Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 3, n° 1, 1986, p. 55-65. *Analyse non linéaire*

Transformation conforme de la courbure scalaire sur la sphère

par

M. VAUGON

RÉSUMÉ. — En réponse à un problème posé par Nirenberg, sur la sphère S_n de dimension $n > 2$ munie de sa métrique riemannienne classique g, on décrit une classe de fonctions qui sont des courbures scalaires correspondant à des métriques g' conformes à g.

ABSTRACT. — In answer to a Nirenberg problem, on the sphere S_n of dimension $n > 2$ with its classical riemannian metric g, we describe a class of functions which are scalar curvature corresponding to metrics g' conformal to g.

Mots-clés : Transformations conformes, courbures scalaires, métriques riemanniennes sur la sphère.

INTRODUCTION

Soit R' une fonction numérique de classe C^∞ définie sur la sphère S_n munie de sa métrique classique g. Quelle condition doit vérifier la fonction R' pour être la courbure scalaire de la sphère S_n relativement à une nouvelle métrique g' conforme à g. Ce problème posé par Nirenberg L., n'a jusqu'à présent que des réponses partielles : Kazdan-Warner [*4*] ont montré, que R' ne peut répondre au problème que si la fonction $\nabla^i R' \nabla_i F$ n'est pas de signe constant sur S_n, et ceci quelle que soit la fonction propre F de la première valeur propre non nulle du laplacien Aubin T. [*2*], dans un théorème non linéaire de Fredholm montre qu'il existe une fonction propre de la première valeur propre non nulle du laplacien, F, telle que la fonction $R'' = R' - F$ réponde au problème, mais on ne connaît pas de condition sur R' pour que F soit nulle. Si R' prend la même valeur en deux points diamétralement opposés sur S_n, on peut montrer en utilisant les résultats de Aubin [2] sur les meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev et en se plaçant sur l'espace projectif réel, que sous une condition supplémentaire, R' répond au problème. Dans cet article on généralise ce dernier résultat en décrivant une classe de fonctions R' invariantes par une isométrie de S_n qui répondent au problème. Les résultats obtenus sont énoncés dans le théorème et les corollaires 1 et 2, ces derniers donnent des résultats directement utilisables.

NOTATIONS. — Sur la sphère S_n de dimension $n \geqslant 3$, munie de sa métrique riemannienne classique g, on note :

$\int \varphi$: l'intégrale sur S_n de la fonction φ pour la mesure associée à la métrique g

$\int_Q \varphi$: l'intégrale de la fonction φ sur une partie intégrable Q de S_n

L_p : l'espace des fonctions définies sur S_n à valeurs réelles, dont la puissance p^{ieme} du module est intégrable, la norme dans L_p est notée $\| \ \|_p$

H_1^2 : l'espace de Sobolev sur S_n, le complété pour la norme

$$\| \varphi \|_{H_1^2}^2 = \| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2$$

de l'espace des fonctions de classe $C^\infty(S_n)$.

Sur la sphère S_n on utilisera la meilleure constante dans les inégalités de Sobolev : $C = \dfrac{n(n-2)}{4}\omega_n^{2/n}$, pour tout $\varphi \in H_1^2$,

$$\| \varphi \|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leqslant \frac{1}{C}\| \nabla\varphi \|_2^2 + \| \varphi \|_2^2,$$

ici ω_n est l'aire de la sphère de rayon 1 de dimension n et le volume de S_n est supposé égal à 1.

$\mathscr{I}$: le groupe des isométries de la sphère S_n.

On peut faire opérer naturellement à gauche le groupe $\mathscr{I}$ sur l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions numériques sur S_n en posant pour $\sigma \in \mathscr{I}$ et $f \in \mathscr{F}$ $\sigma f = f \circ \sigma^{-1}$. On dira qu'une fonction $f \in \mathscr{F}$ est invariante par $\sigma \in \mathscr{I}$ si $\sigma f = f$.

