Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 10, n° 4, 1993, p. 453-476. *Analyse non linéaire*

Analyse multi-résolution bi-orthogonale sur l'intervalle et applications

par

A. JOUINI et P. G. LEMARIE-RIEUSSET

C.N.R.S., U.A. n° 757, Analyse harmonique,
Université de Paris-Sud,
Mathématique, Bâtiment n° 425,
91405 Orsay Cedex, France

RÉSUMÉ. — Nous présentons des systèmes bi-orthogonaux sur [0, 1] adaptés à l'étude des espaces $H^k([0, 1])$ et $H_0^k([0, 1])\,(k \in \mathbb{Z})$ et engendrés par translation et dilatation dyadiques à partir d'un nombre fini de fonctions de base. Ces bases permettent également l'étude des fonctions vectorielles à divergence nulle sur $[0, 1]^n$.

ABSTRACT. — We present bi-orthogonal systems on [0, 1], which are well-adapted to the study of the Sobolev spaces $H^k([0, 1])$ and $H_0^k([0, 1])\,(k \in \mathbb{Z})$ and are provided through dyadic translations and dilatations from a finite number of basic functions. Those bases allow also the study of divergence-free vector functions on $[0, 1]^n$.

Classification A.M.S. : 42 C 15.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449
Vol. 10/93/04/$4.00/

0. INTRODUCTION

La notion d'analyse multi-résolution introduite en 1986 par S. Mallat [12] a permis l'introduction de transformations rapides en ondelettes pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$). En 1990, Y Meyer a montré comment on pouvait restreindre les calculs à l'intervalle [0, 1], pour étudier une fonction connue seulement sur un intervalle fini de temps [13].

Par ailleurs, le formalisme de Mallat a été étendu au cadre des bases bi-orthogonales d'ondelettes par A. Cohen, I. Daubechies et J. C. Feauveau [2]. Ce cadre se prête bien à la dérivation, grâce à une formule de commutation entre projecteurs obliques sur de telles ondelettes et la dérivation [8].

Le but de cet article est de construire des analyses multi-résolutions sur [0, 1] avec un formalisme bi-orthogonal qui commute encore avec la dérivation. Un exemple d'application est donné avec l'étude des fonctions à divergence nulle sur le carré.

Notations

(i) On notera pour une fonction g définie sur $\mathbb{R}\hat{g}$ sa transformée de Fourier définie par :

$$\hat{g}(\xi)=\int g(x)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

(ii) Les notations A.M.R., A.M.R.O. et A.M.R.B.O. désigneront des analyses multi-résolutions, des A.M.R. orthogonales et des A.M.R. bi-orthogonales; le sens de ces notations sera explicité dans l'article.

I. LA NOTION D'ANALYSE MULTI-RÉSOLUTION (ORTHOGONALE)

Commençons par rappeler le formalisme de S. Mallat [12] et les constructions d'I. Daubechies [3]. Suivant la définition de S. Mallat, une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est la donnée d'une suite $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ telle que :

(1.1) $\quad V_j \subset V_{j+1},\ \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j=\{0\},\ \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

(1.2) $\quad f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}$

(1.3) $\quad V_0$ a une base de Riesz de la forme $g(x-k),\quad k\in\mathbb{Z}.$

Notations

(i) On notera A.M.R. pour analyse multi-résolution.

(ii) Lorsqu'à une A.M.R. (V_j) on associe le processus d'approximation $f \in L^2 \to (P_j f)_{j \in \mathbb{Z}}$ où P_j est le projecteur orthogonal de L^2 sur V_j, on parlera d'analyse multi-résolution orthogonale, ce qu'on notera A.M.R.O.

Pour une A.M.R.O., on a les propriétés suivantes:

$$P_j \circ P_{j+1} = P_{j+1} \circ P_j = P_j,$$

(j) $$\lim_{j \to -\infty} \|P_j f\|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{j \to +\infty} \|f - P_j f\|_2 = 0$$

pour toute $f \in L^2$.

(jj) V_0 a une base orthonormée $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, et on a:

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f \mid \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \qquad \text{où} \quad \varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k).$$

(jjj) $W_0 = V_1 \cap V_0^{\perp}$ a une base orthonormée $\psi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, et le projecteur $Q_j = P_{j+1} - P_j$ (projecteur orthogonal sur $W_j = V_{j+1} \cap V_j^{\perp}$), s'écrit: $Q_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f \mid \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$ où $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$.

φ est alors appelée *fonction d'échelle* de l'A.M.R. (V_j) et ψ *ondelette de* l'A.M.R. (V_j). Un cas particulier extrêmement important est lorsque φ (et ψ) peut être choisie à support compact et régulière. La compacité du support de φ permet d'associer à l'A.M.R. (V_j) une transformée en ondelettes rapide (F.W.T.) tandis que la régularité de φ permet en analyse de décomposer les espaces de fonctions régulières et en traitement du signal de séparer les basses fréquences (et en particulier les tendances polynômiales) des hautes fréquences.

En 1987, I. Daubechies a construit, pour tout $N \geqq 2$, une A.M.R.O. $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ telle que:

(2.1) V_0 a une base orthonormée $\varphi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, où φ est à support compact et à valeurs réelles.

(2.2) $\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k \varphi(x-k)$ pour une suite a_k de réels avec $a_0 \neq 0$ et $a_{2N-1} \neq 0$.

(2.3) $M_0(z) = \dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N-1} a_k z^k$ est divisible par $\left(\dfrac{1+z}{2}\right)^N$. [$M_0(z)$ est relié à φ par la relation $\hat{\varphi}(2\xi) = M_0(e^{-i\xi}) \hat{\varphi}(\xi)$.] On montre alors les résultats suivants:

(2.4) Supp $\varphi = [0, 2N-1]$ (Le support est l'intervalle tout entier d'après un résultat dû à G. Malgouyres [11]).

(2.5) φ est de classe $C^{\alpha N}$ pour un $\alpha > 0$ indépendant de N.

(2.6) tout polynôme de degré $\leqq N-1$ s'écrit comme combinaison linéaire (infinie) des $\varphi(x-k)$.

De plus si ψ est définie par:

$$\hat{\psi}(2\xi)=e^{-i(2N-1)\xi}M_0(-e^{i\xi})\hat{\varphi}(\xi) \tag{3.1}$$

alors on a:

(3.2) W_0 a pour base orthonormée les $\psi(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}$.

(3.3) Pour tout polynôme P de degré $\leqq N-1$, $\int P(x)\psi(x)\,dx=0$.

(3.4) Supp $\psi=[0,2N-1]$.

II. ANALYSE MULTI-RÉSOLUTION BI-ORTHOGONALE : DÉRIVER UNE A.M.R.

Les analyses multi-résolutions bi-orthogonales ont été introduites par J. C. Feauveau [5] et développées par A. Cohen, I. Daubechies et J. C. Feauveau [2]. Notre présentation sera ici légèrement différente.

DÉFINITION 1. — Soit H un espace de Hilbert et A, B deux sous-espaces fermés de H. Nous dirons que A et B sont en dualité pour le produit scalaire de H si $H=A\oplus B^{\perp}$ (somme directe topologique).

PROPOSITION 1. — *Soit* H *un espace de Hilbert séparable et* A *et* B *deux sous-espaces fermés de* H. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) $H=A\oplus B^{\perp}$,

(ii) *le projecteur orthogonal de* H *sur* B *est un isomorphisme de* A *sur* B.

(iii) *pour toute base de Riesz* (b_α) *de* B *il existe une base de Riesz* (a_α) *de* A *telle que* $\langle a_\alpha | b_\beta\rangle_H=\delta_{\alpha,\beta}$.

(iv) *il existe un projecteur continu* $P\,(P\in\mathscr{L}(H,H)$ *et* $P\circ P=P)$ *tel que*

$$P(H)=A \qquad \textit{et} \qquad P^{-1}\{0\}=B^{\perp}.$$

La proposition est immédiate. En particulier, P (qui est unique) peut être défini par $P(h)=\sum_\alpha\langle h|b_\alpha\rangle_H a_\alpha$. En considérant P^* [donné par $P^*(h)=\sum_\alpha\langle h|a_\alpha\rangle_H b_\alpha$], on voit que les conditions sont symétriques pour A et B.

DÉFINITION 2. — Une analyse multi-résolution bi-orthogonale (abrégée en A.M.R.B.O.) de $L^2(\mathbb{R})$ est la donnée d'un couple d'analyses multi-résolutions (V_j), (V_j^*) de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $L^2=V_0\oplus(V_0^*)^{\perp}$.

Bien entendu on a alors pour tout $j\in\mathbb{Z}$, $L^2=V_j\oplus(V_j^*)^{\perp}$. On dispose donc du processus d'approximation $f\in L^2\to(P_jf)_{j\in\mathbb{Z}}$ où P_j est le *projecteur oblique* de L^2 sur V_j parallèlement à $(V_j^*)^{\perp}$ et on a les propriétés suivantes :

$$\text{(j)}\quad\left\{\begin{array}{c} P_j \circ P_{j+1} = P_{j+1} \circ P_j = P_j, \\ \lim_{j\to-\infty} \|P_j f\|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{j\to+\infty} \|f - P_j f\|_2 = 0 \\ \text{pour tout } f \in L^2; \end{array}\right.$$

(jj) V_0 a une base de Riesz $g(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}$, et V_0^* une base de Riesz $g^*(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}$, telles que $\langle g(x-k) \,|\, g^*(x-l)\rangle = \delta_{k,l}$ et on a alors :

$$P_j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \,|\, g_{j,k}^* \rangle g_{j,k}$$

où

$$g_{j,k}(x) = 2^{j/2} g(2^j x - k) \qquad \text{et} \qquad g_{j,k}^*(x) = 2^{j/2} g^*(2^j x - k).$$

(jjj) $W_0 = V_1 \cap (V_0^*)^\perp$ a une base de Riesz $\gamma(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}$, et $W_0^* = V_1^* \cap V_0^\perp$ a une base de Riesz $\gamma^*(x-k)$, $k\in\mathbb{Z}$, telles que $\langle \gamma(x-k) \,|\, \gamma^*(x-l)\rangle = \delta_{k,l}$. De plus l'opérateur $Q_j = P_{j+1} - P_j$ est le projecteur oblique de L^2 sur $W_j = V_{j+1} \cap (V_j^*)^\perp$ parallèlement à $(W_j^*)^\perp$ (où $W_j^* = V_{j+1}^* \cap V_j^\perp$) et Q_j s'écrit :

$$Q_j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \,|\, \gamma_{j,k}^* \rangle \gamma_{j,k}$$

où $\gamma_{j,k}(x) = 2^{j/2}\gamma(2^j x - k)$ et $\gamma_{j,k}^*(x) = 2^{j/2}\gamma^*(2^j x - k)$.

Les fonctions g et g^* sont alors appelées *fonctions d'échelle conjuguées* pour l'A.M.R.B.O. (V_j), (V_j^*) et les fonctions γ et γ^* sont les *ondelettes obliques* associées. Comme dans le cas orthogonal, on cherchera à obtenir g et g^* (ainsi que γ et γ^*) à support compact, pour pouvoir bénéficier d'une transformée en ondelettes obliques rapide.

