

Perturbation quasi différentielle d'un semi-groupe régularisant dans une échelle d'espaces de Banach

par

Jean DUCHON

La Plaine-Saint-Sauveur, 38160 Saint-Marcellin

et

Raoul ROBERT

21, avenue Plaine-Fleurie, 38240 Meylan

RÉSUMÉ. — Nous établissons un résultat d'existence global en temps pour l'équation d'évolution $u_t + A u = F(u)$, $u(0) = u_0$, où $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe linéaire $S(t)$ régularisant dans une échelle d'espaces de Banach B_p , F un opérateur non linéaire quasi différentiel « assez petit » compatible avec $S(t)$. Nous montrons que pour u_0 assez petit dans B_0 , il existe une solution unique de l'équation telle que $u(t)$ reste borné dans $B_{\alpha, \varepsilon}$, pour un certain $\alpha > 0$. Nous donnons une application au mouvement de l'interface de deux liquides en milieu poreux.

Mots clés : Échelles d'Ovsjannikov, opérateur quasi différentiel, semi-groupe, perturbation.

ABSTRACT. — We give a global existence and uniqueness result for the evolution equation $u_t + A u = F(u)$, $u(0) = u_0$, where $-A$ is the infinitesimal generator of a linear semigroup $S(t)$ smoothing in a scale of Banach spaces B_p and F is a nonlinear quasi differential operator consistent with $S(t)$. We show that for u_0 small enough in B_0 there is a unique solution of the equation such that $u(t)$ remains bounded in $B_{\alpha, \varepsilon}$, for some $\alpha > 0$. We apply this result to the motion of the interface of two liquids in a porous medium.

INTRODUCTION

Introduite par Ovsjannikov [14], l'hypothèse « quasi différentiel » pour un opérateur non linéaire $F(u)$ opérant sur une échelle d'espaces de Banach a servi à établir un résultat d'existence local en temps (version abstraite du théorème de Cauchy-Kowalewski) pour le problème d'évolution $u_t = F(u)$, $u(0) = u_0$. Ce résultat a obtenu un succès notable dans un certain nombre de problèmes non linéaires de la mécanique des fluides (frontières libres notamment) soit parce que ces problèmes sont linéairement mal posés dans C^∞ ([2], [6], [17], [18]), soit faute de mieux ([8], [10], [14], [15], [16]) permettant ainsi en quelque sorte de réaliser un programme minimal consistant à montrer que pour une donnée initiale analytique il existe une solution au problème pendant un certain temps.

Un fait important dans l'application de cette technique est que les opérateurs donnés par les noyaux du potentiel associés au graphe d'une fonction u vérifient cette hypothèse de quasi différentialité dans des échelles de fonctions analytiques convenables, ce qui ouvre un large champ d'application.

Lorsque le problème linéarisé est de nature hyperbolique ou parabolique, il est nécessaire de pousser plus loin l'investigation soit pour montrer l'existence locale en temps dans des espaces peu réguliers (pour ce qui concerne les ondes de surface, voir [3], [5], [11], [20]) soit pour obtenir l'existence globale en temps. Nous donnons dans cet article un résultat abstrait de perturbation où on a existence globale en temps dans le cas parabolique : si $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe linéaire régularisant dans une échelle d'espaces de Banach et si F est un opérateur non linéaire quasi différentiel « compatible » avec le semi-groupe; alors si F et u_0 sont « assez petits » on a existence globale en temps pour le problème d'évolution

$$u_t + A u = F(u), \quad u(0) = u_0.$$

La démonstration consiste à adapter à cette situation les techniques introduites par Nirenberg [12] et Nishida [13].

Nous donnons une application au mouvement de l'interface de deux liquides en milieux poreux; on voit sur cet exemple que pour une donnée initiale dans l'espace de Sobolev H^1 la solution $u(t, \cdot)$ a un prolongement analytique dans une bande dont la largeur croît linéairement avec t . Ce résultat vient compléter, dans le cas où le problème linéarisé est parabolique (ce qui correspond au cas où le liquide le plus lourd est situé initiale-

ment au-dessous), celui obtenu précédemment en [7] (existence locale en temps avec donnée initiale analytique). Pour traiter ce problème, on utilise une estimation des noyaux du potentiel dans une échelle de fonctions analytiques construite à partir de H^1 ; cette estimation est à rapprocher de celle obtenue par C. Sulem, P. L. Sulem, C. Bardos, U. Frisch [17] à partir des fonctions hölderiennes.

QUELQUES NOTATIONS

Nous noterons indifféremment $Df, \partial_x f, f_x, f'$ la dérivée d'une fonction f par rapport à x .

Pour $m=0, 1, \dots$, $H^m = H^m(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Sobolev des $f \in L^2$ telles que $D^k f \in L^2, k=0, 1, \dots, m$. On munira H^m de la norme

$$|f|_{H^m} = c(m) |(1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2} \hat{f}(\xi)|_{L^2},$$

où $\hat{f}(\xi)$ désigne la transformée de Fourier de f et $c(m)$ est une constante telle qu'on ait :

$$\begin{aligned} |fg|_{H^m} &\leq |f|_{H^m} |g|_{H^m}, & \text{pour } m \geq 1, \\ |f|_{H^{m-1}} &\leq |f|_{H^m}, \\ |f|_{H^0} &= |f|_{L^2}. \end{aligned}$$

Λ est l'opérateur défini par transformation de Fourier :

$$\widehat{\Lambda u}(\xi) = |2\pi\xi| \hat{u}(\xi).$$

$V^{1/2} = V^{1/2}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions u localement intégrables telles que :

$$\frac{u(x') - u(x)}{x' - x} \in L^2(dx dx');$$

on vérifie facilement que c'est l'espace des distributions tempérées u telles que \widehat{Du} est localement intégrable et $\int |2\pi\xi|^{-1} |\widehat{Du}|^2 d\xi < +\infty$. On définit alors $\Lambda^{1/2} u$ par $\widehat{\Lambda^{1/2} u} = -i \operatorname{sgn} \xi |2\pi\xi|^{-1/2} \widehat{Du}$.

Pour $k=0, 1, \dots$, $C^k([t, +\infty[; B)$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment dérivables de $[t, +\infty[$ dans l'espace de Banach B . Si $K(x, x')$ est un noyau sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on lui associe l'opérateur K défini formellement par

$$K.f(x) = \int K(x, x') f(x') dx'.$$

Lorsque $K(x, x')$ est singulier, on prend la valeur principale de Cauchy

de l'intégrale, qu'on note \int . Ainsi pour la transformation de Hilbert :

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

Dans ce qui suit, nous désignons par B_ρ , $0 \leq \rho < +\infty$, une échelle d'espaces de Banach; c'est-à-dire que pour $\rho' \leq \rho$ on a $B_\rho \subset B_{\rho'}$ avec l'inégalité des normes $|\cdot|_{\rho'} \leq |\cdot|_\rho$.