Si $\sigma \in \mathscr{I}$ on pose :

$$m_\sigma(x) = \operatorname{Card}\{\sigma^k(x)/k \in \mathbb{Z}\}\,; \qquad m_\sigma(x) \text{ peut être infini}.$$

Dans la suite on considère sans restreindre la généralité la sphère normée $\operatorname{vol}(S_n) = \int 1 = 1$. La courbure scalaire est alors $R = n(n-1)\omega_n^{2/n}$.

Soit R′ une fonction numérique de classe C^∞ sur S_n, positive et $\sigma \in \mathscr{I}$ on note : $\nu_\sigma = \operatorname{Inf}(\|\nabla\varphi\|_2^2 + C\|\varphi\|_2^2)$ sur l'ensemble des fonctions de H_1^2 vérifiant $\sigma\varphi = \varphi$ et $\int R'\varphi^{2n/(n-2)} = \frac{4(n-1)}{n-2}$.

THÉORÈME. — Soit R′ une fonction numérique positive, de classe C^∞ sur S_n

(*i*) Si R′ est invariante par une isométrie σ de S_n, $\sigma \neq \mathrm{Id}$.

(*ii*) Si pour tout $x \in S_n$ $\frac{n-2}{4(n-1)}\left(\frac{\nu_\sigma}{C}\right)^{\frac{n}{n-2}} R'(x) < m_\sigma^{\frac{2}{n-2}}(x)$, où C, ν_σ, $m_\sigma(x)$ sont définis ci-dessus.

Alors il existe une métrique g' conforme à la métrique classique g de S_n telle que R′ soit la courbure scalaire de S_n relativement à g'.

COROLLAIRE 1. — Soit R′ une fonction numérique positive de classe C^∞ sur S_n

(*i*) Si R′ est invariante par une isométrie σ de S_n, $\sigma \neq \mathrm{Id}$.

(*ii*) Si pour tout $x \in S_n$ $\left(R'(x)\Big/\int_{R'}\right)^{\frac{n-2}{2}} \leqslant m_\sigma(x)$.

Alors il existe une métrique g' conforme à la métrique classique g de S_n telle que R′ soit la courbure scalaire de S_n relativement à g'.

COROLLAIRE 2. — Si S_n est de dimension paire. Si R′ est une fonction positive de classe C^∞ sur S_n, radiale de pôle P.

Si $R'(P) \leqslant \int R'$ et $R'(P') \leqslant \int R'$ où P′ est le point diamétralement opposé à P sur la sphère S_n.

Alors il existe une métrique g' conforme à la métrique classique g de S_n telle que R′ soit la courbure scalaire de S_n relative à g'. De plus la fonction qui définit le changement de métrique conforme est une fonction radiale de pôle P.

Démonstration du théorème. — L'existence d'une métrique g' conforme à g telle que R′ soit la courbure scalaire, équivaut à l'existence d'une fonction φ de classe C^∞ sur S_n, $\varphi > 0$, solution de l'équation différentielle

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + R\varphi = R'\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \qquad (\Delta\varphi = -\nabla^i\nabla_i\varphi) \tag{1}$$

où R est la courbure scalaire de la sphère S_n (normée) : $R = n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$. Voir par exemple : Aubin [*1*], Kazdan [*4*], Yamabé [*7*].

— Pour simplifier les notations on va étudier l'équation différentielle

$$(2)\quad \Delta\varphi + C\varphi = f\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{où} \quad C = \frac{n(n-2)}{4}\omega_n^{\frac{2}{n}} \quad \text{et} \quad f = \frac{n-2}{4(n-1)}R'.$$

La méthode que l'on va utiliser pour étudier l'équation (2) est à rapprocher de la méthode utilisée dans Vaugon [6] pour l'équation de Yamabé. Si h est une fonction C^∞ sur S_n, il est facile de montrer, par exemple par la méthode variationnelle, que l'équation $\Delta\varphi + C\varphi = h$ admet une unique solution φ de classe C^∞. Si de plus $h > 0$ alors $\varphi > 0$. On définit alors la suite de fonctions φ_i de classe C^∞, $\varphi_i > 0$ par :

$$(3)\qquad \Delta\varphi_i + C\varphi_i = \lambda_i f\varphi_{i-1}^{\frac{n+2}{n-2}},$$

φ_0 étant choisie de classe C^∞, $\varphi_0 > 0$ et $\int f\varphi_0^{\frac{2n}{n-2}} = 1$, $\lambda_i > 0$ étant choisi pour que $\int f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} = 1$ pour tout i.

