi^0 = \varphi_0.$$

On montre tout d'abord que le problème P_n est bien posé dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. Supposons que ψ^{n-1} et φ^{n-1} appartiennent à cet espace, alors $G(\psi^{n-1}, \varphi^{n-1})$ appartient à $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^{4/3}(\mathbb{R}^3))$. On définit φ^n par :

$$\varphi^n(t) = \varphi_0(t) + \int_0^t R(t - s)G(\psi^{n-1}(s), \varphi^{n-1}(s))ds.$$

Les estimations $L^2 - L^2$ et $L^{4/3} - L^4$ de $R(t)$ montrent alors que $\varphi^n \in C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$; enfin l'unicité de la solution de l'équation de Klein-Gordon dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$, quand le second membre et la solution libre associée appartiennent à cet espace, est bien connue. Pour l'existence et l'unicité de ψ^n on applique le résultat suivant :

LEMME 1. — *Soit φ_0 une solution de l'équation de Schroedinger dans* $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. *Soit* V *une fonction à valeur réelle dans* $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. Alors il existe une unique solution ψ dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ vérifiant :

$$(6) \qquad \begin{cases} \psi(0, .) = \psi_0(0, .) \\ i\psi_t + \Delta\psi = \psi . V. \end{cases}$$

De plus, la charge de ψ est conservée : $|\psi(t)|_2 = |\psi_0(0)|_2$, *et si* V *et* ψ_0 *sont dans* $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$, *alors* ψ *appartient à cet espace.*

Preuve du lemme 1. — Toute solution ψ de (6) dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ vérifie :

$$\psi(t) = \psi_0(t) + \int_0^t S(t-s)(\psi(s)V(s))ds\,. \tag{7}$$

On en déduit immédiatement l'unicité à l'aide de (1) et du lemme de Gronwall. Pour établir l'existence de ψ on régularise les données en choisissant δ_j une suite régularisante dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ et θ_j une suite régularisante dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$. On pose :

$$V_j = V \underset{t,x}{*} (\delta_j \otimes \theta_j),\ \psi_{0,j} = \psi_0 \underset{x}{*} \theta_j\,,$$
$$A_j(t) = -\Delta + V_j(t)\,.$$

On sait alors (voir par exemple [*22*] p. 290) que, puisque $V_j \in C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$, $A_j(t)$ est un opérateur autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^3)$ pour tout t et qu'il existe un groupe unitaire $U_j(t, s)$ sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ tel que, si $\chi_j \in H^2(\mathbb{R}^3)$ on a alors :

$$\left\{\begin{array}{l} U_j(t, s)\chi_j \in C^1(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}^3)) \\ U_j(s, s)\chi_j = \chi_j \\ i\dfrac{d}{dt}U_j(t, s)\chi_j = A_j(t)U_j(t, s)\chi_j\,. \end{array}\right.$$

Comme $\psi_{0,j}(0) \in H^2(\mathbb{R}^3)$ on pose :

$$\psi_j(t) = U_j(t, 0)\psi_{0,j}(0)\,.$$

Montrons que ψ_j appartient en fait à $C^0(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^3))$ si bien qu'*a fortiori* ψ_j sera dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$. Pour cela, on évalue :

$$\delta_{t,s} = |\Delta\psi_j(t) - \Delta\psi_j(s)|_2\,.$$

On a :

$$\begin{aligned} \delta_{t,s} &= |\Delta U_j(t, s)\psi_j(s) - \Delta\psi_j(s)|_2 \\ \delta_{t,s} &\leqslant |A_j(t)U_j(t, s)\psi_j(s) - A_j(s)\psi_j(s)|_2 \\ &\quad + |V_j(t)U_j(t, s)\psi_j(s) - V_j(s)\psi_j(s)|_2. \end{aligned}$$

Or $A_j(t)U_j(t, s) = W_j(t, s)A_j(s)$ où $W_j(t, s)$ est un groupe continu sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $W_j(s, s) = \mathrm{Id}$. Donc :

$$\begin{aligned} \delta_{t,s} &\leqslant |(W_j(t, s) - \mathrm{Id})A_j(s)\psi_j(s)|_2 \\ &\quad + |(V_j(t) - V_j(s))U_j(t, s)\psi_j(s)|_2 \\ &\quad + |V_j(s)(U_j(t, s)\psi_j(s) - \psi_j(s))|_2\,. \end{aligned}$$

On remarque que $V_j \in C^0(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^3))$ et donc

$$V_j(t) \to V_j(s) \qquad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^3) \qquad \text{si } t \to s\,.$$

Or $\quad W_j(t, s) - \mathrm{Id} \to 0 \quad$ dans $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^3))$ $\quad$ si $t \to s$,

$\quad U_j(t, s) - \mathrm{Id} \to 0 \quad$ dans $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^3))$ $\quad$ si $t \to s$;

on en désuit que $\delta_{t,s} \to 0$ si $t \to s$. A présent, montrons que ψ_j converge vers la solution ψ de (6) quand $j \to \infty$. Remarquons tout d'abord que V_j converge vers V et $\psi_{0,j}$ vers ψ_0 dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ si V et ψ_0 appartiennent à cet espace et dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$ si ψ_0 et V sont dans cet espace. D'autre part, $\psi_j \in C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$ et vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\psi_{jt} + \Delta\psi_j = \psi_j \, . \, V_j \\ \psi_j(0) = \psi_{0,j}(0) \end{array} \right. \tag{8}$$

où $\psi_j V_j \in C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$. En multipliant l'équation de (8) par $\overline{\psi_j}$ et en intégrant, on obtient la conservation de la charge de ψ_j, V_j étant à valeur réelle :

$$|\psi_j(t)|_2 = |\psi_{0,j}(0)|_2 \, .$$

De plus, ψ_j est solution de l'équation intégrale

$$\psi_j(t) = \psi_{0,j}(t) + \int_0^t S(t-s)(V_j(s) \, . \, \psi_j(s))ds \, . \tag{9}$$

En appliquant l'estimation $L^{4/3} - L^4$ de $S(t)$ et la conservation de la charge de ψ_j on obtient sur $[0, T]$ l'estimation suivante :

$$|\psi_j(t)|_4 \leqslant |\psi_{0,j}(t)|_4 + C\int_0^t |t-s|^{-3/4} |V_j(s)|_2 ds \, .$$

La suite ψ_j est donc bornée dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. On montre de manière analogue que si ψ_0 et V sont dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$, ψ_j est bornée dans cet espace. A présent, on évalue $\psi_j - \psi_h$ avec les estimations $L^2 - L^2$ et $L^{4/3} - L^4$:

$$\begin{aligned} |\psi_j(t) - \psi_h(t)|_2 \leqslant |\psi_{0,j}(t) - \psi_{0,h}(t)|_2 + \int_0^t & |V_j(s) - V_h(s)|_4 |\psi_j(s)|_4 \\ & + |\psi_j(s) - \psi_h(s)|_4 |V_h(s)|_4 ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\psi_j(t) - \psi_h(t)|_4 \leqslant |\psi_{0,j}(t) - \psi_{0,h}(t)|_4 + C\int_0^t & |t-s|^{-3/4}(|V_j(s) - V_h(s)|_4 |\psi_j(s)|_2 \\ & + |\psi_j(s) - \psi_h(s)|_2 |V_h(s)|_4) ds \, . \end{aligned}$$

On en déduit que sur $[0, T]$

$$\begin{aligned} |\psi_j(t) - \psi_h(t)|_{L^2 \cap L^4} \leqslant C(\| \psi_{0,j} - \psi_{0,h} \|_{C^0(0,T;L^2 \cap L^4)} & + \| V_j - V_h \|_{C^0(0,T;L^2 \cap L^4)} \\ & + \int_0^t (1 + |t-s|^{-3/4}) |\psi_j(s) - \psi_h(s)|_{L^2 \cap L^4} ds). \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall montre alors la convergence de ψ_j dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ vers ψ solution de (6). Si ψ_0 et V sont dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$ on établit de semblable façon la convergence de ψ_j dans cet espace. c. q. f. d.

