Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 7, n° 3, 1990, p. 161-181. *Analyse non linéaire*

La théorie mathématique de l'équilibre économique : extension du modèle de Arrow-Debreu au cadre non convexe

par

Bernard CORNET

École Polytechnique et C.E.R.M.S.E.M. Université Paris-I Panthéon-Sorbonne
12, place du Panthéon, 75005 Paris, France

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est de présenter la théorie mathématique de l'équilibre économique dans le cadre classique traité par K. Arrow et G. Debreu, ainsi qu'une de ses généralisations récentes qui prend en compte les « non-convexités » dans le secteur de la production.

Cette généralisation est importante sur le plan économique car la convexité des ensembles de production, hypothèse faite par Arrow-Debreu, semble être l'exception plutôt que la règle; en particulier, la présence de rendements croissants (une forme particulière de non-convexité) dans des secteurs de production comme l'électricité ou les chemins de fer est reconnue depuis le siècle dernier.

Sur le plan mathématique, la généralisation au cadre non convexe nécessite l'utilisation de techniques plus sophistiquées que dans la théorie classique; d'une part, des outils d'« analyse non différentiable » développés durant les dix dernières années et, d'autre part, des outils de topologie différentielle et de la théorie de Morse.

Mots clés : équilibre, production, non-convexités, cône normal (tangent), point fixe, optimum.

Classification A.M.S. : 90, 49, 58.

Send offpint request to : B. CORNET, C.E.R.M.S.E.M., Université Paris-I, Panthéon-Sorbonne, 12, place du Panthéon, 75005 Paris, France.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449
Vol. 7/90/03/161/21/$4.10/

ABSTRACT. — The aim of this paper is to present the mathematical theory of economic equibrium in the classical model developed by K. Arrow and G. Debreu, together with one of its recent generalizations which aim to take into account the presence of "nonconvexities" in the production sector.

This generalization is important from the economic point of view since the convexity of production sets, the assumption made by Arrow and Debreu, seems to be more the exception than the rule; in particular, the presence of increasing returns (a particular form of nonconvexities) in production sectors such as railways or electricity production is recognized since the past century.

The mathematical treatment of "nonconvexities" requires techniques more sophisticated than the ones used in the classical theory; firstly, tools from "Non-smooth Analysis" developed during the past ten years and secondly, tools from global analysis.

Key words : equilibrium, production, nonconvexities, normal (tangent) cone, fixed-point, optimum.

1. INTRODUCTION

Dans son livre *Éléments d'Économie Politique Pure* écrit en 1874, Léon Walras présentait la première analyse mathématique expliquant que les quantités de biens achetées par les consommateurs, leur offre de travail, les quantités de biens produites ou utilisées par les firmes et les prix observés sur les différents marchés pouvaient s'interpréter comme une situation d'équilibre entre un grand nombre d'agents ayant des intérêts conflictuels. Il a cependant fallu attendre les années 1930 pour que soit posée explicitement par Abraham Wald la question de l'existence d'un tel équilibre mais ce n'est que dans les années 1950 qu'elle a été résolue de manière satisfaisante, principalement, par Kenneth Arrow et Gérard Debreu. Le livre *Theory of value* de Gérard Debreu présente la synthèse de ces travaux qui avec ceux de Tjalling C. Koopmans, John Nash, John Von Neumann et Oskar Morgenstern marquent les véritables débuts de l'économie mathématique. Si les travaux des années 1950 utilisaient essentiellement des raisonnements de topologie générale, les propriétés des ensembles convexes, ou le théorème de point fixe de Kakutani, le développement de la théorie walrasienne durant les trente dernières années a conduit à utiliser des outils mathématiques de plus en plus sophistiqués;

le lecteur intéressé peut consulter sur ces développements les trois volumes du *Handbook of Mathematical Economics* édité par K. J. Arrow et M. D. Intriligator.

L'objet de cet article est de présenter la théorie de l'équilibre général classique, dite de Arrow-Debreu, ainsi qu'une de ses généralisations récentes qui prend en compte les « non-convexités » dans le secteur de la production. Cette question est importante sur le plan économique car la convexité des ensembles de production, hypothèse faite par Arrow-Debreu, semble être l'exception plutôt que la règle; en particulier, la présence de rendements croissants (une forme particulière de non-convexité) dans des secteurs de production comme l'électricité ou les chemins de fer est reconnue depuis le siècle dernier. Sur le plan mathématique, le traitement de cette question nécessite l'utilisation de techniques plus sophistiquées que dans la théorie classique. D'une part, des outils d'« analyse non différentiable » développés durant les dix dernières années et présentés, par exemple, dans les livres de Aubin-Ekeland (1984), Clarke (1983), Rockafellar (1981), et, d'autre part, des outils de topologie différentielle et de la théorie de Morse. Nous présentons rapidement dans le paragraphe suivant le type de difficultés rencontrées sur le plan mathématique, pour le seul problème d'existence, lorsque l'on sort du cadre classique de Arrow-Debreu.

2. LE LEMME DE DEBREU-GALE-NIKAÏDO

Les premières preuves d'existence ([1]) de l'équilibre walrasien reposaient directement ou indirectement sur le théorème de point fixe de Kakutani (1941) qui généralise au cadre des correspondances le théorème de point fixe de Brouwer. Nous allons énoncer ci-après ce théorème ainsi qu'un lemme démontré presque simultanément par G. Debreu (1956), D. Gale (1955) et H. Nikaïdo (1956). Ce lemme, qui est devenu un outil de base pour démontrer l'existence de l'équilibre [*cf.* Debreu (1959)], a de plus une signification très intuitive sur le plan économique.

Nous rappelons tout d'abord quelques définitions. Étant donnés deux sous-ensembles S, T, respectivement, de R^k et R^l, une *correspondance* φ

([1]) D'autres méthodes ont été proposées depuis pour démontrer l'existence d'un équilibre. Mentionnons les algorithmes de recherche d'un point fixe qui donnent une méthode constructive pour « atteindre » un équilibre [Scarf (1973) et Smale (1976)]. Une autre approche repose sur la théorie du degré des applications continues (ou des correspondances) ou sur le théorème de Poincaré-Hopf [*cf.*, par exemple, Mas-Collel (1986)].

de S dans T est une application de S dans l'ensemble des parties de T et nous notons $G(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\{(x, y)\in S\times T \mid y\in\varphi(x)\}$, le *graphe* de la correspondance φ. La correspondance φ de S dans T est *semi-continue supérieurement* si son graphe est fermé dans $S\times T$, pour la topologie induite, et si φ est bornée, au sens où il existe un sous-ensemble borné K de R^l tel que $\varphi(x)\subset K$ pour tout $x\in S$.

THÉORÈME 1 (Kakutani). — *Soit* S *un sous-ensemble non vide, convexe, compact de* R^k *et soit* φ *une correspondance semi-continue supérieurement de* S *dans* S *telle que, pour tout* $x\in S$, *l'ensemble* $\varphi(x)$ *soit non vide, convexe, compact. Alors* φ *admet un point fixe, c'est-à-dire, il existe* $x^*\in S$ *tel que* $x^*\in\varphi(x^*)$.

Lorsque la correspondance φ est univoque, c'est-à-dire, lorsque pour tout $x\in S$, l'ensemble $\varphi(x)$ comporte un et un seul élément, la définition de semi-continuité supérieure coïncide avec la continuité de φ, considérée comme une application de S dans S. Dans le cadre univoque le théorème de Kakutani est donc exactement le théorème de point fixe de Brouwer.

Nous énonçons maintenant le lemme de Debreu-Gale-Nikaïdo qui se démontre à l'aide du théorème de Kakutani et qui lui est, en fait, équivalent [*cf.* Debreu (1982)]. Nous notons (2) $S_l=\left\{p\in R^l_+ \,\middle|\, \sum_{h=1}^{l} p_h=1\right\}$ le simplexe de R^l.

