Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 3, n° 1, 1986, p. 67-76. *Analyse non linéaire*

Vers une notion de dérivation fonctionnelle causale

par

Michel FLIESS
Laboratoire des Signaux et Systèmes,
C. N. R. S.-E. S. E., Plateau du Moulon,
91190 Gif-sur-Yvette

RÉSUMÉ. — Les notions de dérivations issues de l'analyse fonctionnelle classique ne conviennent pas toujours à une évolution dynamique. Nous montrons qu'une dérivation, introduite par R. Ree à propos des intégrales itérées de K.-T. Chen, possède une interprétation infinitésimale qui prend naturellement en compte la causalité. Pour cette dérivation, le développement en série génératrice non commutative apparaît comme un développement taylorien.

ABSTRACT. — The notions of derivatives stemming from classical functional analysis do not always mesh well with dynamic evolution. We show here that a derivative, which was introduced by R. Ree in relation with K.-T. Chen's iterated integrals, possesses an infinitesimal interpretation that takes most naturally causality into account. For this derivation, the non-commutative generating power series expansions are the corresponding Taylor series expansions.

INTRODUCTION

Volterra [*26*] [*27*] est à l'origine des notions aujourd'hui classiques de dérivées de Fréchet et Gâteaux (1). Il avait été conduit à la généralisation

(1) On trouvera une intéressante étude historique des débuts de l'analyse fonctionnelle chez Siegmund-Schultze [*24*].

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - Vol. 3, 0294-1449
86/01/67/10/\$ 3,00

suivante des développements de Taylor

$$(1)\quad k_0+\int_0^1 k_1(\tau_1)u(\tau_1)d\tau_1+\int_0^1\int_0^1 k_2(\tau_2,\tau_1)u(\tau_2)u(\tau_1)d\tau_2 d\tau_1+\dots$$
$$+\int_0^1\dots\int_0^1 k_s(\tau_s,\dots,\tau_1)u(\tau_s)\dots u(\tau_1)d\tau_s\dots d\tau_1+\dots,$$

où :

— $u : [0,1] \to R$ est une fonction,

— les noyaux $k_s : [0,1]^s \to R$ sont les analogues des dérivées usuelles. Depuis une trentaine d'années, pour tenir compte de l'évolution dynamique, ingénieurs et physiciens ont introduit des développements de type (1) avec la différence essentielle d'une borne d'intégration supérieure variable

$$(2)\quad k_0(t)+\int_0^t k_1(t,\tau_1)u(\tau_1)d\tau_1+\int_0^t\int_0^t k_2(t,\tau_2)\tau_1)u(\tau_2)u(\tau_1)d\tau_2 d\tau_1+\dots$$
$$+\int_0^t\int_0^t k_s(t,\tau_s,\dots,\tau_1)u(\tau_1)\dots u(\tau_1)d\tau_s\dots d\tau_1$$
$$+\dots.$$

Les buts poursuivis ont été des plus variés. Les références sont innombrables. En ingénierie, contentons-nous de citer l'article déjà ancien de Barrett [*1*] et les livres plus récents de Schetzen [*23*] et Rugh [*21*]. Pour la mécanique des milieux continus, renvoyons à Findley, Lai et Onaran [*7*]. En physique statistique et quantique, les fonctionnelles revêtent, notamment à travers l'intégrale de Feynman, un caractère probabiliste non abordé ici. Mentionnons cependant les livres de Rzewuski [*22*] et Rosen [*19*].

Depuis une douzaine d'années, à la suite de travaux en théorie des automates et langages (cf. Berstel et Reutenauer [*2*]), l'auteur (cf. [*8*] [*9*] [*11*] [*12*]) s'est fait l'avocat d'un nouveau développement fonctionnel ([2]) utilisant indéterminées non commutatives et intégrales itérées, introduites par Chen (cf. [*6*]) pour des études de topologie. Des propriétés algébriques remarquables des intégrales itérées, dégagées pour la première fois par Ree [*17*], on déduit qu'il s'agit d'un développement taylorien naturel par rapport à une dérivation qu'il convient de nommer *causale*. Cela est d'autant plus intéressant qu'il a souvent été affirmé, par analogie avec (*1*), que (*2*) est aussi un développement de Taylor, sans que rien ne permette de justifier une telle assertion. Se trouvent ainsi posés les linéaments d'une analyse fonctionnelle non linéaire et causale.