Pour achever de résoudre (P_n) il suffit d'appliquer le lemme 1 sachant que si $\varphi^{n-1} \in C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ alors $f(\varphi^{n-1}) \in C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. On remarque que la charge de ψ_n est conservée :

$$| \psi^n(t) |_2 = | \psi_0(0) |_2 .$$

En utilisant cette estimation et en appliquant (1) aux équations intégrales faites par ψ^n et φ^n on obtient :

$$| \psi^n(t) |_4 \leqslant | \psi_0(t) |_4 + C \int_0^t | t - s |^{-3/4} | \varphi^{n-1}(s) |_4 ds ,$$

$$| \varphi^n(t) |_4 \leqslant | \varphi_0(t) |_4 + C \int_0^t | t - s |^{-\frac{1}{2}} (| \varphi^{n-1}(s) |_4 + | \psi^{n-1}(s) |_4) ds .$$

Il vient alors

$$\sup_{0 \leqslant k \leqslant n} (| \psi^k(t) |_4 + | \varphi^k(t) |_4) \leqslant | \psi_0(t) |_4 + | \varphi_0(t) |_4 + C \int_0^t (| t-s |^{-3/4} + | t-s |^{-\frac{1}{2}}) \times \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} (| \psi^k(s) |_4 + | \varphi^k(s) |_4) ds.$$

Le lemme de Gronwall montre alors que les suites ψ^n, φ^n sont bornées dans $C^0(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}^3))$. Enfin, on a :

$$| \varphi^n(t) |_2 \leqslant | \varphi_0(t) |_2 + C \int_0^t (| \varphi^{n-1}(s) |_4 | \psi^{n-1}(s) |_4 + | \psi^{n-1}(s) |_4^2) ds .$$

On en conclut finalement que ψ^n et φ^n sont bornées dans

$$C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)) .$$

On en déduit alors que pour $0 \leqslant t \leqslant T$, on a :

$$| \psi^n(t) - \psi^m(t) |_2 \leqslant C \int_0^t (| \psi^n(s) - \psi^m(s) |_4 + | \varphi^{n-1}(s) - \varphi^{m-1}(s) |_4) ds ,$$

$$| \varphi^n(t) - \varphi^m(t) |_2 \leqslant C \int_0^t (| \psi^{n-1}(s) - \psi^{m-1}(s) |_4 + | \varphi^{n-1}(s) - \varphi^{m-1}(s) |_4) ds ,$$

et en appliquant (1) :

$$| \psi^n(t) - \psi^m(t) |_4 \leqslant C \int_0^t | t-s |^{-3/4} (| \psi^n(s) - \psi^m(s) |_2 + | \varphi^{n-1}(s) - \varphi^{m-1}(s) |_2) ds,$$

$$| \varphi^n(t) - \varphi^m(t) |_4 \leqslant C \int_0^t | t-s |^{-\frac{1}{2}} (| \psi^{n-1}(s) - \psi^{m-1}(s) |_2 + | \varphi^{n-1}(s) - \varphi^{m-1}(s) |_2) ds .$$

On note :

$$\Delta_n(t) = \sup_{\substack{0 \leq s \leq t \\ n \leq m}} (\,|\,\psi^n(s) - \psi^m(s)\,|_{L^2 \cap L^4} + |\,\varphi^n(s) - \varphi^m(s)\,|_{L^2 \cap L^4})\,.$$

On obtient :

$$\Delta_n(t) \leq C \int_0^t (1 + |\,t - s\,|^{-3/4} + |\,t - s\,|^{-\frac{1}{2}})(\Delta_n(s) + \Delta_{n-1}(s))ds\,,$$

d'où, par le théorème de Fatou :

$$\limsup_{n \to \infty} \Delta_n(t) \leq 2C \int_0^t (1 + |\,t - s\,|^{-3/4} + |\,t - s\,|^{-\frac{1}{2}}) \limsup_{n \to \infty} \Delta_n(s)ds\,.$$

On en conclut par le lemme de Gronwall que ψ^n et φ^n convergent dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ vers ψ et φ solutions de (S-KG).

Il reste à établir que si ψ_0 et φ_0 sont dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$ ψ et φ appartiennent à cet espace si f, g_0, g_1, h sont C^1. On revient aux itérés ψ^n et φ^n solutions de (P_n) et on remarque tout d'abord que si ψ^{n-1} et φ^{n-1} sont dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$ alors $f(\varphi^{n-1})$ appartient à $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$ et $G(\psi^{n-1}, \varphi^{n-1})$ appartient à

$$C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4/3}(\mathbb{R}^3))\,;$$

cela est une conséquence du résultat suivant qui sera utilisé également dans la deuxième partie :

LEMME 2. — *Soit* $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *une application continue et bornée. Soient* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, *et* φ *une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq q \leq \infty$, *continue en* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Alors* $u.F(\varphi(.))$ *est une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *continue en* t_0.

Le lemme 1 montre alors que ψ^n appartient à $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$; il en est de même pour φ^n car grâce à (1) $\int_0^t R(t - s)G(\psi^{n-1}(s), \varphi^{n-1}(s))$ appartient à cet espace. Montrons maintenant que ψ^n et φ^n sont bornées dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$. Tout d'abord $\nabla\psi^n$ et $\nabla\varphi^n$ vérifient :

$$\nabla\psi^n(t) = \nabla\psi_0(t) + \int_0^t S(t-s)(\nabla\psi^n(s) \cdot f(\varphi^{n-1}(s)) + \psi^n(s)\nabla f(\varphi^{n-1}(s)))ds$$

$$\begin{aligned}\nabla\varphi^n(t) = \nabla\varphi_0(t) + \int_0^t R(t-s)(&\nabla g_0(\psi^{n-1}(s)) \cdot g_1(\varphi^{n-1}(s)) \\ &+ g_0(\psi^{n-1}(s))\,.\,\nabla g_1(\varphi^{n-1}(s)) + \nabla\psi^{n-1}(s).\,h(\psi^{n-1}(s)) + \psi^{n-1}.\,\nabla h(\psi^{n-1}(s)))ds.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que ψ^n et φ^n sont bornées dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ et que f, g_0, g_1, h sont C^1 de dérivées uniformément bornées, on obtient en appliquant les estimations $L^2 - L^2$ et $L^{4/3} - L^4$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$;

$$|\nabla\psi^n(t)|_2 \leqslant |\nabla\psi_0(t)|_2 + C\int_0^t (|\nabla\psi^n(s)|_4 + |\nabla\varphi^{n-1}(s)|_4)ds,$$

$$|\nabla\varphi^n(t)|_2 \leqslant |\nabla\varphi_0(t)|_2 + C\int_0^t (|\nabla\varphi^{n-1}(s)|_4 + |\nabla\psi^{n-1}(s)|_4)ds,$$

$$|\nabla\psi^n(t)|_4 \leqslant |\nabla\psi_0(t)|_4 + C\int_0^t |t-s|^{-3/4}(|\nabla\psi^n(s)|_2 + |\nabla\varphi^{n-1}(s)|_2)ds,$$

$$|\nabla\varphi^n(t)|_4 \leqslant |\nabla\varphi_0(t)|_4 + C\int_0^t |t-s|^{-\frac{1}{2}}(|\nabla\varphi^{n-1}(s)|_2 + |\nabla\psi^{n-1}(s)|_2)ds.$$

On pose :

$$A_n(t) = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} (|\nabla\psi^k(t)|_{L^2\cap L^4} + |\nabla\varphi^k(t)|_{L^2\cap L^4}).$$

En additionnant les estimations précédentes, il vient :

$$A_n(t) \leqslant |\nabla\psi_0(t)|_{L^2\cap L^4} + |\nabla\varphi_0(t)|_{L^2\cap L^4} + C\int_0^t (1 + |t-s|^{-\frac{1}{2}} + |t-s|^{-3/4})A_n(s)ds.$$

Le lemme de Gronwall montre alors que les suites ψ^n et φ^n sont bornées dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$. En utilisant cette estimation, on obtient pour $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\begin{aligned}|\nabla\psi^n(t) - \nabla\psi^m(t)|_{L^2\cap L^4} \leqslant C\int_0^t (1 + |t-s|^{-3/4})[&|\psi^n(s) - \psi^m(s)|_{L^2\cap L^4} \\ &+ |\varphi^{n-1}(s) - \varphi^{m-1}(s)|_{L^2\cap L^4} + |\nabla\varphi^{n-1}(s) - \nabla\varphi^{m-1}(s)|_{L^2\cap L^4} \\ &+ |\nabla\psi^n(s) - \nabla\psi^m(s)|_{L^2\cap L^4} + |\psi^m(s)(\partial f(\varphi^{n-1}(s)) - \partial f(\varphi^{m-1}(s)))|_{L^2\cap L^4} \\ &+ |\psi^m(s)(\bar\partial f(\varphi^{n-1}(s)) - \bar\partial f(\varphi^{m-1}(s)))|_{L^2\cap L^4}.\end{aligned}$$

On obtient une estimation analogue pour $|\nabla\varphi^n - \nabla\varphi^m|_{L^2\cap L^4}$. En utilisant le fait que ψ^n et φ^n convergent dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ et qu'en particulier, grâce au lemme 2,

$$|\psi^m(s)(\partial f(\varphi^{n-1}(s)) - \partial f(\varphi^{m-1}(s)))|_{L^2\cap L^4} \to 0$$

pour tout s sur $[0, T]$ en restant borné quand n et $m \to \infty$, on obtient en posant

$$\Delta_n(t) = \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant t\\ n\leqslant m}} (|\nabla\psi^n(s) - \nabla\psi^m(s)|_{L^2\cap L^4} + |\nabla\varphi^n(s) - \nabla\varphi^m(s)|_{L^2\cap L^4}$$

$$\Delta_n(t) \leqslant \delta_n(t) + C\int_0^t (1 + |t-s|^{-\frac{1}{2}} + |t-s|^{-3/4})(\Delta_n(s) + \Delta_{n-1}(s))ds,$$

où $\delta_n(t) \to 0$ uniformément sur $[0, T]$. On achève comme précédemment par le théorème de Fatou et le lemme de Gronwall. Il reste à démontrer le lemme 2.

