ANALYSE DES PROBLÈMES DE FORME PAR LA DÉRIVATION DES MINIMAX*

M.-C. DELFOUR
Centre de Recherches Mathématiques et Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, Succursale A, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7

J.-P. ZOLÉSIO
Laboratoire de Physique Mathématique, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Pl. Eugène Bataillon, 34060 Montpellier Cedex, France

Texte élaboré à partir de la conférence présentée au Colloque Franco-Québécois sur l'Analyse Non Linéaire Appliquée, Perpignan (France), juin 1987.

Novembre 1987

CRM-1512

RESUME. Le calcul du gradient de forme est un élément central dans l'Analyse de Sensitivité par rapport à la forme. C'est un sujet sur lequel existe une littérature riche en Génie, en Mécanique et en Mathématiques Appliquées. L'objectif de cet article est de présenter un point de vue qui apporte une justification mathématique à de nombreux calculs formels. Il s'agit de l'utilisation de théorèmes sur la dérivabilité d'un MiniMax par rapport à un paramètre.

* Ces travaux ont reçu une aide partielle du Conseil National de Recherche en Sciences Naturelles et Génie du Canada (Subventions A-8730 et) et du Ministère de l'Education du Québec (subvention FCAR EQ-252).

Ce rapport a été publié en partie grâce à une subvention du Fonds FCAR pour l'aide et le soutien à la recherche.

TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION

L'optimisation de forme et de structure est un domaine très vaste sur lequel existe une littérature abondante et riche en Génie, Mécanique et Mathématiques Appliquées. Il serait très difficile d'en faire un compte-rendu complet tout en y retrouvant pleinement l'intuition physique, mécanique ou mathématique sous-jacente. Nous renvoyons plûtot le lecteur aux articles et livres en références à cet article. Notre objectif est de présenter un point de vue particulier à partir de développements tous récents en utilisant des exemples simples. Nous espérons ainsi quelque peu démystifier ce domaine pour les non spécialistes.

La particularité des problèmes de recherche de forme optimale est que la variable par rapport à laquelle on optimise n'est plus un vecteur de points ou de fonctions, mais un domaine. L'état est généralement la solution d'une équation ou d'une inéquation variationnelle définie sur ce dernier. L'Analyse de sensitivité s'intéresse au calcul de la "dérivée directionnelle" d'une fonction coût par rapport à la forme. Plusieurs méthodes existent pour donner un sens à cette notion de dérivée, mais nous choisirons la méthode des champs de vitesses (virtuelles) qui semble offrir à la fois souplesse et précision dans un cadre élégant (cf. J. CEA [2,3], J.P. ZOLESIO [1,2,3]).

Le résultat final des calculs de "gradients de forme" sont formellement semblables à ce qui est disponible en Analyse de sensitivité pour les problèmes de contrôle. Néanmoins, dans bien des cas, aucune justification mathématique n'est disponible sans l'étude détaillée de la dérivée de l'état par rapport à la variation du domaine. Dans cet article, on trouvera la justification à de nombreux calculs ou résultats formels. Pour des exemples plus précis, le lecteur peut consulter le livre de HAUG, CHOI et KOMKOV [1], l'article de DEMS et MROZ [1], le compte-rendu du NATO-ASI à Iowa City par HAUG et CEA [1] et le récent article sur les calculs rapides par J. CEA [1].

L'étude de la dérivée de l'état par rapport à la forme est évitée par l'introduction d'une formulation Lagrangienne du problème où l'équation d'état est considérée comme une contrainte. Dans ce cadre la fonction coût est égale à un MiniMax du Lagrangien par rapport à des espaces fonctionnels. Par des méthodes propres à l'"analyse des formes", le calcul du "gradient de forme" se réduit alors à la dérivée d'un MiniMax par rapport au paramètre $t \geq 0$ qui joue le rôle de "temps virtuel". La justification mathématique est alors obtenue par un théorème de dérivabilité d'un MiniMax par rapport à un paramètre. On donnera deux théorèmes de ce type qui sont directement applicables aux problèmes de forme. L'un ne suppose pas l'existence d'un point selle (cf. DELFOUR et ZOLESIO [1,2,3]) et l'autre le suppose (cf. CORREA et SEEGER [1]).

Cette approche apporte une justification mathématique à la plupart des problèmes classiques où l'état est l'élément minimisant d'une fonctionnelle d'énergie quadratique et le coût est dérivable par rapport à la variable d'état. Elle s'étend aussi à certaines classes de coûts non différentiables et à des situations où l'état est soumis à des contraintes du type égalité. Cette dernière situation se rencontre souvent en mécanique des fluides (cf. A. SOUISSI [1] pour un problème d'optimisation de la forme d'une turbine où l'état est la solution des équations de Stokes qui renferment la contrainte de divergent nul de la vitesse).

Notation. $\mathbb{R}$ est le corps des réels, $\mathbb{R}^+$ les réels positifs ou nul et $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$, un entier) le prod. Cartésien de $\mathbb{R}$ n fois. Le produit scalaire et la norme dans $\mathbb{R}^n$ s'écriront respectivement

$$x \cdot y = \Sigma_{i=1,n}\, x_i\, y_i \qquad |x| = (x \cdot x)^{1/2}.$$

L'application duale d'une application $A : X \to Y$ s'écrira A^* et la matrice identité dans R^n, I_d. La composition de deux applications f et g sera notée $f \circ g$.

2. LA METHODE DES CHAMPS DE VITESSE

Afin de mieux fixer les idées pour le non spécialiste, on illustrera les définitions et la discussion par un exemple canonique aux paragraphes 2, 3 et 4.

2.1. Exemple canonique

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière Γ. Soit $y = y(\Omega)$ la solution du problème de Neumann suivant

$$-\Delta y + y = f \text{ dans } \Omega,\ f \in H^1(\mathbb{R}^n),\ \partial y/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{1}$$

En introduisant la fonctionnelle d'énergie

$$E(\Omega, \varphi) = 1/2 \int_\Omega [|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 - 2 f \varphi]\, dx\,,\ \varphi \in H^1(\Omega), \tag{2}$$

pour f donnée dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, on sait que y est l'élément minimisant de $E(\Omega, \varphi)$ dans $H^1(\Omega)$

$$E(\Omega, y) = \text{Inf}\,\{E(\Omega, \varphi\text{:}\ \ \varphi \in H^1(\Omega)\}. \tag{3}$$

On associe à y la fonction coût

$$J(\Omega) = F(\Omega, y). \tag{4}$$

où la fonctionnelle coût est donnée par

$$F(\Omega, \varphi) = 1/2 \int_\Omega (\varphi - y_d)^2\, dx,\ \ \varphi \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

L'objectif de notre démarche est de donner un sens à la "dérivée de J par rapport à Ω" et d'apporter une justification mathématique précise aux calculs formels ou rapides ne nécessitant pas l'étude et la caractérisation de la "dérivée de l'état par rapport au domaine Ω".