Une version préliminaire a été présentée en [*10*].

([2]) Grâce à ce développement, on peut calculer avec la plus extrême précision les noyaux de (2) (cf. [*8*] [*11*]).

I. PROLÉGOMÈNES ALGÉBRIQUES

1) Opérations sur les polynômes et les séries formels.

Soit $X = \{ x_0, x_1, \dots, x_m \}, m \geqslant 0$, un ensemble fini, non vide. On désigne par Mo(X) le *monoïde libre* engendré par X (cf. Bourbaki [*3*]). Un élément de Mo(X) est un *mot*, c'est-à-dire une suite $x_{j_\nu} \dots x_{j_0}, \nu \geqslant 0, x_{j_0}, \dots, x_{j_\nu} \in X$. Le mot *vide* est la suite vide notée 1. Le produit est la *juxtaposition* :

$$(x_{j_\nu} \dots x_{j_0})(x_{k_\mu} \dots x_{k_0}) = x_{j_\nu} \dots x_{j_0} x_{k_\mu} \dots x_{k_0} .$$

Il est associatif, d'élément neutre le mot vide.

K étant un corps commutatif de caractéristique nulle, définissons les ensembles $K < X >$ et $K \ll X \gg$ des polynômes et séries formels en les indéterminées non commutatives $x_j \in X$, à coefficients dans K. Un élément $s \in K \ll X \gg$ est noté

$$s = \Sigma \{ (s, w)w \mid w \in \mathrm{Mo}(X) \}, \qquad (s, w) \in K .$$

Un polynôme est une série avec au plus un nombre fini de coefficients non nuls. L'addition est donnée par

$$s_1 + s_2 = \Sigma \{ [(s_1, w) + s_2, w)]w \mid w \in \mathrm{Mo}(X) \} .$$

Le produit est le *mélange* ([3]), noté $\sqcup\!\sqcup$, introduit il y a près de trente ans par Ree [*17*]. Définissons-le par récurrence sur la longueur des mots :

— $\forall w \in \mathrm{Mo}(X), 1 \sqcup\!\sqcup w = w \sqcup\!\sqcup 1 = w$,
— $\forall w, w' \in \mathrm{Mo}(X), x, x' \in X$,

$$(xw) \sqcup\!\sqcup (x'w') = x[w \sqcup\!\sqcup (x'w')] + x'[(xw) \sqcup\!\sqcup w'] . \tag{3}$$

Exemples. — (*i*) $x_0 x_1 \sqcup\!\sqcup x_2 = x_0 x_1 x_2 + x_0 x_2 x_1 + x_2 x_0 x_1$.

(*ii*) $$x_0 x_1 \sqcup\!\sqcup x_1 = 2x_0(x_1)^2 + x_1 x_0 x_1 .$$

(*iii*) $$(x_0)^k \sqcup\!\sqcup (x_0)^{n-k} = \binom{n}{k} (x_0)^n .$$

Pour $s_1, s_2 \in K \ll X \gg$, il vient

$$s_1 \sqcup\!\sqcup s_2 = \Sigma \{ (s_1, w_1)(s_2, w_2) w_1 \sqcup\!\sqcup w_2 \mid w_1, w_2 \in \mathrm{Mo}(X) \} .$$

Avec une seule indéterminée x_0, on a

$$s_1 \sqcup\!\sqcup s_2 = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (s_1, (x_0)^k)(s_2, (x_0)^{n-k})(x_0)^n .$$

([3]) En anglais, *shuffle product*.

On retrouve l'algèbre des séries génératrices exponentielles de la combinatoire (cf. Riordan [*18*]).

Avec l'addition et ce produit, $K < X >$ et $K \ll X \gg$ sont des K-algèbres commutatives, unifères, d'élément unité 1. Comme le montre Ree [*17*], le mélange est intimement lié au produit, sans doute plus usuel, dit de juxtaposition ou de Cauchy :

$$s_1 s_2 = \Sigma \{ (s_1, w_1)(s_2, w_2) w_1 w_2 \mid w_1, w_2 \in \mathrm{Mo}(X) \} .$$

On explicite cela à travers le langage des algèbres de Hopf (cf. Bourbaki [*3*], Sweedler [*25*]). Les polynômes $K < X >$ forment une K-*bigèbre* par rapport à la juxtaposition et à la comultiplication

$$K < X > \ \to \ K < X > \otimes_K K < X >, \qquad x_j \mapsto x_j \otimes 1 + 1 \otimes x_j,$$
$$j = 0, 1, \ldots, m .$$

La K-algèbre duale de $K < X >$ relativement à la structure de *cogèbre* s'identifie à $K \ll X \gg$ munie du produit de mélange (cf. Chen [*5*], Sweedler [*25*]).