Preuve du lemme 2. — Soit t_n une suite réelle convergeant vers t_0. Il suffit de montrer que pour toute sous-suite t_{n_k} il existe une sous-suite extraite $t_{n_{k_l}}$ telle que $uF(\varphi(t_{n_{k_l}}))$ converge vers $uF(\varphi(t_0))$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ quand $l \to \infty$. Puisque φ est continue en t_0 à valeur dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(t_{n_k})$ tend vers $\varphi(t_0)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ quand $k \to \infty$; donc il existe une sous-suite $t_{n_{k_l}}$ telle que, pour presque tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\varphi(t_{n_{k_l}}, x)$ tende vers $\varphi(t_0, x)$ dans $\mathbb{C}$ quand $l \to \infty$. F étant continue et bornée, le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que $uF(\varphi(t_{n_{k_l}}))$ tend vers $uF(\varphi(t_0))$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ quand $l \to \infty$. c. q. f. d.

Preuve du théorème 2. — On procède comme au théorème 1 en résolvant dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ la suite de problèmes de Cauchy (P'_n) :

$$(P'_n) \qquad \begin{cases} i\psi^n_t + \Delta\psi^n = \psi^n f(\varphi^{n-1}) \\ i\varphi^n_t + \Delta\varphi^n = G(\psi^{n-1}, \varphi^{n-1}) \\ \psi^n(0) = \psi_0(0), \ \varphi^n(0) = \varphi_0(0). \end{cases}$$

Et l'on passe à la limite forte dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ en utilisant la conservation de la charge de ψ^n et les estimations $L^2 - L^2$ et $L^{4/3} - L^4$ de $S(t)$. Il suffit de remarquer que les propriétés de $R(t)$ et $S(t)$ utilisées dans la preuve du théorème 1 sont semblables, à savoir que ces propagateurs appartiennent à :

$$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_t, \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^3))) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}_t, \mathscr{L}(L^{4/3}(\mathbb{R}^3), L^4(\mathbb{R}^3))).$$

Preuve du théorème 3. — *Unicité.* — Soient (ψ, φ) et $(\tilde\psi, \tilde\varphi)$ deux solutions de (S-KG)-(Y) de mêmes données initiales ; on pose : $\Psi = \psi - \tilde\psi$ et $\Phi = \varphi - \tilde\varphi$. Ψ et Φ vérifient :

$$(14) \qquad \begin{cases} i\Psi_t + \Delta\Psi = g\Psi\varphi + g\tilde\psi\Phi \\ \Phi_{tt} - \Delta\Phi + m^2\Phi = -g(|\psi|^2 - |\tilde\psi|^2) \\ \Psi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \\ \Phi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)), \ \Phi_t \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3)). \end{cases}$$

On note $\langle \ \ \rangle$ le crochet de dualité $H^{-1}(\mathbb{R}^3) - H^1(\mathbb{R}^3)$. On applique alors les deux membres de (14) considérés comme élément de $H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ à $\overline{\Psi}$:

$$i \langle \Psi, \overline{\Psi} \rangle + \langle \Delta\Psi, \overline{\Psi} \rangle = g \langle \Psi\varphi, \overline{\Psi} \rangle + g \langle \tilde\psi\Phi, \overline{\Psi} \rangle.$$

Sachant que φ est à valeur réelle, il vient :

$$\frac{d}{dt} |\Psi|_2^2 = 2g \operatorname{Im} \langle \tilde\psi\Phi, \overline{\Psi} \rangle$$

d'où

$$|\Psi(t)|_2^2 \leqslant C \int_0^t |\Psi(s)|_2 \, |\tilde\psi(s)|_4 \, |\Phi(s)|_4 ds.$$

On majore $|\psi|_4$ et $|\tilde{\psi}|_4$ sur $[0, T]$ et on obtient :

$$\sup_{[0,t]} |\Psi|_2^2 \leqslant C \int_0^t \sup_{[0,s]} |\Psi|_2 \sup_{[0,s]} |\Phi|_4 ds . \tag{15}$$

On remarque que Φ est aussi solution de l'équation intégrale

$$\Phi(s) = \int_0^s R(s-\sigma)(-g|\psi(\sigma)|^2 + g|\tilde{\psi}(\sigma)|^2) d\sigma .$$

On applique les estimations (1) :

$$|\Phi(s)|_4 \leqslant C \int_0^s |s-\sigma|^{-\frac{1}{2}} |\Psi(\sigma)|_2 d\sigma \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant T$$

$$\sup_{[0,s]} |\Phi|_4 \leqslant cs^{\frac{1}{2}} \sup_{[0,s]} |\Psi|_2 \leqslant C' \sup_{[0,s]} |\Psi|_2 . \tag{16}$$

Par (15) (16) on a alors :

$$\sup_{[0,t]} |\Psi|_2^2 \leqslant C \int_0^t \sup_{[0,s]} |\Psi|_2^2 ds .$$

On en conclut par le lemme de Gronwall que $\Psi = 0$ ainsi que Φ ce qui achève la preuve de l'unicité.

Existence. — L'existence de la solution de (S-KG) avec interaction de Yukawa dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ est un corollaire du théorème 1. Comme $|\psi|^2$ est dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$, φ appartient à $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$. Il reste à montrer que ψ est dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$ est que l'énergie est conservée. Pour cela, on choisit $\psi_{0,n}$ et $\varphi_{0,n}$ deux suites dans $H^2(\mathbb{R}^3)$ convergeant vers ψ_0 et φ_0 dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ et $\varphi_{1,n}$ une suite dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ convergeant vers φ_1 dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. On résout la suite de problèmes de Cauchy :

$$i\psi_t^n + \Delta\psi^n = g\psi^n \, . \, \varphi^{n-1} , \tag{17}$$

$$\varphi_{tt}^n - \Delta\varphi^n + m^2\varphi^n = -g|\psi^{n-1}|^2 , \tag{18}$$

$$\psi^n(0) = \psi_{0,n}, \ \varphi^n(0) = \varphi_{0,n}, \ \varphi_t^n(0) = \varphi_{1,n} .$$

Comme dans la preuve du théorème 1, on résout ces problèmes par récurrence avec $\psi^n \in C^0(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^3))$, $\varphi^n \in C^0(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$ et à l'aide de la conservation de charge de ψ^n et des estimations (1) on voit que ψ^n et φ^n convergent vers ψ et φ dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. D'autre part, en multipliant (17) par $\overline{\psi_t^n}$ et en intégrant par rapport à x on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(|\nabla\psi^n(t)|_2^2 + g\int |\psi^n(t)|^2 \varphi^{n-1}(t) dx \right) = g\int |\psi^n(t)|^2 \varphi_t^{n-1}(t) dx . \tag{19}$$

Comme ψ^n est bornée dans $C^0(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}^3))$, φ^n est bornée dans

$C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$ si bien que de (19) on déduit que ψ^n est bornée dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$. Or ψ^n converge dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$ donc ψ^n est équicontinue dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)$-$*$-faible). On en conclut avec le théorème d'Ascoli que ψ^n converge vers ψ dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)$-$*$-faible).