THÉORÈME 2 (Debreu-Gale-Nikaïdo). — *Soit* ψ *une correspondance semi-continue supérieurement de* S_l *dans* R^l *telle que, pour tout* $p\in S_l$, *l'ensemble* $\psi(p)$ *soit non vide, convexe, compact et vérifie* $p.x\leqq 0$ *pour tout* $x\in\psi(p)$. *Alors il existe* $p^*\in S_l$ *tel que :*

$$\psi(p^*)\cap -R^l_+\neq\varnothing.$$

Dans le modèle classique de Arrow-Debreu, les différentes variables économiques (quantités de biens achetées par les consommateurs, offre de travail, quantités de biens produites ou utilisées par les firmes) sont « déterminées », une fois que les prix $p_h\geqq 0\,(h=1, \ldots, l)$ des différents

(2) Si $x=(x_h)$ et $y=(y_h)$ sont deux vecteurs de R^l, la notation $x\geqq y$ (resp. $x\gg y$) signifie que, pour toute coordonnée h, $x_h\geqq y_h$ (resp. $x_h>y_h$); nous notons $R^l_+=\{x\in R^l \mid x\geqq 0\}$ le cône positif fermé de R^l, et $R^l_{++}=\{x\in R^l \mid x\gg 0\}$, l'intérieur de R^l_+. Si A et B sont deux sous-ensembles de R^l nous notons $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$, la somme des ensembles A et B, $\bar{A}$ la fermeture de A, int A, l'intérieur de A et ∂A, le bord de A. Nous désignons par $x.y=\sum_{h=1}^{l} x_h y_h$ le produit scalaire de R^l, par $\|x\|=(x.x)^{1/2}$ la norme euclidienne et par $B(x, r)=\{y\in R^l \mid \|y-x\|\leqq r\}$, la boule fermée de centre x et de rayon $r\geqq 0$.

biens sont fixés. Le problème d'existence d'un équilibre se ramène donc à la recherche d'un système de prix p^* dans S_l, tel que la demande de tout bien soit inférieure ou égale (3) à son offre. Formellement, si pour tout système de prix p dans S_l, nous désignons par $\zeta(p) \subset R^l$ l'ensemble des vecteurs d'*excès de demande* de l'économie, c'est-à-dire, les vecteurs de demande moins les vecteurs d'offre, nous dirons que le système de prix $p^* \in S_l$ est un *équilibre* (*de Walras*) si :

$$\text{(E)} \qquad \zeta(p^*) \cap -R^l_+ \neq \varnothing.$$

L'existence d'un équilibre de Walras se démontre à partir du théorème 2 mais une difficulté intervient dans la preuve, due au fait que la correspondance d'excès de demande ζ (que nous définirons de manière précise ci-après) n'est pas, en général, à valeurs compactes. Il faut donc introduire une correspondance auxiliaire en « compactifiant » l'économie et, pour le traitement de cette question, nous renvoyons au livre de Debreu ou à son article de synthèse [Debreu (1982)] sur le sujet.

Lorsque l'on sort du cadre classique de Arrow-Debreu pour prendre en compte les « non-convexités » dans la production, les différentes variables économiques ne sont plus, en général, déterminées par le *seul* système de prix p comme précédemment (4). Nous devrons donc ci-après rajouter au modèle précédent une variable supplémentaire, notée a, qui appartiendra à une variété compacte A de dimension finie (5).

Un *équilibre* sera alors un couple $(a^*, p^*) \in A \times S_l$ pour lequel la correspondance d'excès de demande rencontre l'orthant négatif $-R^l_+$ et qui vérifie de plus une équation (multivoque) que nous préciserons dans la suite, en même temps que l'ensemble A. La difficulté principale sur le plan mathématique provient du fait que la variété A n'est pas convexe, en général, de sorte que les deux théorèmes ci-dessus ne peuvent plus être appliqués directement.

3. LE MODÈLE ÉCONOMIQUE

Nous définissons maintenant de manière précise la notion d'excès de demande ainsi que le modèle économique que nous considérons dans la

(3) Il est plus satisfaisant de remplacer dans la définition d'équilibre ci-dessus « inférieure ou égale » par « égale » et nous renvoyons, par exemple, au livre de Debreu pour le lien entre les deux notions.

(4) La situation est similaire dans l'étude des « marchés incomplets », une autre généralisation récente de la théorie classique de Arrow-Debreu.

(5) Dans l'étude des marchés incomplets, A est la grassmanienne G_{nk}, c'est-à-dire, la variété des sous-espaces de dimension k dans R^n.

suite. Le cadre général de cet article ne diffère de celui de Arrow-Debreu qu'au niveau des producteurs qui suivent une règle de comportement différente et pour lesquels aucune hypothèse de convexité n'est faite. Le livre de Debreu cité précédemment est une référence fondamentale, auquel le lecteur peut se reporter pour avoir une présentation plus détaillée du modèle.

Nous considérons une économie $\mathscr{E}$ comportant un nombre fini l, de biens, m, de consommateurs et n, de producteurs. Les possibilités technologiques de chaque producteur j ($j=1, \ldots, n$) sont représentées par un sous-ensemble Y_j de R^l. Un élément $y_j=(y_{jh})$ de Y_j représente un plan de production (technologiquement) possible pour le producteur j et le bien h est un input (resp. un output) pour ce plan si $y_{jh}<0$ (resp. $y_{ih}>0$).

Nous faisons sur les *ensembles de production* Y_j les hypothèses suivantes :

(P) *pour tout* j, (i) Y_j *est fermé,* (ii) $0 \in Y_j$ *et* (iii) $Y_j - R^l_+ \subset Y_j$ (libre disposition).

L'hypothèse de fermeture (i) est essentiellement technique; (ii) signifie que le producteur j a la possibilité de ne rien produire et (iii) signifie que si une production y_j est possible pour le producteur j, il en est de même de toute production z_j vérifiant $z_{jh} \leqq y_{jh}$ pour tout bien h, c'est-à-dire, n'utilisant pas moins d'inputs que y_j (en valeur absolue) et ne produisant pas plus d'outputs que y_j.

Pour chaque consommateur i ($i=1, \ldots, m$) nous notons X_i, le sous-ensemble de R^l des plans de consommation possibles de ce consommateur et nous supposons que ces préférences sont représentées par une relation binaire $\precsim_i$ complète, reflexive, transitive sur l'ensemble X_i. La condition « $x \precsim_i x'$ » signifie que « *le plan de consommation* x' *est préféré ou indifférent au plan* x *par le consommateur* i »; la relation de préférence stricte « $x \prec_i x'$ » est ensuite définie par « $x \precsim_i x'$ et non $[x' \precsim_i x]$ ».

Le comportement de chaque consommateur i est le même que dans le modèle classique de Arrow-Debreu et nous faisons sur son *ensemble de consommation* X_i et sur sa *relation de préférence* $\precsim_i$ les mêmes hypothèses que dans le livre de Debreu cité précédemment, c'est-à-dire :

(C) *pour tout* i, X_i *est convexe, fermé, non vide, borné inférieurement, et* $\precsim_i$ *est* (i) *continue,* (ii) *convexe et* (iii) *n'admet pas de consommation de satiation dans* X_i, *au sens où, pour tout* $x_i \in X_i$, (i) *les ensembles* $\{x \in X_i \mid x \precsim_i x_i\}$ *et* $\{x \in X_i \mid x_i \precsim_i x\}$ *sont fermés dans* R^l, (ii) *si* $x'_i \in X_i$ *et si* $t \in]0, 1[$, *alors* $x_i \prec_i x'_i$ *implique* $x_i \prec_i t x'_i + (1-t) x_i$, et (iii) *il existe* $x'_i \in X_i$ *tel que* $x_i \prec_i x'_i$.