Remarque. — D'après les calculs de Ree [*17*], ces opérations ont une connexion profonde avec les crochets de Lie, c'est-à-dire la K-algèbre de Lie libre engendrée par X. Cette relation s'éclaire par la théorie des groupes formels (cf. Oberst [*16*]).

2) Dérivations et développements de Taylor.

Rappelons que, pour une K-algèbre $\mathscr{A}$, un endomorphisme $D : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ est une K-dérivation si, et seulement si, il est K-linéaire et vérifie $D(ab) = D(a)b + aD(b)$, $a, b \in \mathscr{A}$. Pour tout $j = 0, 1, \ldots, m$, introduisons l'application K-linéaire $S_j : K \ll X \gg \ \to \ K \ll X \gg$ définie, pour tout $w \in \mathrm{Mo}(X)$, par

$$S_j(w) = \begin{cases} w', & \text{si} \quad w = x_j w' , \\ 0, & \text{sinon} . \end{cases}$$

Avec $s \in K \ll X \gg$, il vient

$$S_j(s) = \Sigma \{ (s, w) S_j(w) \mid w \in \mathrm{Mo}(X) \} .$$

Ree [*17*] a remarqué que S_j est une dérivation.

PROPOSITION I.1. — S_j est une dérivation de $K < X >$ et de $K \ll X \gg$ considérés comme K-algèbres par rapport au mélange.

Démonstration. — (3) conduit à $S_j(s_1 \sqcup\!\sqcup s_2) = S_j(s_1) \sqcup\!\sqcup s_2 + s_1 \sqcup\!\sqcup S_j(s_2)$, s_1 $s_2 \in K \ll X \gg$. ■

Le terme constant ([4]) de la série $S_{j_0} \ldots S_{j_\nu}(s)$ est le coefficient du mot $x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}$ dans s. On obtient ainsi l'analogue d'un développement de Taylor (Ree [*17*]).

PROPOSITION I.2. — Pour tout $s \in K \ll X \gg$, il vient

$$s = s(0) + \sum_{\nu \geqslant 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^{n} S_{j_0} \ldots S_{j_\nu}(s)(0) x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}. \tag{4}$$

Notons le sens contraire des suites $x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}$ et $S_{j_0} \ldots S_{j_\nu}$.

Remarques. — (*i*) On obtient des résultats identiques avec les dérivations droites R_j :

$$R_j(w) = \begin{cases} w', & \text{si} \quad w = w'x_j, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Dérivations gauches et droites commutent : $S_j R_{j'} = R_{j'} S_j$. Par contre, pour $j \neq j'$, S_j et $S_{j'}$, R_j et $R_{j'}$ ne commutent pas.

(*ii*) Avec la structure de K-algèbre non commutative due à la juxtaposition, il est beaucoup plus délicat d'écrire dans $K \ll X \gg$ une formule de Taylor (Hausdorff [*14*], Magnus, Karrass et Solitar [*15*], Rota, Sagan et Stein [*20*]).

II. FONCTIONNELLES CAUSALES

1) Intégrales itérées.

Considérons un chemin $\mathscr{C} = \{ \xi_0(\tau), \xi_1(\tau), \ldots, \xi_n(\tau) \mid 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \}$ de R^{m+1}, supposé continu à variation bornée. L'*intégrale itérée* $\int_{\mathscr{C}} d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}$, introduite par Chen [*4*], se définit par récurrence sur la longueur :

— $\int_{\mathscr{C}} d\xi_j = \xi_j(1) - \xi_j(0), j = 0, 1, \ldots, m,$

— $\int_{\mathscr{C}} d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0} = \int_0^1 d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_0^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \ldots d\xi_{j_0}.$

Une telle intégrale prend même valeur sur deux chemins déduits l'un de l'autre par translation. Comme déjà dit dans l'introduction, ces intégrales jouent un rôle important en topologie.