D'autre part, en multipliant (18) par φ_t^n, en intégrant par rapport à x et en intégrant de 0 à t la somme du résultat obtenu et (19), il vient :

$$
\begin{aligned}
&|\nabla\psi^n(t)|_2^2 + \frac{1}{2}(|\nabla\varphi^n(t)|_2^2 + m^2|\varphi^n(t)|_2^2 + |\varphi_t^n(t)|_2^2) + g\int |\psi^n(t)|^2\varphi^{n-1}(t)dx \\
&\quad = |\nabla\psi^n(0)|_2^2 + \frac{1}{2}(|\nabla\varphi^n(0)|_2^2 + m^2|\varphi^n(0)|_2^2 + |\varphi_t^n(0)|_2^2) + g\int |\psi^n(0)|^2\varphi^{n-1}(0)dx \\
&\quad + g\int_0^t\int (|\psi^n(s,x)|^2\varphi_t^{n-1}(s,x) - |\psi^{n-1}(s,x)|^2\varphi_t^n(s,x))dsdx .
\end{aligned}
$$

Comme ψ^n, φ^n, φ_t^n convergent respectivement vers ψ, φ, φ_t dans $C^0(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}^3))$, $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$, $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$ on en déduit que :

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} |\nabla\psi^n(t)|_2^2 + \frac{1}{2}(|\nabla\varphi(t)|_2^2 + m^2|\varphi(t)|_2^2 + |\varphi_t(t)|_2^2) + g\int |\psi(t)|^2\varphi(t)dx \\
&\qquad = |\nabla\psi_0|_2^2 + \frac{1}{2}(|\nabla\varphi_0|_2^2 + m^2|\varphi_0|_2^2 + |\varphi_1|_2^2) + g\int |\psi_0|^2\varphi_0 dx .
\end{aligned}
$$

Comme ψ^n tend vers ψ dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)$-$*$-faible) on a alors :

$$
E(t) = |\nabla\psi(t)|_2^2 + \frac{1}{2}(|\nabla\varphi(t)|_2^2 + m^2|\varphi(t)|_2^2 + |\varphi_t(t)|_2^2) + g\int |\psi(t)|^2\varphi(t)dx \leqslant E(0).
$$

En remarquant que $(\overline{\psi}(t_0 - t), \varphi(t_0 - t))$ est aussi solution, on obtient l'inégalité inverse si bien que $E(t_0) = E(0)$. On en déduit que $|\nabla\psi^n(t)|_2$ tend vers $|\nabla\psi(t)|_2$ et donc que $\psi^n(t)$ converge vers $\psi(t)$ dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. D'autre part, la relation (19) montre que les applications $t \to |\nabla\psi^n(t)|_2$ sont équicontinues. Or, on a :

$$
|\nabla\psi^n(t) - \nabla\psi^n(s)|_2^2 = |\nabla\psi^n(t)|_2^2 - |\nabla\psi^n(s)|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}\int (\nabla\psi^n(s) - \nabla\psi^n(t))\overline{\nabla\psi^n}(s)dx .
$$

La suite ψ^n est donc équicontinue dans $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$. On en conclut par le théorème d'Ascoli que ψ^n tend vers ψ dans cet espace. c. q. f. d.

II. PROBLÈME DE CAUCHY LOCAL POUR (D-KG)

Nous énonçons le résultat de cette partie.

THÉORÈME 4. — *Soient* ψ_0 *dans* $(H^1(\mathbb{R}^3))^4$, φ_0 *dans* $H^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ *et* φ_1 *dans* $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. *On suppose que l'interaction* (F, G) *satisfait l'hypothèse* (3). *Alors* *il existe* $T > 0$ *tel que le système* (D-KG) *admette une unique solution* (ψ, φ) *vérifiant :*

$$(20) \qquad \begin{cases} \psi \in L^\infty(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4), \\ \varphi \in L^\infty(0, T ; H^{3/2}(\mathbb{R}^3)), \\ \varphi_t \in L^\infty(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)), \end{cases}$$

$$(21) \qquad \psi(0) = \psi_0, \ \varphi(0) = \varphi_0, \ \varphi_t(0) = \varphi_1 .$$

De plus, ψ *et* φ *vérifient :*

$$(22) \qquad \begin{cases} \psi \in C^0(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4), \\ \varphi \in C^0(0, T ; H^{3/2}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)). \end{cases}$$

Remarque 2. — Comme dans le cas du système (S-KG)-(Y) on remarque que $F(\psi, \varphi)$ est dans $(H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^3))^4$ ce qui semble en contradiction avec le fait que ψ soit dans $(H^1(\mathbb{R}^3))^4$. Le paradoxe sera levé en notant que $F(\psi, \varphi)$ est linéaire en ψ.

Démonstration. — Dans ce qui suit, $|\cdot|_p$ désignera par abus de notation, la norme dans $L^p(\mathbb{R}^3)$ ou dans $(L^p(\mathbb{R}^3))^4$ suivant le contexte ; même convention avec les normes $\|.\|_{H^s}$ dans les espaces de Sobolev. On utilisera fréquemment le lemme de produit dans les espaces de Sobolev : si $u_i \in H^{s_i}(\mathbb{R}^n)$ avec $s_1 + s_2 \geqslant 0$, alors $u_1 u_2 \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ où $\sigma = s_1 \wedge s_2 \wedge \left(s_1 + s_2 - \frac{n}{2} - \varepsilon\right)$, $\varepsilon > 0$; si $s_1 + s_2 > 0$ et $s_i \neq \frac{n}{2}$ alors $\sigma = s_1 \wedge s_2 \wedge \left(s_1 + s_2 - \frac{n}{2}\right)$.

Unicité. — Soient (ψ, φ) et $(\tilde{\psi}, \tilde{\varphi})$ deux solutions de (D-KG) satisfaisant (20) (21). On pose $\Psi = \psi - \tilde{\psi}$ et $\Phi = \varphi - \tilde{\varphi}$. Ψ et Φ vérifient :

$$(23) \qquad (-i\gamma^\mu \partial_\mu + M)\Psi = f(\varphi)\Psi + (f(\varphi) - f(\tilde{\varphi}))\tilde{\psi},$$

$$(24) \qquad \Phi_{tt} - \Delta\Phi + m^2\Phi = G(\psi, \varphi) - G(\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}),$$

$$\Psi(0) = 0 ; \Phi(0) = 0 ; \Phi_t(0) = 0 .$$

On écrit le système linéaire de Dirac sous la forme :

$$(25) \qquad \frac{\partial}{\partial t} I + iD_0$$

où I est la matrice unité 4×4 et D_0 un opérateur autoadjoint sur $(L^2(\mathbb{R}^3))^4$ de domaine $(H^1(\mathbb{R}^3))^4$. L'équation (23) devient alors :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + i(D_0 + f(\varphi)\gamma^0)\Psi = i(f(\varphi) - f(\tilde{\varphi}))\gamma^0\tilde{\psi}$$

où γ^0 est une matrice 4×4 hermitienne unitaire. Puisque φ et $\tilde{\varphi}$ sont dans $L^\infty(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3))$ et que f est C^1 de dérivées L^∞, $f(\varphi)$ et $f(\tilde{\varphi})$ sont dans $L^\infty(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3))$ si bien que Ψ_t appartient à $L^\infty(0, T ; (H^{-1}(\mathbb{R}^3))^4)$. Sachant que Ψ est dans $L^\infty(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4)$ et en notant $\langle\ \ \rangle$ le crochet de dualité $(H^{-1}(\mathbb{R}^3))^4 - (H^1(\mathbb{R}^3))^4$ on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \overline{\Psi} \right\rangle + i\langle D_0 + f(\varphi)\gamma^0)\Psi, \overline{\Psi} \rangle = i\langle (f(\varphi) - f(\tilde{\varphi}))\gamma^0\tilde{\psi}, \overline{\Psi} \rangle$$

d'où

$$2 \operatorname{Re}\left\langle \frac{\partial\Psi}{\partial t}, \overline{\Psi} \right\rangle = 2i \operatorname{Im}\langle (f(\varphi) - f(\tilde{\varphi}))\gamma^0\tilde{\psi}, \overline{\Psi} \rangle$$

et donc

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)|_2^2 \leqslant |f(\varphi) - f(\tilde{\varphi})|_4 |\tilde{\psi}|_4 |\Psi|_2$$

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)|_2^2 \leqslant C|\Phi|_4|\Psi|_2|\tilde{\psi}|_4 .$$

En majorant $|\tilde{\psi}|_4$ sur $[0, T]$ on obtient pour $0 \leqslant t \leqslant T$

$$|\Psi(t)|_2^2 \leqslant C\int_0^t |\Psi(s)|_2 |\Phi(s)|_4 ds ,$$

(26)
$$\sup_{[0,t]} |\Psi|_2^2 \leqslant C\int_0^t \sup_{[0,s]} |\Psi|_2 \sup_{[0,s]} |\Phi|_4 ds .$$

Or Φ est aussi solution de l'équation intégrale

$$\Phi(s) = \int_0^s R(s-\sigma)(G(\psi(\sigma), \varphi(\sigma)) - G(\tilde{\psi}(\sigma), \tilde{\varphi}(\sigma)))d\sigma .$$