Étant donnés le système de prix p^* (un élément de R^l_+) et son revenu r_i^* (un nombre réel), le consommateur i choisit un élément dans on *ensemble de demande* :

$$\xi_i(p^*, r_i^*)=\{x_i^* \in \beta_i(p^*, r_i^*) \mid x_i \precsim_i x_i^*, \text{ pour tout } x_i \in \beta_i(p^*, r_i^*)\},$$

où $\beta_i(p^*, r_i^*)=\{x_i \in X_i \mid p^*.x_i \leqq r_i^*\}$ désigne son *ensemble de budget*.

Nous décrivons maintenant comment est déterminé le revenu de chaque consommateur i à partir du système de prix, des ressources initiales et de la production. Nous désignons par $\omega=(\omega_h)$ le vecteur de R^l des dotations initiales totales ω_h en bien h de l'économie.

Nous rappelons tout d'abord que le modèle classique de Arrow-Debreu considère uniquement le cas d'une *économie de propriété privée*, dans laquelle chaque consommateur i possède un vecteur $\omega_i=(\omega_{ih})$ de R^l de dotations initiales ω_{ih} en bien h ainsi qu'une part fixe θ_{ij} du producteur j; les vecteurs ω_i vérifient $\sum_{i=1}^{m} \omega_i=\omega$, et les θ_{ij} sont des nombres réels vérifiant $\theta_{ij} \geqq 0$ pour tout $i=1, \ldots, m$, tout $j=1, \ldots, n$ et $\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij}=1$ pour tout j. Le revenu $r_i(y_1, \ldots, y_n, p)$ du consommateur i est alors égal à :

$$r_i(y_1, \ldots, y_n, p)=p.\omega_i+\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p.y_j$$

c'est-à-dire, la somme de la valeur de sa dotation initiale ω_i au prix p et de ses parts des profits des différents producteurs pour les productions y_j.

Nous considérons dans la suite une structure de revenus (r_i) plus générale que celle d'une économie de propriété privée ([6]), sur laquelle nous faisons seulement l'hypothèse de base suivante :

(R) *pour tout* i, $r_i: Y_1 \times \ldots \times Y_n \times R^l_+ \to R$ *est une fonction continue, positivement homogène de degré un part rapport au prix* p *et vérifie :*

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(y_1, \ldots, y_n, p)=p.\left(\sum_{j=1}^{n} y_j+\omega\right) \text{ pour tout } (y_1, \ldots, y_n, p).$$

([6]) Sous les hypothèses faites, le producteur j ne fait pas de pertes lorsqu'il suit la règle de maximisation des profits comme dans le modèle walrasien; en effet si y_j maximise le profit $p.y$ sur l'ensemble de production Y_j, alors $p.y_j \geqq p.\ 0=0$. Cependant cette règle est inapplicable en présence de « non-convexités » et cette propriété (l'absence de pertes) ne sera plus vérifiée, en général, pour les règles de comportement du producteur que nous considérons dans la suite. C'est essentiellement pour cette raison que nous sommes obligés de considérer dans la suite une structure de revenus très générale qui permette de financer les déficits (éventuels) des producteurs, par exemple, par un système de taxation; nous renvoyons aux différents articles sur le sujet pour une discussion plus détaillée.

L'hypothèse d'homogénéité garantit que l'ensemble de budget $\beta_i(p, r_i(y_1, \ldots, y_n, p))$ de chaque consommateur i et son ensemble de demande $\xi_i(p, r_i(y_1, \ldots, y_n, p))$ demeurent inchangés lorsque le système de prix p est multiplié par un scalaire $\lambda > 0$. La dernière hypothèse signifie que la structure de revenus (r_i) distribue la richesse totale de l'économie $p.\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \omega\right)$ entre les différents consommateurs.

4. RÈGLE DE TARIFICATION MARGINALE ET CÔNE NORMAL

Nous définissons dans ce paragraphe la règle de comportement que suivent les producteurs. Nous supposerons dans la suite que chaque producteur suit la *règle de tarification marginale*, au sens où il satisfait la condition nécessaire du premier ordre de maximisation du profit, en un sens que nous allons définir de manière précise ci-après [*cf.* la proposition 1 *a*]. Rappelons que dans le modèle walrasien, chaque producteur j prend le système de prix p^* comme donné et choisit sa production y_j^* dans son ensemble de production Y_j de façon à maximiser son profit $p^*.y_j$; remarquons dès à présent que lorsque les ensembles de production sont convexes, la règle de tarification marginale coïncide avec celle de maximisation du profit [proposition 1 *b*].

La règle de tarification marginale appartient à une tradition très ancienne sur le plan économique que l'on peut faire remonter aux travaux de l'ingénieur-économiste français Jules Dupuit en 1844 et, plus récemment dans les années 1930-1940, aux travaux sur la « doctrine de vente au coût marginal » [7] de Maurice Allais, Harold Hotelling et Oskar Lange. En l'absence d'hypothèses de convexité sur les ensembles de production, d'autres règles de comportement des producteurs ont été proposées (équilibre budgétaire, tarification au coût moyen, règle d'échange volontaire...) mais le cadre de cet article ne nous permet pas de les présenter; le lecteur interessé peut se reporter au numéro spécial du *Journal of Mathematical Economics* (vol. 17, n^{os} 2 et 3) consacré à ce sujet.

La règle de tarification marginale est formalisée dans la suite à l'aide du cône normal de Clarke [*cf.* Clarke (1975) (1983)] dont nous rappelons

[7] Cette notion est moins générale que celle de « tarification marginale » définie précédemment et nécessite de préciser *a priori* les inputs et les outputs de chaque producteur.

tout d'abord la définition [8]. Soit C un sous-ensemble quelconque de R^l et x un point de l'adhérence de C, nous notons :

$$\perp_{\mathrm{C}}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \{p \in \mathrm{R}^l \mid \exists\, \varepsilon > 0 : \mathrm{int}\, \mathrm{B}(x+\varepsilon p, \varepsilon \| p \|) \cap \bar{\mathrm{C}} = \varnothing\},$$

le cône des *vecteurs perpendiculaires* (aussi appelées *normales exactes*) à C en x. Ce cône formalise de manière naturelle la notion de vecteur normal à l'ensemble C et coïncide avec les notions habituelles lorsque C est convexe ou lorsque C est une sous-variété de R^l (à bord ou sans bord) de classe C^2 [*cf.* la proposition 1 ci-après].

Cependant cette notion est trop restrictive pour le problème que nous considérons; par exemple, on peut construire facilement un ensemble Y_j vérifiant l'hypothèse (P) ci-dessus et tel que $\perp_{\mathrm{Y}_j}(y_j) = \{0\}$ en un point y_j du bord de Y_j. C'est essentiellement pour éviter cette situation [*cf.* la proposition 1 *d*] que nous utiliserons dans la suite le *cône normal de Clarke*, noté $\mathrm{N}_{\mathrm{C}}(x)$, qui est défini comme l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble :

$$\limsup_{x' \to x} \perp_{\mathrm{C}}(x') \overset{\mathrm{def}}{=} \{p \in \mathrm{R}^l \mid \exists\, (p^\nu) \subset \mathrm{R}^l,\ \exists\, (x^\nu) \subset \bar{\mathrm{C}} : (x^\nu) \to x,\ (p^\nu) \to p,\ p^\nu \in \perp_{\mathrm{C}}(x^\nu),\ \forall\, \nu\}.$$

L'ensemble $\mathrm{N}_{\mathrm{C}}(x)$ est manifestement un cône, convexe, fermé de sommet 0 qui contient toujours $\perp_{\mathrm{C}}(x)$. Nous renvoyons au livre de Clarke (1983) pour une définition équivalente à partir de la notion « duale » de cône tangent ainsi que pour les propriétés de ces cônes qui sont énoncées dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1. — *Soient* C *un sous-ensemble de* R^l *et* $x \in \bar{\mathrm{C}}$.