Le cas où g et g^* sont à support compact est très proche du cas orthogonal. On a les équations à deux échelles :

$$(4.1)\qquad g\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k g(x-k)$$

$$(4.2)\qquad g^*\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=N_1^*}^{N_2^*} a_k^* g^*(x-k)$$

ou encore $\hat{g}(2\xi) = M_0(e^{-i\xi})\hat{g}(\xi)$ et $M_0(z) = \frac{1}{2}\sum_{N_1}^{N_2} a_k z^k$, et de même $\hat{g}^*(2\xi) = M_0^*(e^{-i\xi})\hat{g}^*(\xi)$ avec $M_0^*(z) = \frac{1}{2}\sum_{N_1^*}^{N_2^*} a_k^* z^k$. De plus :

$$(4.3)\qquad \operatorname{Supp} g = [N_1, N_2] \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Supp} g^* = [N_1^*, N_2^*].$$

Enfin γ et γ^* peuvent être définies par :

$$(4.4)\qquad \hat{\gamma}(2\xi) = e^{-i\xi} M_0^*(-e^{i\xi})\hat{g}(\xi) \qquad \text{et} \qquad \hat{\gamma}^*(2\xi) = e^{-i\xi} M_0(-e^{i\xi})\hat{g}^*(\xi)$$

et alors

$$(4.5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Supp}\gamma \subset \left[\frac{1-N_2^*+N_1}{2}, \frac{1+N_2-N_1^*}{2}\right] \\ &\text{et} \\ &\operatorname{Supp}\gamma^* \subset \left[\frac{1-N_2+N_1^*}{2}, \frac{1+N_2^*-N_1}{2}\right]. \end{aligned} \right.$$

Une des propriétés fondamentales des A.M.R.B.O. est leur compatibilité avec la dérivation. Plus précisément si g, g^* sont deux fonctions d'échelle conjuguées et si g est dérivable ($g \in H^1$) alors il existe deux fonctions d'échelle conjuguées $\tilde{g}$, $\tilde{g}^*$ telles que :

$$(5.1)\qquad g'(x)=\tilde{g}(x)-\tilde{g}(x-1)$$

$$(5.2)\qquad \tilde{g}^{*\prime}(x)=g^*(x+1)-g^*(x)$$

et le projecteur oblique $\tilde{P}_j$ associé à $(\tilde{g}, \tilde{g}^*)$ vérifie *la propriété de commutation suivante* :

$$(5.3)\qquad \frac{d}{dx}\circ P_j=\tilde{P}_j\circ\frac{d}{dx}.$$

[Cela provient essentiellement du fait que (5.2) est en quelque sorte le transposé de (5.1) par le crochet de dualité $\langle\ |\ \rangle_{L^2}$]. La représentation de g' comme une différence finie est due à G. Malgouyres [10] et la formule de commutation a été démontrée dans [8]. Par ailleurs les « polynômes » $\tilde{M}_0$, $\tilde{M}_0^*$, les ondelettes obliques $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}^*$ et le projecteur oblique $\tilde{Q}_j$ vérifient :

$$(5.4)\qquad \tilde{M}_0(z)=\frac{2}{1+z}M_0(z) \quad\text{et}\quad \tilde{M}_0^*(z)=\frac{1+z}{2z}M_0^*(z)$$

$$(5.5)\qquad \gamma'=4\tilde{\gamma} \quad\text{et}\quad \tilde{\gamma}^{*\prime}=-4\gamma^*$$

$$(5.6)\qquad \frac{d}{dx}\circ Q_j=\tilde{Q}_j\circ\frac{d}{dx}.$$

III. ANALYSE MULTI-RÉSOLUTION ORTHOGONALE SUR L'INTERVALLE : RESTREINDRE UNE A.M.R.

Nous partons de l'analyse multi-résolution (V_j) d'I. Daubechies décrite dans la section I (avec Supp $\varphi=[0, 2N-1]$). Pour éviter tout risque de confusion, on notera $V_j(\mathbb{R})$ et $W_j(\mathbb{R})$ les espaces correspondants à cette A.M.R.O. de $L^2(\mathbb{R})$.

Il s'agit dans cette section de décrire un processus d'approximation (par projections orthogonales) pour des fonctions f connues seulement sur $[0, 1]$. Si f est portée par $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ pour un $\varepsilon>0$, alors on peut prolonger f

par 0 en dehors de [0, 1], ce prolongement a la même régularité que f. On peut alors analyser f à l'aide du processus P_j associé à $V_j(\mathbb{R})$; pour j suffisamment grand $\left(\text{tel que } 2^j \geqq \frac{2N-1}{\varepsilon}\right)$, les seuls coefficients $\langle f | \varphi_{j,k} \rangle$ non nuls ont lieu pour $\operatorname{Supp} \varphi_{j,k} \subset [0, 1]$ et de même pour les coefficients $\langle f | \psi_{j,k} \rangle$ (qui décrivent l'information nouvelle entre l'approximation à résolution $\frac{1}{2^j}$, $P_j f$, et celle à résolution $\left.\frac{1}{2^{j+1}}\right)$. Les produits scalaires ont alors lieu dans $L^2([0, 1])$. On voit donc que le problème de définir une A.M.R.O. sur [0, 1] est en fait un problème de bord en 0 et en 1.

On notera, à la suite de Y. Meyer [13], $V_j([0, 1])$ l'espace des restrictions à [0, 1] des fonctions de $V_j(\mathbb{R})$. Par ailleurs on notera $v_j([0, 1])$ l'espace engendré par les $\varphi_{j,k}$ telles que $\operatorname{Supp} \varphi_{j,k} \subset [0, 1]$.

DÉFINITION 3. — Une suite (V_j) (définie pour $j \geqq j_0$, j_0 un entier fixé) de sous-espaces de $L^2([0, 1])$ forme une A.M.R. sur $L^2([0, 1])$ associée à $V_j(\mathbb{R})$ si elle vérifie :

(*a*) $\forall j \geqq j_0, \quad v_j([0, 1]) \subset V_j \subset V_j([0, 1])$

(*b*) $\forall j \geqq j_0, \quad V_j \subset V_{j+1}$.

Notons A_j le complémentaire orthogonal de v_j ([0, 1]) dans V_j. Alors, si $\theta \in A_j$ et $2^j \geqq 4N-4$, on a $\operatorname{Supp} \theta \subset \left[0, \frac{2N-2}{2^j}\right] \cup \left[1 - \frac{2N-2}{2^j}, 1\right]$. On note

$$A_j(0) = \left\{\theta \in A_j / \operatorname{Supp} \theta \subset \left[0, \frac{2N-2}{2^j}\right]\right\}$$

et

$$A_j(1) = \left\{\theta \in A_j / \operatorname{Supp} \theta \subset \left[1 - \frac{2N-2}{2^j}, 1\right]\right\}.$$

DÉFINITION 3 (suite). — On dira qu'une A.M.R. (V_j) sur $L^2([0, 1])$ *associée à* $V_j(\mathbb{R})$:

– sépare les bords si pour un j_1 fixé, pour $j \geqq j_1$ $A_j = A_j(0) \oplus A_j(1)$,

– est régulière si elle sépare les bords et si pour

$$j \geqq j_1 \; \theta(x) \in A_j(0) \quad \Leftrightarrow \quad \theta(2x)|_{[0,1]} \in A_{j+1}(0)$$

et

$$\theta(x) \in A_j(1) \quad \Leftrightarrow \quad \theta(2x-1)|_{[0,1]} \in A_{j+1}(1).$$

Nous allons maintenant établir la proposition fondamentale suivante.

PROPOSITION 1. — *On note* J_0 *le plus petit entier* j *tel que* $2^j \geqq 4N-4$ *et, pour* $j \geqq J_0$, *on note* $x_j([0, 1])$ *l'espace engendré par les* $\psi_{j,k}$ *avec* $\operatorname{Supp} \psi_{j,k} \subset [0, 1]$ (*c'est-à-dire* $0 \leqq k \leqq 2^j - 2N + 1$) *et les fonctions* $\varphi_{j+1, 2k+1}$

avec $0 \leqq k \leqq \mathrm{N}-2$ et $\varphi_{j+1,\,2k}$ avec $2^j-2\mathrm{N}+2 \leqq k \leqq 2^j-\mathrm{N}$. *Alors*:

(i) $\dim x_j([0,1]) = 2^j$ (*le système générateur est linéairement indépendant*).

(ii) *si* V_j *est une AMR sur* $\mathrm{L}^2([0,1])$ *associée à* $\mathrm{V}_j(\mathbb{R})$, *alors pour* $j \geqq \sup(j_0, \mathrm{J}_0)$, $x_j([0,1]) \subset \mathrm{V}_{j+1}$ *et* $x_j([0,1]) \cap \mathrm{V}_j = \{0\}$.

(iii) *Il existe un entier* J *tel que pour tout* $j \geqq \mathrm{J}$ *on ait*:

$$\mathrm{V}_{j+1} = \mathrm{V}_j \oplus x_j([0,1]).$$

(iv) *En particulier, pour tout* $j \geqq \mathrm{J}$ $\mathrm{V}_j = v_j([0,1]) \oplus \mathrm{A}_\mathrm{J}$.

Le point (iv) signifie essentiellement que les conditions de bord à rajouter à l'analyse $v_j([0,1])$ pour définir V_j sont indépendantes de l'échelle.

La proposition 1 se déduit presque immédiatement du résultat suivant de Y. Meyer [13]:

LEMME. – *Pour* $j \geqq \mathrm{J}_0$ $\mathrm{V}_{j+1}([0,1])$ *admet pour base le système des* $\varphi_{j,k}|_{[0,1]}$ *pour* $-2\mathrm{N}+2 \leqq k \leqq 2^j-1$ (*base de* $\mathrm{V}_j[0,1])$) *et des* $\psi_{j,k}|_{[0,1]}$ *pour* $-\mathrm{N}+1 \leqq k \leqq 2^j-\mathrm{N}$.

Notons maintenant le système générateur de $x_j([0,1])$ $x_{j,k}$ pour $-\mathrm{N}+1 \leqq k \leqq 2^j-\mathrm{N}$ avec $x_{j,k} = \varphi_{j+1,\,2(k+\mathrm{N}-1)+1}$ si $-\mathrm{N}+1 \leqq k \leqq -1$, $x_{j,k} = \psi_{j,k}$ si $0 \leqq k \leqq 2^j-2\mathrm{N}+1$ et $x_{j,k} = \varphi_{j+1,\,2k}$ si $2^j-2\mathrm{N}+2 \leqq k \leqq 2^j-\mathrm{N}$. La matrice $(m_{p,q})_{-\mathrm{N}+1 \leqq p,\,q \leqq 2^j-N}$ des coefficients des $x_{j,k}$ dans les $\psi_{j,k}|_{[0,1]}$ modulo $\mathrm{V}_j([0,1])$ s'écrit alors

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}$$

où $\mathrm{A} = (m_{p,q})_{-\mathrm{N}+1 \leqq p,q \leqq 2^{j-1}-\mathrm{N}}$ est triangulaire supérieure avec des termes diagonaux tous non nuls et $\mathrm{B} = (m_{p,q})_{2^{j-1}-\mathrm{N}+1 \leqq p,\,q \leqq 2^j-\mathrm{N}}$ est triangulaire inférieure avec des termes diagonaux tous non nuls: pour $p \leqq -1$,

$$m_{p,p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \varphi(x-2\mathrm{N}+1) \,\middle|\, \psi\left(\frac{x}{2}\right) \right\rangle \neq 0, \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq p \leqq 2^j-2\mathrm{N}+1,$$

$$m_{p,p} = 1 \text{ et pour } p \geqq 2^j-2\mathrm{N}+2,\ m_{p,p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \varphi(x) \,\middle|\, \psi\left(\frac{x}{2}\right) \right\rangle \neq 0.$$

On en conclut immédiatement que $x_j([0,1])$ a pour dimension 2^j et que $x_j([0,1]) \cap \mathrm{V}_j([0,1]) = \{0\}$. Comme $x_j([0,1]) \subset v_{j+1}([0,1])$, on a immédiatement que $x_j([0,1]) \subset \mathrm{V}_{j+1}$ et que $x_j([0,1]) \cap \mathrm{V}_j = \{0\}$. De plus on a $v_{j+1}([0,1]) = v_j([0,1])] \oplus x_j([0,1])$ (puisque les deux espaces ont la même dimension), d'où $\mathrm{A}_j \cap v_{j+1}([0,1]) = 0$ pour $j \geqq \mathrm{J}_0$; on en conclut que $\dim \mathrm{V}_j - \dim v_j([0,1])$ est croissante; comme elle est majorée par $\dim \mathrm{V}_j([0,1]) - \dim v_j([0,1]) = 4\mathrm{N}-4$, on en conclut qu'elle est stationnaire à partir d'un rang J. Cela implique que pour $j \geqq \mathrm{J}$ $\mathrm{V}_{j+1} = \mathrm{V}_j \oplus x_j([0,1]) = \mathrm{A}_j \oplus v_{j+1}([0,1]) = \mathrm{A}_\mathrm{J} \oplus v_{j+1}([0,1])$.