LEMME 1. — De la suite (φ_i) on peut extraire une sous-suite (φ_j) qui converge faiblement dans H_1^2, fortement dans L_2 et presque partout vers une solution φ de classe C^∞, $\varphi \geqslant 0$, de l'équation $\Delta\varphi + C\varphi = \lambda f\varphi^{\frac{n+2}{n-2}}$ où λ est un réel strictement positif.

Démonstration. — Pour tout ϕ et $\psi \in H_1^2$ on pose

$$b(\phi, \psi) = \int \nabla^i\phi\nabla_i\psi + C\int \phi\psi,$$

b est une forme bilinéaire sur H_1^2, symétrique, positive puisque $C > 0$, de plus il existe deux réels strictement positifs α et β tels que, pour tout $\phi \in H_1^2$

$$(4)\qquad \alpha\|\phi\|_{H_1^2}^2 \leqslant b(\phi, \phi) \leqslant \beta\|\phi\|_{H_1^2}^2$$

notons $\mu = \operatorname{Inf} b(\phi, \phi)$ lorsque $\int f\phi^{\frac{2n}{n-2}} = 1$ $\mu > 0$, car d'après les inégalités de Sobolev

$$1 = \left(\int f\phi^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leqslant \left(\operatorname{Sup}_{x\in S_n} f(x)\right)^{\frac{n-2}{n}} \|\phi\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leqslant K\|\phi\|_{H_1^2}^2 \leqslant \frac{K}{\alpha} b(\phi, \phi)$$

où K est une constante strictement positive.

Si l'on multiplie les deux membres de la relation (3) par φ_{i-1} et si l'on intègre sur S_n on obtient : $b(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \lambda_i$.

Si l'on fait la même opération avec φ_i on obtient :

$$b(\varphi_i, \varphi_i) = \lambda_i \int f\varphi_{i-1}^{\frac{n+2}{n-2}}\varphi_i \leqslant \lambda_i$$

puisque d'après l'inégalité de Hölder,

$$\int f\varphi_{i-1}^{\frac{n+2}{n-2}}\varphi_i \leqslant \left(\int f\varphi_{i-1}^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n+2}}\left(\int f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{2n}} = 1$$

de plus

(5) $0 \leqslant b(\varphi_i-\varphi_{i-1}, \varphi_i-\varphi_{i-1}) = b(\varphi_i,\varphi_i) - 2b(\varphi_i, \varphi_{i-1}) + b(\varphi_{i-1}, \varphi_{i-1})$

il s'ensuit

$$\mu \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i-1} \leqslant b(\varphi_i, \varphi_i) \leqslant \lambda_i \leqslant b(\varphi_{i-1}, \varphi_{i-1}) \leqslant \ldots \leqslant b(\varphi_0, \varphi_0)\,.$$

On en déduit

(6) $b(\varphi_0, \varphi_0) \geqslant \lim\limits_{i\to+\infty} b(\varphi_i, \varphi_i) = \lim\limits_{i\to+\infty} b(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \lim\limits_{i\to+\infty} \lambda_i = \lambda \geqslant \mu$

La suite (φ_i) est alors bornée dans H_1^2, on peut en extraire une sous-suite (φ_k) qui converge faiblement dans H_1^2, fortement dans L_2 et presque partout vers une fonction $\varphi \geqslant 0$.

D'autre part, des relations (5) et (6) on déduit

$$\lim_{i\to+\infty} b(\varphi_i - \varphi_{i-1}, \varphi_i - \varphi_{i-1}) = 0\,,$$

alors d'après (4) $\lim\limits_{i\to+\infty} \|\varphi_i - \varphi_{i-1}\|_{H_1^2} = 0$.