(*a*) *Étant donné* $p \in \mathrm{R}^l$, *si* $p.x \geqq p.x'$ *pour tout* $x' \in \mathrm{C}$, *alors* $p \in \perp_{\mathrm{C}}(x)$ *et donc aussi* $p \in \mathrm{N}_{\mathrm{C}}(x)$.

(*b*) *Si* C *est convexe, alors*

$$\perp_{\mathrm{C}}(x) = \mathrm{N}_{\mathrm{C}}(x) = \{p \in \mathrm{R}^l \mid p.x \geqq p.x' \text{ pour tout } x' \in \mathrm{C}\}.$$

(*c*) *Si* C *est une sous-variété de* R^l (*à bord ou sans bord*) *de classe* C^2, *alors les ensembles* $\perp_{\mathrm{C}}(x)$ et $\mathrm{N}_{\mathrm{C}}(x)$ *sont égaux et coïncident de plus avec l'ensemble des vecteurs normaux extérieurs* (*au sens classique*) *à* C *en* x.

(*d*) *Si* C *est fermé, alors* $x \in \partial \mathrm{C}$ *si et seulement si* $\mathrm{N}_{\mathrm{C}}(x) \neq \{0\}$.

---

[8] Cornet (1982), (1987) pour une discussion sur cette formalisation et le lien avec celle proposée par Guesnerie (1975) qui utilise une notion différente de cône normal.

5. ÉQUILIBRE DE TARIFICATION MARGINALE ET ÉQUILIBRE DE WALRAS

Nous appelons *équilibre de tarification marginale* de l'économie $\mathscr{E}=((X_i, \precsim_i, r_i), (Y_j), \omega)$ [resp. *équilibre de Walras* de l'économie de propriété privée $\mathscr{E}=((X_i, \precsim_i, \omega_i), (Y_j), (\theta_{ij}))$] un élément $((x_i^*), (y_j^*), p^*) \in \prod_{i=1}^{m} X_i \times \prod_{j=1}^{n} Y_j \times [R_+^l \setminus \{0\}]$ vérifiant les conditions suivantes :

(α) : *pour tout* i, x_i^* *est un plus grand élément de* $\precsim_i$ *dans l'ensemble de budget* $\{x_i \in X_i \mid p^* . x_i \leqq r_i(y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*)\}$;

(β) : *pour tout* j, $p^* \in N_{Y_j}(y_j^*)$ [resp. (β_W) : *pour tout* j, $p^* . y_j^* \geqq p^* . y_j$ *pour tout* $y_j \in Y_j$];

(γ) : $\sum_{i=1}^{m} x_i^* \leqq \sum_{j=1}^{n} y_j^* + \omega$,

et nous appelons *équilibre de production* (*pour la tarification marginale*) un élément $((y_j^*), p^*) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j \times [R_+^l \setminus \{0\}]$ satisfaisant la seule condition (β) ci-dessus.

La condition (α) peut se réécrire de manière équivalente, en termes des correspondances de demande ξ_i définies précédemment, comme suit :

$$x_i^* \in \xi_i(p^*, r_i(y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*)) \quad \text{pour tout } i,$$

et nous notons ξ la *correspondance de demande totale* de $\prod_{j=1}^{n} Y_j \times R_+^l$ dans R^l, définie par :

$$\xi(y_1, \ldots, y_n, p) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(p, r_i(y_1, \ldots, y_n, p)).$$

Remarquons que la recherche d'un équilibre de tarification marginale se ramène à celle d'un élément $((y_j^*), p^*) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j \times [R_\times^l \setminus \{0\}]$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(\mathrm{E}') \quad \left\{ \begin{array}{l} p^* \in N_{Y_j}(y_j^*) \quad \textit{pour tout } j, \\ \text{et} \\ \left[\xi(y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*) - \sum_{j=1}^{n} y_j^* - \omega\right] \cap -R_+^l \neq \varnothing. \end{array} \right.$$

En effet si $((y_j^*), p^*)$ vérifie les conditions ci-dessus, on obtient un équilibre de tarification marginale $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ en choisissant $x_i^* \in \xi_i(p^*, r_i(y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*))$ pour tout i, vérifiant $\sum_{i=1}^{m} x_i^* \leqq \sum_{j=1}^{n} y_j^* + \omega$.

Les notions d'équilibre de tarification marginale et d'équilibre de Walras coïncident si l'économie $\mathscr{E}$ est de propriété privée et si chacun des ensembles de production Y_j est convexe, d'après la proposition 1 *b*. Pour le problème d'existence d'un équilibre de Walras nous pouvons de plus éliminer les variables $y_j (j=1, \ldots, n)$ de l'équation (multivoque) (**E**′) et nous ramener à l'étude de (**E**) [*cf.* le paragraphe 2] que nous allons maintenant définir de manière précise.

Nous introduisons tout d'abord pour chaque producteur j, sa *correspondance d'offre* η_j de R_+^l dans Y_j définie par :

$$\eta_j(p) = \{ y_j \in Y_j \mid p . y_j \geqq p . y \text{ pour tout } y \in Y_j \},$$

et nous remarquons que si Y_j est convexe, η_j est l'inverse de la correspondance $N_{Y_j}(.)$, c'est-à-dire, $\eta_j(p) = \{ y_j \in Y_j \mid p \in N_{Y_j}(y_j) \}$ [proposition 1 *b*].

La correspondance d'excès de demande ζ de R_+^l dans R^l est alors définie par :

$$\zeta(p) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left(p, p . \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \sup p . Y_j \right) - \sum_{j=1}^{n} \eta_j(p) - \omega.$$

Remarquons enfin que la recherche d'un équilibre de Walras se ramène à celle d'un système de prix p^* vérifiant l'équation (multivoque) (**E**) ([9]). En effet si p^* vérifie (**E**), on obtient un équilibre de Walras $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ en choisissant $x_i^* \in \xi_i \left(p^*, p^* . \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p^* . y_j^* \right)$ pour tout i, et $y_j^* \in \eta_j(p^*)$ pour tout j qui vérifient $\sum_{i=1}^{m} x_i^* \leqq \sum_{j=1}^{n} y_j^* + \omega$.

([9]) Remarquons que si les hypothèses (C), (P) sont vérifiées et si les ensembles de production Y_j sont convexes, la correspondance ζ est à valeurs convexes et cette propriété de convexité est fondamentale dans la preuve de l'existence d'une solution de (**E**). Il est aussi possible pour le problème d'existence d'un équilibre de tarification marginale, d'éliminer les variables $y_j (j=1, \ldots, n)$ de l'équation (**E**′) pour se ramener à l'étude de (**E**) en définissant « convenablement » la correspondance ζ mais celle-ci n'est plus, en général, à valeurs convexes. C'est essentiellement pour cette raison que dans ce cas nous devrons étudier directement l'équation (**E**′).

6. EXISTENCE D'UN ÉQUILIBRE

Le théorème suivant [Bonnisseau-Cornet (1985), (1988 *c*)] énonce des conditions qui garantissent l'existence d'un équilibre de tarification marginale.

THÉORÈME 3. – *L'économie* $\mathscr{E}=((X_i, \underset{\sim}{\prec}_i, r_i), \omega)$ *admet un équilibre de tarification marginale si* $\mathscr{E}$ *vérifie les hypothèses* (C), (P), (R), *ainsi que les hypothèses suivantes :*

(B) : *pour tout* $x \in \mathbb{R}^l$, *l'ensemble* $A(x)=\left\{(y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j+\omega \geqq x\right\}$ *est borné;*

(S) : *si* $((y_j), p)$ *est un équilibre de production, alors* $r_i((y_j), p) > \inf p \,.\, X_i$ *pour tout* i.