PROPOSITION 2. – *Soit* V_j, $j \geqq j_1$, *une A.M.R. régulière de* $L^2([0, 1])$ (*avec* $j_1 \geqq J_0+1$ *vérifiant les conditions de la définition* 3 (*suite*)) *associée à* $V_j(\mathbb{R})$. *Alors, si* $N_\alpha = \dim A_j(0)$ *et* $N_\beta = \dim A_j(1)$, *il existe*:

• N_α *fonctions* $\varphi_i^\alpha (1 \leqq i \leqq N_\alpha)$ *et* N_β *fonctions* $\varphi_i^\beta (1 \leqq i \leqq N_\beta)$ *dans* $V_0(\mathbb{R})$ *et à support dans* $[-2N+2, 2N-2]$ *telles que, pour* $j \geqq j_1$, $A_j(0)$ *a pour base orthonormée les fonctions* $2^{j/2}\varphi_i^\alpha(2^j x)|_{[0,1]}$ *et* $A_j(1)$ *a pour base orthonormée les fonctions* $2^{j/2}\varphi_i^\beta(2^j x - 2^j)|_{[0,1]}$ (*de sorte que le projecteur orthogonal* P_j *de* $L^2([0, 1])$ *sur* V_j *s'écrit*:

$$P_j f = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \langle f \mid \varphi_{i,j}^\alpha \rangle \varphi_{i,j}^\alpha + \sum_{k=0}^{2^j-2N+1} \langle f \mid \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_{i=1}^{N_\beta} \langle f \mid \varphi_{i,j}^\beta \rangle \varphi_{i,j}^\beta$$

avec $\varphi_{i,j}^\alpha = 2^{j/2}\varphi_i^\alpha(2^j x)|_{[0,1]}$ *et* $\varphi_{i,j}^\beta = 2^{j/2}\varphi_i^\beta(2^j x - 2^j)|_{[0,1]}$).

• $N-1$ *fonctions* $\psi_i^\alpha (1 \leqq i \leqq N-1)$ *et* $N-1$ *fonctions* $\psi_i^\beta (1 \leqq i \leqq N-1)$ *dans* $V_1(\mathbb{R})$ *et à support dans* $[-3N+3, 3N-3]$ *telles que, pour* j_1 *le complémentaire orthogonal* W_j *de* V_j *dans* V_{j+1} *ait pour base orthonormée les fonctions*

$$2^{j/2}\psi_i^\alpha(2^j x)|_{[0,1]} = \psi_{i,j}^\alpha \qquad (1 \leqq i \leqq N-1),$$

les fonctions $\psi_{j,k} (0 \leqq k \leqq 2^j - 2N+1)$ *et les fonctions* $2^{j/2}\psi_i^\beta(2^j x - 2^j)|_{[0,1]} = \psi_{i,j}^\beta$ $(1 \leqq i \leqq N-1)$ (*de sorte que le projecteur* $Q_j = P_{j+1} - P_j$ *s'écrit à l'aide des* $\psi_{i,j}^\alpha$, *des* $\psi_{j,k}$ *et des* $\psi_{i,j}^\beta$).

L'analyse V_j se décrit donc à l'aide de fonctions indépendantes de l'échelle (la fonction φ et les termes de bord φ_i^α et φ_i^β) et de même les espaces d'ondelettes W_j (avec la fonction ψ et les termes de bord ψ_i^α et ψ_i^β).

Pour avoir une A.M.R. régulière, il suffit qu'il existe des fonctions $\theta_i^\alpha (1 \leqq i \leqq N_\alpha)$ et $\theta_i^\beta (1 \leqq i \leqq N_\beta)$ de $V_0(\mathbb{R})$ à support compact telles que, pour j assez grand, les $\theta_{i,j}^\alpha = 2^{j/2}\theta_i^\alpha(2^j x)|_{[0,1]}$ et les $\theta_{i,j}^\beta = 2^{j/2}\theta_i^\beta(2^j x - 2^j)|_{[0,1]}$ complémentent les $\varphi_{j,k}$, $0 \leqq k \leqq 2^j - 2N+1$ [base de $v_j([0, 1])$] en une base de V_j. Pour j assez grand, $\operatorname{Supp} \theta_{i,j}^\alpha \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\operatorname{Supp} \theta_{i,j}^\beta \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Il est alors immédiat que l'A.M.R. V_j sépare les bords et qu'elle est régulière. Pour obtenir les fonctions φ_i^α, φ_i^β, ψ_i^α et ψ_i^β, il suffit alors d'orthonormaliser la base de V_{j+1} donnée dans l'ordre suivant: les $\varphi_{j,k}$, $0 \leqq k \leqq 2^j - 2N+1$, puis les $\theta_{i,j}^\alpha$, $1 \leqq i \leqq N_\alpha$, puis les $\theta_{i,j}^\beta$, $1 \leqq i \leqq N_\beta$, puis les $\psi_{j,k}$, $0 \leqq k \leqq 2^j - 2N+1$, puis les $\varphi_{j+1,2k+1}$, $0 \leqq k \leqq N-2$, puis les $\varphi_{j+1,2k}$, $2^j - 2N+2 \leqq k \leqq 2^j - N$. Le procédé de Gram-Schmidt donne alors les fonctions annoncées.

Les premières constructions d'A.M.R. sur [0, 1] sont dues à Y. Meyer (*ondelettes périodiques* [9], *ondelettes sans traces* [6], *ondelettes à traces* [13]) d'autres sont actuellement étudiées par I. Daubechies [4].

Exemple 1. — Ondelettes périodiques.

On note pour $j \geqq 0$, $\tilde{\varphi}_{j,k}$ le 1-périodisé de

$$\varphi_{j,k} : \tilde{\varphi}_{j,k} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k}(x-p) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \varphi_{j,k+p2^j}.$$

Alors V_j est défini comme l'espace engendré par les $\tilde{\varphi}_{j,k}|_{[0,1]}$. On obtient alors la théorie des ondelettes périodiques (adaptée à l'étude des fonctions régulières périodiques). Cette A.M.R. ne sépare évidemment pas les bords.

Exemple 2. — Ondelettes sans traces.

$V_j = v_j([0, 1])$ est une A.M.R. régulière, sans termes de bord. On obtient des ondelettes adaptées à l'étude des fonctions régulières sur [0, 1], nulles au bord (par exemple, les espaces de Sobolev $H_0^k([0, 1])$).

Exemple 3. — Ondelettes à traces.

$V_j = V_j([0, 1])$ est une A.M.R. régulière. On obtient des ondelettes adaptées à l'étude des fonctions régulières sur [0, 1], et des opérateurs d'extension des fonctions de [0, 1] à $\mathbb{R}$.

Exemple 4. — Ondelettes unilatérales.

L'espace V_j engendré par les $\varphi_{j,k}|_{[0,1]}$ avec $\operatorname{Supp} \varphi_{j,k} \subset [0, \infty]$ est une A.M.R. régulière, adaptée à l'étude des fonctions régulières sur [0, 1] nulles au bord 0. On peut de même étudier les fonctions nulles en 1.

Exemple 5. — *Ondelettes à raccords polynomiaux.*

On considère les « demi-polynômes »

$$P_i^\alpha(x) = \sum_{k \leqq -1} k^i \varphi(x-k) \qquad \text{et} \qquad P_i^\beta = \sum_{k \geqq -2N+2} k^i \varphi(x-k)$$

pour $0 \leqq i \leqq N-1$ (de sorte que $P_i^\alpha|_{[-\infty, 0]}$ est un polynôme unitaire de degré i et de même $P_i^\beta|_{[0, +\infty[}$). Alors pour $m \leqq N-1$, on peut considérer l'A.M.R. V_j formée de $v_j([0, 1])$ complété par les $2^{j/2} P_i^\alpha(2^j x)|_{[0,1]}$ et les $2^{j/2} P_i^\beta(2^j x - 2^j)|_{[0,1]}$ avec $0 \leqq i \leqq m$. On obtient, pour $m \geqq \alpha N$ (où αN correspond à la régularité de φ) des ondelettes adaptées à l'étude des fonctions régulières sur [0, 1] et des opérateurs d'extension par des polynômes en dehors de [0, 1].

IV. ANALYSE MULTI-RÉSOLUTION BI-ORTHOGONALE SUR [0, 1]

Il devrait être maintenant clair de savoir comment définir une analyse multi-résolution bi-orthogonale sur [0, 1]. On part d'une A.M.R.B.O. $(V_j(\mathbb{R})), V_j^*(\mathbb{R}))$ de $L^2(\mathbb{R})$ telle qu'on ait des fonctions d'échelle conjuguées g, g^* *à support compact*. On définit alors $V_j([0, 1])$ comme l'espace des restrictions à [0, 1] des fonctions de $V_j(\mathbb{R})$ et $v_j([0, 1])$ comme l'espace engendré par les $g_{j,k}$ avec $\operatorname{Supp} g_{j,k} \subset [0, 1]$, et de même $V_j^*([0, 1])$ et $v_j^*([0, 1])$.

DÉFINITION 4. – Une A.M.R.B.O. de $L^2([0, 1])$ associée à $V_j(\mathbb{R})$, $V_j^*(\mathbb{R})$ est une suite de couples (V_j, V_j^*), $j \geqq j_0$, de sous-espaces de $L^2([0, 1])$ telle que :

(*a*) $v_j([0, 1]) \subset V_j \subset V_j([0, 1])$ et $v_j^*([0, 1]) \subset V_j^* \subset V_j^*([0, 1])$

(*b*) $V_j \subset V_{j+1}$ et $V_j^* \subset V_{j+1}^*$

(*c*) Pour tout $j \geqq j_0$, V_j et V_j^* sont en dualité pour le produit scalaire de $L^2([0, 1])$.

Exemple 6. – A.M.R.B.O. périodique.