On notera $\|K\|_{\mathcal{L}(B)}$ la norme de K comme opérateur continu sur l'espace de Banach B ; et si K opère sur l'échelle B_ρ , c'est-à-dire si K définit un opérateur continu de B_ρ dans B_ρ pour tout $\rho \geq 0$, on notera

$$\|K\|_\rho = \|K\|_{\mathcal{L}(B_\rho)}.$$

$S(t)$, $t \geq 0$, désigne un semi-groupe linéaire fortement continu de contractions sur B_0 , de générateur infinitésimal $-A$. On dira que $S(t)$ est *régularisant* dans l'échelle B_ρ s'il vérifie :

- (1) $S(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur chaque B_ρ .
- (2) $\forall \rho, \forall \rho', 0 \leq \rho' < \rho$, A est continu de B_ρ dans $B_{\rho'}$.
- (3) $|S(t)f|_\rho \leq |f|_{(\rho-t)_+}$, pour tous ρ , $t \geq 0$ et $f \in B_{(\rho-t)_+}$.

Selon une terminologie devenue courante, on appelle *quasi différentiel* un opérateur F tel qu'il existe R et $M > 0$, $F: \{u \mid |u|_\rho \leq R\} \rightarrow B_{\rho'}$ pour $0 \leq \rho' < \rho$,

en vérifiant :

$$(H1) \quad |F(u_1) - F(u_2)|_{\rho'} \leq \frac{M}{\rho - \rho'} |u_1 - u_2|_{\rho}, \text{ pour tous } 0 \leq \rho' < \rho \text{ et } |u_i|_{\rho} \leq R.$$

On dira que F est compatible avec le semi-groupe $S(t)$ s'il vérifie l'hypothèse plus forte :

$$(H2) \quad |S(t)(F(u_1) - F(u_2))|_{\rho'} \leq \frac{M}{\rho - \rho' + t} |u_1 - u_2|_{\rho}, \text{ pour tous } \rho, \rho', t \geq 0$$

tels que $\rho - \rho' + t > 0$ et $|u_i|_{\rho} \leq R$.

1. ÉNONCÉ ET DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT

THÉORÈME 1. — Soit B_{ρ} une échelle d'espaces de Banach, $S(t)$ un semi-groupe linéaire fortement continu de contractions sur B_0 , régularisant dans l'échelle B_{ρ} , de générateur infinitésimal $-A$.

Soit F un opérateur quasi différentiel compatible avec $S(t)$ et tel que $F(0) = 0$.

Alors, si $M < M^*$ ($M^* = 1/(\text{Log}(4 + 2\sqrt{3}) + 3 + \sqrt{3})$), il existe $\varepsilon > 0$, dépendant de R et de M , tel que pour $u_0 \in B_0$, $|u_0|_0 \leq \varepsilon$, le problème d'évolution :

$$(P) \quad \begin{cases} u_t + A u = F(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admette une solution globale u au sens suivant :

(i) $u \in \bigcap_{t>0} C^1([t, +\infty[; B_{\alpha^* t})$, avec, $|u(t)|_{\alpha^* t} \leq R$, $\alpha^* = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$.

(ii) $\forall \eta > 0, S(\eta) u(t) \rightarrow S(\eta) u_0$ dans B_0 lorsque $t \rightarrow 0, t > 0$.

(iii) u vérifie au sens ordinaire, pour tout $t > 0 : u_t + A u = F(u)$.

Une telle solution est unique.

Démonstration. — Commençons par remarquer que les conditions (i), (ii), (iii) sont équivalentes à (i), (ii), (iii'), où :

(iii') u vérifie pour tout $t > 0 :$

$$u(t) = S(t) u_0 + \int_0^t S(t-\tau) F(u(\tau)) d\tau.$$

Soit u vérifiant (i), (ii), (iii). La fonction $|F(u(\tau))|_0$ n'étant pas intégrable au voisinage de $\tau=0$, on ne peut pas appliquer la formule du semi-groupe directement pour obtenir (iii'). Choisissons $t_1 > 0$, on a d'après (H 2) :

$$|F(u(\tau))|_0 \leq \frac{M}{\alpha^* \tau} |u(\tau)|_{\alpha^* \tau} \leq \frac{MR}{\alpha^* \tau},$$

$\tau \rightarrow F(u(\tau))$ est donc intégrable sur $]t_1, t[$ à valeur dans B_0 , et on a :

$$u(t) = S(t-t_1)u(t_1) + \int_{t_1}^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau, \quad \text{pour } t \geq t_1.$$

Fixons $t > 0$ et faisons tendre t_1 vers 0, alors $S(t-t_1)u(t_1) \rightarrow S(t)u_0$ d'après (ii). D'autre part, la fonction $\tau \rightarrow S(t-\tau)F(u(\tau))$ est continue et intégrable sur $]0, t[$ à valeur dans B_0 ; en effet, d'après l'hypothèse (H 2), on a :

$$|S(t-\tau)F(u(\tau))|_0 \leq \frac{M}{\alpha^* \tau + t - \tau} |u(\tau)|_{\alpha^* \tau} \leq \frac{MR}{\alpha^* \tau + t - \tau}.$$

On obtient donc en passant à la limite :

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau,$$

d'où u vérifie (iii').

Réciproquement si u vérifie (i), (ii), (iii'), on montre par un calcul direct que u vérifie (iii).

On va obtenir une solution de (i), (ii), (iii') comme limite de la suite définie par :

$$u_0(t) = S(t)u_0,$$

$$u_{k+1}(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(u_k(\tau))d\tau, \quad t > 0.$$

Pour que la suite $u_k(t)$ soit définie, on voit en utilisant l'hypothèse (H 2) qu'une condition suffisante raisonnable est d'avoir $u_k(\tau)$ continue à valeur dans $B_{\tau-\alpha_k \tau}$ avec $|u_k(\tau)|_{\tau-\alpha_k \tau} \leq R$ pour une suite α_k croissante convenable, $0 < \alpha_k < 1$.