La suite (φ_{k-1}) converge donc, comme la suite (φ_k) faiblement dans H_1^2, fortement dans L_2 et presque partout vers la fonction φ. Pour tout $\phi \in H_1^2$ on peut écrire :

$$\int(\Delta\varphi_k)\phi + C\int\varphi_k\phi = \lambda_k\int f\varphi_{k-1}^{\frac{n+2}{n-2}}\phi$$

En passant à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ on obtient :

$$\int\nabla\varphi\nabla\phi + C\int\varphi\phi = \lambda\int f\varphi^{\frac{n+2}{n-2}}\phi$$

Les théorèmes de régularité classiques terminent la démonstration du lemme 1.

— Si l'on pose $\varphi' = \lambda^{\frac{2-n}{n+2}}\varphi$, $\varphi' \geqslant 0$ est alors solution de l'équation (2). mais φ' peut être identiquement nulle sur S_n, c'est d'ailleurs nécessairement le cas lorsque, d'après Kazdan-Warner [*4*], $\nabla^i f \nabla_i F$ est de signe constant sur S_n pour une fonction propre F de la première valeur propre non nulle du laplacien ; et ceci quel que soit le choix de φ_0.

Toute la suite de cette étude va donc consister à montrer que sous les hypothèses du théorème, on peut choisir correctement φ_0 de sorte que la fonction φ, limite des φ_k, ne soit pas identiquement nulle, le principe du maximum nous dit qu'alors $\varphi > 0$.

— Soit $\sigma \neq \mathrm{Id}$ l'isométrie qui laisse fixe f. Choisissons φ_0 invariante par σ vérifiant $\int f\varphi_0^{\frac{2n}{n-2}} = 1$ et $b(\varphi_0, \varphi_0) \leqslant \nu_\sigma + \varepsilon$, ε sera choisi suffisamment petit (voir (10)).

LEMME 2. — Il existe $x_0 \in S_n$ et une boule $B(\delta)$ de centre x_0 de rayon δ tels que pour toute boule $B(\delta')$ de centre x_0 contenue dans $B(\delta)$

$$0 < \overline{\lim} \int_{B(\delta')} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} \leqslant \frac{1}{m},$$

où $m = m_\sigma(x_0)$ si $m_\sigma(x_0)$ est fini, et où $m > \left(\frac{\nu_\sigma}{C}\right)^{\frac{n}{2}} f^{\frac{n-2}{2}}(x_0)$ si $m_\sigma(x_0) = +\infty$.

Démonstration. — Montrons par récurrence que pour tout i, $\sigma(\varphi_i) = \varphi_i$. Si $\sigma(\varphi_{i-1}) = \varphi_{i-1}$ on peut écrire $\sigma(\Delta\varphi_i) + C\sigma\varphi_i = \lambda_i f\varphi_{i-1}^{\frac{n+2}{n-2}}$, mais comme σ est une isométrie $\sigma(\Delta\varphi_i) = \Delta(\sigma\varphi_i)$, $\sigma\varphi_i$ est donc, tout comme φ_i, solution de l'équation $\Delta\varphi + C\varphi = \lambda i f\varphi_{i-1}^{\frac{n+2}{n-2}}$. Compte tenu de l'unicité de la solution d'une telle équation $\sigma(\varphi_i) = \varphi_i$.

Montrons qu'il existe un point $x_0 \in S_n$ tel que pour toute boule $B(\delta)$ de centre x_0, $\overline{\lim} \int_{B(\delta)} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} > 0$: Supposons que pour tout $x \in S_n$, il existe une boule $B(\delta)$ de centre x de rayon $\delta > 0$ telle que $\overline{\lim} \int_{B(\delta)} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} = 0$. Comme S_n est compacte, il existe p boules $B(\delta_k, x_k)$ qui recouvrent S_n et telles que pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $\overline{\lim} \int_{B(\delta_k, x_k)} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} = 0$ alors $1 = \int f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \int_{B(\delta_k, x_k)} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}}$ et $1 \leqslant \overline{\lim} \left(\sum_{k=1}^{p} \int_{B(\delta_k, x_k)} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} \right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \overline{\lim} \int_{B(\delta_k, x_k)} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} = 0$ ce qui est absurde.