Si $(V_j(\mathbb{R}), V_j^*(\mathbb{R}))$ est une A.M.R.B.O. de $L^2(\mathbb{R})$, alors on peut définir une A.M.R.B.O. de $L^2([0, 1])$ associée par :

$$\tilde{G}_{j,k} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} g_{j,k+p\,2^j}, \qquad \tilde{G}_{j,k}^* = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{j,k+p\,2^j}^*$$

et

$$V_j = \operatorname{Vect}\{\tilde{G}_{j,k}|_{[0,1]} / 0 \leqq k < 2^j\}$$

et

$$V_j^* = \operatorname{Vect}\{\tilde{G}_{j,k}^*|_{[0,1]} / 0 \leqq k < 2^j\}.$$

Il est immédiat que $\int_0^1 \tilde{G}_{j,k}^* \tilde{G}_{j,l}\,dx = \delta_{k,l}$ pour $k, l \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}$ et que donc V_j et V_j^* sont en dualité. Comme dans le cas orthogonal, cette AMRBO est adaptée à l'étude des fonctions périodiques. On notera cette analyse $V_j^{\text{per}}([0, 1])$, $V_j^{*\text{per}}([0, 1])$.

Supposons maintenant que $V_0(\mathbb{R})$ « contienne » les polynômes de degré $\leqq d$ (c'est-à-dire que tout polynôme P de degré $\leqq d$ s'écrit $P(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k g(x-k)$). Cela est vérifié si et seulement si le polynôme trigonométrique $M_0(e^{-i\xi})$ associé à g par la formule

$$\hat{g}(2\xi) = M_0(e^{-i\xi})\,\hat{g}(\xi)$$

est divisible par $\left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^{d+1}$; c'est le cas en particulier si g est de classe C^d [7]. On définit alors les demi-polynômes $P_i^\alpha = \sum_{k \leqq -N_1 - 1} k^i g(x-k)$ et $P_i^\beta = \sum_{k \geqq -N_2 + 1} k^i g(x-k)$ pour $0 \leqq i \leqq d$. Alors P_i^α est un polynôme unitaire de degré i sur $]-\infty, 0]$. En particulier, on a

$$P_i^\alpha(x) = 2^i P_i^\alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{0 \leqq l < i} \alpha_{l,i} P_l^\alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=-N_1}^{N_2 - 2N_1} \beta_{k,i}\, g(x-k).$$

D'où :

PROPOSITION 3. — *Si* $V_0(\mathbb{R})$ *contient les polynômes de degré* $\leqq d$ *et si* V_{j_0} *contient les demi-polynômes* $P_i^\alpha(2^{j_0} x)|_{[0,1]}$ $(0 \leqq i \leqq d)$ *pour un indice* j_0 *tel que* $2^{j_0} \geqq 2N_2 - 2N_1$, *alors pour tout* $j \geqq j_0$, V_j *contient les demi-polynômes* $P_{i,j}^\alpha(x) = P_i^\alpha(2^j x)|_{[0,1]}$. *Un résultat analogue a lieu également pour les demi-polynômes* $P_{i,j}^\beta(x) = P_i^\beta(2^j x - 2^j)|_{[0,1]}$.

Il est clair que si V_j contient les demi-polynômes $P_{i,j}^\alpha$ et les demi-polynômes $P_{i,j}^\beta$ $(j \geqq j_0)$ alors V_j contient les polynômes de degré $\leqq d$. L'importance de telle A.M.R.B.O. est illustrée par le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit* $(V_j(\mathbb{R}), V_j^*(\mathbb{R}))$ *une A.M.R.B.O. à fonctions d'échelle conjuguées* (g, g^*) *à support compact et* (V_j, V_j^*) *une A.M.R.B.O. de* $L^2([0, 1])$ *associée à* $(V_j(\mathbb{R}), V_j^*(\mathbb{R}))$. *On suppose que* :

(i) g *est dérivable, de dérivée*

$$g' = \tilde{g}(x) - \tilde{g}(x-1)$$

[*on notera* $(\tilde{V}_j(\mathbb{R}), \tilde{V}_j^*(\mathbb{R}))$ *l'A.M.R.B.O. associée à* $\tilde{g}$, $\tilde{g}^*$].

(ii) V_j *contient les demi-constantes* $P_{0,j}^\alpha$ *et* $P_{0,j}^\beta$.

Alors, si on pose

$$\tilde{V}_j = \{ f \in L^2([0, 1]) / \exists g \in V_j, f = g' \}$$

et

$$\tilde{V}_j^* = \{ f \in L^2([0, 1]) / f' \in V_j^* \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0 \},$$

$(\tilde{V}_j, \tilde{V}_j^*)$ *est une A.M.R.B.O. de* $L^2([0, 1])$ *associée à* $(\tilde{V}_j(\mathbb{R}), \tilde{V}_j^*(\mathbb{R}))$.

De plus si P_j *désigne le projecteur oblique de* $L^2([0, 1])$ *sur* V_j *parallèlement à* $(V_j^*)^\perp$ *et* $\tilde{P}_j$ *celui sur* $\tilde{V}_j$ *parallèlement à* $(\tilde{V}_j^*)^\perp$, *alors on a* :

$$\frac{d}{dx} \circ P_j = \tilde{P}_j \circ \frac{d}{dx}. \tag{6}$$

Démonstration. — On suppose $j \geqq j_0$ avec $2^{j_0} \geqq 2N_2 - 2N_1$. Remarquons tout d'abord que

$$\tilde{V}_j([0, 1]) = \{ f \in L^2([0, 1]) / \exists g \in V_j([0, 1])\, f = g' \}$$

et que

$$\tilde{V}_j^*([0, 1]) = \{ f \in L^2([0, 1]) / f' \in V_j^*([0, 1]) \} :$$

en effet il est clair que

$$\tilde{g}(x-k) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} g(x-k-p) \right)'$$

et que

$$\tilde{g}^{*\prime}(x-k) = g^*(x-k+1) - g^*(x-k).$$

D'où $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_j([0, 1])$ et $\tilde{V}_j^* \subset \tilde{V}_j^*$ $([0, 1])$. De plus, puisque V_j contient le demi-polynôme $P^{\beta}_{0,j}$ on voit que $\tilde{v}_j([0, 1]) \subset \tilde{V}_j$. Enfin il est clair que $\tilde{v}_j^*([0, 1]) \subset \tilde{V}_j^*$.

Les inclusions $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$ et $\tilde{V}_j^* \subset \tilde{V}_{j+1}^*$ sont immédiates, Il reste à démontrer que $\tilde{V}_j$ et $\tilde{V}_j^*$ sont en dualité. Pour cela choisissons une base de $V_j(\varepsilon_0=1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ avec $N=\dim V_j-1$ et une base duale des ε_i dans $V_j^*(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_N)$. Alors la dérivation est un isomorphisme de $\tilde{V}_j^*$ sur $\mathrm{Vect}(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ (espace vectoriel engendré par les η_i) et de $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ sur $\tilde{V}_j$. Le second point est évident; quant au premier, si $\theta \in \tilde{V}_j^*$ alors $\int_0^1 \theta'\,dx=\theta(1)-\theta(0)=0$ d'où θ' est orthogonale à ε_0 et $\theta' \in \mathrm{Vect}(\eta_1, \ldots, \eta_N)$; la bijectivité se vérifie par l'existence de l'inverse: $\eta \in \mathrm{Vect}(\eta_1, \ldots, \eta_N) \to \int_0^x \eta(t)\,dt$. Si $\tilde{\varepsilon}_i=\frac{d}{dx}\varepsilon_i$ et $\tilde{\eta}_i=-\int_0^x \eta_i(t)\,dt$, alors il est immédiat, par intégration par parties, que les bases $(\tilde{\varepsilon}_i)$ et $(\tilde{\eta}_i)$ sont bi-orthogonales et donc que $\tilde{V}_j$ et $\tilde{V}_j^*$ sont en dualité.

Enfin (6) est immédiat:

$$\frac{d}{dx}(P_j f)=\frac{d}{dx}\langle f|\eta_0\rangle 1+\sum_1^N\langle f|\eta_i\rangle\frac{d}{dx}\varepsilon_i=\sum_1^N\langle f|\eta_i\rangle\tilde{\varepsilon}_i$$

tandis que

$$\tilde{P}_j\left(\frac{df}{dx}\right)=\sum_1^N\left\langle\frac{df}{dx}\middle|\tilde{\eta}_i\right\rangle\tilde{\varepsilon}_i=\sum_1^N([f\,\tilde{\eta}_i]_0^1+\langle f|\eta_i\rangle)\tilde{\varepsilon}_i=\sum_1^N\langle f|\eta_i\rangle\tilde{\varepsilon}_i.$$

Le théorème 1 est donc démontré.

Remarque. — Nous avons emprunté à Cieselski et Figiel [1] l'idée d'utiliser l'intégration par parties pour engendrer des bases bi-orthogonales dans $L^2([0, 1])$.

Exemple fondamental. — Désignons par $V_j(\mathbb{R})$ une A.M.R.O. d'I. Daubechies où φ est d fois dérivable. On note $V_j^{(d)}(\mathbb{R})$ et $V_j^{(-d)}(\mathbb{R})$ les A.M.R. obtenues par d dérivations et d intégrations. Alors le théorème 1 nous indique que $V_j^{(d)}([0, 1])$ et $V_j^{(-d)}([0, 1]) \cap H_0^d([0, 1])$ définissent une A.M.R.B.O. de $L^2([0, 1])$ et qu'on a les formules $\frac{d}{dx}\circ P_j^{(d)}=P_j^{(d+1)}\circ\frac{d}{dx}$. L'étude de cette A.M.R.B.O. fait l'objet de la section suivante.

V. ÉTUDE DE $V_j^{(d)}([0, 1])$

On note donc:

- $V_j(\mathbb{R})$ une A.M.R.O. d'I. Daubechies avec φ d fois dérivable,
- $V_j^{(d)}(\mathbb{R})$ l'A.M.R. associée à la dérivation itérée d fois sur $V_j(\mathbb{R})$ et g la fonction de $V_0^{(d)}(\mathbb{R})$ définie par $(1-e^{-i\xi})^d \hat{g}(\xi)=(i\xi)^d \hat{\varphi}(\xi)$,
- $V_j^{(-d)}(\mathbb{R})$ l'A.M.R. associée à la primitivation itérée d fois sur $V_j(\mathbb{R})$ et g^* la fonction de $V_0^{(-d)}(\mathbb{R})$ définie par $(i\xi)^d \hat{g}^*(\xi)=(e^{i\xi}-1)^d \hat{\varphi}(\xi)$ (de sorte que g et g^* sont des fonctions d'échelles conjuguées),
- $V_j^{(d)}=V_j^{(d)}([0, 1])$ et $V_j^{(-d)}=V_j^{(-d)}([0, 1]) \cap H_0^d([0, 1])$ [de sorte que $V_j^{(d)}$ et $V_j^{(-d)}$ forment une A.M.R.B.O. de $L^2([0, 1])$],
- $W_j^{(d)}=V_{j+1}^{(d)} \cap V_j^{(-d)\perp}$ et $W_j^{(-d)}=V_{j+1}^{(-d)} \cap V_j^{(d)\perp}$,
- enfin $\gamma=\psi^{(d)}$ et $\gamma^*=(-1)^d \int_0^x \frac{(x-t)^{d-1}}{(d-1)!} \psi(t)\,dt$.