On applique l'estimation (1) et on majore les normes L^2 et L^4 de ψ, $\tilde{\psi}$, φ, $\tilde{\varphi}$ sur $[0, T]$:

$$|\Phi(s)|_4 \leqslant C\int_0^s |s-\sigma|^{-\frac{1}{2}}(|\Psi(\sigma)|_2 + |\Phi(\sigma)|_4)d\sigma \,;\, 0 \leqslant s \leqslant T$$

$$\sup_{[0,s]} |\Phi|_4 \leqslant Cs^{\frac{1}{2}} \sup_{[0,s]} |\Psi|_2 + C\int_0^s |s-\sigma|^{-\frac{1}{2}} \sup_{[0,\sigma]} |\Phi|_4 d\sigma .$$

Le lemme de Gronwall donne alors :

$$\sup_{[0,s]} |\Phi|_4 \leqslant Cs^{\frac{1}{2}} \sup_{[0,s]} |\Psi|_2 + C^2\int_0^s \sigma^{\frac{1}{2}}|s-\sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{2|s-\sigma|^{\frac{1}{2}}} \sup_{[0,\sigma]} |\Psi|_2 d\sigma .$$

Donc, pour $s \in [0, T]$ on a

(27)
$$\sup_{[0,s]} |\Phi|_4 \leqslant C' \sup_{[0,s]} |\Psi|_2 .$$

De (26) et (27) on tire que pour $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\sup_{[0,t]} |\Psi|_2^2 \leqslant C \int_0^t \sup_{[0,s]} |\Psi|^2 ds .$$

On conclut par le lemme de Gronwall que $\Psi = 0$ sur $[0, T]$ ainsi que Φ ce qui achève de démontrer l'unicité.

Existence. — Comme dans les preuves des théorèmes précédents, on va résoudre (D-KG) en utilisant le fait que $F(\psi, \varphi)$ est linéaire en ψ. Pour cela, on résout successivement la suite de problèmes de Cauchy suivante :

$$(28) \quad \begin{cases} \dfrac{d\psi^n}{dt} + i(D_0 + f(\varphi^{n-1})\gamma^0)\psi^n = 0 \\ \varphi^n_{tt} - \Delta\varphi^n + m^2\varphi^n = G(\psi^{n-1}, \varphi^{n-1}) \\ \psi^n(0) = \psi_0,\ \varphi^n(0) = \varphi_0,\ \varphi^n_t(0) = \varphi_1 \\ \psi^n \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)) \\ \varphi^n \in C^0(\mathbb{R}, H^{3/2}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)) \end{cases} \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

et on pose :

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi^0}{dt} + iD_0\psi^0 = 0 \\ \varphi^0_{tt} - \Delta\varphi^0 + m^2\varphi^0 = 0 \\ \psi^0(0) = \psi_0,\ \varphi^0(0) = \varphi_0,\ \varphi^0_t(0) = \varphi_1 . \end{cases}$$

Pour montrer l'existence de la solution de (28) on utilise le résultat suivant :

LEMME 3. — *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, s'annulant en 0, de dérivées L^∞. Soit $\varphi \in C^0(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$. Alors pour tout ψ_0 dans $(H^1(\mathbb{R}^3))^4$ il existe une unique application ψ dans $C^0(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4)$ vérifiant :*

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{dt} + i(D_0 + f(\varphi(t))\gamma^0)\psi = 0 \\ \psi(0) = \psi_0 . \end{cases}$$

De plus, si $M_1(T) = \sup_{t\in[0,T]} (\|\varphi(t)\|_{H^1} + \|\varphi_t(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}$ *on a*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|_{H^1} \leqslant C \|\psi_0\|_{H^1}(1 + M_1(T) + e^{cT(1+M_1(T))^3})^2 .$$

Enfin, si φ parcourt un ensemble borné de $C^0(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$, équicontinu en $t = 0$ dans $C^0(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3))$, ψ reste dans un ensemble borné de $C^0(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4$ équicontinu en $t = 0$ dans cet espace.

Preuve du lemme 3. — L'unicité de ψ est évidente en multipliant l'équation (29) par $\overline{\psi}$ et en intégrant : sachant que f est réelle, on obtient la conservation de la charge $|\psi(t)|_2 = |\psi_0|_2$ ce qui assure l'unicité de ψ.

Pour établir l'existence de ψ on utilise la théorie spectrale : on sait que D_0 est autoadjoint sur $(L^2(\mathbb{R}^3))^4$ de domaine $(H^1(\mathbb{R}^3))^4$ et que f étant réelle $f(\varphi(t))\gamma^0$ est un opérateur symétrique. Montrons que $D_0 + f(\varphi(t))\gamma^0$ est autoadjoint. Pour cela, on évalue $|f(\varphi(t))\gamma^0 u|_2$ où u est dans $(H^1(\mathbb{R}^3))^4$:

$$\begin{aligned} |f(\varphi(t))\gamma^0 u|_2 &\leqslant C\,|\varphi(t)u|_2 \\ &\leqslant C\,|\varphi(t)|_4\,|u|_4 \\ &\leqslant C'\,\|\varphi(t)\|_{H^1}\,|u|_2^{\frac{1}{2}}\,|u|_6^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'injection de Sobolev $H_1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ et le fait que $|D_0 u|_2$ est équivalent à $\|u\|_{H^1}$ on obtient :

$$\begin{aligned} |f(\varphi(t))\gamma^0 u|_2 &\leqslant C''\,\|\varphi(t)\|_{H^1}\,|u|_2^{\frac{1}{2}}\,|D_0 u|_2^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 4(C''\,\|\varphi(t)\|_{H^1})^2\,|u|_2 + \frac{1}{4}|D_0 u|_2. \end{aligned}$$

Donc $f(\varphi(t))\gamma^0$ est D_0-borné, de borne strictement inférieure à 1. D'après le théorème de Kato-Rellich, $D_0 + f(\varphi(t))\gamma^0$ est alors autoadjoint de même domaine que D_0. Notons

$$A(t) = i(D_0 + f(\varphi(t))\gamma^0 + i).$$

Pour tout t, $A(t)$ engendre un semi-groupe de contraction, 0 appartient à son ensemble résolvant et $A(t)$ a pour domaine $(H^1(\mathbb{R}^3))^4$. On définit un opérateur $C(t, s)$ par

$$C(t, s) = A(t)A(s)^{-1} - I.$$

Montrons d'une part que pour tout u dans $(L^2(\mathbb{R}^3))^4$, $\dfrac{C(t, x)}{t - s}u$ est localement uniformément continu dans $(L^2(\mathbb{R}^3))^4$ et localement uniformément borné pour $t \neq s$, et, d'autre part, que la limite de $\dfrac{C(t, s)}{t - s}u$ quand t tend vers s existe et qu'elle est localement bornée et continue en s. Le théorème de Kato-Yoshida (voir par exemple [*22*] p. 285) assurera alors l'existence d'un propagateur $U(t, s)$ vérifiant

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}U(t, s)\psi_s + A(t)U(t, s)\psi_s = 0 \\ U(s, s)\psi_s = \psi_s \in (H^1(\mathbb{R}^3))^4 \\ (t \to U(t, s)\psi_s) \in C^0(0, T\,; (H^1(\mathbb{R}^3))^4). \end{gathered}$$

Il suffira alors de poser : $\psi(t) = e^{-t}U(t, 0)\psi_0$.

Nous commençons par montrer que si $V \in C^0(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3))$ est à valeur réelle, alors $(D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}$ est localement borné en t dans $\mathscr{L}((L^2(\mathbb{R}^3))^4, (H^1(\mathbb{R}^3))^4)$. On évalue la norme $\| (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u \|_{H^1}$ en remarquant que la norme du graphe de D_0 est équivalente à la norme de $(H^1(\mathbb{R}^3))^4$:

$$\| (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u \|_{H^1} \leqslant C(| (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2 + | D_0(D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2).$$

On a vu que $D_0 + V(t)\gamma^0$ était autoadjoint si bien que $i(D_0 + V(t)\gamma^0)$ engendre un semi-groupe de contraction. D'après le théorème de Hille-Yoshida, on a l'estimation

$$| (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2 \leqslant | u |_2 . \tag{30}$$

D'autre part on a

$$| D_0(D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2 \leqslant | u |_2 + | (V(t)\gamma^0 + i)(D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2$$

d'où avec (30), on obtient

$$| D_0(D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2 \leqslant 2 | u |_2 + | V(t)\gamma^0(D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2 .$$

On applique l'inégalité de Holder et l'injection de Sobolev

$$\begin{aligned} &| V(t)\gamma^0(D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2 \\ &\qquad \leqslant | V(t) |_6 \, | (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2^{\frac{1}{2}} \, | (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_6^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad \leqslant C \| V(t) \|_{H^1} \, | (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_2^{\frac{1}{2}} \, | (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u |_6^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