Fixons $t > 0$, prenons $0 \leq \rho < t - \alpha_k t$, on vérifie facilement que $\tau \rightarrow S(t-\tau)F(u_k(\tau))$ est une fonction continue de $]0, t[$ dans B_ρ qui est

intégrable :

$$|S(t-\tau)F(u_k(\tau))|_\rho \leq \frac{M}{t-\alpha_k\tau-\rho} |u_k(\tau)|_{t-\alpha_k\tau} \leq \frac{MR}{t-\alpha_k t-\rho}.$$

Il s'ensuit que pour tout $t > 0$, $u_{k+1}(t)$ est défini et appartient à B_ρ . On vérifie sans peine que $u_{k+1}(t)$ est continue au sens suivant : $\forall t > 0$ et $\forall \rho$, $0 \leq \rho < t - \alpha_k t$, u_{k+1} est continue au voisinage de t à valeur dans B_ρ .

Nous allons dégager, d'une part les hypothèses à faire sur la suite α_k pour assurer la convergence des itérations et d'autre part les hypothèses à faire sur M et u_0 pour qu'il existe une telle suite α_k .

Nous noterons :

$$v_k(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t)$$

et

$$\lambda_k = \sup_{0 \leq \rho < t - \alpha_k t} \left\{ \frac{t - \alpha_k t - \rho}{\alpha_k t} |v_k(t)|_\rho \right\},$$

le sup étant pris pour tous les $\rho \geq 0$, $t > 0$ vérifiant $\rho < t - \alpha_k t$.

Comme $v_0(t) = \int_0^t S(t-\tau)F(u_0(\tau))d\tau$, on a pour $\rho < t - \alpha_0 t$

$$|v_0(t)|_\rho \leq \int_0^t \frac{M}{t-\rho} |u_0(\tau)|_\tau d\tau,$$

car $|u_0(\tau)|_\tau \leq |u_0|_0 \leq R$; d'où

$$|v_0(t)|_\rho \leq M |u_0|_0 \frac{t}{t-\rho},$$

et donc

$$\lambda_0 \leq \sup_{\rho < t - \alpha_0 t} \left\{ \frac{t - \alpha_0 t - \rho}{\alpha_0 t} \frac{t}{t - \rho} \right\} M |u_0|_0 \leq M |u_0|_0 \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0}.$$

Majorons maintenant λ_k en fonction de λ_{k-1} ; pour cela majorons $|v_k(t)|_\rho$ pour $\rho < t - \alpha_k t$:

$$v_k(t) = \int_0^t S(t-\tau)[F(u_k(\tau)) - F(u_{k-1}(\tau))]d\tau,$$

d'où

$$|v_k(t)|_\rho \leq \int_0^t \frac{M |v_{k-1}(\tau)|_\rho}{\rho(\tau) - \rho + t - \tau} d\tau,$$

pour un choix convenable de $\rho(\tau)$, c'est-à-dire :

$$\rho(\tau) \geq 0$$

et

$$\rho - t + \tau < \rho(\tau) < \tau - \alpha_k \tau, \quad \text{pour } \tau > 0.$$

On prendra :

$$\rho(\tau) = \left[\frac{1}{2}(\tau - \alpha_k \tau) + \frac{1}{2}(\rho - t + \tau) \right]_+,$$

on a :

$$\rho(\tau) = 0$$

pour $\tau \leq \tau^*$, $\tau^* = \frac{t - \rho}{2 - \alpha_k}$.

La définition de λ_{k-1} implique :

$$|v_{k-1}(\tau)|_\rho \leq \lambda_{k-1} \frac{\alpha_{k-1} \tau}{\tau - \alpha_{k-1} \tau - \rho(\tau)} \leq \frac{\lambda_{k-1} \alpha_{k-1} \tau}{\tau - \alpha_k \tau - \rho(\tau)},$$

d'où :

$$|v_k(t)|_\rho \leq M \lambda_{k-1} \alpha_{k-1} \int_0^t \frac{\tau d\tau}{(\rho(\tau) - \rho + t - \tau)(\tau - \alpha_k \tau - \rho(\tau))}.$$

Calculons cette dernière intégrale en la séparant en deux morceaux :

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^*} \frac{\tau d\tau}{(-\rho + t - \tau)(\tau - \alpha_k \tau)} &= \frac{1}{1 - \alpha_k} \text{Log} \left(\frac{2 - \alpha_k}{1 - \alpha_k} \right), \\ \int_{\tau^*}^t \frac{\tau d\tau}{(\rho(\tau) - \rho + t - \tau)^2} &\leq 4t \int_0^t \frac{d\tau}{(t - \rho - \alpha_k \tau)^2} = \frac{4t^2}{(t - \rho)(t - \rho - \alpha_k t)}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement :

$$\lambda_k \leq M \alpha_{k-1} \left[\frac{1}{\alpha_k} \text{Log} \left(\frac{2 - \alpha_k}{1 - \alpha_k} \right) + \frac{4}{\alpha_k^2} \right] \lambda_{k-1}$$

$$\leq M \left[\text{Log} \left(\frac{2-\alpha_k}{1-\alpha_k} \right) + \frac{4}{\alpha_k} \right] \lambda_{k-1}.$$

Examinons comment assurer la condition $|u_k(\tau)|_{\tau-\alpha_k \tau} \leq R$ pour tout $k=0, 1, \dots$ et $\tau > 0$.

Supposons par récurrence cette condition vérifiée jusqu'à $k=n$ et écrivons :

$$u_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^n v_k(t) + u_0(t),$$

d'où

$$|u_{n+1}(t)|_{t-\alpha_{n+1}t} \leq \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k \alpha_k}{\alpha_{n+1} - \alpha_k} + |u_0|_0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k \alpha_k}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} + |u_0|_0.$$

On va choisir la suite α_k de la façon suivante; pour $\alpha_0, 0 < \alpha_0 < 1$, et $\theta > 0$ fixés, on pose :

$$\alpha_{k+1} = \left(1 + \frac{\theta}{(k+1)(k+2)} \right) \alpha_k, \quad k=0, 1, \dots,$$

Il est clair que la suite α_k est croissante et converge vers une limite α . On a :

$$|u_{n+1}(t)|_{t-\alpha_{n+1}t} \leq \frac{1}{\theta} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) \lambda_k + |u_0|_0.$$

Soit alors $M < M^*$, où M^* est défini par :

$$\frac{1}{M^*} = \inf_{0 < x < 1} \left[\text{Log} \left(\frac{2-x}{1-x} \right) + \frac{4}{x} \right] = \text{Log}(4+2\sqrt{3}) + 3 + \sqrt{3},$$

et le minimum est atteint en $x^* = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Si nous fixons maintenant $\alpha = x^*$; pour θ suffisamment petit, on aura :

$$M \left[\text{Log} \left(\frac{2-\alpha_k}{1-\alpha_k} \right) + \frac{4}{\alpha_k} \right] \leq a < 1, \quad \text{pour tout } k.$$