Les hypothèses (C), (P) et (R) ont déjà été discutées précédemment. L'hypothèse (B) est impliquée, par exemple, par (P) et par l'hypothèse d'*irréversibilité asymptotique* suivante :

$$A\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) \cap -A\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)=\{0\},$$

où $A\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)$ désigne le cône asymptotique de l'ensemble de production total $\sum_{j=1}^{n} Y_j$. Cette dernière condition est satisfaite si l'ensemble $\sum_{j=1}^{n} Y_j$ est *convexe*, fermé, contient 0, et si l'hypothèse classique d'*irréversibilité :*

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j \cap -\sum_{j=1}^{n} Y_j=\{0\}$$

est vérifiée [*cf.* Debreu (1959)].

La dernière hypothèse (S) du théorème 3 est souvent appelée *hypothèse de survivance*, par analogie avec le cas convexe; elle implique que pour tout équilibre de production $((y_j), p)$, l'ensemble de budget $\{x_i \in X_i \mid p \,.\, x_i \leqq r_i(y_1, \ldots, y_n, p)\}$ de chaque consommateur i est non vide [mais le théorème 3 n'est pas vrai, en général, si (S) est remplacée par la condition plus faible de non-vacuité]. L'article de Bonnisseau-Cornet (1988 *c*) propose un affaiblissement de l'hypothèse de survivance (S) et montre de plus que le théorème 3 n'est pas vrai, en général, si l'on remplace dans la définition de l'équilibre le cône normal de Clarke $N_{Y_j}(.)$ par le cône des perpendiculaires $\perp_{Y_j}(.)$ ([10]).

Le théorème 3 se démontre à partir du résultat suivant qui joue dans la preuve un rôle analogue à celui du lemme de Debreu-Gale-Nikaïdo dans la preuve d'existence d'un équilibre de Walras.

THÉORÈME 3 *bis*. — *Il existe une solution* $((y_j^*), p^*) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j \times S_l$ *de* (E') *si les ensembles* Y_j *vérifient les hypothèses* (P), (B) *et si* ξ *est une correspondance semi-continue supérieurement de* $\prod_{j=1}^{n} Y_j \times S_l$ *dans* R^l, *à valeurs convexes, compactes, non vides, qui vérifie de plus l'hypothèse suivante :*

(W) : *si* $(y_1, \ldots, y_n, p)$ *est un équilibre de production, alors* $p.\left(x - \sum_{j=1}^{n} y_j - \omega\right) \leqq 0$ pour tout $x \in \xi(y_1, \ldots, y_n, p)$.

Nous présentons rapidement la preuve du théorème 3 *bis*. Choisissons tout d'abord un minorant strict, noté $\underline{x}$, de la correspondance ξ [c'est-à-dire, $\underline{x} \ll x$ pour tout $x \in \xi(y_1, \ldots, y_n, p)$], alors toute solution $(y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*) \in Y_1 \times \ldots \times Y_n \times S_l$ de (E') appartient à l'ensemble compact $EA(\underline{x}) \times S_l$, où :

$$EA(\underline{x}) \overset{\text{def}}{=} \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in \partial Y_1 \times \ldots \times \partial Y_n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} y_j + \omega \geqq \underline{x} \right\}.$$

En effet, d'après la proposition 1 *d*, les conditions $p^* \in N_{Y_j}(y_j^*)$ pour tout j et le fait que p^* soit non nul impliquent bien que $y_j^* \in \partial Y_j$ pour tout j.

Remarquons que sous les seules hypothèses (P) et (B), l'ensemble compact $EA(\underline{x})$ n'est pas convexe, en général, et ne vérifie pas *a priori* de « bonnes » propriétés topologiques; il peut ne pas être connexe [Arrow-Hahn (1971; p. 156)] et ses composantes connexes peuvent ne pas être simplement connexes [Kamiya (1988)].

La première partie de la preuve, la plus difficile, consiste à démontrer que sous les hypothèses du théorème 3 *bis*, l'ensemble $EA(\underline{x})$ est contractible et plus précisément est la rétraction continue d'une boule fermée B d'un espace euclidien [*cf.* le paragraphe suivant pour un résultat plus précis]; cette propriété se démontre par des techniques de la théorie de Morse dans un cadre non differentiable [*cf.* Bonnisseau-Cornet (1986)].

([10]) Ou par les cônes de Dubovickii-Miljutin ou de Bouligand.

La propriété de rétraction permet ensuite de démontrer dans une deuxième étape l'existence d'une solution de (E') par un argument de point-fixe, sur l'ensemble convexe, comptact $B \times S_l$, à l'aide du théorème de Kakutani (ou du théorème de Poincaré-Hopf). L'article de Bonnisseau-Cornet (1985) donne une preuve du théorème 3 qui n'utilise que des outils de topologie différentielle, dans le cas particulier où chaque ensemble de production Y_j a un bord lisse.

Le théorème 3 généralise le résultat classique d'existence d'un équilibre de Walras [Arrow-Debreu (1954), Debreu (1959; théorème (1) de 5.7)] que nous énonçons maintenant.

COROLLAIRE 1. — *L'économie de propriété privée* $\mathscr{E} = ((X_i, \precsim_i, \omega_i), (Y_j), (\theta_{ij}))$ *admet un équilibre de Walras si* $\mathscr{E}$ *vérifie les hypothèses* (C), (P), *si, pour tout* j, Y_j *est convexe, si l'hypothèse d'irréversibilité* $\left[\sum_{j=1}^{n} Y_j\right] \cap -\left[\sum_{j=1}^{n} Y_j\right] = \{0\}$ *est vérifiée ainsi que l'hypothèse suivante :*

(**WS**) : *il existe* x_i^0 *dans* X_i *tel que* $x_i^0 \ll \omega_i$.

Preuve. — Le corollaire est une conséquence du théorème 3 et du fait que les notions d'équilibre de Walras et d'équilibre de tarification marginale coïncident sous l'hypothèse de convexité des ensembles Y_j. Nous avons déjà vu que l'hypothèse (B) du théorème 3 était satisfaite sous les hypothèses du corollaire et il nous reste donc seulement à montrer que l'hypothèse de survivance (S) est aussi satisfaite. En effet, soit $((y_j), p)$ un équilibre de production, alors, pour tout j, $p \in N_{Y_j}(y_j) = \{p \in R^l \mid p.y_j \geqq p.y$ pour tout $y \in Y_j\}$, puisque Y_j est convexe [proposition 1 *b*]. Donc, pour tout j, $p.y_j \geqq p.0 = 0$ et, puisque $p \in R_+^l \setminus \{0\}$, l'hypothèse (WS) implique que

$$r_i((y_j), p) = p.\omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p.y_j > p.x_i^0 \geqq \inf p.X_i. \quad \blacksquare$$

7. PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES RÉALISABLES EA $(\underline{x})$ et A $(\underline{x})$

Nous énonçons dans paragraphe un résultat [Cornet (1988 *b*)] qui précise les propriétés de l'ensemble EA $(\underline{x})$ énoncées au paragraphe précédent. Sous les hypothèses du théorème 3 et sous l'hypothèse supplémentaire que chaque ensemble de production Y_j a un bord lisse, l'ensemble EA $(\underline{x})$ est en fait homéomorphe à la boule fermée unitée $B^{(l-1)n}$ de $R^{(l-1)n}$.

THÉORÈME 4. — *Étant donné* $\underline{x}$ *dans* R^l, *l'ensemble* EA $(\underline{x})$ *est homéomorphe à la boule* $B^{(l-1)n}$ *si les hypothèses* (P), (B) *sont satisfaites si, pour* *tout j, ∂Y_j est une sous-variété de classe C^2 et si l'hypothèse suivante est vérifiée :*

(SF) : *si $((y_i), p)$ est un équilibre de production, alors* $p.\left(\sum_{j=1}^{n} y_j+\omega\right)>p.\underline{x}$.