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — (i) *Il existe* $2N-2$ *fonctions* $g_i^\alpha \in V_0^{(d)}(\mathbb{R})$ $(1 \leqq i \leqq 2N-2)$, $2N-2$ *fonctions* $g_i^{\alpha*} \in V_0^{(-d)}(\mathbb{R})$ $(1 \leqq i \leqq 2N-2)$, $2N-2$ *fonctions* $g_i^\beta \in V_0^{(d)}(\mathbb{R})$ $(1 \leqq i \leqq 2N-2)$ *et* $2N-2$ *fonctions* $g_i^{\beta*} \in V_0^{(-d)}(\mathbb{R})$ $(1 \leqq i \leqq 2N-2)$ *telles que*:

— $\operatorname{Supp} g_i^\alpha \subset [-2N+2+d, 2N-2]$, $\operatorname{Supp} g_i^{\alpha*} \subset [-2N+2-d, 2N+d-2]$, $\operatorname{Supp} g_i^\beta \subset [-2N+2, 2N-2-d]$ et $\operatorname{Supp} g_i^{\beta*} \subset [-2N+2-d, 2N+d-2]$

— *les fonctions*

$$g_{i,j}^\alpha=2^{j/2} g_i^\alpha(2^j x)\big|_{[0, 1]} \qquad (1 \leqq i \leqq 2N-2),$$

$g_{j,k}=2^{j/2} g(2^j x-k)$ $(d \leqq k \leqq 2^j-2N+1)$ *et* $g_{i,j}^\beta=2^{j/2} g_i^\beta(2^j x-2^j)\big|_{[0, 1]}$ *d'une part et les fonctions*

$$g_{i,j}^{\alpha*}=2^{j/2} g_i^{\alpha*}(2^j x)\big|_{[0, 1]} \qquad (1 \leqq i \leqq 2N-2),$$

$g_{j,k}^*=2^{j/2} g^*(2^j x-k)$ $(d \leqq k \leqq 2^j-2N+1)$ *et* $g_{i,j}^{\beta*}=2^{j/2} g_i^{\beta*}(2^j x-2^j)\big|_{[0, 1]}$ $(1 \leqq i \leqq 2N-2)$ *d'autre part forment un système de bases biorthogonales dans* $V_j^{(d)}$ *et* $V_j^{(-d)}$ *pour* $j \geqq j_0$ *avec* j_0 *le plus petit entier tel que* $2^{j_0} \geqq 4N-4+2d$.

(ii) *Il existe* $N-1$ *fonctions* $\gamma_i^\alpha \in V_1^{(d)}(\mathbb{R})$ $(1 \leqq i \leqq N-1)$ $N-1$ *fonctions* $\gamma_i^{\alpha*} \in V_1^{(-d)}(\mathbb{R})$ $(1 \leqq i \leqq N-1)$, $N-1$ *fonctions* $\gamma_i^\beta \in V_1^{(d)}(\mathbb{R})$ $(1 \leqq i \leqq N-1)$ *et* $N-1$ *fonctions* $\gamma_i^{\beta*} \in V_1^{(-d)}(\mathbb{R})$ $(1 \leqq i \leqq N-1)$ *telles que*:

— $\operatorname{Supp} \gamma_i^\alpha \subset \left[-N+\frac{d}{2}+1, 3N-3\right]$, $\operatorname{Supp} \gamma_i^{\alpha*} \subset \left[-N-\frac{d}{2}+1, 3N-3\right]$, $\operatorname{Supp} \gamma_i^\beta \subset \left[-3N+3, N-1-\frac{d}{2}\right]$ *et* $\operatorname{Supp} \gamma_i^{\beta*} \subset \left[-3N+3, N-1+\frac{d}{2}\right]$.

— *les fonctions* $\gamma_{i,j}^\alpha=2^{j/2} \gamma_i^\alpha(2^j x)\big|_{[0, 1]}$ $(1 \leqq i \leqq N-1)$, $\gamma_{j,k}=2^{j/2} \gamma(2^j x-k)$ $(0 \leqq k \leqq 2^j-2N+1)$ *et* $\gamma_{i,j}^\beta=2^{j/2} \gamma_i^\beta(2^j x-2^j)\big|_{[0, 1]}$ $(1 \leqq i \leqq N-1)$ *d'une part* *et les fonctions* $\gamma_{i,j}^{\alpha^*}=2^{j/2}\gamma_i^{\alpha^*}(2^j x)|_{[0,1]}$ $(1\leqq i\leqq N-1)$, $\gamma_{j,k}^*=2^{j/2}\gamma^*(2^j x-k)$ $(0\leqq k\leqq 2^j-2^j-2N+1)$ *et* $\gamma_{i,j}^{\beta^*}=2^{j/2}\gamma_i^{\beta^*}(2^j x-2^j)|_{[0,1]}$ *d'autre part forment un système de bases bi-orthogonales dans* $W_j^{(d)}$ *et* $W_j^{(-d)}$ *pour* $j\geqq j_0$.

Démonstration. — Une base de $V_j^{(d)}$ est constituée par les $g_{j,k}|_{[0,1]}$ pour $-2N+2+d\leqq k\leqq 2^j-1$ (*cf.* [7] par exemple). On pose donc, pour $1\leqq i\leqq 2N-2$, $g_i^\alpha=g(x+2N-1-d-i)$ et $g_i^\beta=g(x+i)$, de sorte que les $g_{i,j}^\alpha$, les $g_{j,k}(d\leqq k\leqq 2^j-2N+1)$ et les $g_{i,j}^\beta$ forment bien une base de $V_j^{(d)}$. Comme $\operatorname{Supp} g=[0, 2N-1-d]$, les supports des g_i^α et des g_i^β sont bien localisés dans les intervalles annoncés.

Il reste à calculer le système dual dans $V_j^{(-d)}$. Pour $d\leqq k\leqq 2^j-2N+1$, on a $\operatorname{Supp} g_{j,k}^*\subset[0,1]$ car $\operatorname{Supp} g^*=[-d, 2N-1]$; d'où le vecteur dual de $g_{j,k}$ est bien $g_{j,k}^*$ pour $d\leqq k\leqq 2^j-2N+1$ (puisque

$$\langle g_{j,k}^*\,|\,g_{j,l[0,1]}\rangle_{L^2([0,1])}=\langle g_{j,k}^*\,|\,g_{j,l}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}=\delta_{k,l}).$$

Le vecteur dual de $g_{i,j}^\alpha$, que nous noterons $(g_{i,j}^\alpha)^*$, se décompose en:

$$(g_{i,j}^\alpha)^*=\sum_{l=-2N+2}^{2^j+d-1}\alpha_{j,i,l}\,g_{j,l}^*|_{[0,1]}.$$

Nécessairement $\alpha_{j,i,l}=0$ si $l\in[d, 2^j-2N+1]$ car alors

$$\alpha_{j,i,l}=\langle(g_{i,j}^\alpha)^*\,|\,g_{j,l}\rangle_{L^2([0,1])}.$$

D'où

$$(g_{i,j}^\alpha)^*=\sum_{l=-2N+2}^{d-1}\alpha_{j,i,l}\,g_{j,l}^*|_{[0,1]}+\sum_{l=2^j-2N+2}^{2^j+d-1}\alpha_{j,i,l}\,g_{j,l}^*|_{[0,1]}.$$

Si $2^j\geqq 4N+2d-4$, on a que $\sum_{l=-2N+2}^{d-1}\alpha_{j,i,l}\,g_{j,l}^*|_{[0,1]}$ est encore dans $V_j^{(-d)}$ et que ses produits scalaires avec les $g_{j,q}|_{[0,1]}$ $(-2N+2+d\leqq q\leqq 2^j-1)$ coïncident avec ceux de $(g_{i,j}^\alpha)^*$; d'où $(g_{i,j}^\alpha)^*=\sum_{l=-2N+2}^{d-1}\alpha_{j,i,l}\,g_{j,l}^*|_{[0,1]}$. Mais alors $\alpha_{j,i,l}$ est déterminé par les conditions: pour $1\leqq q\leqq 2N-2$

$$\int_0^\infty\left(\sum_{l=-2N+2}^{d-1}\alpha_{j,i,l}\,2^{j/2}g^*(2^j x-l)\right)2^{j/2}g(2^j x+2N-1-d-q)\,dx=\delta_{i,q}.$$

Ces conditions ne dépendent pas de j et donc $(g_{i,j}^\alpha)^*=2^{j/2}g_i^{\alpha^*}(2^j x)|_{[0,1]}$ avec $g_i^{\alpha^*}=\sum_{-2N+2}^{d-1}\alpha_{i,l}\,g^*(x-l)$. La détermination de $g_i^{\beta^*}$ est analogue.

La construction du système bi-orthogonal de $W_j^{(d)}$ et $W_j^{(-d)}$ est beaucoup plus directe. En effet, si ε_k $(1\leqq k\leqq 2^j)$ est une base orthonormée de $W_j|_{[0,1]}$ (complémentaire orthogonal de $V_j([0,1])$ dans $V_{j+1}([0,1])$) alors, comme le montre la preuve du théorème 1, les $\alpha_k = 2^{-jd}\varepsilon_k^{(d)}$ et les

$$\beta_k = (-1)^d 2^{jd} \int_0^x \frac{(x-t)^{d-1}}{(d-1)!} \varepsilon_k(t)\,dt$$

forment des bases bi-orthogonales de $W_j^{(d)}$ et $W_j^{(-d)}$. On considère alors la base

$$\psi_{i,j}^{\alpha}\,(1 \leqq i \leqq N-1), \qquad \psi_{j,k}\,(0 \leqq k \leqq 2^j - 2N + 1)$$

et

$$\psi_{i,j}^{\beta}\,(1 \leqq i \leqq N-1)$$

décrite par la proposition 2. On obtient des bases bi-orthogonales de $W_j^{(d)}$ et $W_j^{(-d)}$ avec

$$\gamma_{i,j}^{\alpha} = 2^{j/2}\,\psi_i^{\alpha\,(d)}(2^j \alpha)\,|_{[0,1]}, \qquad \gamma_{j,k} = 2^{j/2}\,\psi^{(d)}(2^j x - k)$$

et

$$\gamma_{i,j}^{\beta} = 2^{j/2}\,\psi_i^{\beta\,(d)}(2^j x - 2^j)\,|_{[0,1]}$$

d'une part

$$\gamma_{i,j}^{\alpha *} = 2^{j/2}(-1)^d \int_0^{2^j x} \frac{(2^j x - t)^{d-1}}{(d-1)!} \psi_i^{\alpha}(t)\,dt\,|_{[0,1]},$$

$$\gamma_{j,k}^{*} = 2^{j/2}(-1)^d \int_0^{2^j x - k} \frac{(2^j x - k - t)^{d-1}}{(d-1)!} \psi(t)\,dt$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma_{i,j}^{\beta *} &= (-1)^d 2^{jd} \int_0^x \frac{(x-t)^{d-1}}{(d-1)!} \psi_{i,j}^{\beta}(t)\,dt\,|_{[0,1]} \\
&= (-1)^d 2^{jd} \int_1^x \frac{(x-t)^{d-1}}{(d-1)!} \psi_{i,j}^{\beta}(t)\,dt\,|_{[0,1]} \\
&= (-1)^d 2^{j/2} \int_0^{2^j x - 2^j} \frac{(2^j x - 2^j - t)^{d-1}}{(d-1)!} \psi_i^{\beta}(t)\,dt\,|_{[0,1]}.
\end{aligned}$$

On a en particulier

$$\gamma_{i,j}^{\alpha} = 2^{j/2}\,\gamma_{(i)}^{\alpha}(2^j x)\,|_{[0,1]} \qquad \text{avec} \quad \operatorname{Supp} \gamma_{(i)}^{\alpha} \subset [-3N+3, 3N-3],$$

$$\gamma_{i,j}^{\beta} = 2^{j/2}\,\gamma_{(i)}^{\beta}(2^j x - 2^j)\,|_{[0,1]} \qquad \text{avec} \quad \operatorname{Supp} \gamma_{(i)}^{\beta} \subset [-3N+3, 3N-3],$$

$$\gamma_{i,j}^{\alpha *} = 2^{j/2}\,\gamma_{(i)}^{\alpha *}(2^j x)\,|_{[0,1]} \qquad \text{avec} \quad \operatorname{Supp} \gamma_{(i)}^{\alpha *} \subset\,]-\infty, 3N-3]$$