En utilisant (30) et le fait que $V \in C^0(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3))$ on en déduit que pour tout compact K de $[0, T[$ il existe $C > 0$ tel que pour $t \in K$

$$\| (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u \|_{H^1} \leqslant C + C \| (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u \|_{H^1}^{\frac{1}{2}} .$$

On en conclut que pour $t \in K$

$$\| (D_0 + V(t)\gamma^0 + i)^{-1}u \|_{H^1} \leqslant \frac{4}{3}(C + 4C^2) \qquad \text{c. q. f. d.} \tag{31}$$

Montrons alors que $\dfrac{C(t, s)}{t - s} u$ est localement uniformément continu et borné pour $t \neq s$. On montre aisément que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{C(t, s)}{t - s} u - \frac{C(t_0, s_0)}{t_0 - s_0} u \right|_2 \\ &\qquad \leqslant \left| \left(\frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(s))}{t - s} - \frac{f(\varphi(t_0)) - f(\varphi(s_0))}{t_0 - s_0} \right) \gamma^0 A(s)^{-1} u \right|_2 \\ &\qquad + \left| \left(\frac{f(\varphi(t_0)) - f(\varphi(s_0))}{t_0 - s_0} \right) \gamma^0 A(s)^{-1} (f(\varphi(s)) - f(\varphi(s_0))) \gamma^0 A(s_0)^{-1} u \right|_2 . \end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent et l'injection de $H^1(\mathbb{R}^3)$ dans $L^6(\mathbb{R}^3)$ on obtient :

$$(32)\quad \left|\frac{C(t,s)}{t-s}u - \frac{C(t_0,s_0)}{t_0-s_0}u\right|_2 \leqslant C(s)\left|\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(s))}{t-s} - \frac{f(\varphi(t_0))-f(\varphi(s_0))}{t_0-s_0}\right|_3 |u|_2 + C(s)\left|\frac{f(\varphi(t_0))-f(\varphi(s_0))}{t_0-s_0}\right|_3 |f(\varphi(s))-f(\varphi(s_0))|_3 |u|_2,$$

où $C(s)$ est localement bornée par rapport à s. D'autre part, f étant uniformément lipschitzienne, il vient :

$$\left|\frac{C(t,s)}{t-s}u - \frac{C(t_0,s_0)}{t_0-s_0}u\right|_2 \leqslant C(s)|u|_2\left(\frac{1}{|t_0-s_0|}|\varphi(t)-\varphi(t_0)|_3 + \frac{1}{|t_0-s_0|}|\varphi(s)-\varphi(s_0)|_3 + \left|\frac{1}{t-s}-\frac{1}{t_0-s_0}\right||\varphi(t)-\varphi(s)|_3 + \left|\frac{\varphi(t_0)-\varphi(s_0)}{t_0-s_0}\right|_3 |\varphi(s)-\varphi(s_0)|_3\right).$$

φ étant $C^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ et sachant que $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3)$ on en déduit que pour $s \neq t$ $\frac{C(t,s)}{t-s}u$ est continu localement uniformément.

Montrons à présent que $\frac{C(t,s)}{t-s}u$ admet une limite quand $t \to s$ et que cette limite est continue. Nous supposons que φ est à valeur réelle, les modifications dans le cas complexe sont évidentes. On évalue donc

$$\begin{aligned}\delta_{t,s} &= \left|\frac{C(t,s)}{t-s}u - if'(\varphi(s))\varphi'(s)\gamma^0A^{-1}(s)u\right|_2 \\ &= \left|\left(\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(s))}{t-s} - f'(\varphi(s))\varphi'(s)\right)\gamma^0A(s)^{-1}u\right|_2 \\ &\leqslant \left|\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(s))}{t-s} - f'(\varphi(s))\varphi'(s)\right|_3 |A(s)^{-1}u|_6 .\end{aligned}$$

D'une part, d'après (31)

$$|A(s)^{-1}u|_6 \leqslant C(s)|u|_2 ;$$

on applique d'autre part la formule des accroissements finis :

$$f(\varphi(t,x))-f(\varphi(s,x))=(\varphi(t,x)-\varphi(s,x))f'(\varphi(s,x)+\theta(t;s,x)(\varphi(t,x)-\varphi(s,x)))$$

où $|\theta|<1$. Sachant que f' est bornée, on obtient

$$\delta_{t,s} \leqslant C(s)\left(\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}-\varphi'(s)\right|_3 |f'|_\infty \right.$$
$$\left. + |\varphi'(s)(f'(\varphi(s)+\theta(t)(\varphi(t)-\varphi(s)))-f'(\varphi(s)))|_3\right).$$

L'application $\chi(t)=\varphi(s)+\theta(t)(\varphi(t)-\varphi(s))$ est continue à valeur $L^2(\mathbb{R}^3)$ au point $t=s$. Le lemme 2 montre alors que le second terme du membre de droite tend vers 0 quand t tend vers s ; il en va de même pour le premier terme puisque φ appartient à $C^1(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))$. Ainsi, on obtient que

$$\lim_{t\to s}\frac{C(t,s)}{t-s}u = if'(\varphi(s))\varphi'(s)\gamma^0 A(s)^{-1}u \tag{33}$$

$$f(\varphi(s))\in C^1(0,T;L^3(\mathbb{R}^3)). \tag{34}$$

En faisant tendre t_0 vers s_0 et t vers s dans (32) on voit alors que $\lim_{t\to s}\frac{C(t,s)}{t-s}u$ est continu par rapport à s ce qui achève de prouver l'existence de ψ.

Nous aurons besoin d'estimer : $\left|\frac{C(t,s)}{t-s}u\right|_2$;

$$\left|\frac{C(t,s)}{t-s}u\right|_2 = \left|\left(\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(s))}{t-s}\right)\gamma^0 A(s)^{-1}u\right|_2$$
$$\leqslant C\left|\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\right)\gamma^0 A(s)^{-1}u\right|_2$$
$$\leqslant C \sup_{t\in[0,T]}\|\varphi_t(t)\|_{H^{\frac12}}\|A(s)^{-1}u\|_{H^1}.$$

Or, d'après (31)

$$\|A(s)^{-1}u\|_{H^1}\leqslant C\cdot|u|_2(1+\sup_{t\in[0,T]}\|\varphi(t)\|_{H^1}^2)$$

où $C>0$ ne dépend que de f. On en déduit que

$$M_2(T)=\sup_{t\neq s\in[0,T]}\left|\frac{C(t,s)}{t-s}u\right|_2 \leqslant CM_1(1+M_1^2)|u|_2 \tag{35}$$

où $$M_1(T)=\sup_{t\in[0,T]}(\|\varphi(t)\|_{H^1}+\|\varphi_t(t)\|_{H^{\frac12}}).$$

Pour estimer $\sup_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|_{H^1}$ on commence par remarquer que f étant réelle, la charge de ψ est conservée :

$$|\psi(t)|_2=|\psi_0|_2.$$

Il suffit donc d'estimer $|D_0U(t, 0)\psi_0|_2$:

$|D_0U(t, 0)\psi_0|_2 \leqslant |A(t)U(t, 0)\psi_0|_2 + |f(\varphi(t))\gamma^0U(t, 0)\psi_0|_2 + |U(t, 0)\psi_0|_2$.

D'une part $A(t)U(t, 0) = W(t)A(0)$ où $W(t)$ est un propagateur sur $(L^2(\mathbb{R}^3))^4$ vérifiant (voir [*22*], p. 287) :

$$|W(t)u|_2 \leqslant e^{tM_2(t)}|u|_2 \leqslant e^{ct(1+M_1(t))^3}|u|_2 . \tag{36}$$

D'autre part, on a :

$$|f(\varphi(t))\gamma^0U(t, 0)\psi_0|_2 \leqslant C\|\varphi(t)\|_{H^1}\|U(t, 0)\psi_0\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}|\psi_0|_2^{\frac{1}{2}} . \tag{37}$$

On en déduit que

$$\|\psi(t)\|_{H^1} \leqslant C\|\psi_0\|_{H^1}(e^{Ct(1+M_1(t))^3} + 1) + CM_1\|\psi(t)\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}|\psi_0|_2^{\frac{1}{2}}$$

finalement, on obtient que

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|_{H^1} \leqslant C\|\psi_0\|_{H^1}(1 + M_1^2(T) + e^{cT(1+M_1(T))^3}) . \tag{38}$$

Il reste à évaluer $\|\psi(t) - \psi_0\|_{H^1}$. Tout d'abord on a

$$|\psi(t) - \psi(0)|_2 \leqslant C\int_0^t \|\psi(s)\|_{H^1} + |f(\varphi(s))\psi(s)|_2 ds$$

$$|\psi(t) - \psi_0|_2 \leqslant C\|\psi_0\|_{H^1}t(1 + M_1(t) + e^{ct(1+M_1(t))^3})^2 . \tag{39}$$