Et comme on a $\lambda_k \leq a^k \lambda_0$, il vient :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t)|_{t-\alpha_{n+1}t} &\leq \frac{\lambda_0}{\theta} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)a^k + |u_0|_0, \\ &\leq |u_0|_0 \left(1 + \frac{2M(1-\alpha_0)}{\theta\alpha_0(1-a)^3} \right), \end{aligned}$$

il ne reste plus maintenant qu'à choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon \left(1 + \frac{2M(1-\alpha_0)}{\theta\alpha_0(1-a)^3} \right) \leq R.$$

On a vu que pour tout k , $u_k \in \bigcap_{t>0} C^0([t, +\infty[; B_{t-\alpha_k t})$. Examinons la convergence de la suite

$$u_{n+1}(\tau) = \sum_{k=0}^n v_k(\tau) + u_0(\tau),$$

comme on a $|v_k(\tau)|_{\tau-\alpha\tau} \leq \frac{\lambda_k \alpha_k}{\alpha - \alpha_k} \leq \frac{\lambda_k \alpha_k}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}$, il s'ensuit que pour tout $t > 0$, $u_n(\tau)$ converge uniformément au sens des fonctions continues de $[t, +\infty[$ dans $B_{t-\alpha t}$ vers une fonction $u(\tau)$; d'où $u \in \bigcap_{t>0} C^0([t, +\infty[; B_{t-\alpha t})$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que u satisfait à (iii').

On a

$$u_{k+1}(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(u_k(\tau))d\tau,$$

pour tout $\tau > 0$, $u_k(\tau) \rightarrow u(\tau)$ dans $B_{\tau-\alpha\tau}$ et donc

$$S(t-\tau)F(u_k(\tau)) \rightarrow S(t-\tau)F(u(\tau))$$

dans B_0 en vérifiant :

$$|S(t-\tau)F(u_k(\tau))|_0 \leq \frac{MR}{t-\alpha\tau}, \quad \text{intégrable sur }]0, t[.$$

Et donc, en appliquant le théorème de Lebesgue, u vérifie (iii').

Montrons alors que u vérifie (ii).

On a pour tout $t > 0$,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau,$$

prenons $\eta > 0$ et appliquons $S(\eta)$, il vient :

$$S(\eta)u(t) = S(\eta)S(t)u_0 + \int_0^t S(t+\eta-\tau)F(u(\tau))d\tau,$$

et on a :

$$\left| \int_0^t S(t+\eta-\tau)F(u(\tau))d\tau \right| \leq \int_0^t \frac{MR}{t+\eta-\alpha\tau}d\tau = \frac{MR}{\alpha} \text{Log} \left(\frac{t+\eta}{t-\alpha t+\eta} \right),$$

cette quantité tend vers 0 avec t et donc $S(\eta)u(t)$ tend vers $S(\eta)u_0$ dans B_0 lorsque $t \rightarrow 0$.

Le point (i) découle de calculs standards à partir de (iii') ($\alpha^* = 1 - \alpha$).

Pour l'unicité, soient u_1, u_2 vérifiant (i), (ii), (iii'); posons

$$v(t) = u_1(t) - u_2(t) \quad \text{et} \quad \lambda = \sup_{0 \leq \rho < t - \alpha t} \left\{ \frac{t - \alpha t - \rho}{\alpha t} |v(t)|_\rho \right\}.$$

On a :

$$v(t) = \int_0^t S(t-\tau)[F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))]d\tau,$$

d'où en prenant $\rho < t - \alpha t$:

$$|v(t)|_\rho \leq \int_0^t \frac{M |v(\tau)|_{\rho(\tau)}}{\rho(\tau) - \rho + t - \tau}d\tau,$$

où $\rho - t + \tau < \rho(\tau) < \tau - \alpha\tau$, et en choisissant

$$\rho(\tau) = \left[\frac{1}{2}(\tau - \alpha\tau) + \frac{1}{2}(\rho - t + \tau) \right]_+,$$

un calcul analogue au précédent donne :

$$\lambda \leq M \left[\text{Log} \frac{2-\alpha}{1-\alpha} + \frac{4}{\alpha} \right] \lambda,$$

d'où $\lambda = 0$, donc $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t > 0$. ■

Un cas particulier important

Prenons comme espace de base $B_0 = H^m$. Soit $S(t)$ le semi-groupe sur H^m engendré par l'opérateur $-\Lambda$, et prenons pour échelle $B_\rho = H_\rho^m = S(\rho) B_0$, avec $|u|_\rho = |S(\rho)^{-1} u|_0$.

Il est alors trivial que $S(t)$ est régularisant dans l'échelle B_ρ . Prenons comme opérateur $F(u) = DG(u)$, où G est un opérateur non linéaire lipschitzien dans l'échelle B_ρ , c'est-à-dire pour R et $M > 0$:

$G : \{|u|_\rho \leq R\} \rightarrow B_\rho$ pour tout $\rho \geq 0$, en vérifiant :

$$|G(u_1) - G(u_2)|_\rho \leq M |u_1 - u_2|_\rho,$$

pour tout $\rho \geq 0$ et $|u_i|_\rho \leq R$.

Vérifions que l'opérateur F ainsi défini est compatible avec $S(t)$, c'est-à-dire satisfait à l'hypothèse (H2).

Ceci provient du lemme suivant.

LEMME 1. — Pour tout $\rho, \rho', t \geq 0$ tels que $\rho + t - \rho' > 0$ et pour toute $f \in B_\rho$, on a :

$$|S(t) Df|_{\rho'} \leq \frac{1/e}{\rho + t - \rho'} |f|_\rho.$$

Démonstration :

$$|S(t) Df|_{\rho'} = c(m) \left| (1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2} e^{(\rho' - t - \rho)|2\pi\xi|} |2\pi i \xi e^{\rho|2\pi\xi|} \hat{f}(\xi) \right|_{L^2(d\xi)},$$

or

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}} |2\pi\xi| e^{-(\rho + t - \rho')|2\pi\xi|} = \frac{1/e}{\rho + t - \rho'},$$

d'où le résultat. ■

On en déduit immédiatement que F vérifie (H2) avec la constante M/e .