Soient alors les m points $x_0, \sigma(x_0), \ldots, \sigma^{m-1}(x_0)$ où $m = m_\sigma(x_0)$ si $m_\sigma(x_0)$ est fini et $m > \left(\frac{\nu_\sigma}{C}\right)^{\frac{n}{2}} f(x_0)^{\frac{n-2}{2}}$ si $m_\sigma(x_0) = +\infty$. Soit $\delta > 0$ tel que les m boules $B(\delta, \sigma^k(x_0))$ soient disjointes lorsque k varie de 1 à m. Comme la fonction f et les fonctions φ_i sont invariantes par σ : pour tout k de 1 à m

$$\int_{B(\delta, \sigma^k(x_0))} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} = \int_{B(\delta, x_0)} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}},$$

il s'ensuit :

$$\int_{B(\delta, x_0)} f\varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} \leqslant \frac{1}{m}.$$

Fin de la démonstration du théorème. — Soit $\delta' \leqslant \delta$ tel que

$$\sup_{x \in B(\delta', x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon'$$

où $\varepsilon' > 0$ est choisi suffisamment petit (voir (10)). Soit η une fonction de classe C^∞ à support contenu dans la boule $B(\delta')$ de centre x_0, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ telle que $\eta = 1$ sur la boule $B\left(\frac{\delta}{2}\right)$.

Multiplions les deux membres de la relation (3) par $\eta^2 \varphi_i^k$ où $1 \leqslant k \leqslant \frac{n+2}{n-2}$ et intégrons sur S_n.

$$\int \eta^2 \varphi_i^k \Delta\varphi_i + C \int \eta^2 \varphi_i^{k+1} = \lambda_i \int \eta^2 f \varphi_i^k \varphi_{i-1}^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{7}$$

Par des intégrations par parties sur le premier membre de cette égalité on obtient :

$$\int \eta^2 \varphi_i^k \Delta\varphi_i + C \int \eta^2 \varphi_i^{k+1} = \frac{4k}{(k+1)^2} \| \nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \|_2^2 - \frac{8k}{k+1} \int \varphi_i^{\frac{k+1}{2}} \nabla^\mu \eta \nabla_\mu (\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}})$$
$$+ \int \varphi_i^{k+1} \left(\frac{8k}{k+1} |\nabla\eta|^2 - \frac{4k}{(k+1)^2} |\nabla\eta|^2 + \frac{\Delta\eta^2}{k+1} + C\eta^2 \right)$$

Utilisons les inégalités de Hölder pour le deuxième membre de (7)

$$\lambda_i \int \eta^2 f \varphi_i^k \varphi_i^{\frac{n+2}{n-2}} \leqslant \tag{8}$$
$$\leqslant \lambda_i \left(\sup_{x \in B(\delta')} f(x) \right)^{\frac{n-2}{n}} \| \eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}} \|_{\frac{2n}{n-2}} \| \eta \varphi_{i-1}^{\frac{k+1}{2}} \|_{\frac{2n}{n-2}} \left(\int_{B(\delta')} f \varphi_{i-1}^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{(k-1)(n-2)}{4n}}$$
$$\left(\int_{B(\delta')} f \varphi_{i-1}^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{2(n+2)-(k+1)(n-2)}{4n}}$$

On note (a) le deuxième membre de l'inégalité précédente, et dans toute la suite les C_p sont des constantes indépendantes des fonctions φ_i. Comme $k \leqslant \frac{n+2}{n-2}$ $H_1^2 \subset L_{k+1}$ et l'inclusion est continue.

On en déduit :

$$\int \varphi_i^{k+1} \left(\frac{8k}{k+1} |\nabla\eta|^2 - \frac{4k}{(k+1)^2} |\nabla\eta|^2 + \frac{\Delta\eta^2}{k+1} + C\eta^2 \right) \leqslant C_1$$

et

$$\int \varphi_i^{\frac{k+1}{2}} \nabla^\mu \eta \nabla_\mu (\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \leqslant C_2 \| \nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \|_2$$

finalement on peut écrire :

$$\frac{4k}{(k+1)^2} \| \nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \|_2^2 \leqslant (a) + C_3 \| \nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \|_2 + C_1$$