2.2. Perturbation des problèmes et dérivée de forme du coût

On recherche ici l'équivalent d'une dérivée directionnelle pour J en Ω. Cependant il est difficile de donner à l'ensemble des domaines Ω une structure d'espace linéaire topologique. La notion qui semble la plus naturelle est de définir dans un voisinage de Ω et même sur tout $\mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs V et de supposer que le domaine Ω est formé de particules qui évoluent dans ce champ de vecteurs pour un "temps virtuel $t \geq 0$". C'est cette même notion que l'on rencontre en géométrie différentielle lorsque l'on veut définir une dérivée sur une variété.

Soit donc $t \geq 0$ le temps virtuel et $V(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, un **champ de vitesse** de déformation. Sous l'action de V chaque point X de $\mathbb{R}^n$ se déplace en $x(t) \in \mathbb{R}^n$ selon la loi d'évolution

$$dx(t)/dt = V(t, x(t)) \ , \ x(0) = X \ . \tag{6}$$

A l'aide de cette équation on définit la transformation

$$T_t = T_t(V) \ : \ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \ , \ T_t X = x(t) \ , \ t \geq 0 \ . \tag{7}$$

Lorsque V est suffisamment dérivable, la transformation T_t est un difféomorphisme (cf. J.P. ZOLESIO [1]).

Sous l'action du champ de vitesse V le domaine Ω se déforme ou se transforme en un nouveau domaine

$$\Omega_t = T_t \Omega = \{x \ : \ x = T_t X \ , \ X \in \Omega\} \ . \tag{8}$$

Soit y_t la solution du problème paramétrisé

$$E(\Omega_t, y_t) = \operatorname{Inf}\{E(\Omega_t, \varphi) \ : \ \varphi \in H^1(\Omega_t)\} \ . \tag{9}$$

et soit

$$J(\Omega_t) = F(\Omega_t, y_t). (10)$$

la fonction coût paramétrisée. Nous pouvons donc définir la demi-dérivée de forme de J en Ω dans la direction $V(0) = V(0, \bullet)$

$$dJ(\Omega; V(0)) \ = \ \lim_{t \rightarrow 0^+} \ [J(\Omega_t) - J(\Omega)]/t \ . \tag{11}$$

2.3 Dérivée de forme et dérivée particulaire de l'état

Les méthodes habituelles font appel à une notion de **dérivée de l'état**: soit la dérivée de forme (ou partielle) ou soit la dérivée particulaire. La **dérivée de forme** (ou **dérivée partielle**) de l'état y en Ω dans la direction V nécessite l'existence d'un prolongement régulier $Y(t, x)$, $0 \leq t \leq \tau$, $x \in D$, de $y_t(x)$ pour $\tau > 0$ et x dans un voisinage D du domaine Ω. On définit alors

$$Y'(x) \ = \ \lim_{t \rightarrow 0^+} \ [Y(t, x) \ - Y(0, x)]/t \tag{12}$$

On verra plus loin que le passage par un prolongement et la définition précédente font perdre un degré de régularité à Y' par rapport à celle de l'état y.

Ce phénomène provient du fait que l'état y_t au temps $t > 0$ et l'état y au temps $t = 0$ n'appartiennent pas au même espace fonctionnel. Pour contourner cette difficulté il faut ramener l'état y_t de Ω_t en Ω à l'aide du difféomorphisme T_t en définissant **l'état transporté**

$$y^t = y_t \circ T_t \ \text{ dans } \Omega \ . \tag{13}$$

Comme y et y^t se trouvent maintenant dans le même espace on peut définir la **dérivée particulaire** $\dot{y}$ de y en Ω dans la direction V comme

$$\dot{y} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ [y^t - y]/t \tag{14}$$

Dans les exemples classiques Y' et $\dot{y}$ sont solutions de problèmes aux limites. Cependant Y' dépend de l'état y et de la composante normale du champ de vecteur $V(0)$ sur la frontière Γ, tandis que $\dot{y}$ dépend du champ de vitesse dans tout le domaine. En fait les deux notions de dérivée sont liées par la relation

$$Y' = \dot{y} - \nabla y \cdot V(0) \tag{15}$$

ce qui explique que Y' est moins régulière que $\dot{y}$.

On verra au paragraphe suivant les équations de Y' et $\dot{y}$ pour l'exemple canonique et leur utilisation pour calculer la dérivée de forme de $J(\Omega)$.

2.4. Exemple de calcul de $dJ(\Omega; V)$ via la dérivée de l'état

On revient à l'exemple du paragraphe 2.1. La première étape est celle du calcul de la dérivée partielle Y' de l'état y. Comme indiqué au paragraphe 2.2, on paramétrise le problème et considère les fonctionnelles (9) et (10):

$$E(\Omega_t, \varphi) = 1/2 \int_{\Omega_t} \{|\nabla\varphi|^2 + \varphi^2 - 2f\varphi\} \, dx \tag{16}$$

$$F(\Omega_t, \varphi) = 1/2 \int_{\Omega_t} |\varphi - y_d|^2 \, dx . \tag{17}$$

Pour $t \geq 0$, y_t est la solution unique de l'équation variationnelle

$$y_t \in H^1(\Omega_t) \ , \ dE(\Omega_t, y_t; \psi) = 0 \ , \ \forall \psi \in H^1(\Omega_t) \tag{18}$$

où

$$dE(\Omega_t, \varphi; \psi) = \int_{\Omega_t} \{\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\psi - f\psi\} \, dx . \tag{19}$$

Alors en supposant que $y_t(x)$ admet un prolongement suffisamment régulier $Y(t, x)$, Y' est la solution unique de l'équation variationnelle

$$\int_\Omega \{\nabla Y' \cdot \nabla\psi + Y'\psi\} \, dx + \int_\Gamma \{\nabla y \cdot \nabla\psi + y\psi - f\psi\} \, V(0) \cdot n \, d\Gamma = 0 \tag{20}$$

pour tout ψ in $H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, $V(0) = V(0,\cdot)$, n la normale unitaire extérieure à Ω et $y = y_0 = Y(0,\cdot)$ la solution dans $H^1(\Omega)$ de l'équation variationnelle

$$\int_\Omega \{\nabla y \cdot \nabla\psi + y\psi - f\psi\} \, dx = 0 \ , \ \forall \psi \in H^1(\Omega) . \tag{21}$$

On constate que l'on doit supposer la solution y assez régulière pour que Y' appartienne à $H^1(\Omega)$. En fait, on voit clairement sur cet exemple que Y' perd un degré de régularité par rapport à y.