$\left[\text{car} \int_0^{\infty} P(t)\,\psi_i^{\alpha}(t)\,dt = 0 \text{ pour tout polynôme de degré } \leqq d\right]$ et

$$\gamma_{i,j}^{\beta *} = 2^{j/2}\,\gamma_{(i)}^{\beta *}(2^j x - 2^j)\,|_{[0,1]} \qquad \text{avec} \quad \operatorname{Supp} \gamma_{(i)}^{\beta *} \subset [-3N+3, +\infty[.$$

Comme seules les valeurs de $\gamma_{(i)}^{\alpha}$ et $\gamma_{(i)}^{\alpha^*}$ sur $[0, +\infty[$ et de $\gamma_{(i)}^{\beta}$ et $\gamma_{(i)}^{\beta^*}$ sur $]-\infty, 0]$ interviennent, on peut modifier $\gamma_{(i)}^{\alpha}$ en γ_i^{α} avec

$$\operatorname{Supp} \gamma_i^{\alpha} \subset \left[-N+1+\frac{d}{2}, +\infty\right[$$

et $\gamma_i^{\alpha}|_{[0, +\infty[} = \gamma_{(i)}^{\alpha}|_{[0, +\infty[}$

et de même pour $\gamma_{(i)}^{\alpha^*}$, $\gamma_{(i)}^{\beta}$ et $\gamma_{(i)}^{\beta^*}$. Le théorème 2 est alors démontré.

On dispose donc, pour une fonction f sur $[0, 1]$, des approximations

$$P_j^{(d)} f = \sum_{i=1}^{2N-2} \langle f | g_{i,j}^{\alpha^*} \rangle g_{i,j}^{\alpha} + \sum_{k=d}^{2^j+2N-1} \langle f | g_{j,k}^{*} \rangle g_{j,k} + \sum_{i=1}^{2N-2} \langle f | g_{i,j}^{\beta^*} \rangle g_{i,j}^{\beta}$$

et

$$P_j^{(d)^*} f = \sum_{i=1}^{2N-2} \langle f | g_{i,j}^{\alpha} \rangle g_{i,j}^{\alpha^*} + \sum_{k=d}^{2^j+2N-1} \langle f | g_{j,k} \rangle g_{j,k}^{*} + \sum_{i=1}^{2N-2} \langle f | g_{i,j}^{\beta} \rangle g_{i,j}^{\beta^*}$$

(projections de f sur $V_j^{(d)}$ parallèlement à $V_j^{(-d)\perp}$ et sur $V_j^{(-d)}$ parallèlement à $V_j^{(d)\perp}$). Les relations entre $P_j^{(d)}$ et $P_j^{(d+1)}$, et entre $P_j^{(d)^*}$ et $P_j^{(d+1)^*}$, sont données par :

$$\text{(7.1)} \qquad \text{si } f \in H^1([0, 1]), \quad \frac{d}{dx}(P_j^{(d)} f) = P_j^{(d+1)}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$\text{(7.2)} \qquad \text{si } f \in H_0^1([0, 1]), \quad \frac{d}{dx}(P_j^{(d+1)^*} f) = P_j^{(d)^*}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

[formules qui sont transposées l'une de l'autre, puisque si $f \in H^1$ et $g \in H_0^1$, alors

$$\langle P_j f | g \rangle_{L^2([0, 1])} = \langle f | P_j^* g \rangle$$

et $\left\langle \frac{df}{dx} \middle| g \right\rangle = -\left\langle f \middle| \frac{dg}{dx} \right\rangle$]. En particulier, les $P_j^{(d)}$ serviront à l'approximation des fonctions régulières sur $[0, 1]$ et les $P_j^{(d)^*}$ à celle des fonctions régulières nulles au bord. (C'est le principe des constructions de Cieselski et Figiel [1]).

THÉORÈME 3. — *On suppose que* φ *est de classe* $C^{p+\varepsilon}$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq d$, $\varepsilon > 0$. *On note* $P_j^{(d)}$ *le projecteur sur* $V_j^{(d)}$ *parallèlement à* $V_j^{(-d)}$, $P_j^{(d)^*}$ *son adjoint,* $Q_j^{(d)} = P_{j+1}^{(d)} - P_j^{(d)}$ *et* $Q_j^{(d)^*} = P_{j+1}^{(d)^*} - P_j^{(d)^*}$. *Enfin* j_0 *est fixé tel que*

$2^{j_0} \geqq 4N-4+2p$. *Alors*:

(i) *Pour* $f \in L^2([0, 1])$, $\|f\|_2 \approx \|P_{j_0}^{(d)} f\|_2 + \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \|Q_j^{(d)}(f)\|_2^2\right)^{1/2}$ *et, pour deux constantes* A, B > 0 *indépendantes de* $j \geqq j_0$,

$$A\|Q_j^{(d)} f\|_2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{N-1} |\langle f | \gamma_{i,j}^{\alpha *}\rangle|^2 + \sum_{k=0}^{2^j-2N+1} |\langle f | \gamma_{j,k}^{*}\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{N-1} |\langle f | \gamma_{i,j}^{\beta *}\rangle|^2\right)^{1/2} \leqq B\|Q_j^{(d)} f\|_2.$$

(ii) *Pour* $f \in L^2([0, 1])$, $\|f\|_2 \approx \|P_{j_0}^{(d)*} f\|_2 + \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \|Q_j^{(d)*}(f)\|_2^2\right)^{1/2}$ *et, pour deux constantes* A, B > 0 *indépendantes de* $j \geqq j_0$,

$$A\|Q_j^{(d)*} f\|_2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{N-1} |\langle f | \gamma_{i,j}^{\alpha}\rangle|^2 + \sum_{k=0}^{2^j-2N+1} |\langle f | \gamma_{j,k}\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{N-1} |\langle f | \gamma_{i,j}^{\beta}\rangle|^2\right)^{1/2} \leqq B\|Q_j^{(d)*} f\|_2.$$

(iii) *Pour* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 \leqq k \leqq p-d$ *on a*:

$$f \in H^k([0, 1]) \Leftrightarrow P_{j_0}^{(d)} f \in L^2 \quad et \quad \sum_{j \geqq j_0} 4^{jk} \|Q_j^{(d)} f\|_2^2 < +\infty$$

$$f \in H_0^{-k}([0, 1]) \Leftrightarrow P_{j_0}^{(d)*} f \in L^2 \quad et \quad \sum_{j \geqq j_0} 4^{-jk} \|Q_j^{(d)*} f\|_2^2 < +\infty.$$

(iv) *Pour* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $0 \leqq k \leqq d$ *on a*:

$$f \in H^{-k}([0, 1]) \Leftrightarrow P_{j_0}^{(d)} f \in L^2 \quad et \quad \sum_{j \geqq j_0} 4^{-jk} \|Q_j^{(d)} f\|_2^2 < +\infty$$

$$f \in H_0^{k}([0, 1]) \Leftrightarrow P_{j_0}^{(d)*} f \in L^2 \quad et \quad \sum_{j \geqq j_0} 4^{+jk} \|Q_j^{(d)*} f\|_2^2 < +\infty.$$

(On aurait des résultats analogues sur les espaces de Besov).

La démonstration du théorème 3 est tout ce qu'il y a de plus classique dans la « technologie ondelettes ».

Une famille de vaguelettes est une famille de fonctions $\alpha_{j,k}$ de $L^2(\mathbb{R})$ telles que, pour un M > 0, un C > 0 et un ε > 0, on ait, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

(8.1) $$\operatorname{Supp} \alpha_{j,k} \subset \{x \in \mathbb{R} / 2^j x - k \in [-M, M]\}$$

(8.2) $$\|\alpha_{j,k}\|_\infty \leqq C\, 2^{j/2}$$

(8.3) $$\sup_{x \neq y} \frac{|\alpha_{j,k}(x)-\alpha_{j,k}(y)|}{|x-y|^{\varepsilon}} \leqq C\, 2^{j/2}\, 2^{j\varepsilon}$$

(8.4) $$\int \alpha_{j,k}(x)\, dx = 0.$$

LEMME. — *Si* $\alpha_{j,k}$ *est une famille de vaguelettes alors, pour une constante* $D>0$, *on a*:

$$\forall (\lambda_{j,k}) \in l^2(\mathbb{Z}^2),\ \Big\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_{j,k}\alpha_{j,k} \Big\|_2^2 \leqq D \sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^2.$$

En effet, observons d'abord que $\langle \alpha_{j,k} | \alpha_{j',k'} \rangle = 0$ si

$$\left[\frac{k-M}{2^j}, \frac{k+M}{2^j}\right] \cap \left[\frac{k'-M}{2^{j'}}, \frac{k'+M}{2^{j'}}\right] = \varnothing,$$

ou encore $\left| k' - k\dfrac{2^{j'}}{2^j} \right| \geqq M\left(1+\dfrac{2^{j'}}{2^j}\right)$; le nombre d'indices k' pour lesquels $\langle \alpha_{j,k} | \alpha_{j',k'} \rangle$ est non nul se majore donc par C si $j'<j$ et par $C\,2^{j'-j}$ si $j' \geqq j$ où C est indépendant de j', de j et de k. De plus $|\langle \alpha_{j,k} | \alpha_{j',k'} \rangle| \leqq C\, 2^{-|j-j'|(\varepsilon+1/2)}$: si $j \geqq j'$, on écrit

$$|\langle \alpha_{j,k} | \alpha_{j',k'} \rangle| = \left| \int \alpha_{j,k}(x)\left(\alpha_{j',k'}(x) - \alpha_{j',k'}\left(\frac{k}{2^j}\right)\right) dx \right.$$

$$\leqq C\, 2^{j/2}\, 2^{j'/2}\, 2^{j'\varepsilon} \int_{[(k-M)/2^j,\ (k+M)/2^j]} \left| x - \frac{k}{2^j} \right|^{\varepsilon} dx \leqq C'\, 2^{-(j-j')(\varepsilon+1/2)}.$$

On a alors:

$$\sum_{j',k'} 2(j-j')\,1/2\, |\langle \alpha_{j,k} | \alpha_{j',k'} \rangle|$$

$$\leqq C\Big(\sum_{j'<j} 2^{(j-j')\,1/2}\, 2^{-(j-j')(\varepsilon+1/2)}$$

$$+ \sum_{j' \geqq j} 2^{(j-j')\,1/2}\, 2^{(j-j')(\varepsilon+1/2)}\, 2^{j'-j}\Big)$$

$$\leqq C' \sum_{j' \in \mathbb{Z}} 2^{-|j-j'|\varepsilon} = C''.$$

Il suffit alors d'écrire:

$$\Big\| \sum_{j,k} \lambda_{j,k}\alpha_{j,k} \Big\|_2^2 \leqq \Big\{ \sum_{j,k} \sum_{j',k'} |\lambda_{j,k}|^2\, 2^{(j-j')\,1/2}\, |\langle \alpha_{j,k} | \alpha_{j',k'} \rangle| \Big\}^{1/2}$$

$$\cdot \Big\{ \sum_{j,k} \sum_{j',k'} |\lambda_{j',k'}|^2\, 2^{(j'-j)\,1/2}\, |\langle \alpha_{j,k} | \alpha_{j',k'} \rangle| \Big\}^{1/2}$$

pour conclure.