mais d'après (6) $\lambda_i \leqslant b(\varphi_0, \varphi_0) \leqslant \nu_\sigma + \varepsilon$, de plus $\sup_{x \in B(\delta', x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon'$. Utilisons alors la meilleure constante dans les inégalités de Sobolev sur la sphère S_n, Aubin [*1*] : $\| \eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}} \|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant \frac{1}{C} \| \nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \|_2^2 + \| \eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}} \|_2^2$. De ces dernières inégalités et du lemme 2 on déduit

$$(a) \leqslant \frac{(\nu_\sigma + \varepsilon)(f(x_0) + \varepsilon')^{\frac{n-2}{n}}}{Cm^{\frac{2}{n}}} \| \nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \| \nabla(\eta \varphi_{i-1}^{\frac{k+1}{2}}) \|_2 + C_4$$

il s'ensuit

$$(9) \quad \| \nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}} \|_2^2 \leqslant \frac{(k+1)^2(\nu_\sigma + \varepsilon)(f(x_0) + \varepsilon')^{\frac{n-2}{n}}}{4kCm^{\frac{2}{n}}} \| \nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \|_2 \| \nabla(\eta \varphi_{i-1}^{\frac{k+1}{2}}) \|_2 + C_5 \| \nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \|_2 + C_6$$

D'après l'hypothèse (*ii*) du théorème, on peut toujours choisir $k_0 > 1$, $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' > 0$ de sorte que :

$$(10) \qquad \frac{(k+1)^2(\nu_\sigma + \varepsilon)(f(x_0) + \varepsilon')^{\frac{n-2}{n}}}{4k_0 Cm^{\frac{2}{n}}} < 1$$

alors d'après (9) et (10) : $\| (\nabla(\eta \varphi_i^{\frac{k_0+1}{2}}) \|_2^2 \leqslant C_7$, ce qui entraîne :

$$\int_{B\left(\frac{\delta'}{2}\right)} \varphi_i^{\frac{n(k_0+1)}{n-2}} \leqslant C_7$$

Puisque $\overline{\lim} \int_{B\left(\frac{\delta'}{2}\right)} f \varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} > 0$ et $f > 0$, $\overline{\lim} \int_{B\left(\frac{\delta'}{2}\right)} \varphi_i^{\frac{2n}{n-2}} = a > 0$.

On peut extraire de la suite (φ_i) une sous-suite (φ_j) telle que pour tout j :

$$0 < a \leqslant \int_{B\left(\frac{\delta}{2}\right)} \varphi_j^{\frac{2n}{n-2}} \leqslant \left(\int_{B\left(\frac{\delta}{2}\right)} \varphi_j^{\frac{n(k_0+1)}{n-2}} \right)^{\frac{n+2}{n(k_0+1)}} \left(\int_{B\left(\frac{\delta}{2}\right)} \varphi_j^{\frac{n(k_0+1)}{nk_0-2}} \right)^{\frac{nk_0-2}{n(k_0+1)}}$$

$$\leqslant C_8 \left(\int_{B\left(\frac{\delta}{2}\right)} \varphi_j^{\frac{n(k_0+1)}{nk_0-2}} \right)^{\frac{nk_0-2}{n(k_0+1)}}$$

ceci en utilisant l'inégalité de Hölder.

Posons $k_1 = \dfrac{n(k_0+1)}{nk_0 - 2}$, le choix de k_0 donne : $1 < k_1 < \dfrac{2n}{n-2}$ il s'ensuit : $\| \varphi_j \|_{k_1\left(B\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)} \geqslant C_9 > 0$.

On sait que la suite (φ_j) est bornée dans H_1^2, on peut donc en extraire une sous suite (φ_k) qui converge faiblement dans H_1^2, fortement dans L_{k_1} et presque partout. On procède alors comme pour la fin de la démonstration du lemme 1 : La suite (φ_k) et la suite (φ_{k-1}) convergent vers une solution φ de classe C^∞ de (2) et $\varphi > 0$ car φ ne peut être identiquement nulle puisque $\| \varphi \|_{k_1\left(B\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)} \geqslant C_9 > 0$. Ceci termine la démonstration du théorème.