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse **(SF)** est plus faible que l'hypothèse **(W)**, faite dans le théorème 3 *bis* ci-dessus si $\underline{x}$ est un minorant strict de la correspondance ξ; elle est aussi plus faible que l'hypothèse **(S)** du théorème 3 sous les l'hypothèses **(C)** et **(R)** et si $\underline{x}$ est un minorant de l'ensemble de consommation total $\sum_{i=1}^{m} X_i$, puisque

$$p.\left(\sum_{j=1}^{n} y_j+\omega\right)=\sum_{i=1}^{m} r_i((y_j),p)>\sum_{i=1}^{m} \inf p.X_i \geqq p.\underline{x}.$$

Nous donnons ci-après une indication de la preuve du théorème 4. Nous rappelons tout d'abord que sous les hypothèses du théorème 4, l'ensemble $\partial Y_1 \times \ldots \times \partial Y_n$ est difféomorphe à un espace euclidien de dimension $(l-1)n$. Plus précisément, soit $e=(1, \ldots, 1)$ le vecteur de R^l ayant toutes ses coordonnées égales à 1, on note $e^\perp=\{v\in R^l \mid v.e=0\}$ l'espace orthogonal à e; alors, pour tout j, il existe une (unique) fonction continue $\lambda_j : e^\perp \to R$ telle que, pour tout $s\in e^\perp$, $\lambda_j(s)$ est l'unique nombre réel tel que $s-\lambda_j(s)e\in\partial Y_j$. De plus, les applications $\Lambda_j : s_j \to s_j-\lambda_j(s_j)e$, de $e^\perp$ sur ∂Y_j, $(j=1, \ldots, n)$ et $\Lambda : (s_1, \ldots, s_n) \to (\Lambda_1(s_1), \ldots, \Lambda_n(s_n))$, de $(e^\perp)^n$ sur $\prod_{j=1}^{n} \partial Y_j$, sont des difféomorphismes [Lemma 5.1 de Bonnisseau-Cornet (1988 *b*)].

On montre ensuite aisément que l'ensemble EA $(\underline{x})$ peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\text{EA}(\underline{x})&=\Lambda(\{s\in(e^\perp)^n \mid \theta_h(s)\geqq 0, \text{ pour tout } h=1, \ldots, l\})\\&=\Lambda(\{s\in(e^\perp)^n \mid \theta(s)\leqq 0\}),\end{aligned}$$

où

$$\theta_h(s)\overset{\text{def}}{=}\left[\sum_{j=1}^{n} s_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(s_j)e+\omega-\underline{x}\right]_h \qquad (h\text{-ième coordonnée}),$$

et

$$\theta(s)\overset{\text{def}}{=}\left[\sum_{h=1}^{l}\max\{0, -\theta_h(s)\}^2\right]^{1/2}.$$

La preuve du théorème 4 consiste à montrer que le bord de $\Lambda^{-1}(\text{EA}(\underline{x}))$ est homéomorphe, pour tout $\varepsilon>0$, à l'ensemble $\theta^{-1}(\varepsilon)$ qui est une sous-variété compacte de $(e^{\perp})^n$ de classe C^2 et qui a le même type d'homotopie que la sphère $\partial B^{(l-1)n}$. La conjecture de Poincaré généralisée implique alors que, si $(l-1)n-1 \neq 3$, pour tout $\varepsilon > 0$, $\theta^{-1}(\varepsilon)$ est homéomorphe à la sphère $\partial B^{(l-1)n}$ et donc aussi le bord de $\Lambda^{-1}(\mathrm{EA}(\underline{x}))$ qui lui est homéomorphe; on déduit ensuite du théorème de Schoenflies que l'ensemble $\Lambda^{-1}(\mathrm{EA}(\underline{x}))$ est homéomorphe à la boule $B^{(l-1)n}$ et donc aussi EA $(\underline{x})$. Un argument similaire permet de traiter aussi le cas $(1-1)n-1=3$.

Nous déduisons maintenant du théorème précédent une propriété de l'ensemble :

$$A(\underline{x}) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ (y_1, \ldots, y_n) \in Y_1 \times \ldots \times Y_n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j + \omega \geqq \underline{x} \right\}.$$

THÉORÈME 4 bis. — *Étant donné* $\underline{x} \in \mathrm{R}^l$, *sous les hypothèses du théorème* 4, *l'ensemble* $A(\underline{x})$ *est homéomorphe à la boule unité fermée* B^{ln} *de* R^{ln}.

Preuve du théorème 4 bis. — On remarque tout d'abord que l'ensemble $B = \{(x, t) \in \mathrm{R}^{(l-1)n} \times \mathrm{R}^n_+ \mid \|x\|^2 + \|t\|^2 \leqq 1\}$ est homéomorphe à B^{ln}. Soit $f: B^{(l-1)n} \to \mathrm{EA}(\underline{x})$ un homéomorphisme donné par le théorème 4, on montre aisément que l'application $\hat{f}: B \to A(\underline{x})$ définie ci-après est un homéomorphisme; on pose $\hat{f}(x, t) = f(x) - (\lambda_1(x, t)e, \ldots, \lambda_n(x, t)e)$, où

$$\lambda_j(x, t) = 0 \qquad \text{si} \quad \|x\| = 1$$

et

$$\lambda_j(x, t) = [t_j^2/(1-\|x\|^2)] \min \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n} f_j(x) + \omega - \underline{x} \right]_h \,\middle|\, h = 1, \ldots, l \right\} \qquad \text{si} \quad \|x\| < 1. \quad \blacksquare$$

Remarquons que les théorèmes 4 et 4 *bis* se démontrent simplement dans les deux cas particuliers suivants; (i) : Y_j est convexe pour tout j, et (ii) : $n = 1$.

Dans le deuxième cas, on peut définir explicitement un homéomorphisme h du simplexe S_l de R^l sur EA $(\underline{x})$ comme suit :

$$h(s) = -\omega + \underline{x} + \lambda(s)s$$

où

$$\lambda(s) = \sup\{\lambda \in \mathrm{R} \mid -\omega + \underline{x} + \lambda s \in Y_1\}.$$

Le fait que $A(\underline{x})$ soit homéomorphe à la boule B^l se démontre ensuite comme dans la preuve du théorème 4 *bis*.

Enfin sous l'hypothèse de convexité (i), et sous les hypothèses (P) et (B), l'ensemble $A(\underline{x})$ est manifestement convexe et compact; on montre ensuite aisément que l'hypothèse (SF) implique que l'ensemble $A(\underline{x})$ est d'intérieur non vide et donc est homéomorphe à B^{ln}.

8. UN OPTIMUM EST UN ÉQUILIBRE PAR RAPPORT A UN SYSTÈME DE PRIX

Le résultat principal de ce paragraphe énonce que, sous (C) et d'autres hypothèses faibles, un optimum de Pareto est un équilibre de tarification marginale, pour une distribution de revenus « bien choisie ». Nous déduirons ensuite de ce résultat, sous l'hypothèse additionnelle que les ensembles Y_j sont convexes, le théorème classique de Arrow (1951) et Debreu (1951).

Nous rappelons tout d'abord quelques définitions. Une *allocation réalisable* de l'économie $\mathscr{E}$ est un élément $((x_i^*), (y_j^*)) \in \mathrm{R}^{lm} \times \mathrm{R}^{ln}$ vérifiant les conditions suivantes : $x_i^* \in X_i$ pour tout i, $y_j^* \in Y_j$ pour tout j, et $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* + \omega$. Un *optimum de Pareto* est une allocation réalisable $((x_i^*), (y_j^*))$ telle qu'il n'existe pas d'allocation réalisable $((x_i), (y_j))$ qui permette d'« améliorer » les préférences des consommateurs, au sens où : $x_i^* \precsim_i x_i$ pour tout i, et $x_{i_0}^* \prec_{i_0} x_{i_0}$ pour au moins un consommateur i_0.

THÉORÈME 5. — *On suppose que l'hypothèse* (C) *est vérifiée et que* Y_j *est fermé pour tout* j. *Si* $((x_i^*), (y_j^*))$ *est un optimum de Pareto, alors il existe un système de prix non nul* p^* *dans* R^l *tel que :*

(α') : *pour tout* i, $p^* . x_i^* \leqq p^* . x_i$ *pour tout* $x_i \in X_i$ *tel que* $x_i^* \precsim_i x_i$;

(β) : *pour tout* j, $p^* \in N_{Y_j}(y_j^*)$;

(γ) : $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* + \omega$.