Maintenant remarquons qu'on peut modifier γ_i^α dans $]-\infty, 0]$ et γ_i^β dans $[0, +\infty[$ de manière à ce que $\int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\alpha \, dx = \int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\beta \, dx = 0$: il suffit de poser

$$\tilde{\gamma}_i^\alpha = \gamma_i^\alpha - \left(\int \gamma_i^\alpha \, dx \right) \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2} + 2\mathrm{N} - 1 - d \right)$$

et de poser

$$\tilde{\gamma}_i^\beta = \gamma_i^\beta - \left(\int \gamma_i^\beta \, dx \right) \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2} \right).$$

Pour $f \in \mathrm{L}^2([0, 1])$, on a

$$f = \mathrm{P}_{j_0}^{(d)} f + \sum_{j=j_0}^{\infty} \mathrm{Q}_j^{(d)} f \qquad \text{et} \qquad \| f \|_2 \approx \| \mathrm{P}_{j_0}^{(d)} f \|_2 + \left\| \sum_{j=j_0}^{\infty} \mathrm{Q}_j^{(d)} f \right\|_2 .$$

Or

$$\left\| \sum_{j=j_0}^{\infty} \mathrm{Q}_j^{(d)} f \right\|_2^2 = \int_{[0, 1]} | \sum_j \sum_k \lambda_{j, k} \alpha_{j, k}(x) |^2 \, dx$$

avec $\alpha_{j, k}$ la famille de vaguelettes suivantes :

- pour $j \geqq j_0$ et $0 \leqq k \leqq 2^j - 2\mathrm{N} + 1$, $\alpha_{j, k} = \gamma_{j, k}$
- pour $j \geqq j_0$ et $-\mathrm{N} + 1 \leqq k \leqq -1$, $\alpha_{j, k} = 2^{j/2} \tilde{\gamma}_{-k}^\alpha (2^j x)$
- pour $j \geqq j_0$ et $2^j - 2\mathrm{N} + 2 \leqq k \leqq 2^j - \mathrm{N}$, $\alpha_{j, k} = 2^{j/2} \tilde{\gamma}_{k - 2^j + 2\mathrm{N} - 1}^\beta (2^j x - 2^j)$
- dans les autres cas, $\alpha_{j, k} = 0$.

Le lemme donne alors que $\left\| \sum_{j=j_0}^{\infty} \mathrm{Q}_j^{(d)} f \right\|_2^2 \leqq \mathrm{C} \sum_j \sum_k | \lambda_{j, k} |^2$. On obtient de même que

$$\left\| \sum_{j=j_0}^{\infty} \mathrm{Q}_j^{(d)*} f \right\|_2^2 = \int_{[0, 1]} | \sum_j \sum_k \lambda_{i, k}^* \alpha_{j, k}^* |^2 \, dx \leqq \mathrm{C} \sum_j \sum_k | \lambda_{j, k}^* |^2.$$

Les inégalités inverses s'obtiennent alors par dualité puisque

$$\int_{[0, 1]} \langle \sum \lambda_{j, k} \alpha_{j, k} | \sum \lambda_{j, k}^* \alpha_{j, k}^* \rangle \, dx = \sum_{(j, k) \in \mathrm{I}} \lambda_{j, k} \bar{\lambda}_{j, k}^*$$

où $\mathrm{I} = \{ (j, k) / j \geqq j_0 \text{ et } -\mathrm{N} + 1 \leqq k \leqq 2^j - \mathrm{N} \}$. Les points (i) et (ii) du théorème 3 sont alors démontrés.

Les points (iii) et (iv) en sont immédiats. Par exemple, si $f \in \mathrm{H}^k([0, 1])$ alors sa norme se calcule par $\| f \|_2 + \| f^{(k)} \|_2$; or $f = \mathrm{P}_{j_0}^{(d)} f + \sum_{j=j_0}^{\infty} \mathrm{Q}_j^{(d)} f$ et

$$\|f\|_2 \approx \|P_{j_0}^{(d)} f\|_2 + \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \|Q_j^{(d)} f\|_2^2\right);$$

$$f^{(k)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^k \left(P_{j_0}^{(d)} f + \sum_{j=j_0}^{\infty} Q_j^{(d)} f\right) = P_{j_0}^{(d+k)} f^{(k)} + \sum_{j=j_0}^{\infty} Q_j^{(d+k)} . f^{(k)}$$

et donc

$$\|f^{(k)}\|_2 \approx \|P_{j_0}^{(d+k)} f^{(k)}\|_2 + \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} \|Q_j^{(d+k)} f^{(k)}\|_2^2\right);$$

de plus

$$\|P_{j_0}^{(d+k)} f^{(k)}\|_2 = \left\|\left(\frac{d}{dx}\right)^k (P_{j_0}^{(d)} f)\right\|_2 \leqq C \|P_{j_0}^{(d)} f\|_2$$

tandis que

$$\|Q_j^{(d+k)} f^{(k)}\|_2 = \left\|\left(\frac{d}{dx}\right)^k (Q_j^{(d)} f)\right\|_2 \approx 2^{jk} \|Q_j^{(d)} f\|_2$$

(puisque la dérivation k-fois d'une base de $W_j^{(d)}$ donne une base de $W_j^{(d+k)}$ amplifiée d'un facteur 2^{jk}). La caractérisation de H^k est alors immédiate, et par dualité celle de H_0^{-k}. La caractérisation de H_0^k et de H^{-k} est analogue. Le théorème 3 est donc démontré.

VI. FONCTIONS VECTORIELLES À DIVERGENCE NULLE SUR LE CARRÉ

Les A.M.R.B.O. que nous avons construites sur [0, 1], avec leurs propriétés de dérivation, nous permettent alors de généraliser les constructions de [8] pour construire des A.M.R. vectorielles sur le cube $[0, 1]^n$ adaptées à l'étude des fonctions vectorielles à divergence nulle. Pour éviter des notations trop compliquées, nous ne traiterons ici que le cas $n=2$; le cas général de $\mathbb{R}^n$ est traité dans [8] et se transpose au cube de la même façon que pour $n=2$.

On note $\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{f} \in L^2([0, 1]^2)^2 \Big/ \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 = 0 \right\}$ (les dérivées étant prises au sens de $\mathscr{D}'(]0, 1[^2)$. De plus on notera

$\mathbf{H}_{(1)}^d = H^d([0, 1]^2)^2$, $\quad \mathbf{H}_{(2)}^d = H_0^d([0, 1]^2)^2 \quad$ et $\quad \mathbf{H}_{(3)}^d = H_{\text{per}}^d([0, 1]^2)^2$

où H_{per}^d est l'espace de Sobolev des fonctions $\mathbb{Z}^2$-périodiques qui sont localement dans $H^d(\mathbb{R}^2)$.

On considère alors une A.M.R.O. de $L^2(\mathbb{R})$ d'I. Daubechies avec φ de classe $C^{d+1+\varepsilon}$ et on définit les A.M.R.B.O. de $L^2([0, 1])$ de $L^2([0, 1]^2)$ et de $L^2([0, 1]^2)^2$ suivantes :

- $V_j^{(1)} = V_j^{(1)}([0, 1])$ et $V_j^{(1)*} = V_j^{(-1)}([0, 1]) \cap H_0^1([0, 1])$.
- $\tilde{V}_j^{(1)} = \tilde{V}_j^{(1)*} = V_j([0, 1])$.
- $V_j^{(2)} = V_j^{(-d)}([0, 1]) \cap H_0^d([0, 1])$ et $V_j^{(2)*} = V_j^{(d)}([0, 1])$.
  $\tilde{V}_j^{(2)} = V_j^{(-d-1)}([0, 1]) \cap H_0^{d+1}([0, 1])$ et $\tilde{V}_j^{(2)*} = V_j^{(d+1)}([0, 1])$.
- $V_j^{(3)} = V_j^{(1)\,\mathrm{per}}([0, 1])$ et $V_j^{(3)*} = V_j^{(-1)\,\mathrm{per}}([0, 1])$.
  $\tilde{V}_j^{(3)} = \tilde{V}_j^{(3)*} = V_j^{\mathrm{per}}([0, 1])$.
- $V_{j,\varepsilon} = V_j^{(\varepsilon)} \otimes V_j^{(\varepsilon)}$, $V_{j,\varepsilon}^* = V_j^{(\varepsilon)*} \otimes V_j^{(\varepsilon)(*)}$ (de projecteur oblique associé $P_{j,\varepsilon} = P_j^{(\varepsilon)} \otimes P_j^{(\varepsilon)}$).
- $\mathbf{V}_{j,\varepsilon} = (\tilde{V}_j^{(\varepsilon)} \otimes V_j^{(\varepsilon)}, V_j^{(\varepsilon)} \otimes \tilde{V}_j^{(\varepsilon)})$, $\mathbf{V}_{j,\varepsilon}^* = (\tilde{V}_j^{(\varepsilon)*} \otimes V_j^{(\varepsilon)*}, V_j^{(\varepsilon)*} \otimes \tilde{V}_j^{(\varepsilon)*})$ [de projecteur oblique associé $\mathbf{P}_{j,\varepsilon} = (\tilde{P}_j^{(\varepsilon)} \otimes P_j^{(\varepsilon)}, P_j^{(\varepsilon)} \otimes \tilde{P}_j^{(\varepsilon)})$].

On a alors la relation fondamentale suivante :
Pour

$$\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1_{(\varepsilon)}, \qquad \nabla(\mathbf{P}_{j,\varepsilon}\,\mathbf{f}) = \mathrm{P}_{j,\varepsilon}(\nabla\,\mathbf{f}). \tag{9}$$

De plus la relation (9) s'étend à $\mathbf{f} \in L^2([0, 1]^2)^2$ pour $\varepsilon = 1$ (puisque dans ce cas $\nabla\,\mathbf{f} \in H^{-1}([0, 1])^2)^2$; or $P_{j,1}$ utilise le produit scalaire avec des fonctions de $H_0^1([0, 1]^2)^2$).

On en conclut donc :

$$\mathbf{P}_{j,1}(\mathbf{K}) = \mathbf{V}_{j,1} \cap \mathbf{K}. \tag{10.1}$$

Pour $1 \leqq k \leqq d$,

$$\mathbf{P}_{j,\varepsilon}(\mathbf{K} \cap \mathbf{H}^k_{(\varepsilon)}) = \mathbf{V}_{j,\varepsilon} \cap \mathbf{K}. \tag{10.2}$$

Les projecteurs $\mathbf{P}_{j,\varepsilon}$ qui permettent d'approximer toutes les fonctions de $L^2([0, 1]^2)^2$ sont adaptés à l'étude des fonctions à divergence nulle ($\mathbf{P}_{j,1}$ fournit une approximation des fonctions quelconques à divergence nulle, $\mathbf{P}_{j,2}$ en fournit une de celles nulles sur le bord du carré et $\mathbf{P}_{j,3}$ une de celles périodiques).