Si de plus G vérifie $G(0) = 0$, on peut appliquer le théorème 1 pour le problème d'évolution :

$$\begin{cases} u_t + \Lambda u = DG(u), \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in H^m. \end{cases}$$

En ce qui concerne (ii), on a alors le résultat supplémentaire : $u(t) \rightarrow u_0$ fortement dans H^{m-1} , lorsque $t \rightarrow 0$. En effet, on a pour tout $t > 0$:

$$u(t) = S(t)u_0 + D \int_0^t S(t-\tau) G(u(\tau)) d\tau,$$

or

$$\int_0^t S(t-\tau) G(u(\tau)) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{dans } H^m \text{ lorsque } t \rightarrow 0,$$

$$\left| \int_0^t S(t-\tau) G(u(\tau)) d\tau \right|_0 \leq \int_0^t |G(u(\tau))|_0 d\tau \leq t MR.$$

On peut donc énoncer :

COROLLAIRE 1. — Soit G un opérateur lipschitzien dans l'échelle B_p définie ci-dessus avec $M < eM^*$ (ou M^* est la constante définie dans le théorème 1) et $G(0) = 0$. Alors il existe $\varepsilon > 0$, dépendant de R et de M , tel que pour $u_0 \in H^m$, $|u_0|_{H^m} \leq \varepsilon$, le problème :

$$\begin{cases} u_t + \Lambda u = DG(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admette une solution globale u , au sens suivant :

(i) $u \in \bigcap_{t>0} C^1([t, +\infty[; B_{\alpha^* t})$, avec $|u(t)|_{\alpha^* t} \leq R$, $\alpha^* = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$.

(ii) $u(t) \rightarrow u_0$ dans H^{m-1} lorsque $t \rightarrow 0$, $t > 0$.

(iii) u vérifie au sens ordinaire pour tout $t > 0$: $u_t + \Lambda u = DG(u)$.

Une telle solution est unique.

Le paragraphe suivant va nous donner des exemples d'opérateurs lipschitziens dans l'échelle H_p^1 .

2. ESTIMATION DES NOYAUX DU POTENTIEL DANS L'ÉCHELLE H_p^1

Soit $u(x)$ une fonction réelle définie sur \mathbb{R} , on lui associe les noyaux :

$$p(x, x') = \frac{u(x') - u(x)}{x' - x},$$

$$Z(x, x') = \frac{i}{2\pi} \frac{\partial_x p}{1 + ip},$$

$$X(x, x') = \operatorname{Re} Z(x, x'), \quad Y(x, x') = \operatorname{Im} Z(x, x').$$

Pour obtenir l'estimation de ces noyaux, il nous sera commode d'utiliser une définition équivalente de l'échelle H_ρ^1 ; pour cela, introduisons pour $\rho > 0$:

$$\tilde{H}_\rho^1 = \{u \in H^1; u \text{ a un prolongement analytique dans la bande } x + iy, |y| < \rho \text{ et } \sup_{|y| < \rho} \|u(\cdot + iy)\|_{H^1} < +\infty\},$$

on note $\|u\|_\rho^\sim = \sup_{|y| < \rho} \|u(\cdot + iy)\|_{H^1}$. Et pour $\rho = 0$, $\tilde{H}_0^1 = H^1$. L'équivalence est explicitée par le lemme suivant.

LEMME 2. — Pour tout $\rho \geq 0$, on a $\tilde{H}_\rho^1 = H_\rho^1$ et $\| \cdot \|_\rho^\sim \leq \| \cdot \|_\rho \leq 2 \| \cdot \|_\rho^\sim$.

Démonstration. — La norme sur H_ρ^1 est donnée par :

$$\|u\|_\rho = c(1) |e^{\rho |2\pi\xi|} (1 + |2\pi\xi|^2)^{1/2} \hat{u}(\xi)|_{L^2(d\xi)}.$$

Par ailleurs, pour $u \in \tilde{H}_\rho^1$, on a :

$$u(\cdot + iy)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi y \xi} \hat{u}(\xi)$$

et

$$\|u\|_\rho^\sim = \sup_{|y| < \rho} c(1) |e^{-2\pi y \xi} (1 + |2\pi\xi|^2)^{1/2} \hat{u}(\xi)|_{L^2(d\xi)}.$$

On a clairement $H_\rho^1 \subset \tilde{H}_\rho^1$ avec $\| \cdot \|_\rho^\sim \leq \| \cdot \|_\rho$.

Soit maintenant $u \in \tilde{H}_\rho^1$, de l'inégalité

$$e^{2\pi |y| \cdot |\xi|} \leq e^{2\pi y \xi} + e^{-2\pi y \xi},$$

on déduit

$$\|e^{2\pi |y| \cdot |\xi|} \hat{f}(\xi)\|_{L^2(d\xi)} \leq \|e^{2\pi y \xi} \hat{f}(\xi)\|_{L^2} + \|e^{-2\pi y \xi} \hat{f}(\xi)\|_{L^2},$$

où on note $\hat{f}(\xi) = c(1) (1 + |2\pi\xi|^2)^{1/2} \hat{u}(\xi)$.

En prenant le sup pour $|y| < \rho$, on obtient :

$$\sup_{|y| < \rho} \|e^{2\pi |y| \cdot |\xi|} \hat{f}(\xi)\|_{L^2} \leq 2 \|u\|_\rho^\sim,$$

ce qui, en appliquant le lemme de Fatou, implique que $u \in H^1_\rho$ et $|u|_\rho \leq 2|u|_\rho^\sim$. ■

On a pour le noyau Z l'estimation suivante, où on note Z_1 et Z_2 les noyaux associés aux fonctions u_1 et u_2 .

PROPOSITION 1. — Pour toute $f \in H^1_\rho$ et u_1, u_2 telles que $|u'_i|_\rho \leq \frac{1}{2}$, on a :

$$|(Z_1 - Z_2) \cdot f|_\rho \leq c_0 |u'_1 - u'_2|_\rho |f|_\rho.$$

Démonstration. — Pour u et f convenables, on a :

$$Z \cdot f(x) = \int Z(x, x') f(x') dx' = \int Z(x, x + \sigma) f(x + \sigma) d\sigma.$$

D'où, si les fonctions u et f ont un prolongement analytique dans la bande $x + iy, |y| < \rho$; le prolongement analytique de $Z \cdot f$ est donné par :

$$Z \cdot f(x + iy) = \int Z(x + iy, x' + iy) f(x' + iy) dx',$$

à condition que $1 + ip(x + iy, x' + iy)$ ne s'annule pas, ce qui est impliqué dans tout ce qui suit par la condition $|u'|_\rho \leq \frac{1}{2}$. En effet :

$$\frac{u(x' + iy) - u(x + iy)}{x' - x} = \int_0^1 u'(x + \lambda(x' - x) + iy) d\lambda,$$

d'où

$$|p(x + iy, x' + iy)| \leq |u'|_\rho^\sim \leq |u'|_\rho.$$

La proposition 1 découle de l'étude sur H^1 du noyau Z associé à la fonction $x \rightarrow u(x + iy)$ pour y fixé, $|y| < \rho$.