Démonstration du corollaire 1. — Comme, par définition,

$$\nu_\sigma = \inf\left(\| \nabla\phi \|_2^2 + C\| \phi \|_2^2\right)$$

sur l'ensemble des fonctions de H_1^2 vérifiant $\sigma\phi = \phi$ et $\displaystyle\int f\phi^{\frac{2n}{n-2}} = 1$, en choisissant $\phi = C^{te} = \left(\displaystyle\int f\right)^{\frac{2-n}{2n}}$ on déduit : $\nu_\sigma \leqslant C\left(\displaystyle\int f\right)^{\frac{2-n}{n}}$.

Si $\nu_\sigma < C\left(\displaystyle\int f\right)^{\frac{2-n}{n}}$ on applique directement le théorème.

Si $\nu_\sigma = C\left(\displaystyle\int f\right)^{\frac{2-n}{n}}$, en choisissant $\varphi_0 = \left(\displaystyle\int f\right)^{\frac{2-n}{n}}$ dans la relation (3) on obtient : pour tout i, $\lambda_i = b(\varphi_i, \varphi_i) = b(\varphi_{i-1}, \varphi_{i-1}) = \nu_\sigma = C\left(\displaystyle\int f\right)^{\frac{2-n}{n}}$ de la relation (5) on déduit $b(\varphi_i - \varphi_{i-1}, \varphi_i - \varphi_{i-1}) = 0$ alors $\varphi_i = \varphi_{i-1}$ pour tout i et $\varphi = C^{te} = \left(\displaystyle\int f\right)^{\frac{2-n}{2n}}$ est solution de l'équation (2).

Démonstration du corollaire 2. — Une fonction radiale de pôle P est invariante par toute isométrie laissant fixe le point P. Sur la sphère cette propriété caractérise les fonctions radiales.

Si la sphère S_n est de dimension paire montrons qu'il existe toujours une isométrie σ qui a comme seuls points fixes P et son point diamétralement opposé P′ et telle que $m_\sigma(x)$ soit aussi grand que l'on veut si $x \neq P$ et $x \neq P'$. Dans $\mathbb{R}^{n+1}$ considérons la droite D passant par P et P′. $\mathbb{R}^{n+1}$ pour n pair, $n \geqslant 2$ se décompose en somme directe orthogonale : $D \ominus \pi_1 \ominus \ldots \ominus \pi_k$ où les π_i sont des plans. Considérons l'isométrie de $\mathbb{R}^{n+1}$: $\mathfrak{b} = i \ominus r_1 \ominus r_2 \ldots \ominus r_k$ où i est l'identité sur D et les r_i sont des rotations d'ordre m sur π_i. Si $m > 1$, $\mathfrak{b}$ a comme sous espace invariant la droite D, et est d'ordre m. La restriction de ƀ à la sphère S_n est une isométrie σ de S_n telle que $m_\sigma(x) = m$ si $x \neq P$ et $x \neq P'$ et n'a que P et P' comme points invariants. Si R' est une fonction radiale de pôle P il suffit alors d'appliquer le corollaire 1 pour σ construit précédemment lorsque l'on a choisi $m > (\sup_{x \in S_n} R'(x)/R')^{\frac{n-2}{n}}$. De plus les fonctions φ_i de la relation (3) avec $\varphi_0 = \left(\int f\right)^{\frac{2-n}{2n}}$ sont invariantes par toutes les isométries laissant fixe le point P, la fonction φ a alors la même propriété, ce sont donc des fonctions radiales de pôle P.

REMARQUE 1. — Si la sphère est de dimension impaire, toute isométrie laissant fixe P et P' admet nécessairement des points x distincts de P et P' tels que $m_\sigma(x) \leqslant 2$. Pour pouvoir appliquer le corollaire 1 il faudrait donc rajouter une hypothèse.