On pose maintenant :

- $Q_j^{(\varepsilon)} = P_{j+1}^{(\varepsilon)} - P_j^{(\varepsilon)}$, projecteur sur $W_j^{(\varepsilon)}$ parallèlement à $W_j^{(\varepsilon)*\perp}$,
- $\tilde{Q}_j^{(\varepsilon)} = \tilde{P}_{j+1}^{(\varepsilon)} - \tilde{P}_j^{(\varepsilon)}$, projecteur sur $\tilde{W}_j^{(\varepsilon)}$ parallèlement à $\tilde{W}_j^{(\varepsilon)*\perp}$,
- $\mathbf{Q}_{j,\varepsilon,1} = (\tilde{Q}_j^{(\varepsilon)} \otimes P_j^{(\varepsilon)}, Q_j^{(\varepsilon)} \otimes \tilde{P}_j^{(\varepsilon)})$ et $Q_{j,\varepsilon,1} = Q_j^{(\varepsilon)} \otimes P_j^{(\varepsilon)}$,
- $\mathbf{Q}_{j,\varepsilon,2} = (\tilde{P}_j^{(\varepsilon)} \otimes Q_j^{(\varepsilon)}, P_j^{(\varepsilon)} \otimes \tilde{Q}_j^{(\varepsilon)})$ et $Q_{j,\varepsilon,2} = P_j^{(\varepsilon)} \otimes Q_j^{(\varepsilon)}$,
- $\mathbf{Q}_{j,\varepsilon,3} = (\tilde{Q}_j^{(\varepsilon)} \otimes Q_j^{(\varepsilon)}, Q_j^{(\varepsilon)} \otimes \tilde{Q}_j^{(\varepsilon)})$ et $Q_{j,\varepsilon,3} = Q_j^{(\varepsilon)} \otimes Q_j^{(\varepsilon)}$

de sorte que :

$$\mathbf{P}_{j+1,\varepsilon} = \mathbf{P}_{j,\varepsilon} + \mathbf{Q}_{j,\varepsilon,1} + \mathbf{Q}_{j,\varepsilon,2} + \mathbf{Q}_{j,\varepsilon,3} \tag{11.1}$$

$$\mathbf{Q}_{j,\varepsilon,\delta}(\mathbf{K}) = \mathbf{W}_{j,\varepsilon,\delta} \cap \mathbf{K}. \tag{11.2}$$

Pour $1 \leqq k \leqq d$,

$$\mathbf{Q}_{j,\varepsilon,\delta}(\mathbf{K} \cap \mathbf{H}^k_{(\varepsilon)}) = \mathbf{W}_{j,\varepsilon,\delta} \cap \mathbf{K}. \tag{11.3}$$

On sait déjà que si $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^k_{(\varepsilon)} (0 \leqq k \leqq d)$ alors

$$\| \mathbf{f} \|_{\mathbf{H}^k_{(\varepsilon)}} \approx \| \mathbf{P}_{j_0, \varepsilon} \mathbf{f} \|_2 + \left(\sum_j \sum_{j_0}^{\infty} 4^{jk} \| \mathbf{Q}_{j, \varepsilon, \delta} \mathbf{f} \|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Nous allons maintenant donner une description remarquable de $\mathbf{W}_{j, \varepsilon, \delta} \cap \mathbf{K}$:

THÉORÈME 4. — *On note* $\tilde{\mathbf{W}}_{j, \varepsilon, 1} = \tilde{\mathbf{W}}^{(\varepsilon)}_j \otimes \tilde{\mathbf{V}}^{(\varepsilon)}_j$, $\tilde{\mathbf{W}}_{j, \varepsilon, 2} = \tilde{\mathbf{V}}^{(\varepsilon)}_j \otimes \tilde{\mathbf{W}}^{(\varepsilon)}_j$ *et* $\tilde{\mathbf{W}}_{j, \varepsilon, 3} = \tilde{\mathbf{W}}^{(\varepsilon)}_j \otimes \tilde{\mathbf{W}}^{(\varepsilon)}_j$. *Alors l'opérateur*: $\mathbf{T}(f) = \left(- \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial x} f \right)$ *est, pour tout* $j \geqq j_0$, *un isomorphisme de* $\tilde{\mathbf{W}}_{j, \varepsilon, \delta}$ *sur* $\mathbf{W}_{j, \varepsilon, \delta} \cap \mathbf{K}$ *et de plus*

$$\| \mathbf{T}(f) \|_{\mathrm{L}^2([0, 1]^2)^2} \approx 2^j \| f \|_{\mathrm{L}^2([0, 1]^2)} \qquad \textit{pour} \quad f \in \tilde{\mathbf{W}}_{j, \varepsilon, \delta}$$

(*avec des constantes indépendantes de j*).

La donnée de bases de $\tilde{\mathbf{W}}^{(\varepsilon)}_j$ et de $\tilde{\mathbf{V}}^{(\varepsilon)}_j$ (par la proposition 2, l'exemple 6 et le théorème 2) donne donc une base de $\mathbf{W}_{j, \varepsilon, \delta} \cap \mathbf{K}$. Cette base est engendrée par translations-dilatations dyadiques à partir d'un nombre fini de fonctions, dont l'une engendre les fonctions de base vivant à l'intérieur du carré, et les autres engendrent des fonctions de bord. Par exemple, pour $\varepsilon = 1$ et $\delta = 1$, les fonctions de base sont obtenues à partir de $\psi \otimes \varphi$ (intérieur du carré), de $\psi \otimes \varphi^\alpha_i (1 \leqq i \leqq 2\mathrm{N} - 2)$ (bord inférieur du carré), de $\psi \otimes \varphi^\beta_i$ $(1 \leqq i \leqq 2\mathrm{N} - 2)$ (bord supérieur), de $\psi^\alpha_i \otimes \varphi (1 \leqq i \leqq \mathrm{N} - 1)$ (bord gauche), de $\psi^\beta_i \otimes \varphi$ $(1 \leqq i \leqq \mathrm{N} - 1)$ (bord droit), de $\psi^\alpha_i \otimes \varphi^\beta_l$, $\psi^\beta_i \otimes \psi^\alpha_i \otimes \varphi^\beta_l$, φ^α_l et $\psi^\beta_i \otimes \varphi^\beta_l (1 \leqq i \leqq \mathrm{N} - 1, 1 \leqq l \leqq 2\mathrm{N} - 2)$ (pour les quatre coins).

Pour démontrer le théorème, remarquons tout d'abord que

$$\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{W}}_{j, \varepsilon, \delta}) \subset \mathbf{W}_{j, \varepsilon, \delta} \cap \mathbf{K} \quad \text{(évident)}$$

et que $\mathbf{T}|_{\mathbf{W}_{j, \varepsilon, \delta}}$ est injectif: si $\mathbf{T}(f) = 0$ alors f est une constante. Or les constantes sont dans $\tilde{\mathbf{V}}_{j_0, \varepsilon} = \mathrm{V}^{(\varepsilon)}_{j_0} \otimes \mathrm{V}^{(\varepsilon)}_{j_0}$ si $\varepsilon = 1$ ou 3, et si $\varepsilon = 2$ les constantes ne sont pas dans $\mathrm{H}^{d+1}_0([0, 1])$, n'étant pas nulles au bord, et *a fortiori* pas dans $\tilde{\mathbf{W}}_{j, \varepsilon, \delta}$.

Il suffit maintenant de montrer que $\mathbf{T}$ est surjectif. Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{W}_{j, \varepsilon, \delta} \cap \mathbf{K}$ et supposons par exemple $\delta = 1$. On a

$$\mathbf{f} = \mathbf{Q}_{j, \varepsilon, 1}(\mathbf{f}) = (\tilde{\mathrm{Q}}^{(\varepsilon)}_j \otimes \mathrm{P}_j(f_1), \mathrm{Q}^{(\varepsilon)}_j \otimes \tilde{\mathrm{P}}_j(f_2)).$$

Mais il est clair que $\mathrm{Q}^{(\varepsilon)}_j$ peut s'écrire $\mathrm{Q}^{(\varepsilon)}_j = \frac{d}{dx} \circ \tilde{\mathrm{A}}^{(\varepsilon)}_j$ où $\tilde{\mathrm{A}}^{(\varepsilon)}_j$ prend ses valeurs dans $\tilde{\mathrm{W}}^{(\varepsilon)}_j$ [car la base de $\mathrm{W}^{(\varepsilon)}_j$ provient par dérivation d'une base de $\tilde{\mathrm{W}}^{(\varepsilon)}_j$], d'où: $\mathbf{f} = \mathbf{T}(\tilde{\mathrm{A}}^{(\varepsilon)}_j \otimes \tilde{\mathrm{P}}_j(f_2)) + \mathbf{R}$. Il est clair que $\mathbf{R} \in \mathbf{W}_{j, \varepsilon, 1} \cap \mathbf{K}$ et que $\mathbf{R} = (\mathrm{R}_1, 0)$. En particulier, $\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{R}_1 = 0$ et donc $\mathrm{R}_1(x, y) = \mathrm{R}_1(y)$. Il reste à montrer que R_1 est nul. Or $\mathrm{R}_1(y) \in \tilde{\mathrm{W}}^{(\varepsilon)}_j \otimes \mathrm{V}^{(\varepsilon)}_j$; or on a $1 \in \tilde{\mathrm{V}}^{(\varepsilon)*}_{j_0}$

et donc : $\forall g \in \tilde{W}_j^{(\varepsilon)} \int g(x)\,dx = 0$; ce qui entraîne

$$R_1(x, y) = R_1(y) = \int_0^1 R_1(x, y)\,dx = 0.$$

Le théorème 4 est donc démontré.

CONCLUSION

Le théorème 1 nous a autorisé à dériver des A.M.R.B.O. en conservant une formule de commutation (6). Le théorème 2 nous a permis de décrire des bases engendrées par un nombre fini de fonctions de base par translation et dilatation, adaptées à l'étude des espaces de fonctions régulières sur [0, 1] (théorème 3) et à celle des fonctions vectorielles à divergence nulle sur $[0, 1]^n$ (théorème 4).

RÉFÉRENCES

[1] Z. Cieselski et T. Figiel, Spline bases in classical function spaces on compact manifolds, part II, *Studia Math.*, LXXVCI, 1983, p. 95-136.

[2] A. Cohen, I. Daubechies et J.-C. Feauveau, *Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets*, ATT et Bell Laboratories, preprint, 1990.

[3] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Applied Math.*, vol. **46**, 1988, p. 909-996.

[4] I. Daubechies, Communication personnelle.

[5] J. C. Feauveau, *Analyse multi-résolution par ondelettes non orthogonales et base de filtres numériques*, Thèse, Paris-XI, 1990.

[6] S. Jaffard et Y. Meyer, Bases d'ondelettes dans les ouverts bornés, *J. Math. Pures Appl.*, vol. **68**, 1989, p. 95-108.

[7] P. G. Lemarie, Fonctions à support compact dans les analyses multi-résolutions, *Rev. Mat. Ibero-Americana* (à paraître).

[8] P. G. Lemarie-Rieusset, *Analyses multi-résolutions non orthogonales et ondelettes vecteurs à divergence nulle*, Paris-XI, preprint, 1991.

[9] P. G. Lemarie et Y. Meyer, Ondelettes et bases hilbertiennes, *Rev. Mat. Ibero-Americana*, vol. **2**, 1986, p. 1-18.

[10] G. Malgouyres, Communication personnelle.

[11] G. Malgouyres, *Analyse multi-résolution sur l'intervalle. Algorithmes rapides*. Paris-XI, preprint, 1991.

[12] S. Mallat, Multiresolution approximations and wavelet bases of $L^2(\mathbb{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **315**, 1989, p. 69-87.

[13] Y. Meyer, *Ondelettes sur l'intervalle*, Paris-XI, preprint, 1990.

(*Manuscrit reçu le* 22 *novembre* 1991;
révisé le 16 *novembre* 1992.)