Si de plus $p^* . x_i^* \neq \min p^* . X_i$, alors

(α) : x_i^* *est un plus grand élément de* $\precsim_i$ *dans l'ensemble de budget* $\{x_i \in X_i \mid p^* . x_i \leqq p^* . x_i^*\}$.

Nous appelons *équilibre* [*resp. quasi-équilibre*] *par rapport au système de prix* p^*, *pour la tarification marginale*, un élément $((x_i^*), (y_j^*)) \in \prod_{i=1}^{m} X_i \times \prod_{j=1}^{n} Y_j$ qui vérifie les conditions (α) [resp. (α')], (β), et (γ) du théorème 5, c'est-à-dire, pour lequel il existe des revenus r_i^* [ci-dessus $r_i^* = p^* . x_i^*$] $(i = 1, \ldots, m)$ tel que (α) : chaque consommateur i maximise en x_i^* ses préférences dans son ensemble de budget, (β) : chaque producteur suit la règle de tarification marginale, et (γ) : l'offre est égale à la demande. Remarquons que dans cette définition les revenus des consommateurs sont déterminés par l'optimum alors que dans la définition d'équilibre de tarification marginale du paragraphe 5, la structure de revenus était donnée de manière exogène.

Sous les hypothèses du théorème 5, tout optimum de Pareto $((x_i^*), (y_j^*))$ est donc un quasi-équilibre par rapport à un système de prix non nul p^*, pour la tarification marginale et ce quasi-équilibre est un équilibre « si on ne se trouve pas dans le cas exceptionnel où $p^* . x_i^*$ est la plus petite dépense par rapport à p^* dans l'ensemble de consommation X_i » [Debreu (1959)].

Le théorème 5 [Cornet (1986)], dont un des antécédents dans le modèle d'équilibre général et en l'absence d'hypothèses de convexité est dû à Guesnerie (1975) (avec cependant une formalisation différente de la règle de tarification marginale), a une longue tradition sur le plan économique et est souvent appelé « deuxième théorème fondamental de l'économie du bien-être ». Ce théorème explique le rôle essentiel de décentralisation que joue le système de prix p^* dans une économie.

La preuve du théorème 5 consiste à obtenir le système de prix p^* comme vecteur de multiplicateurs de Lagrange associé à un problème de maximisation « bien choisi » dont l'optimimum $((x_i^*), (y_j^*))$ est une solution. La difficulté sur le plan mathématique provient du fait qu'aucune hypothèse de différentiabilité (ou de convexité) n'est faite dans le théorème 5 mais les travaux récents sur l'« analyse non différentiable » permettent de surmonter cet obstacle. En particulier, l'existence du système de prix p^* se déduit d'une version du théorème de John-Kuhn-Tucker dans le cadre non différentiable [*cf.* Clarke (1983); théorème 6.1.1]. Une preuve simple et directe du théorème peut aussi être donnée si on fait l'hypothèse supplémentaire (P) [*cf.* Cornet (1988 *c*)].

Enfin mentionnons que comme pour le théorème d'existence, il n'est pas possible, en général, de remplacer dans la condition (β) du théorème 5, le cône normal de Clarke $N_{Y_j}(y_j^*)$ par le cône $\perp_{Y_j}(y_j^*)$ (11); nous renvoyons pour un contre-exemple à l'article de Bonnisseau-Cornet (1988 *a*) qui propose aussi une généralisation du théorème 5 au cadre d'un espace de biens de dimension infinie et qui généralise le résultat de Debreu (1954) dans le cadre convexe.

Nous faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire que les ensembles Y_j sont convexes; alors la condition (β) est équivalente à la maximisation du profit pour chaque producteur [proposition 1 *b*] et nous déduisons directement du théorème 5 le résultat suivant [Arrow (1951), Debreu (1951), Debreu (1959); théorème (1) de 6.4].

(11) Ou par les cônes de Dubovickii-Miljutin ou de Bouligand. Il est cependant possible de remplacer le cône normal de Clarke par un cône plus petit; *cf.* les références sur ce sujet. Cette question est importante dans la mesure où le cône normal de Clarke peut être « très » grand et nous renvoyons aux articles de Jouini (1988), (1989) pour la construction d'un ensemble de production $Y_j \subset R^l$ vérifiant l'hypothèse (P) et tel que $N_{Y_j}(y_j) = R^l_+$ pour *tout* $y_j \in \partial Y_j$, c'est-à-dire, pour lequel la règle de tarification marginale est triviale.

COROLLAIRE 1. — *On suppose que l'hypothèse* (C) *est vérifiée et que* Y_j *est convexe fermé pour tout* j. *Si* $((x_i^*), (y_j^*))$ *est un optimum de Pareto, alors il existe un système de prix non nul* p^* *dans* $\mathbf{R}^l$ *tel que :*

(α') : *pour tout* i, $p^*.x_i^* \leqq p^*.x_i$, *pour tout* $x_i \in X_i$ *tel que* $x_i^* \precsim_i x_i$;

(β) : *pour tout* j, $p^*.y_j^* \geqq p^*.y_j$, *pour tout* $y_j \in Y_j$;

(γ) : $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* + \omega$.

Si de plus $p^*.x_i^* \neq \min p^*.X_i$, *alors*

(α) : x_i^* *est un grand élément de* $\precsim_i$ *dans l'ensemble de budget* $\{ x_i \in X_i \mid p^*.x_i \leqq p^*.x_i^* \}$.

Les preuves de Arrow et Debreu de ce résultat reposent toutes deux sur un théorème de séparation entre deux convexes et ont permi, à la suite des travaux de T. C. Koopmans, J. Von Neumann et O. Morgenstern, de « libérer l'économie mathématique de ses tradiations de calcul différentiel et de compromis avec la logique » [Debreu (1959)]. La preuve du théorème 5 présentée ci-dessus revient à la tradition antérieure à celle de Arrow-Debreu en utilisant des méthodes de « calcul (sous-)différentiel » qui ont été rendues possibles et rigoureuses par les travaux récents mentionnés précédemment.

Nous terminons cet article par une preuve du théorème 5, dans l'esprit de celle de Arrow et Debreu, et qui permet de plus de faire le lien entre les deux approches discutées ci-dessus. Cette preuve repose sur le résultat suivant sur les cônes normaux de Clarke, démontré récemment par Cornet et Rockafellar (1989), et qui dans le cas de deux ensembles convexes coïncide avec un théorème de séparation.

THÉORÈME 6. — *Soient* $C_k (k=1, \ldots, q)$ *une famille finie de sous-ensembles fermés de* $\mathbf{R}^l$, *et* c_k *des éléments de* $C_k (k=1, \ldots, q)$ *tels que* $\sum_{k=1}^{q} c_k$ *appartienne au bord de l'ensemble* $\sum_{k=1}^{q} C_k$. Alors :

$$\{0\} \neq \bigcap_{k=1}^{q} N_{C_k}(c_k).$$

Preuve du théorème 5. — C'est une conséquence du théorème 6, en posant $q=n+m$ et en prenant pour famille C_k les ensembles $C_j = Y_j (j=1, \ldots, n)$ et $C_i = -\{ x \in X_i \mid x_i^* \precsim_i x \} \cap \bar{B}(x_i^*, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$. La preuve consiste alors à vérifier que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le vecteur $-\omega = \sum_{j=1}^{n} y_j^* + \sum_{i=1}^{m} -x_i^*$ appartient au bord de la somme de ces ensembles. ■

RÉFÉRENCES

[1] K. J. ARROW, An Extension of the Basic Theorem of Classical Welfare Economics, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium*, University of California Press, 1951.