On suppose donc que f appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$ et que Ω soit assez régulier pour que y appartienne à $H^2(\Omega)$. On peut donc passer à la deuxième étape et calculer $dJ(\Omega; V(0))$ selon la définition (11). Il vient

$$dJ(\Omega; V(0)) = \int_\Omega Y'(y - y_d) \, dx + \int_\Gamma 1/2 \, |y - y_d|^2 \, V(0) \cdot n \, d\Gamma . \tag{22}$$

La dernière étape consiste à réécrire (22) pour mettre en évidence la dépendance linéaire de $dJ(\Omega; V(0))$ par rapport à V(0) et obtenir le "gradient de forme". Ceci nécessite l'introduction de la variable adjointe p qui est définie comme la solution de l'équation variationnelle

$$p \in H^1(\Omega), \int_\Omega \{\nabla\varphi \cdot \nabla p + \varphi p\} \, dx + \int_\Omega \varphi(y - y_d) \, dx = 0 \ , \ \forall \varphi \in H^1(\Omega) . \tag{23}$$

On voit que pour y_d dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ et Ω régulier la solution de (23) appartient à $H^2(\Omega)$. On substitue alors $\varphi = Y'$ dans (23) et $\psi = p$ dans (20) pour obtenir l'identité

$$\int_\Omega Y'(y - y_d) \, dx = \int_\Gamma \{\nabla y \cdot \nabla p + yp - fp\} \, V(0) \cdot n \, d\Gamma . \tag{24}$$

Enfin la substitution de cette dernière identité dans l'expression (22) donne

$$dJ(\Omega; V(0)) = \int_\Gamma \{1/2|y - y_d|^2 + \nabla y \cdot \nabla p + yp - fp\} V(0) \cdot n \, d\Gamma . \tag{25}$$

Les calculs précédents nécessitent des conditions de régularité fortes et l'existence d'un prolongement régulier $Y(t, x)$ de $y_t(x)$. Or l'expression finale (24) ne fait apparaître que les variables y, p et $V(0)$ où y et p sont les solutions de (21) et (23). On a tout au plus besoin que y et p appartiennent à $H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, pour que (25) ait un sens. D'autre part si au lieu du problème de Neumann homogène, on avait le problème de Dirichlet homogène, il deviendrait plus difficile de construire le prolongement régulier Y.

3. LA FORMULATION MINIMAX

L'expression finale (25) avec y et p données par (21) et (23) suggèrent la construction d'un Lagrangien

$$L(\Omega_t, \varphi, \psi) = F(\Omega_t, \varphi) + dE(\Omega_t, \varphi; \psi)$$

où φ etd ψ appartiennent à $H^1(\Omega_t)$. Alors on a

$$J(\Omega_t) = \operatorname*{Min}_{\varphi \in H^1(\Omega_t)} \ \operatorname*{Max}_{\psi \in H^1(\Omega_t)} L(\Omega_t, \varphi, \psi) \tag{1}$$

puisque que le Max est $+\infty$ sauf pour $\varphi = y_t$. Il suffisait maintenant d'avoir un théorème pour la dérivabilité d'un MiniMax par rapport à un paramètre dans le cas où les espaces dépendent du paramètre. C'est probablement ce fait qui a retardé la justification mathématique précise des calculs formels sous des hypothèses raisonnables.

Heureusement en repensant avec soin la paramétrisation du problème, il est maintenant possible de reformuler le problème de MiniMax en se plaçant dans des espaces indépendants du paramètre. L'idée clef est de paramétriser à priori les espaces. Pour illustrer ce point important, on revient à la fonctionnelle d'énergie $E(\Omega_t, \varphi)$ définie sur l'espace $H^1(\Omega_t)$. Pour des champs de vecteurs réguliers V, la transformation T_t, $t \geq 0$, est un difféomorphisme. On peut alors paramétriser l'espace $H^1(\Omega_t)$ de la faço suivante

$$H^1(\Omega_t) = \{\varphi \circ T_t^{-1} : \varphi \in H^1(\Omega)\} . \tag{2}$$

Ceci nous amène naturellement à définir la nouvelle fonctionnelle d'énergie

$$\underline{E}(t, \varphi) = E(\Omega_t, \varphi \circ T_t^{-1}) \ , \ \varphi \in H^1(\Omega) , \tag{3}$$

dans l'espace fixé $H^1(\Omega)$. On vérifie alors que la solution du problème de minimisation

$$\operatorname{Inf} \{\underline{E}(t, \varphi) : \varphi \in H^1(\Omega)\} \tag{4}$$

est unique dans $H^1(\Omega)$ et coincide avec la solution transportée

$$y^t = y_t \circ T_t , \tag{5}$$

de Ω_t sur Ω. De plus

$$E(\Omega_t, y_t) = E(\Omega_t, (y_t \circ T_t) \circ T_t^{-1}) = \underline{E}(t, y^t) . \tag{6}$$

Cette nouvelle paramétrisation de la fonctionnelle d'énergie prend aussi une forme plus simple par le ıgement de variable de x_t à $x = T_t^{-1} x_t$:

$$\underline{E}(t, \varphi) = 1/2 \int_{\Omega_t} [|\nabla (\varphi \circ T_t^{-1})|^2 + |\varphi \circ T_t^{-1}|^2 - 2 \, f (\varphi \circ T_t^{-1})] \, dx$$

$$= 1/2 \int_{\Omega} \{A(t) \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + J(t) [|\varphi|^2 - 2 (f \circ T_t) \varphi]\} \, dx \tag{7}$$

DT_t est la matrice Jacobienne associée à T_t,

$$J(t) = \text{dét}\, DT_t \ , \ A(t) = J(t) \ ((DT_t)^{-1})^* \ (DT_t)^{-1} \tag{8}$$

indique la matrice transposée. Le fait d'utiliser l'état transporté y^t plutôt que l'état y_t amène ırellement l'introduction de la nouvelle fonctionnelle coût

$$\underline{F}(t, \varphi) = F(\Omega_t, \varphi \circ T_t^{-1}) \ , \ \varphi \in H^1(\Omega) . \tag{9}$$

peut alors facilement vérifier que

$$J(\Omega_t) = F(\Omega_t, y_t) = F(\Omega_t, (y_t \circ T_t) \circ T_t^{-1}) = F(\Omega_t, y^t \circ T_t^{-1}) = \underline{F}(t, y^t) . \tag{10}$$

plus après le changement de variable la nouvelle fonctionnelle se simplifie

$$\underline{F}(t, \varphi) = 1/2 \int_{\Omega_t} |\varphi \circ T_t^{-1} - y_d|^2 \, dx = 1/2 \int_{\Omega} J(t) \, |\varphi - y_d \circ T_t|^2 \, dx . \tag{11}$$

st important de souligner que les constructions précédentes n'ont pas changé la fonction coût. Le ı est que maintenant les espaces sous-jacents sont fixes et les intégrales de domaine se trouvant ıs les expressions de $\underline{E}(t, \varphi)$ et $\underline{F}(t, \varphi)$ sont indépendantes du paramètre $t \geq 0$ qui n'apparaît intenant que dans les coefficients.