([4]) Par analogie avec l'analyse classique, le *terme constant* $s(0)$ est le coefficient du mot vide.

Remarque. — En stochastique, on rencontre des chemins, la trajectoire d'une particule brownienne par exemple, à variation non bornée. Il est néanmoins possible de définir les intégrales itérées (voir [*13*] et les références citées).

2) **Fonctionnelles analytiques de chemins.**

Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des chemins de R^{m+1} vérifiant les deux conditions suivantes :

— Tout chemin est issu de l'origine. Cette condition n'est pas restrictive pour les intégrales itérées.

— $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ sont C^1 par morceaux. Posons $\xi_j(\tau) = \int_0^\tau u_j(\sigma)d\sigma$, où les u_j sont continues par morceaux. Soit $M = \sup \{ | u_j(\tau) | \mid \tau \in [0,1], j = 0, 1, \ldots, m \}$.

Désormais K sera le corps R des réels (5). Soit $\mathfrak{g} \in R \ll X \gg$, $X = \{ x_0, x_1, \ldots, x_m \}$, une série telle qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant :

$$| (\mathfrak{g}, x_j \ldots x_j) | \leqslant (v+1)!\, C^{v+1} . \tag{5}$$

Remplaçons dans $\mathfrak{g}$ le mot $x_{j_v} \ldots x_{j_0}$ par l'intégrale itérée correspondante $\int_{\mathscr{C}} d\xi_{j_v} \ldots d\xi_{j_0}$:

$$\mathfrak{g}(\mathscr{C}) = (\mathfrak{g}, 1) + \sum_{v \geqslant 0} \sum_{j_0, \ldots, j_v = 0}^{m} (\mathfrak{g}, x_{j_v} \ldots x_{j_0}) \int_{\mathscr{C}} d\xi_{j_v} \ldots d\xi_{j_0} . \tag{6}$$

Le résultat suivant est immédiat :

Lemme II.1. — Pour M suffisamment « petit », la série numérique (6) est absolument convergente.

Une fonction de chemins, ou, comme disait Volterra [*26*], de lignes sera dite *analytique* si, et seulement si, elle provient d'une série formelle $\mathfrak{g}$ par la formule (6), avec un second membre absolument convergent. La réciproque de (5) se déduit immédiatement du lemme d'Abel.

Il importe de comprendre que les fonctionnelles précédentes généralisent les fonctions analytiques ordinaires. Pour cela, rappelons qu'une série $\mathfrak{g}$ de $R \ll X \gg$ est dite *échangeable* [*8*] si deux mots différant uniquement par l'ordre des lettres ont même coefficient. $\mathfrak{S}_v$ désignant le groupe symétrique sur $\{ 0, 1, \ldots, v \}$, il vient, pour tout $\alpha \in \mathfrak{S}_v$, $(\mathfrak{g}, x_{j_{\alpha v}} \ldots x_{j_{\alpha 0}}) = (\mathfrak{g}, x_{j_v} \ldots x_{j_0})$.

(5) On pourrait prendre aussi le corps C des complexes.

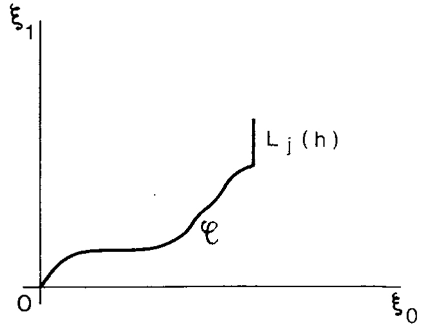
D'après l'identité, qu'on vérifie par intégration par parties,

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_\nu}\int_{\mathscr{C}} d\xi_{j_{\alpha\nu}}\ldots d\xi_{j_{\alpha 0}} = \xi_{j_\nu}(1)\ldots\xi_{j_0}(1),$$

une série échangeable, qui est un être « faussement » non commutatif, définit une fonction « ordinaire » de la seule extrémité du chemin. Concluons de façon imagée en écrivant que le caractère fonctionnel est « mesuré » par la non-commutativité de la série génératrice.

3) Dérivations causales.