D'autre part, on estime $|D_0(\psi(t) - \psi_0)|_2$:

$$\begin{aligned}|D_0\psi(t) - D_0\psi_0|_2 \leqslant C(&|A(t)U(t, 0)\psi_0 - A(0)\psi_0|_2 + |(\varphi(t) - \varphi(0))\psi(t)|_2 \\ &+ |(\psi(t) - \psi(0))\varphi(t)|_2 + |\psi(t) - \psi(0)|_2) .\end{aligned}$$

Tout d'abord

$$\begin{aligned}A(t)U(t, 0)\psi_0 - A(0)\psi_0 &= (W(t) - I)A(0)\psi_0 \\ &= (W(t) - U(t, 0))A(0)\psi_0 + (U(t, 0) - I)A(0)\psi_0 .\end{aligned}$$

Or, on a (voir par exemple [*22*], p. 287)

$$|W(t)u - U(t, 0)u|_2 \leqslant (e^{tM_2(t)} - 1)|u|_2, \ t \geqslant 0$$

et, grâce à (39)

$$|(U(t, 0) - I)A(0)\psi_0|_2 \leqslant C\|A(0)\psi_0\|_{H^1}t(1 + M_1(t) + e^{ct(1+M_1(t))^3})^2 .$$

De plus, de (38) et (39), on tire que

$$|(\psi(t) - \psi(0))\varphi(t)|_2 \leqslant CM_1(t)\|\psi_0\|_{H^1}(1 + M_1(t) + e^{ct(1+M_1(t))^3})^3\sqrt{t} .$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}\|\psi(t)-\psi(0)\|_{H^1} \leqslant C(\|\psi_0\|_{H^1} + \|A(0)\psi_0\|_{H^1})(1+M_1(t)+e^{ct(1+M_1(t))^3})^4 \\ (e^{ct(1+M_1(t))^3} - 1 + t\sqrt{t} + \|\varphi(t)-\varphi(0)\|_{H^1}).\end{aligned} \tag{40}$$

Comme *a priori* $A(0)\psi_0$ n'est pas dans $(H^1(\mathbb{R}^3))^4$ on régularise la donnée initiale en choisissant pour tout $\varepsilon > 0$, ψ_ε dans $(H^2(\mathbb{R}^3))^4$ tel que $\| \psi_\varepsilon - \psi_0 \|_{H^1} < \varepsilon$. De (38) et (40) on en déduit que

$$\| \psi(t) - \psi(0) \| \leqslant C(\| \psi_0 \|_{H^1} + \| \psi_\varepsilon \|_{H^2})(1 + M_1(t) + e^{ct(1+M_1(t))^3})^5$$
$$(e^{ct(1+M_1(t))3} - 1 + t + \sqrt{t} + \| \varphi(t) - \varphi(0) \|_{H^1} + c\varepsilon(1 + M_1^2(t) + e^{ct(1+M_1(t))^3}).$$

Ceci montre que quand φ parcourt un borné de

$$C^0(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$$

équicontinu en $t = 0$ dans $C^0(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3))$, ψ reste dans un borné de $C^0(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4)$ équicontinu en 0, ce qui achève de prouver le lemme.

A présent si ψ^{n-1} et φ^{n-1} sont solutions de (28), le lemme 3 assure l'existence de ψ^n ; de plus, le lemme de produit dans les espaces de Sobolev assure que $G(\psi^{n-1}, \varphi^{n-1})$ appartient à $C^0(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ ce qui assure que φ^n est dans $C^0(0, T ; H^{3/2}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$. Nous allons montrer que ψ^n est bornée dans $C^0(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4)$ et φ^n est bornée dans $C^0(0, T ; H^{3/2}(\mathbb{R}^3) \cap C^1(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ pourvu que T soit assez petit. On note

$$M_n(t) = \sup_{\substack{s \in [0,t] \\ 0 \leqslant k \leqslant n}} \| \psi^k(s) \|_{H^1},$$
$$M_{1,n}(t) = \sup_{\substack{s \in [0,t] \\ 0 \leqslant k \leqslant n}} \left(\| \varphi^k(s) \|_{H^{3/2}} + \| \varphi_t^k(s) \|_{H^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Par (38) on a

$$M_n(t) \leqslant C(1 + M_{1,n-1}^2(t) + e^{ct(1+M_{1,n-1}(t))^3}). \tag{41}$$

D'autre part, φ^{n-1} vérifie l'équation intégrale

$$\varphi^{n-1}(t) = \varphi^0(t) + \int_0^t R(t-s)G(\psi^{n-2}(s), \varphi^{n-2}(s))ds$$

d'où

$$M_{1,n-1}(t) \leqslant C + CtM_{n-2}^2(t) + C\int_0^t M_{n-2}(s)M_{1,n-1}(s)ds.$$

Le lemme de Gronwall donne alors

$$M_{1,n-1}(t) \leqslant C(1 + tM_{n-2}^2(t)) \exp(ctM_{n-2}(t)). \tag{42}$$

On déduit de (41) et (42)

$$M_n(t) \leqslant C(1 + (1 + tM_{n-2}^2(t))^2 \exp ctM_{n-2}(t)$$
$$+ \exp\left[ct(1 + (1 + tM_{n-2}^2(t) \exp(ctM_{n-2}(t)))^3\right])$$

où C est une constante > 0 indépendante de n et t. Soit $T_0 > 0$, on pose :

$$R = \mathrm{Max}\,(5C, M_1(T_0), M_0(T_0)).$$

On choisit T assez petit tel que $0 < T \leqslant T_0$ et

$$1 + (1 + TR^2) \exp CTR + \exp [CT(1 + (1 + TR^2) \exp (TR)^3] \leqslant 5 .$$

On en déduit que pour tout n, $M_n(t)$ est majoré par R ce qui montre que la suite ψ^n est bornée dans $C^0(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4$. Par (42) on voit que φ^n est bornée dans $C^0(0, T ; H^{3/2}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ si bien que ψ_t^n est bornée dans $C^0(0, T ; (L^2(\mathbb{R}^3))^4)$ et donc ψ^n est équicontinue dans cet espace. On suppose à présent que les données initiales sont à support compact contenu dans la boule de centre 0 et de rayon ρ, $B(0, \rho)$. Il est clair que pour tout n et pour tout t, le support de $\psi^n(t)$ et $\varphi^n(t)$ est contenu dans la boule $B(0, \rho + |t|)$. Le théorème de Rellich-Kondrasov assure alors que $\psi^n(t)$ reste dans un compact de $(L^2(\mathbb{R}^3))^4$ pour tout n. On en conclut par le théorème d'Ascoli que la suite ψ^n est dans un compact de $C^0(0, T ; (L^2(\mathbb{R}^3))^4)$; un résultat analogue est obtenu pour φ^n et φ_t^n si bien qu'il existe ψ, φ et une sous-suite n_k tels que :

(43) $\psi^{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \psi$ dans $L^\infty(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4$-$*$-faible et dans $C^0(0, T ; (L^2(\mathbb{R}^3))^4)$,

(44) $\varphi^{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \varphi$ dans $L^\infty(0, T ; H^{3/2}(\mathbb{R}^3))$-$*$-faible et dans $C^0(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$,

(45) $\varphi_t^{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \varphi_t$ dans $L^\infty(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$-$*$-faible et dans $C^0(0, T ; H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$.

Pour montrer que (ψ, φ) est solution de (D – KG) et (20) (21), il suffit de montrer que ψ et φ sont respectivement valeurs d'adhérence des suites $\psi^{n_k - 1}$ et $\varphi^{n_k - 1}$ dans $C^0(0, T ; (L^2(\mathbb{R}^3))^4$ et $C^0(0, T ; L^4(\mathbb{R}^3))$.