En résumé

$$J(\Omega_t) = \underline{F}(t, y^t) \tag{12}$$

y^t est l'élément minimisant unique dans $H^1(\Omega)$ de la fonctionnelle d'énergie $\underline{E}(t, \varphi)$. Il est nplètement caractérisé par l'équation variationnelle

$$y^t \in H^1(\Omega), \, d\underline{E}(t, y^t; \varphi) = 0, \, \forall \, \varphi \in H^1(\Omega) . \tag{13}$$

introduit alors le Lagrangien

$$\underline{L}(t, \varphi, \psi) = \underline{F}(t, \varphi) + d\underline{E}(t, \varphi; \psi) \ , \ \varphi \in H^1(\Omega), \psi \in H^1(\Omega) , \tag{14}$$

'on vérifie que

$$J(\Omega_t) = \underset{\varphi \in H^1(\Omega)}{\text{Min}} \ \underset{\psi \in H^1(\Omega)}{\text{Max}} \ \underline{L}(t, \varphi, \psi) \tag{15}$$

a maintenant une formulation MiniMax par rapport à des espaces indépendants du paramètre $t \geq 0$ n'intervient plus que comme paramètre dans l'expression de $\underline{L}$ où toutes les intégrales sont sur le naine fixe Ω et sa frontière Γ.

On verra au paragraphe 4 les théorèmes qui nous permettront de calculer $dJ(\Omega; V(0))$.

DERIVEE D'UN MINIMAX PAR RAPPORT A UN PARAMETRE

Ce problème n'est pas nouveau et il y aurait beaucoup à dire si le sujet de cet article n'était pas l'Analyse de sensitivité par rapport à la forme. On adoptera le point de vue de l'utilisateur des résultats en disant seulement que l'origine de ces travaux remonterait à V.F. DEM'JANOV [1] en 1968 et qu'un bon point de départ pour une bibliographie se trouverait dans l'article de CORREA et SEEGER [1].

On verra par la suite qu'un élément important de la formulation MiniMax (3.15) est l'existence d'un point selle. Cette hypothèse simplifie considérablement la caractérisation de la dérivée d'un MiniMax par rapport à un paramètre. Dans cette optique, il semble que le résultat de CORREA et SEEGER [1] soit le plus facile à appliquer sous des hypothèses tout à fait réalistes pour les problèmes de forme. Cependant c'est à l'aide d'un résultat ne supposant pas l'existence de point selle que DELFOUR et ZOLESIO [1,2,3] ont d'abord appliqué la dérivation d'un MiniMax par rapport à un paramètre aux problèmes de forme. On donnera donc aussi une version simplifiée de ce résultat qui pourrait être utile dans des situations où il n'y a pas existence de point selle.

4.1. Sans point selle

Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$ des parties d'espaces topologiques X et Y, respectivement, et soit $\tau > 0$ un nombre réel. On se donne l'application

$$G : [0, \tau] \times X \times Y \to R \tag{1}$$

et l'on y associe les fonctions suivantes

$$H(t, x) = \operatorname{Sup}\{G(t, x, y) : y \in B\},\ t \in [0, \tau]\ , x \in A \tag{2}$$

$$g(t) = \operatorname{Inf}\{H(t, x) : x \in A\},\ t \in [0, \tau]\ . \tag{3}$$

Il vient donc

$$g(t) = \operatorname{Inf}\{\operatorname{Sup}[G(t, x, y) : y \in B] : x \in A\}\ . \tag{4}$$

et l'on veut élaborer un ensemble d'hypothèses pour l'existence de la limite

$$dg(0) = \lim_{t \to 0^+} [g(t) - g(0)]/t. \tag{5}$$

On aura besoin pour $t \geq 0$ de l'ensemble

$$A(t) = \{ x \in A : g(t) = H(t, x)\} \tag{6}$$

et pour tout x dans A de l'ensemble

$$B(t, x) = \{y \in B : H(t, x) = G(t, x, y)\} \tag{7}$$

Les hypothèses sont les suivantes:

H 1 $\exists \tau > 0,\ \forall t,\ 0 \leq t \leq \tau,$

(i) $A(0) \neq \emptyset,\ \forall x_0 \in A(0),\ B(t, x_0) \neq \emptyset$

(ii) $A(t) \neq \emptyset,\ \forall x_t \in A(t),\ B(0, x_t) \neq \emptyset$.

H 2 (i) $\forall x_0 \in A(0), \forall y \in \cup\{B(t, x_0) : t \in [0, \tau]\}$

$s \to G(s, x_0, y)$

est dérivable dans $[0, \tau[$

(ii) $\forall t \in [0, \tau], \forall x_t \in A(t), \forall y \in \cup\{B(0, x_t) : t \in [0, \tau]\}$

$s \to G(s, x_t, y)$

est dérivable dans $[0, \tau[$.

H 3 Il existe une topologie τ_y sur Y tel que, $\forall x_0 \in A(0)$

(i) $\forall \{t_n\}, t_n \to 0^+, \exists\ y_0 \in B(0, x_0), \exists$ une sous-suite of $\{t_n\}$, notée $\{t_n\}$ telle que $\exists y_n \in B(t_n, x_0)$ et $y_n \to y_0$ pour la topologie τ_y

(ii) $t, y \to \partial_t G(t, x_0, y)$ est semi-continue supérieurement en $\{0\} \times \cup \{B(t, x_0) : t \in [0, \tau]\}$ pour la topologie τ_y.

H 4 Il existe une topologie τ_x sur X et une topologie τ_y sur Y telles que

(i) $\forall \{t_n\}, t_n \to 0^+, \exists x_0 \in A(0), \forall y_0 \in B(0, x_0), \exists$ une sous-suite de $\{t_n\}$, notée $\{t_n\}$, telle que $\forall n, \exists\ x_n \longleftarrow A(t_n)$, $\exists z_n \in B(0, x_n)$ tels que

$x_n \to x$ dans la topologie τ_x et $z_n \to y_0$ dans la topologie τ_y

(ii) $t, x, y \to \partial_t G(t, x, y)$ est semi-continue inférieurement en $\{0\} \times \{(x, y) : x \in A(0), y \in B(0, x)\}$.