LEMME 3. — Soient f, u_1, u_2 des fonctions à valeurs complexes, f, u'_1, u'_2, H^1_ρ appartenant à $H^1(\mathbb{R})$ avec $|u'_j|_{H^1} \leq \frac{1}{2}$, on a :

$$|(Z_1 - Z_2) \cdot f|_{H^1} \leq c |u'_1 - u'_2|_{H^1} |f|_{H^1}.$$

Démonstration. — En utilisant l'expression

$$\frac{\partial_x p_j}{1 + ip_j} = \frac{\partial_x p_j}{1 + ip_j} + \frac{u'_j(x') - u'_j(x)}{(x' - x)(1 + ip_j)},$$

décomposons le noyau $Z_1 - Z_2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 = & Z_1^t - Z_2^t + i Z_1^t \frac{u_1'(x) - u_2'(x)}{1 + i u_1'(x)} + \frac{i}{2\pi} \frac{u_1'(x) - u_2'(x)}{(x' - x)(1 + i u_1'(x'))} \\ & - i Z_1^t \frac{u_1'(x) - u_2'(x)}{1 + i u_1'(x)} - \frac{i}{2\pi} \frac{u_1'(x) - u_2'(x)}{(x' - x)(1 + i u_1'(x'))} \\ & - (Z_1^t - Z_2^t) \frac{u_2'(x)}{1 + i u_1'(x')} + i Z_2^t \frac{(u_1'(x) - u_2'(x)) u_2'(x)}{(1 + i u_1'(x'))(1 + i u_2'(x'))} \\ & + (Z_1^t - Z_2^t) \frac{u_2'(x)}{1 + i u_1'(x')} - i Z_2^t \frac{(u_1'(x) - u_2'(x)) u_2'(x)}{(1 + i u_1'(x'))(1 + i u_2'(x'))}, \end{aligned}$$

où $Z^t(x, x') = Z(x', x)$.

Le résultat va s'en déduire en utilisant l'inégalité :

$$\left| \frac{f}{1 + i u'} \right|_{H^1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u'|_{H^1}^n |f|_{H^1} \leq 2 |f|_{H^1},$$

pour $|u'|_{H^1} \leq \frac{1}{2}$, et des estimations de Z_j^t et $Z_1^t - Z_2^t$ comme opérateurs sur H^1 . On a :

$$|Z_j^t \cdot f|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial_{x'} p_j}{1 + i p_j} \right|_{L^2(dx \, dx')} |f|_{L^2},$$

et comme $|p_j(x, x')| \leq |u_j'|_{H^1} \leq \frac{1}{2}$, il vient :

$$\left| \frac{\partial_{x'} p_j}{1 + i p_j} \right|_{L^2(dx \, dx')} \leq 2 |\partial_{x'} p_j|_{L^2(dx \, dx')}.$$

Un rapide calcul par transformation de Fourier (cf. [7]) montre par ailleurs que :

$$|\partial_{x'} p_j|_{L^2(dx \, dx')} = |\partial_x p_j|_{L^2(dx \, dx')} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} |\Lambda^{1/2} u_j'|_{L^2},$$

et comme $|\Lambda^{1/2} u_j'|_{L^2} \leq |u_j'|_{L^2}^{1/2} |u_j''|_{L^2}^{1/2} \leq |u_j'|_{H^1}$, il vient :

$$|Z_j^t \cdot f|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{6\pi}} |f|_{L^2}.$$

Majorons également $|DZ_j^t \cdot f|_{L^2}$.

L'opérateur DZ_j^t est donné par le noyau

$$\frac{i}{2\pi} \partial_x \frac{\partial_{x'} p_j}{1 + ip_j} = \frac{1}{2\pi} \partial_{x'} \frac{\partial_x p_j}{1 + ip_j},$$

ce qui donne, après intégration par parties :

$$|DZ_j^t \cdot f|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial_x p_j}{1 + ip_j} \right|_{L^2(dx \ dx')} |f'|_{L^2},$$

d'où

$$|DZ_j^t \cdot f|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{6\pi}} |f'|_{L^2},$$

et donc :

$$|Z_j^t \cdot f|_{H^1} \leq \frac{1}{\sqrt{6\pi}} |f|_{H^1}.$$

Pour estimer $Z_1^t - Z_2^t$, on écrit :

$$Z_1^t - Z_2^t = \frac{i}{2\pi} \frac{\partial_{x'}(p_1 - p_2)}{1 + ip_1} + \frac{1}{2\pi} (p_1 - p_2) \frac{\partial_{x'} p_2}{(1 + ip_1)(1 + ip_2)},$$

d'où :

$$|Z_1^t - Z_2^t|_{L^2(dx \ dx')} \leq 2 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} |u'_1 - u'_2|_{H^1}.$$

Examinons maintenant $|D(Z_1^t - Z_2^t) \cdot f|_{L^2}$, on a :

$$D(Z_1^t - Z_2^t) \cdot f = -(Z_1 - Z_2) \cdot f',$$

d'où

$$|D(Z_1^t - Z_2^t) \cdot f|_{L^2} \leq 2 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} |u'_1 - u'_2|_{H^1} |f'|_{L^2}.$$

Et donc :

$$|(Z_1^t - Z_2^t) \cdot f|_{H^1} \leq 2 \sqrt{\frac{2}{3\pi}} |u'_1 - u'_2|_{H^1} |f|_{H^1}.$$

On en déduit facilement l'inégalité :

$$\|Z_1 - Z_2\|_{\mathcal{L}(H^1)} \leq c \|u'_1 - u'_2\|_{H^1},$$

c constante convenable. ■

La proposition 1 s'en déduit immédiatement avec $c_0 = 2c$. ■

Remarque. — Comme on a de manière évidente la même estimation pour le noyau $\bar{Z} = \frac{-i}{2\pi} \frac{\partial_x p}{1-ip}$, on en déduit qu'on a encore la même estimation de la proposition 1 pour les noyaux X et Y qui sont donnés par $X = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z})$, $Y = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z})$.

3. APPLICATION AU MOUVEMENT DE L'INTERFACE DE DEUX LIQUIDES INCOMPRESSIBLES EN MILIEU POREUX

Donnons un exposé résumé de la mise en équation du problème, renvoyant pour plus de détails à [6].