A l'extrémité d'un chemin $\mathscr{C} = \{\,\xi_0(\tau), \xi_1(\tau), \ldots, \xi_m(\tau)\,\} \in \mathfrak{C}$, traçons un segment de droite $\mathrm{L}_j(h) = \{\,\eta_k(\sigma) = \xi_k(1), \eta_j(\sigma) = \xi_j(1) + h\sigma \mid k \neq j, 0 \leqslant \sigma \leqslant 1\,\}$. Soit $\mathrm{L}_j(h)\mathscr{C}$ le chemin obtenu par juxtaposition :



Le résultat suivant est facile.

LEMME II.2.

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\displaystyle\int_{\mathrm{L}_j(h)\mathscr{C}} d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_\nu} - \int_{\mathscr{C}} d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_0}}{h} = \begin{cases}\displaystyle\int_{\mathscr{C}} d\xi_{j_{\nu-1}}\ldots d\xi_{j_0}, & \text{si} \quad j_\nu = j,\\ 0, & \text{sinon}.\end{cases}$$

M et h étant suffisamment petits, (6) converge absolument pour $\mathrm{L}_j(h)\mathscr{C}$. L'application de ce qui précède terme à terme fournit une traduction infinitésimale de la proposition I.1.

PROPOSITION II.3.

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\mathrm{g}(\mathrm{L}_j(h)\mathscr{C}) - \mathrm{g}(\mathscr{C})}{h} = \mathrm{S}_j(\mathrm{g})(\mathscr{C})$$

Le terme constant $\mathrm{g}(0) = (\mathrm{g}, 1)$ est la valeur numérique de la fonctionnelle pour le chemin réduit à l'origine. Voici la version analytique du développement de Taylor formel de la proposition I.2.

PROPOSITION II.4. — Pour M suffisamment petit, il vient

$$g(\mathscr{C}) = g(0) + \sum_{\nu \geqslant 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^{n} S_{j_0} \ldots S_{j_\nu}(g)(0) \int_{\mathscr{C}} d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}. \tag{7}$$

Les dérivées et, donc, le développement de Taylor étant uniques, on obtient le résultat suivant dont la démonstration en [*8*] n'était pas satisfaisante.

COROLLAIRE II.5. — Deux fonctionnelles de chemins définies par des séries non commutatives sont égales si, et seulement si, les séries le sont.

La série est dite *génératrice* de la fonctionnelle (cf. [*8*]). En Automatique, on rencontre un autre paramétrage des chemins. Les $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m : [0, t] \to R$ sont définies sur un segment à extrémité droite variable, et $\xi_0(\tau) = \tau$ est le temps. Alors, les u_i, $i = 1, \ldots, m$, sont les *commandes*, ou *entrées*, ou *contrôles*. La construction précédente des dérivées se traduit par un accroissement $\Delta t > 0$ du temps. C'est pourquoi les dérivations et le développement taylorien qui en découlent seront dits *causaux*.

4) Quelques commentaires.

(*i*) Il existe une analogie étroite entre dérivations causales et dérivations de Lie par rapport à des champs de vecteurs. A l'image de l'automatique, considérons le système

$$\begin{cases} dq = \sum_{j=0}^{n} A_j(q) d\xi_j = \sum_{j=0}^{n} u_j(t) A_j(q) dt \\ y(t) = h(q). \end{cases} \tag{8}$$

L'*état* q appartient à une variété R-analytique Q, de dimension finie. Les champs de vecteurs $A_0, A_1, \ldots, A_m : Q \to TQ$ (fibré tangent) et la *fonction de sortie* $h : Q \to R$ sont analytiques dans un voisinage de l'état initial $q(0)$. D'après la *formule fondamentale* [*8*] [*11*], la sortie y est une fonctionnelle analytique de série génératrice

$$g = h(q(0)) + \sum_{\nu \geqslant 0} \sum_{j_0, \ldots, j_\nu = 0}^{n} A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} h(q(0)) x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}.$$

$A_{j_0} \ldots A_{j_\nu} h$ est la dérivée de Lie itérée de h par rapport aux champs de vecteurs. Il est alors clair que la définition infinitésimale de $S_j(g)$ correspond à celle de la dérivée de Lie par rapport à A_j. Le système de série génératrice $S_j(g)$ a même dynamique que (8) et $A_j h$ comme fonction de sortie.