Théorème 1.

Sous les hypothèses H1 à H4.

$$dg(0) = \inf_{x \in A(0)} \ \sup_{y \in B(0, x)} \ \partial_t G(0, x, y) . \blacklozenge \tag{8}$$

Remarque 4.1.

Pour une discussion des hypothèses et d'autres conditions suffisantes, le lecteur peut consulter DELFOUR et ZOLESIO [1,2,3].

4.2. Avec point selle

En plus des notations du paragraphe 4.1, on associe à G la fonction

$$h(t) = \mathrm{Sup}\,\{\, \mathrm{Inf}\,[G(t, x, y)\ :\ x \in A]\ :\ y \in B\}, \tag{9}$$

les ensembles

$$B(t) = \{y \in B : h(t) = \mathrm{Inf}\,[G(t, x, y)\ :\ x \in A]\} \tag{10}$$

$$A(t, y) = \{a \in A : G(t, a, y) = \mathrm{Inf}\,[G(t, x, y : x \in A]\},\ y \in Y. \tag{11}$$

et l'ensemble des points réalisant le point selle

$$S(t) = \{(x_t, y_t) \in A \times B : g(t) = G(t, x_t, y_t) = h(t)\}. \tag{12}$$

On a alors le lemme suivant.

LEMME 2. Si $S(t) \neq \varnothing$ pour un $t \geq 0$, alors

$$S(t) = A(t) \times B(t),\ A(t) \neq \varnothing,\ B(t) \neq \varnothing \tag{13}$$

$$\forall x_t \in A(t),\ B(t, x_t) = B(t) \ \text{ et } \ \forall y_t \in B(t),\ A(t, y_t) = A(t). \ \blacklozenge \tag{14}$$

Sous l'hypothèse de point selle, on a alors l'élégant résultat de CORREA et SEEGER [1].

THEOREME 3. Soit $\tau > 0$ pour lequel les hypothèses suivantes sont vérifiées:

HH1 $S(t) \neq \varnothing, 0 \leq t \leq \tau$.

HH2 Pour tout $(x, y) \in \cup\{A(t)\ :\ 0 \leq t \leq \tau\} \times \cup\{B(t)\ :\ 0 \leq t \leq \tau\}$, la fonction $t \to G(t, x, y)$ est dérivable partout dans $[0, \tau]$.

HH3 Il existe une topologie τ_X sur X telle que

(i) $\forall \{t_n\}, t_n \to 0^+, \exists\ x_0 \in A(0), \exists$ une sous-suite $\{t_n\}$, notée $\{t_n\}$ et $\forall\, n, \exists\ x_n \in A(t_n)$ tel que $x_n \to x_0$ pour la topologie τ_X.

(ii) $\forall\, y \in \cup\{B(t)\ :\ 0 \le t \le \tau\}$, l'application

$t, x \to \partial_t G(t, x, y)$

est semi-continue inférieurement en $\{0\} \times A(0)$ pour la topologie τ_X.

HH4 Il existe une topologie τ_Y sur Y telle que

(i) $\forall \{t_n\}, t_n \to 0^+, \exists\ y_0 \in B(0), \exists$ sous suite $\{t_n\}$, notée $\{t_n\}$ et $\forall\, n, \exists\, y_n \in B(t_n)$ tel que $y_n \to y_0$ pour la topologie τ_Y.

(ii) $\forall\, x \in \cup\{A(t)\ :\ 0 \le t \le \tau\}$, l'application

$t, y \to \partial_t G(t, x, y)$

est semi-continue supérieurement en $\{0\} \times B(0)$ pour la topologie τ_Y.

Sous les hypothèses HH1 à HH4, on a

$$dg(0) = \inf_{x \in A(0)} \sup_{y \in B(0)} \partial_t G(0, x, y) = \sup_{y \in B(0)} \inf_{x \in A(0)} \partial_t G(0, x, y). \blacklozenge \tag{15}$$

5. L'EXEMPLE CANONIQUE DES PARAGRAPHES 2 ET 3

5.1. Application des théorèmes du paragraphe 4

On revient maintenant au paragraphe 2 et à sa formulation MiniMax (15) du paragraphe 3 où $\underline{F}$ et $\underline{E}$ sont données par (3.11) et (3.7). On utilise le Lagrangien (14) en observant que pour tout $t \ge 0$ dans un voisinage de 0, il possède un point selle qui est réalisé par le couple $(y^t, p^t) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ qui est la solution unique des équations de point selle suivantes:

$$\int_\Omega \{A(t)\, \nabla y^t \cdot \nabla\varphi + [y^t\varphi - (f \circ T_t)\, \varphi]\, J(t)\}\, dx = 0\ ,\ \forall\, \varphi \in H^1(\Omega) \tag{1}$$

$$\int_\Omega (y^t - y_d \circ T_t)\, \psi\, dx + \int_\Omega \{A(t)\, \nabla\psi \cdot \nabla p^t + J(t)\psi p^t\}\, dx = 0\ ,\ \forall\, \psi \in H^1(\Omega)\,. \tag{2}$$

Alors on a immédiatement

$$A(t) = \{y^t\}\ ,\ B(t) = \{p^t\}\ ,\ \forall t \ge 0 \tag{3}$$

et l'hypothèse HH1 est vérifiée. Les hypothèses HH3(i) et HH4(i) le sont aussi par continuité de y^t et p^t par rapport à $t \ge 0$ en $t = 0$. Il suffit de montrer que ces solutions sont bornées pour $t \ge 0$ dans un voisinage de 0 et qu'il existe des sous-suites qui convergent faiblement vers $y_0 = y$ et $p_0 = p$. Quant aux hypothèses HH2, HH3(ii) et HH4(ii), elles sont vérifiées pour des champs de vitesse V suffisamment réguliers. De façon plus précise

$$\begin{aligned} \partial_t L(t, \varphi, \psi) = {} & \int_\Omega \{A'(0)\, \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \operatorname{div} V(0)\, \varphi\psi - [\nabla f \cdot V(0) + f \operatorname{div} V(0)]\, \psi\}\, dx \\ & + 1/2 \int_\Omega [-(\varphi - y_d)\, \nabla y_d \cdot V(0) + (\varphi - y_d)^2 \operatorname{div} V(0)]\, dx \end{aligned} \tag{4}$$

où

$$A'(0) = \operatorname{div} V(0)\ I_d - [DV(0) + DV(0)^*]\,, \tag{5}$$

I_d est la matrice identité dans $\mathbb{R}^n$ et $DV(0)^*$ est la matrice transposée de $DV(0)$. Par l'application directe du Théorème 2, il vient

$$dJ(\Omega; V(0)) = \int_\Omega \{A'(0)\, \nabla p \cdot \nabla y + \operatorname{div} V(0)\, py - p\, [\nabla f \cdot V(0) + f \operatorname{div} V(0)]\}\, dx$$
$$+ 1/2 \int_\Omega [-(y - y_d)\, \nabla y_d \cdot V(0) + (y - y_d)^2 \operatorname{div} V(0)]\, dx\,, \tag{6}$$

où y et p sont les solutions de (2.21) et (2.23), c'est-à-dire

$$-\Delta y + y = 0 \text{ dans } \Omega \ , \ \partial y/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{7}$$
$$-\Delta p + p + y - y_d = 0 \text{ dans } \Omega \ , \ \partial p/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{8}$$