Nous supposons l'interface Γ_t déterminée dans le plan de coordonnées (x, y) par l'équation $y = u(t, x)$. On note

$$\Omega_t^+ = \{(x, y) \mid y > u(t, x)\}$$

la zone occupée par le fluide F^+ et

$$\Omega_t^- = \{(x, y) \mid y < u(t, x)\}$$

celle occupée par le fluide F^- . τ désigne le vecteur unitaire tangent à Γ_t , dirigé dans le sens des x croissants, ν le vecteur normal qui s'en déduit par une rotation de $\pi/2$. $V^+(t, x, y)$ désigne le champ des vitesses dans Ω_t^+ (resp. V^- dans Ω_t^-).

L'évolution du système est donnée par la loi de Darcy :

$$kV = -\nabla q + \rho g,$$

où V est le champ des vitesses, q la pression, g l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique et k la viscosité dynamique du fluide. Comme on a deux fluides distincts, k et ρ sont des fonctions qui prennent

les valeurs constantes k^+, ρ^+ sur Ω_t^+ et k^-, ρ^- sur Ω_t^- de même V est égal à V^+ sur Ω_t^+ (resp. V^- sur Ω_t^-) et la loi de Darcy est à prendre au sens des distributions sur \mathbb{R}^2 . V^+, V^- étant irrotationnels, il est commode d'introduire les potentiels respectifs Φ^+, Φ^- ; et on pose $\varphi^\pm(t, x) = \Phi^\pm(t, x, u(t, x))$. Pour obtenir l'équation d'évolution vérifiée par u , on écrit :

(i) la condition cinématique sur Γ_t :

$$u_t = \sqrt{1 + (u_x)^2} \frac{\partial \Phi^-}{\partial v}$$

Ce qui peut s'écrire [6] :

$$u_t = (-1/2 - Y)(1/2 H + X)^{-1} \varphi_x^-$$

où H est la transformation de Hilbert et X, Y les opérateurs définis au paragraphe 2.

(ii) la condition dynamique sur Γ_t : elle s'obtient en écrivant

$$\text{rot}(k V - \rho g) = 0,$$

soit :

$$(k^- V^- - \rho^- g) \cdot \tau = (k^+ V^+ - \rho^+ g) \cdot \tau,$$

d'où

$$\lambda \varphi_x^- - (1 - \lambda) \varphi_x^+ = c u_x,$$

avec

$$\lambda = k^- / (k^+ + k^-) \quad \text{et} \quad c = -g(\rho^- - \rho^+) / (k^+ + k^-).$$

En utilisant la relation $\frac{\partial \Phi^-}{\partial v} = \frac{\partial \Phi^+}{\partial v}$ et les formules de Poincaré-Bertrand :

$$\begin{aligned} (1/2 H + X) Y &= -Y (1/2 H + X), \\ (1/2 H + X)^2 &= (1/2 - Y) (-1/2 - Y), \end{aligned}$$

on obtient

$$\varphi_x^- = (1/2 + Y)(1/2 + \alpha Y)^{-1} c u_x,$$

avec

$$\alpha = (k^- - k^+) / (k^- + k^+),$$

d'ou finalement :

$$(E) \begin{cases} u_t = (1/2 H + X)(1/2 + \alpha Y)^{-1} c u_x, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

On montre [6] que si u_x appartient à l'espace $V^{1/2}$ les opérateurs X et Y sont de Hilbert-Schmidt sur L^2 et que $1/2 + \alpha Y$ est inversible.

Nous nous intéressons au cas $c < 0$ (cas où le liquide le plus dense est situé au dessous) et nous prendrons pour la suite $c = -1$.

En utilisant l'égalité $\left(\frac{1}{2} + \alpha Y\right)^{-1} = 2 - 2\alpha Y \left(\frac{1}{2} + \alpha Y\right)^{-1}$, l'équation (E) s'écrit :

$$u_t = -H u_x + (\alpha H Y - X) \left(\frac{1}{2} + \alpha Y\right)^{-1} u_x.$$

Remarquons que les noyaux X, Y ne dépendent en fait que de u_x et notons

$$G(u_x) = (\alpha H Y - X) \left(\frac{1}{2} + \alpha Y\right)^{-1} u_x.$$

Dérivons l'équation par rapport à x , en notant $v = u_x$, on obtient :

$$(E') \begin{cases} v_t = -\Lambda v + DG(v), \\ v(0) = v_0 = u_{0x}. \end{cases}$$

L'application du corollaire 1 à cette situation donne :

PROPOSITION 2. — *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $v_0 \in H^1$ avec $|v_0|_{H^1} \leq \varepsilon$, il existe une solution $v(t)$ de (E') au sens suivant :*

(i) $v \in \bigcap_{t>0} C^1([t, +\infty[, H_{\alpha^* t}^1)$ avec $|v(t)|_{\alpha^* t} \leq C$, où

$$\alpha^* = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \text{ et } C < C^*, \quad C^* = \frac{e M^*}{24 c_0}.$$

(ii) $v(t) \rightarrow v_0$ fortement dans L^2 lorsque $t \rightarrow 0, t > 0$.

(iii) $v(t)$ vérifie $v_t + \Lambda v = DG(v)$ au sens ordinaire pour tout $t > 0$.

Une telle solution est unique.

Démonstration. — Supposons $|v_j|_\rho \leq R$, $R \leq \frac{1}{2}$, et estimons $|G(v_1) - G(v_2)|_\rho$. Notons $T = \left(\frac{1}{2} + \alpha Y\right)$, on a $\|Y\|_\rho \leq c_0 R$ d'après la proposition 1, d'où :

$$\|T^{-1}\|_\rho \leq 2 \cdot \frac{1}{1 - 2|\alpha| \cdot \|Y\|_\rho} \leq 4$$

si $c_0 R \leq \frac{1}{4}$.