Comme dans la démonstration de l'unicité de la solution de (D – KG) on obtient :

$$|\psi^n(t) - \psi^{n-1}(t)|_2^2 \leqslant C \int_0^t |\psi^n(s) - \psi^{n-1}(s)|_2 \, |\varphi^{n-1}(s) - \varphi^{n-2}(s)|_4 ds$$

et

$$\sup_{s \in [0,t]} |\varphi^{n-1}(s) - \varphi^{n-2}(s)|_4 \leqslant C \sup_{s \in [0,t]} |\psi^{n-2}(s) - \psi^{n-3}(s)|_2 , \tag{46}$$

d'où

$$\sup_{t \in [0,T]} |\psi^n(t) - \psi^{n-1}(t)|_2^2 \leqslant C \int_0^T \sup_{s \in [0,t]} |\psi^n(s) - \psi^{n-1}(s)|_2 \sup_{s \in [0,t]} |\psi^{n-2}(s) - \psi^{n-1}(s)|_2 dt .$$

En prenant la limite supérieure et en appliquant le lemme de Fatou et le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\psi^n - \psi^{n-1} \to 0 \quad \text{dans } C^0(0, T ; (L^2(\mathbb{R}^3))^4), \quad n \to \infty , \tag{47}$$

et avec (46)

$$\varphi^n - \varphi^{n-1} \to 0 \quad \text{dans } C^0(0, T ; L^4(\mathbb{R}^3)), \quad n \to \infty . \tag{48}$$

De (43) (44) (47) (48) on déduit alors que :

$$\psi^{n_k-1} \to \psi \quad \text{dans } C^0(0, T ; (L^2(\mathbb{R}^3))^4, \quad k \to \infty$$

et

$$\varphi^{n_k-1} \to \varphi \quad \text{dans } C^0(0, T ; L^4(\mathbb{R}^3)), \quad k \to \infty,$$

si bien que $\psi^{n_k} f(\varphi^{n_k-1})$ et $G(\psi^{n_k-1}, \varphi^{n_k-1})$ tendent vers $\psi f(\varphi)$ et $G(\psi, \varphi)$ dans $\mathscr{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$; (ψ, φ) est donc solution de (D-KG) et en fait à cause de l'unicité c'est toute la suite (ψ^n, φ^n) qui converge vers (ψ, φ). De plus, on remarque d'une part que le support que $\psi(t)$ et $\varphi(t)$ est contenu dans la boule $B(0, \rho+t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$ et, d'autre part, que T ne dépend que des normes des données initiales et non de leur support. On en déduit par troncature que dans le cas général où les données initiales ne sont pas nécessairement à support compact, la suite (ψ^n, φ^n) converge vers la solution (ψ, φ) de (D-KG) :

$$\psi^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi \text{ dans } L^\infty(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4)\text{-}*\text{-faible et dans } C^0(0, T ; (L^2_{loc}(\mathbb{R}^3))^4),$$

$$\varphi^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \text{ dans } L^\infty(0, T ; H^{3/2}(\mathbb{R}^3))\text{-}*\text{-faible et dans } C^0(0, T ; H^{\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)),$$

$$\varphi^n_t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_t \text{ dans } L^\infty(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))\text{-}*\text{-faible et dans } C^0(0, T ; H^{-\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)).$$

Ceci achève la preuve de l'existence de la solution de (D-KG). Il reste à montrer que ψ est dans $C^0(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4$ et φ dans $C^0(0, T ; H^{3/2}(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$. Grâce au théorème d'existence et d'unicité locales que l'on vient d'établir, il suffit de démontrer la continuité en $t = 0$. Pour cela, il suffit de montrer l'équicontinuité en $t = 0$ de ψ^n dans $C^0(0, T ; (H^1(\mathbb{R}^3))^4)$, φ^n dans $C^0(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3))$, φ^n_t dans $C^0(0, T ; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$. En fait, grâce à la dernière partie du lemme 3, il est suffisant d'établir seulement l'équicontinuité en $t = 0$ de φ^n et φ^n_t. Or, on a :

$$\| \varphi^n(t) - \varphi^n(0) \|_{H^{3/2}} + \| \varphi^n_t(t) - \varphi^n_t(0) \|_{H^{\frac{1}{2}}} \leqslant C \int_0^t \| G(\psi^{n-1}(s), \varphi^{n-1}(s)) \|_{H^{\frac{1}{2}}} ds$$

et

$$\| G(\psi^{n-1}(s), \varphi^{n-1}(s) \|_{H^{\frac{1}{2}}} \leqslant C(\| \psi^{n-1}(s) \|^2_{H^1} + \| \psi^{n-1}(s) \|_{H^1} \| \varphi^{n-1}(s) \|_{H^1}).$$

Sachant que ψ^n est bornée dans $C^0(0, T ; H^1(\mathbb{R}^3))^4)$ et φ^n est bornée dans $C^0(0, T ; H^{3/2}(\mathbb{R}^3))$ on obtient le résultat voulu, ce qui achève la preuve du théorème 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BACHELOT, Problème de Cauchy pour des systèmes de Klein-Gordon-Schroedinger. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **296**, 1983, p. 525-528.

[2] J. B. BAILLON et J. M. CHADAM, *The Cauchy problem for the coupled Schroedinger-Klein-Gordon equations ; in Contemporary Developments in Continuum Mechanics*

and Partial differential equations, G. M. de la Penha, L. A. Medeiros (Eds), North-Holland Publishing Company, 1978.

[3] M. BALABANE, H. EMANI-RAD, *Pseudodifferential parabolic systems in* $L^p(\mathbb{R}^n)$; *in* « *Contributions to nonlinear partial differential equations* », C. Bardos, A. Damlamian, J. I. Diaz, J. Hernandez (Eds), Research Notes in Maths 89, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1983.

[4] Ph. BRENNER, The Cauchy problem for systems in L_p and $L_{p,\alpha}$, *Ark. Mat.*, t. **11**, 1973, p. 75-101.

[5] Ph. BRENNER, V. THOMEE, L. B. WAHLBIN, Besov spaces and applications to difference methods for initial value problems, *Lecture Notes in Math.*, t. **434**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1975.

[6] J. CHADAM, Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell-Dirac equations in one space dimension ; *J. Func. Anal.*, t. **13**, 1973, p. 173-184.

[7] J. CHADAM, Asymptotic behaviour of equations arising in quantum field theory ; *J. Applic. Anal.*, t. **3**, 1973, p. 377-402.

[8] J. CHADAM, R. GLASSEY, On the Maxwell-Dirac equations with zero magnetic field and their solutions in two space dimensions ; *J. Math. Anal. and Appl.*, t. **53**, 1976, p. 495-507.

[9] J. CHADAM, R. GLASSEY, On certain global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Klein-Gordon-Dirac equations in one and three space dimensions ; *Arch. Rat. Mech. Anal.*, t. **54**, 1974, p. 223-237.

[10] Y. CHOQUET-BRUHAT, Solutions globales des équations de Maxwell-Dirac-Klein-Gordon (masses nulles) ; *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **292**, 1981, p. 153-158.

[11] G. DA PRATO, E. GIUSTI, Equazioni di Schrödinger e delle onde per l'operatore di Laplace iterato in $L^p(\mathbb{R}^n)$; *Ann. Mat. Pura e Appl.*, t. **76**, 1967, p. 377-397.

[12] I. FUKUDA, M. TSUTSUMI, On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, I, *Bull. Sci. Engeg. Res. Lab. Waseda Univ.*, t. **69**, 1975, p. 51-62.

[13] I. FUKUDA, M. TSUTSUMI, On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, II, *J. Math. Anal. and Applic.*, t. **66**, 1978, p. 358-378.

[14] I. FUKUDA, M. TSUTSUMI, On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, III, *Math. Japonica*, t. **24**, n° 3, 1979, p. 307-321.

[15] L. GROSS, The Cauchy problem for the coupled Maxwell-Dirac equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, t. **19**, 1966, p. 1-15.

[16] E. J. HOLDER, JR, On the existence, scattering, and blow up of solutions to systems of nonlinear Schrödinger equations ; *Indiana Univ. Math. J.*, t. **30**, 1981, p. 653-673.

[17] L. HÖRMANDER, Estimates for translation invariant operators in L^p-spaces ; *Acta Math.*, t. **104**, 1960, p. 93-140.

[18] W. LITTMAN, The wave operator and L^p norms ; *J. Math. Mech.*, t. **12**, 1963, p. 55-68.

[19] B. MARSHALL, W. STRAUSS, S. WAINGER, L^p-$L^{p'}$ estimates for the Klein-Gordon equation ; *J. Math. Pures et Appl.*, t. **59**, 1980, p. 417-440.

[20] J. PERAL, L^p estimates for the wave equation ; *J. Func. Anal.*, t. **36**, 1980, p. 114-145.

[21] M. REED, Abstract nonlinear wave equations ; *Lecture Notes in Math.*, t. **507**, Springer-Verlag, 1976.

[22] M. REED, B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Vol. 2, Fourier analysis, Self adjointness, Academic Press, New York, 1975.

[23] J. SEGAL, Nonlinear semi-groups ; *Ann. Math.*, t. **78**, 1963, p. 339-364.

[24] S. SJÖSTRAND, On the Riesz means of solutions of Schrödinger equation ; *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. **24**, 1970, p. 331-348.

(Manuscrit reçu le 1er mars 1984)