5.2. Les deux expressions de $dJ(\Omega; V(0))$

La formule (6) obtenue pour $dJ(\Omega; V(0))$ ne ressemble pas à l'expression classique (2.25). L'une s'exprime comme une intégrale de domaine et l'autre comme une intégrale frontière nécessitant implicitement pour y et p une régularité supérieure à $H^1(\Omega)$. Les deux expressions sont cependant identiques si l'on suppose cette régularité additionnelle. En effet, il suffit de choisir $\varphi = \nabla p \cdot V$ dans l'équation (2.21) et $\psi = \nabla y \cdot V$ dans (2.23) et d'additionner les deux équations. En réarrangeant adéquatement les termes, on obtient une identité entre les deux expressions de $dJ(\Omega; V(0))$.

En fait ce résultat n'est pas particulier à cet exemple et peut être obtenu dans un contexte plus général. En effet pour appliquer les résultats du paragraphe 4, nous avons utilisé le Lagrangien

$$\underline{L}(t, \varphi, \psi) = L(\Omega_t, \varphi \circ T_t^{-1}, \psi \circ T_t^{-1})\,. \tag{9}$$

Comme on ne savait que $\varphi \in H^1(\Omega)$, il n'était pas possible de prendre la dérivée par rapport à t de l'expression avec domaine variable

$$\int_{\Omega_t} \{1/2\, |\varphi \circ T_t^{-1} - y_d|^2 + \nabla(\varphi \circ T_t^{-1}) \cdot \nabla(\psi \circ T_t^{-1}) + [(\varphi \circ T_t^{-1}) - f]\, (\psi \circ T_t^{-1})\}\, dx \tag{10}$$

car cela aurait nécessité que φ et ψ appartiennent à $H^2(\Omega)$ par exemple. On a donc ramené l'expression précédente au domaine fixe Ω

$$\int_\Omega \{1/2\, J(t)\ |\varphi - y_d \circ T_t|^2 + A(t)\, \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + J(t)\, (\varphi - f \circ T_t)\psi\}\, dx\ . \tag{11}$$

Si l'on sait cependant que pour $t \geq 0$ petit le point selle est réalisé en un point $\{y^t, p^t\}$ dans $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ alors on peut prendre φ et ψ dans $H^2(\Omega)$ et dériver (10) par rapport à t plutôt que (11). Dans ce cas les prolongements Φ et Ψ de φ et ψ à $[0, \tau] \times \Omega$ sont donnés par

$$\Phi(t, x) = \varphi(T_t^{-1}(x)) \text{ et } \Psi(t, x) = \psi(T_t^{-1}(x)) \tag{12}$$

et l'on a immédiatement

$$\Phi' = -\nabla\varphi \cdot V(0) \text{ et } \Psi' = -\nabla\psi \cdot V(0) \tag{13}$$

puisque $\varphi_t = (\varphi \circ T_t^{-1})\, T_t = \varphi$ (resp $\psi_t = (\varphi \circ T_t^{-1})\, T_t = \psi$) et que $\dot\varphi = 0$ et $\dot\psi = 0$. Il vient alors

$$\int_\Gamma \{1/2\, |\varphi - y_d|^2 + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\psi - f\psi\}\, V(0) \cdot n\, d\Gamma$$
$$+ dL(\Omega, \varphi, \psi; 0, -\nabla\varphi \cdot V(0), 0) + dL(\Omega, \varphi, \psi; 0, 0, -\nabla\psi \cdot V(0))\,. \tag{14}$$

Mais les deux derniers termes sont respectivement égaux à

$$dL(\Omega, \varphi, \psi; 0, -\nabla\varphi \cdot V(0), 0)$$
$$= dF(\Omega, \varphi; 0, -\nabla\varphi \cdot V(0)) + d^2E(\Omega, \varphi; 0, \psi; 0, -\nabla\varphi \cdot V(0)) \tag{15}$$

et

$dL(\Omega, \varphi, \psi; 0, 0, -\nabla\psi \cdot V(0)) = dE(\Omega, \varphi; 0, -\nabla\psi \cdot V(0))$. (16)

Lorsque l'on substitue $\varphi = y$ et $\psi = p$ dans les expressions (14) à (16), les membres de droite de (15) et (16) sont nuls puisqu'il s'agit respectivement de l'équation adjointe et de l'équation d'état. Dans ce qui précède nous avons utilisé l'hypothèse que φ et ψ appartiennent à $H^2(\Omega)$ et $\nabla\varphi \cdot V(0)$ et $\nabla\psi \cdot V(0)$ à $H^1(\Omega)$ ce qui est vrai pour un champ de vitesse V assez régulier.

6. APPLICATIONS

6.1. Dirichlet homogène

Le calcul de $dJ(\Omega; V)$ au paragraphe 2.4 nécessitait la construction d'un prolongement régulier de la solution. Pour le problème de Dirichlet homogène

$-\Delta y + y = f$ dans Ω , $y = 0$ sur Γ (1)

avec la même fonctionnelle coût, cette construction devient beaucoup plus difficile. Cependant par la formulation MiniMax, il suffit simplement de changer l'espace $H^1(\Omega)$ en $H_0{}^1(\Omega)$ et l'expression finale pour $dJ(\Omega; V)$ est précisement (5.6) où y et p sont les solutions de (1) et

$-\Delta p + p + y - y_d = 0$ dans Ω , $p = 0$ sur Γ. (2)

6.2. Fonctions coût exigeant plus de régularité de l'état

Pour fixer les idées, considérons toujours que l'état y est donné par (1) avec $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$, $m \geq 0$ et Ω assez régulier pour que $y \in H^{m+2}(\Omega)$. Considérons par exemple des fonctions coût de la forme

$J(\Omega) = \int_\Gamma (\partial y/\partial n)^2 \, d\Gamma$, $m = 0$, (3)