(*ii*) Supposons les u_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, continues. Nos fonctionnelles ont alors pour source et but les espaces de Banach $C^0([0, 1]^{m+1}, R)$ et $C^0([0, 1], R)$ des fonctions continues munies de la topologie de la convergence uniforme. Il n'est pas difficile de vérifier que

$$\sum_{j_0,\ldots,j_1=0}^{n} (g, x_{j_\nu} \ldots x_{j_0}) \int_0^1 d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_0}$$

est la dérivée de Fréchet d'ordre $\nu + 1$ de la fonctionnelle g. Dérivations causales et dérivations fonctionnelles usuelles ne sont donc pas sans rapport.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. F. BARRETT, The use of functionals in the analysis of non-linear physical systems, *J. Electronics Control*, t. **15**, 1963, p. 567-615.

[*2*] J. BERSTEL et C. REUTENAUER, *Les séries rationnelles et leurs langages*, Masson, Paris, 1984.

[*3*] N. BOURBAKI, *Algèbre I* (chap. 1 à 3), Hermann, Paris, 1970.

[*4*] K.-T. CHEN, Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula, *Ann. of Math.*, t. **65**, 1957, p. 163-178.

[*5*] K.-T. CHEN, Algebraic paths, *J. Algebra*, t. **10**, 1968, p. 8-36.

[*6*] K.-T. CHEN, Iterated path integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **83**, 1977, p. 831-879.

[*7*] W. N. FINDLEY, J.-S. LAI et K. ONARAN, *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[*8*] M. FLIESS, Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, *Bull. Soc. Math. France*, t. **109**, 1981, p. 3-40.

[*9*] M. FLIESS, Réalisation locale des systèmes non linéaires, algèbres de Lie filtrées transitives et séries génératrices non commutatives, *Inventiones Math.*, t. **71**, 1983, p. 521-537.

[*10*] M. FLIESS, *On the concept of derivatives and Taylor expansions for nonlinear input-output systems*, Proc. 22nd IEEE Conf. Decision Control, p. 643-646, San Antonio, TX, 1983.

[*11*] M. FLIESS, M. LAMNABHI et F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, An algebraic approach to nonlinear functional expansions, *IEEE Trans. Circuits Systems*, t. **30**, 1983, p. 554-570.

[*12*] M. FLIESS et F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, Application of a new functional expansion to the cubic anharmonic oscillator, *J. Math. Physics*, t. **23**, 1982, p. 495-502.

[*13*] M. FLIESS et D. NORMAND-CYROT, *Algèbres de Lie nilpotentes, formule de Baker-Campbell-Hausdorff et intégrales itérées de K. T. Chen*, Séminaire de Probabilités XVI 1980/1981, J. Azéma et M. Yor eds., p. 257-267, *Lect. Notes Math.* 920, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[*14*] F. HAUSDORFF, Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie, *Leipziger Ber.*, t. **58**, 1906, p. 19-48.

[*15*] W. MAGNUS, A. KARRASS et D. SOLITAR, *Combinatorial Group Theory*, Interscience, New York, 1966.

[*16*] U. OBERST, *Actions of formal groups on formal schemes. Application to control theory and combinatorics*, Séminaire M.-P. Malliavin, Paris, 1983.

[*17*] R. REE, Lie elements and an algebra associated with shuffles, *Ann. of Math.*, t. **68**, 1958, p. 210-220.

[*18*] J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York, 1958.

[*19*] G. ROSEN, *Formulations of Classical and Quantum Dynamical Theory*, Academic Press, New York, 1969.

[*20*] G.-C. ROTA, B. SAGAN et P. R. STEIN, A cyclic derivative in noncommutative algebra, *J. Algebra*, t. **64**, 1980, p. 54-75.

[*21*] W. J. RUGH, *Nonlinear System Theory*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.

[*22*] J. RZEWUSKI, *Field Theory*, t. **2**, Polish Scientific Publishers, Varsovie, et, Iliffe Books, Londres, 1969.

[*23*] M. SCHETZEN, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, Wiley, New York, 1980.

[*24*] R. SIEGMUND-SCHULTZE, Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozess der Mathematik um 1900, *Arch. History Exact Sc.*, t. **26**, 1982, p. 13-71.

[*25*] M. E. SWEEDLER, *Hopf Algebras*, Benjamin, New York, 1968.

[*26*] V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

[*27*] V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Théorie générale des fonctionnelles*, t. **1**, Gauthier-Villars, Paris, 1936.

(Manuscrit reçu le 29 novembre 1984)