REMARQUE 2. — Si on utilise les mêmes méthodes, non sur la sphère S_n, mais sur une variété riemannienne compacte quelconque V de dimension $n > 2$, de métrique g, on montre le résultat suivant : Soit $\mathscr{I}(V)$ le groupe des isométries de V, $\mathscr{I}(V)$ opère sur V, on note $m(V) = \inf_{x \in V}$ (card orbite de x) et R la courbure scalaire de V (sans restreindre la généralité on suppose $\left(\int_V dV = 1\right)$. Si $\int_V R\,dV \leqslant n(n-1)(m(V)\omega_n)^{2/n}$ alors V à la propriété de Yamabé : il existe une métrique g' conforme à g telle que la courbure scalaire associée à g' soit constante.

Dans le cas où $m(V) = 1$, on retrouve ainsi un résultat de Aubin [*1*].

Démonstration. — Il s'agit de montrer l'existence d'une fonction φ de classe C^∞ sur V, strictement positive vérifiant l'équation :

$$\Delta\varphi + \frac{n-2}{4(n-1)} R\varphi = \lambda\varphi^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{11}$$

La fonction courbure scalaire R est évidemment invariante par toutes les isométries de (V, g). Le schéma de la démonstration est alors identique à celui du théorème sur la sphère. On considère la suite de fonctions φ_i définies par :

$$\Delta\varphi_i + \frac{n-2}{4(n-1)} R\varphi_i = \lambda_i \varphi_{i-1}^{\frac{n+2}{n-2}}$$

où l'on a choisi $\varphi_0 = 1$ et λ_i de sorte que $\| \varphi_i \|_{\frac{2n}{n-2}} = 1$. Les fonctions φ_i sont invariantes par toutes les isométries de (V, g).

On obtient ensuite une relation analogue à la relation (9) :

$$\| \nabla(\eta\varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \|_2^2 \leqslant \frac{(k+1)^2\left(\frac{1}{c}+\varepsilon\right)}{4km^{2/n}(V)} \lambda_i \| \nabla(\eta\varphi_i^{\frac{k+1}{2}}) \|_2 \| \nabla(\eta\varphi_{i-1}^{\frac{k+1}{2}}) \|_2$$
$$+ C_{10} \| \nabla\eta\varphi_i^{\frac{k+1}{2}} \| + C_{11}(\varepsilon)$$

ε positif pouvant être choisi aussi petit que l'on veut.

De plus $\lambda_i \leqslant b(\varphi_0, \varphi_0) = \frac{n-2}{4(n-1)} \int R dV$ où

$$b(\phi, \psi) = \int \nabla^i \phi \nabla_i \psi dV + \frac{(n-2)}{4(n-1)} \int R\phi\psi dV.$$

Comme $\int R dV \leqslant n(n-1)(m(V)\omega_n)^{\frac{2}{n}}$, si pour i assez grand $\lambda_i < \frac{n-2}{4(n-1)} \int R dV$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ et $k > 1$ pour que $\frac{(k+1)^2\left(\frac{1}{c}+\varepsilon\right)}{4km^{2/n}(V)} \lambda_i < 1$, on conclut alors comme précédemment sur la sphère. Si $\lambda_i = \frac{n-2)}{4(n-1)} \int R dV$ pour tout i, on procède comme pour la démonstration du corollaire 1 et $\varphi = 1$ est solution de l'équation (11).

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Aubin, Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabé concernant la courbure scalaire. *J. Math. pures et appl.*, t. **55**, 1976, p. 269-296.

[2] T. Aubin, Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire. *J. funct. Anal.*, t. **32**, 1979, p. 148-174.

[3] M.-S. Berger, *Non linearity and Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1977.

[4] Kazdan and Warner, Scalar curvature and conformal deformation of riemannian structure. *J. diff. Geom.*, t. **10**, 1975, p. 113-134.

[5] J. Moser. A sharp form of an inequality of N. Trudinger. *Indiana Univ. Math.*, t. **20**, 1971, p. 1077-1092.

[6] M. Vaugon, Équations différentielles non linéaires sur les variétés riemanniennes compactes. *Bull. Sc. math.*, t. **106**, 1982, p. 351-367.

[7] H. Yamabe, On a deformation of riemannian structures on compact manifold. *Osaka math. J.*, t. **12**, 1960, p. 21-37.

((Manuscrit reçu le 15 novembre 1984)

(révisé le 3 janvier 1985)