$J(\Omega) = \int_\Gamma |\nabla_\Gamma (\partial y/\partial n)|^2 \, d\Gamma$, $m = 1$, (4)

$J(\Omega) = \int_\Gamma | \Delta_\Gamma (\partial y/\partial n)|^2 \, d\Gamma$, $m = 2$, (5)

où ∇_Γ est le gradient tangentiel et Δ_Γ le Laplacien Beltrami. Dans le premier cas, par exemple, il faut considérer le Lagrangien

$L(\Omega, \varphi, \psi) = \int_\Gamma |\partial\varphi/\partial n|^2 \, d\Gamma + \int_\Omega (-\Delta\varphi + \varphi - f)\psi \, dx$ (6)

pour $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0{}^1(\Omega)$ et $\psi \in H^1(\Omega)$. Le point selle est caractérisé par

$-\Delta y + y = f$ dans Ω , $y = 0$ sur Γ (7)

$-\Delta p + p = 0$ dans Ω , $p = \partial\varphi/\partial n$ sur Γ (8)

et toute la théorie précédente s'applique.

Ici comme dans l'exemple précédent on peut comme au paragraphe 5.2 tirer partie de la régularité additionnelle des éléments (y, p) dans le calcul de la dérivée du Lagrangien par rapport à t.

6.3. Fonction coût non différentiable

Lorsque la fonctionnelle $F(\Omega, \varphi)$ à laquelle on associe la fonction coût

$J(\Omega) = F(\Omega, y)$ (9)

n'est pas différentiable par rapport à φ, mais peut s'exprimer comme un Sup d'une fonctionnelle différentiable $F^*(\Omega, \varphi, \mu)$

$$F(\Omega, \varphi) = \text{Sup}\{F^*(\Omega, \varphi, \mu) \ : \ \mu \in M\} \tag{10}$$

pour un ensemble M à préciser, les constructions précédentes sont applicables.

Pour illustrer ceci, on revient au problème de Neumann

$$-\Delta y + y = f \text{ dans } \Omega \ , \ \partial y/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{11}$$

pour la fonction coût suivante

$$J(\Omega) = F(\Omega, y) \ , \ F(\Omega, \varphi) = \int_\Omega |\varphi - y_d| \, dx . \tag{12}$$

Ici la non-différentiabilité s'exprime comme un Sup

$$F(\Omega, \varphi) = \text{Sup}\{\int_\Omega \mu(y - y_d) \, dx \ : \ \mu \in M\} \tag{13}$$

par rapport à l'ensemble

$$M = \{\alpha \in L^2(\Omega) \ : \ |\alpha(x)| \leq 1 \ , \ \text{p.p. dans } \Omega\} . \tag{14}$$

On vérifie alors que

$$J(\Omega) = \text{Inf}\{\text{Sup}[L(\Omega, \varphi, (\mu, \psi)) \ : \ (\mu, \psi) \in M \times H^1(\Omega)] \ : \ \varphi \in H^1(\Omega)\} \tag{15}$$

où le Lagrangien L est donné par

$$L(\Omega, \varphi, (\mu, \psi)) = \int_\Omega [\mu(\varphi - y_d) + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\psi - f\psi] \, dx . \tag{16}$$

Il est facile de vérifier qu'il y a point selle et que les points $(y, (\mu, p))$ le réalisant sont complètement caractérisés par le système d'équations suivant

$$-\Delta y + y = f \text{ dans } \Omega \ , \ \partial y/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{17}$$

$$\mu_\alpha = \text{sgn}\, y + \alpha\chi_{\Omega_0}, \ \forall\alpha \in M \ , \ \Omega_0 = \{x \in \Omega \ : \ y(x) = 0\} \tag{18}$$

$$-\Delta p_\alpha + p_\alpha + \mu_\alpha = 0 \text{ dans } \Omega \ , \ \partial p_\alpha/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma . \tag{19}$$

Pour cet exemple le point selle n'est pas unique, mais les constructions et la théorie précédente demeurent vraies. L'expression finale est

$$dJ(\Omega; V(0)) = \underset{\alpha\in M}{\text{Sup}} \int_\Omega \{\mu_\alpha y \, \text{div}\, V(0) + A'(0) \nabla y \cdot \nabla p_\alpha + \text{div}\, V(0)\, y\, p_\alpha - [\text{div}\, V(0)\, f + \nabla f \cdot V(0)]\, p_\alpha\} \, dx \tag{20}$$

6.4. Problèmes avec contrainte sur l'état

Une autre classe de problèmes que l'on peut aborder par la méthode du MiniMax est celle des problèmes avec contrainte sur la variable d'état. On trouvera de nombreux exemples pour les problèmes de forme en mécanique des fluides dans la thèse de A. SOUISSI [1]. Il calcule le "gradient de forme" du rendement d'une turbine où l'état est solution des équations de Stokes en pression-vitesse. La contrainte est que le divergent de la vitesse est nul.

En introduisant un multiplicateur, on peut alors montrer que la vitesse u et la pression p sont solutions du problème mixte

$$a(u, v) + b(v, p) = 0 \ , \ \forall v \in V_0 \tag{21}$$

$$b(u, q) = 0 \ , \ \forall q \in Q \tag{22}$$

pour des espaces fonctionnels V_0 et Q à préciser et les formes bilinéaires a et b. En introduisant la fonctionnelle d'énergie augmentée

$$E(\Omega, v, q) = 1/2\; a(v, v) + b(v, q)\,, \tag{23}$$

le couple (u, p) est la solution du problème (avec point selle)

$$E(\Omega, u, p) = \mathrm{Inf}\,\{\mathrm{Sup}\,[E(\Omega, v, q)\ :\ q \in Q]\ :\ v \in V\} \tag{24}$$

pour un espace fonctionnel adéquat V.

La méthode d'augmentation de l'état pour tenir compte de contraintes du type égalité est tout à fait naturelle dans ce contexte. On peut l'appliquer aussi à l'exemple plus simple du problème de Dirichlet non homogène:

$$-\Delta y + y = f \text{ dans } \Omega\ ,\ \ y = g \text{ sur } \Gamma\ ,\ \ g \in H^{1/2}(\Gamma)\,, \tag{25}$$

qui est équivalent au problème de MiniMax

$$\mathrm{Min}\,\{\mathrm{Max}\,[E(\Omega, \varphi, \mu)\ :\ \mu \in H^{-1/2}(\Gamma)]\ :\ \varphi \in H^1(\Omega)\} = E(\Omega, y, \lambda) \tag{26}$$

où

$$E(\Omega, \varphi, \mu) = \int_\Omega 1/2\,[\,|\nabla\varphi|^2 + \varphi^2 - 2f\varphi]\,dx + \langle\mu, g - \varphi|_\Gamma\rangle_{H^{1/2}(\Gamma)}\,. \tag{27}$$

On montre facilement que y est la solution (25) et que le multiplicateur λ est la dérivée normale de y.