On a :

$$\begin{aligned} G(v_1) - G(v_2) = & \alpha H(Y_1 - Y_2) T_1^{-1} v_1 - (X_1 - X_2) T_1^{-1} v_1 \\ & + (\alpha H Y_2 - X_2) (T_1^{-1} v_1 - T_2^{-1} v_2), \end{aligned}$$

d'où

$$|G(v_1) - G(v_2)|_\rho \leq 8 c_0 R |v_1 - v_2|_\rho + 2 c_0 R |T_1^{-1} v_1 - T_2^{-1} v_2|_\rho,$$

or

$$T_1^{-1} v_1 - T_2^{-1} v_2 = T_1^{-1} (T_2 - T_1) T_2^{-1} v_1 + T_2^{-1} (v_1 - v_2),$$

d'où

$$|T_1^{-1} v_1 - T_2^{-1} v_2|_\rho \leq 8 |v_1 - v_2|_\rho,$$

et finalement :

$$|G(v_1) - G(v_2)|_\rho \leq 24 c_0 R |v_1 - v_2|_\rho.$$

Afin d'appliquer le corollaire 1, on doit choisir $R < \frac{e M^*}{24 c_0}$. ■

4. UN CONTRE-EXEMPLE

On peut se demander si l'hypothèse (H 2) portant sur l'opérateur F est vraiment nécessaire pour obtenir les conclusions du théorème 1 et si l'hypothèse (H 1) plus courante n'y suffirait pas.

L'exemple qui suit montre que l'hypothèse (H 1) ne suffit pas à entraîner les conclusions du théorème 1.

Considérons l'équation :

$$(Q) \begin{cases} u_t + \Lambda u = \varepsilon Du(0), & \varepsilon \text{ paramètre } > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Et plaçons nous dans le cadre suivant.

Soit B_0 l'espace des fonctions uniformément continues bornées sur \mathbb{R} , $-\Lambda$ engendre sur B_0 le semi-groupe $S(\rho)$ défini par $S(\rho)u = P_\rho * u$, $\rho > 0$,

où P_ρ désigne le noyau de Poisson $P_\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\rho}{x^2 + \rho^2}$. On définit

$B_\rho = S(\rho) B_0$, muni de la norme $|S(\rho)v|_\rho = |v|_\infty$.

On vérifie facilement que $S(t)$ est régularisant dans l'échelle B_ρ , ce qui découle de l'inégalité sur B_0 :

$$|P_t * u|_\infty \leq |u|_\infty.$$

De l'inégalité $|Du|_\infty \leq \frac{2}{\pi\rho} |u|_\rho$, pour $u \in B_\rho$, on déduit que $F(u) = \varepsilon Du(0)$

vérifie (H 1) avec $M = \frac{2}{\pi} \varepsilon$.

Une solution de (Q) s'obtient facilement par un calcul formel :

$$u(t, x) = S(t)u_0 + c(t),$$

où

$$c(t) = \varepsilon (S(t) H u_0)(0) - \varepsilon H u_0(0).$$

En choisissant $u_0 = f * \text{sgn}(x)$, où $f(x) = \mu e^{-\pi x^2}$, $\mu > 0$, on a :

$$H u_0 = \frac{2}{\pi} f * \text{Log}|x| + \text{Cte},$$

et on vérifie que $c(t)$ est continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ et continue en 0. Il s'ensuit que la solution formelle ci-dessus est alors dans

$\cap C^1([t, +\infty; \mathbf{B}_{\alpha^*t})$ et dans $C^0([0, +\infty[; \mathbf{B}_0)$; on vérifie aisément que

$c(t)$ est une solution au sens ordinaire de (Q).

Montrons maintenant que $c(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$. Par transformation de Fourier, on obtient :

$$c(t) = 2\varepsilon\mu \int \frac{1 - e^{-t|2\pi\xi|}}{|2\pi\xi|} e^{-\pi\xi^2} d\xi,$$

d'où le résultat. On en déduit que $|u(t)|_\infty \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$, car $c(t) \leq |u(t)|_\infty + |S(t)u_0|_\infty$.

Raisonnons par l'absurde, si les conclusions du théorème 1 étaient vraies alors la solution donnée par le théorème coïnciderait avec la solution ci-dessus [poser $w = S(\eta) \wedge u$, $\eta > 0$, et appliquer un résultat d'unicité standard pour l'équation $w_t + \Lambda w = 0$, $w(0) = w_0$] et la contradiction découle de ce que la solution donnée par le théorème vérifie $|u(t)|_{\alpha^*t} \leq \text{Cte}$.

RÉFÉRENCES

- [1] M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC, *Comm. Part. Diff. Eq.*, vol. 2, 1977, p. 1151-1162.
- [2] K. I. BABENKO et V. U. PETROVICH, *Sov. Phys. Dokl.*, vol. 24, 1979, p. 161-163.
- [3] BUI AN TON, *Nonlinear Analysis theory Methods and Appl.*, vol. 6, 1982, p. 335-347.
- [4] J. R. CHAN HONG, D. HILHORST, C. J. VAN DUYN et J. VAN KESTER, *Numerical Study of Simultaneous Flow of Salt and Fresh Ground Water in Horizontally Extended Aquifers* (à paraître).
- [5] W. CRAIG, An Existence Theory for Water Waves and the Boussinesq and Korteweg-de-Vries Scaling Limits, *Comm. P.D.E.*, vol. 10, n° 8, 1985.
- [6] J. DUCHON et R. ROBERT, Sur quelques problèmes à frontière libre analytique dans le plan, *Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer*, 1984-1985, exposé n° X.
- [7] J. DUCHON et R. ROBERT, Estimation d'opérateurs intégraux du type de Cauchy dans les échelles d'Ovsjannikov et application, *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 36, fasc. 1, 1986 (à paraître).
- [8] T. KANO et T. NISHIDA, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 19-2, 1979, p. 335-370.
- [9] Y. MEYER, *Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz*, 1982-1983, exposé n° V.
- [10] V. I. NALIMOV, *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. 189, 1969, p. 45-48.
- [11] V. I. NALIMOV, *Dinamika Spl. Sredy*, vol. 18, 1974, p. 104-210.
- [12] L. NIRENBERG, *J. Diff. Geometry*, vol. 6, 1972, p. 561-576.
- [13] T. NISHIDA, *J. Diff. Geometry*, vol. 12, 1977, p. 629-633.
- [14] L. V. OVSJANNIKOV, *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. 200, 1971, p. 789-792.
- [15] J. REEDER et M. SHINBROT, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 25, 1976, p. 1049-1071.
- [16] M. SHINBROT, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 25, 1976, p. 281-300.
- [17] C. SULEM, P. L. SULEM, C. BARDOS et U. FRISCH, *Comm. Math. Phys.*, vol. 80, 1981, p. 485-516.
- [18] C. SULEM et P. L. SULEM, Finite Time Analyticity for the Two and three Dimensional Rayleigh-Taylor Instability, *T.A.M.S.* (à paraître).
- [19] J. F. TRÉVES, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 150, 1970, p. 77-92.
- [20] H. YOSIHARA, Gravity waves, *Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.*, vol. 18, 1982, p. 49-96.