[2] K. J. ARROW et G. DEBREU, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica*, **22**, 1954, p. 265-290.

[3] K. J. ARROW et F. HAHN, *General Competitive Analysis*, San Francisco: Holden Day, 1971.

[4] F. J. ARROW et M. D. INTRILIGATOR, *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. I, II and III. Amsterdam: North-Holland, 1981-5.

[5] J. P. AUBIN et I. EKELAND, *Applied Nonlinear Analysis*, New York, Wiley Interscience, 1984.

[6] Y. BALASKO, *Fondements de la théorie de l'équilibre général*, Economica, Paris, 1988.

[7] J. M. BONNISSEAU, 1988, Existence de l'équilibre : le cas d'ensembles de production non convexes, *Thèse de Doctorat*, Université Paris-I.

[8] J. M. BONNISSEAU, On two Existence Results of Equilibria in Economies with Increasing Returns, *J. Math. Econ.*, **17**, 1988, p. 193-207.

[9] J. M. BONNISSEAU, A Remark on the Existence of Equilibria in Economies with Increasing Returns, *CORE Discussion Paper* 8814, Université Catholique de Louvain, 1988.

[10] J. M. BONNISSEAU, Equilibrium with Quantity Targets, *CORE Discussion Paper* 8816, Université Catholique de Louvain, 1988.

[11] J. M. BONNISSEAU, Existence of Lindahl Equilibria in Economies with Nonconvex Production Sets, *Document de travail C.E.R.M.S.E.M.*, Université Paris-I, 1989.

[12] J. M. BONNISSEAU et B. CORNET, Existence of Marginal Cost Pricing Equilibria in an Economy with Several Nonconvex Firms, Preprint C.E.R.M.S.E.M., 8507, Université Paris-I, à paraître dans *Econometrica*, 1985.

[13] J. M. BONNISSEAU et B. CORNET, Fixed-Point Theorems and Morse's Lemma for Lipschitzian Functions, Preprint C.E.R.M.S.E.M., Université Paris-I, à paraître dans *J. Math. Anal. Appl.*, 1986.

[14] J. M. BONNISSEAU et B. CORNET, Valuation Equilibrium and Pareto Optimum in Nonconvex Economies, *J. Math. Econ.*, **17**, 1988 *a*, p. 293-308.

[15] J. M. BONNISSEAU et B. CORNET, Existence of Equilibria when Firms Follow Bounded Losses Pricing Rules, *J. Math. Econ.*, **17**, 1988 *b*, p. 119-147.

[16] J. M. BONNISSEAU et B. CORNET, Existence of Marginal Cost Pricing Equilibria: The Nonsmooth Case, *Preprint C.E.R.M.S.E.M.*, Université Paris-I, à paraître dans *Intern. Econ. Rev.*, 1988 *c*.

[17] F. CLARKE, Generalized Gradients and Applications, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **205**, 1975, p. 247-262.

[18] F. CLARKE, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, New York, Wiley, 1983.

[19] B. CORNET, Existence of Equilibria in Economies with Increasing Returns, I.P. 311, University of California, Berkeley, à paraître dans *Contributions to Operations Research and Economics: the XXth Anniversary of CORE*, B. CORNET et H. TULKENS Eds., 1982, The M.I.T. Press.

[20] B. CORNET, The Second Welfare Theorem in Nonconvex Economies, *Preprint C.E.R.M.S.E.M.*, Université Paris-I, 1986.

[21] B. CORNET, Regularity Properties of Open Tangent Cones, *Math. Programming Study*, vol. **30**, 1987, p. 17-33.

[22] B. CORNET, General Equilibrium Theory and Increasing Returns to Scale: Presentation, *J. Math. Econ.*, vol. **17**, 1988 *a*, p. 103-118.

[23] B. CORNET, Topological Properties of the Attainable Set in a Nonconvex Production Economy, *J. Math. Econ.*, vol. **17**, 1988 *b*, p. 275-292.

[24] B. CORNET, Tarification au coût marginal et Pareto optimalité, in *Mélanges économiques : Essais en l'honneur de Edmond Malinvaud*, P. CHAMPSAUR *et al* Eds., *Economica*, Paris, 1988 *c*, p. 29-70.

[25] B. CORNET et R. T. ROCKAFELLAR, Separation Theorems and Supporting Price Theorems for Nonconvex Sets, *Preprint C.E.R.M.S.E.M.*, Université Paris-I, 1989.

[26] G. DEBREU, The Coefficient of Resource Utilization, *Econometrica*, vol. **19**, 1951, p. 273-292.

[27] G. DEBREU, Valuation Equilibrium and Pareto Optimum, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, vol. **40**, 1954, p. 588-592.

[28] G. DEBREU, Market Equilibrium, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, vol. **42**, 1956, p. 876-878.

[29] G. DEBREU, *Theory of Value, An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, New York, John Wiley, 1959, [Traduction française, 1962, *Théorie de la valeur*, Dunod, Paris].

[30] G. DEBREU, Four Aspects of the Mathematical Theory of Economic Equilibrium, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vancouver, vol. **1**, 1974, p. 65-77.

[31] G. DEBREU, Existence of Competitive Equilibrium, Chapter 15, in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. I, II and III, K. J. ARROW and M. D. INTRILIGATOR Eds., Amsterdam: North-Holland, 1982 [Traduit en français dans *Théorie de la valeur*, 1984, 2ᵉ éd., Dunod, Paris].

[32] I. EKELAND, *Éléments d'économie mathématique*, Herman, Paris, 1979.

[33] M. FLORENZANO, *L'équilibre économique général*, Paris, Éditions du C.N.R.S., 1981.

[34] D. GALE, The Law of Supply and Demand, *Math. Scand.*, vol. **3**, 1955, p. 155-169.

[35] R. GUESNERIE, Pareto Optimality in Nonconvex Economies, *Econometrica*, vol. **43**, 1975, p. 1-29.

[36] E. JOUINI, A Remark on Clarke's Normal Cone and the Marginal Cost Pricing Rule, *J. Math. Econ.*, vol. **17**, 1988, p. 309-315.

[37] E. JOUINI, Lipschitz Functions with Constant Generalized Gradients, preprint C.E.R.M.S.E.M., Université Paris-I, à paraître dans *J. Math. Anal. Appl.*, 1989.

[38] E. JOUINI, Ensembles de production non convexes, existence et unicité de l'équilibre, *Thèse de Doctorat*, Université Paris-I, 1989.

[39] K. KAMIYA, On the Survival Assumption in Marginal Cost Pricing, *J. Math. Econ.*, vol. **17**, 1988, p. 261-273.

[40] E. MALINVAUD, *Leçons de théorie microéconomique*, 2ᵉ éd., Paris, Dunod, 1971.

[41] A. MAS-COLELL, *The Theory of General Economic Equilibrium, A Differential Approach*, Cambridge, Cambridge University Press, 1986.

[42] H. NIKAÏDO, On the Classical Multilateral Exchange Probleme, *Microeconomica*, 1956, p. 135-145.

[43] R. T. ROCKAFELLAR, Clarke's Tangent Cone and the Boundary of Closed Sets in $\mathbf{R}^n$, *Nonlinear Analysis*, vol. **3**, 1979, p. 145-154.

[44] R. T. ROCKAFELLAR, *The Theory of Subgradients and its Applications to Problems of Optimization: Convex and Nonconvex Functions*, Berlin, Helderman Verlag, 1981.

[45] H. SCARF, (with the collaboration of T. Hansen), *The Computation of Economic Equilibria*, New Haven, Yale University Press, 1973.

[46] S. SMALE, A Convergent Process of Price Adjustment and Global Newton Methods, *J. Math. Econ.*, vol. **3**, 1976, p. 107-120.

L. WALRAS, *Éléments d'économie politique pure*, Lausanne, L. Corbaz and Compagny, 1874-1877.

(*Manuscrit reçu le* 27 *octobre* 1988.)