7. CONCLUSIONS

Les méthodes décrites dans cet article combinées aux théorèmes de dérivabilité d'un MiniMax par rapport à un paramètre fournissent un outil puissant pour l'Analyse de sensitivité par rapport à la forme sans faire appel à l'étude et à la caractérisation de la dérivée de l'état par rapport à la forme. On obtient aussi une justification mathématique précise à de nombreux calculs formels ou rapides rencontrés dans la littérature. De plus certaines classes de non-différentiabilités dans la fonction coût et de contraintes de type égalité sur l'état peuvent se traiter de la même façon en augmentant l'état ou l'état adjoint. Finalement on a montré (par exemple au paragraphe 5.2) comment utiliser la régularité additionnelle de la solution réalisant le point selle pour passer de l'expression "intégrale de volume" à l'expression sous forme d'"intégrale de surface" pour le gradient de forme.

Il est bien évident que l'introduction d'un MiniMax n'est pas la seule façon de justifier la construction et l'utilisation d'une formulation Lagrangienne. Dans ce contexte DELFOUR et ZOLESIO [4,5] ont aussi utilisé une méthode de pénalisation pour traiter certaines classes d'équations d'état non-linéaire et des situations où l'état est la solution d'une inéquation variationnelle. Finalement tout ceci n'est évidemment pas limité au cas statique et le cas où l'état est solution d'équations d'évolution parabolique ou hyperbolique se traite de la même façon.

REFERENCES

J.P. AUBIN [1], L'analyse non linéaire et ses motivations économiques, Masson, Paris, New York, 1984.

N.V. BANICHUK [1], Optimization of the Shapes of Elastic Bodies, Nauka, Moscow, 1980 (Engl. Transl. 1984).

J. CEA [1], Conception optimale ou identification de formes. Calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût, R.A.I.R.O. 20 (1986), 371-402.

[2], Problems of Shape Optimal Design, in "Optimization of Distributed Parameter Structures", Vol. II, pp. 1005-1048, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands 1980.

[3], Numerical Methods of Shape Optimal Design, in "Optimization of distributed parameter structures", E.J. Haug and J. Céa, eds.,pp. 1049-1087, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands 1980.

R. CORREA and A. SEEGER [1], Directional derivatives of a minimax function, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 9 (1985), 13-22.

M.C. DELFOUR and J.P. ZOLESIO[1], Dérivation d'un Min Max et application à la dérivationpar rapport au contrôle d'une observation non différentiable de l'état, C.R. Acad. Sc. Paris 302, Sér. I (1986), 571-574.

[2],, Differentiability of a Min Max and Application to Optimal Control and Design Problems, Part I and II, in "Control Problems for Systems Described as Partial Differential Equations and Applications", I. Lasiecka and R. Triggiani, eds., part I pp. 204-219, part II pp. 220-229, Springer Verlag, New-York, 1987.

[3], Shape Sensitivity Analysis via Min Max Differentiability, SIAM J. on Control and Optim., à paraître.

[4], Further developments in shape sensitivity analysis via a penalization method, in "Boundary Control and Boundary Variations", J.P. Zolésio, ed., Springer Verlag, New York, à paraître.

[5], Shape sensitivity analysis via a penalization method, Annali di Matematica Pura i Applicata, à paraître.

K. DEMS and Z. MROZ [1], Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis, Part 2. Structure shape variations, Int. J. of Solids and Structures 20 (1984), 527-552.

V.F. DEM'YANOV [1], Differentiability of a Maximin function. I, USSR Comp. Math. and Math.Phys. 8 (1968), 1-15 (transl from Z. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 8 (1968), 1186-1195).

I. EKELAND and R. TEMAM [1], Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod,Gauthier -Villars, Paris, Bruxelles, Montréal, 1974.

R.H. GALLAGHER and O.C. ZIENKIEWICZ [1], Optimum structural design theory and applications, John Wiley and Sons, 1972; Springer Verlag, Berlin 1973.

E.J. HAUG [1], A review of Distributed Parameter Structural Optimization Literature, in"Optimization of Distributed Parameter Structures", Vol. I, pp. 3-74, (cf. Haug and Céa [1]).

E.J. HAUG and J.S. ARORA [1], Applied Optimal Design, Wiley-Interscience, New York,1979.

E.J. HAUG and J. CEA [1], Optimization of Distributed Parameter Structures, Vol. I and II,Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Rockville, Maryland, USA, 1981.

E.J. HAUG , K.K. CHOI and V. KOMKOV[1], Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, New York, 1986.

A. MYSLINSKI and J. SOKOLOWSKI [1], Nondifferentiable optimization problems for elliptic problems, SIAM J. Control and Optimization 23 (1984), 632-648.

O. PIRONNEAU [1], Optimal Design for Elliptic Systems, Springer Verlag, New York, 1984.

W. PRAGER [1], Introduction to Structural Optimization, Courses and Lectures: International Centre for Mechanical Sciences, Udine, No 212, Springer Verlag, Vienna, 1974.

G.I.N. ROZVANY [1], Optimal Design of Flexural Systems, Pergamon Press, New York,1976.

A. SAWCZUK and Z. MROZ [1], Optimization in Structural Design, Springer Verlag, New York, 1975.

J. SOKOLOWSKI [1], Optimal control in coefficients of boundary value problems with unilateral constraints, Bull. Pol. Acad. Sc. Tech. Sc. 31 (1983), 71-81.

J. SOKOLOWSKI and J.P. ZOLESIO [1], Dérivée par rapport au domaine de la solution d'un problème unilatéral, C.R. Acad. Sc. Paris 301 (1985), Sér. I, pp. 103-106.

[2]. Shape sensitivity analysis of an elasto-plastic torsion problem, Bull. Pol. Acad. Sc. Tech. Sc. 33 (1985), 579-586.

A. SOUISSI [1], Quelques problèmes d'optimisation de formes en hydrodynamique, Thèse de Ph.D., Université Laval, Québec (Québec), Canada, décembre 1986.

J.P. ZOLESIO [1], Identification de domaine, Thèse de doctorat d'état, Nice, 1979.

[2], Semi-Derivatives of Repeated Eigenvalues, in "Optimization of Distributed Parameter Structures", Vol. II, J. Haug and J. Cea, eds, pp. 1457-1473, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Rockville, Maryland, USA, 1981.

[3], An optimal design procedure for optimal control support, in "Convex Analysis and its Applications", A. Auslender, ed., pp.207-219, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg ,New-York, 1977.