Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 8, n° 3-4, 1991, p. 351-417. *Analyse non linéaire*

Oscillations non linéaires des systèmes hyperboliques : méthodes et résultats qualitatifs

par

Denis SERRE

École Normale Supérieure de Lyon,
46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

RÉSUMÉ. — On considère les oscillations de grande amplitude des systèmes hyperboliques de lois de conservation. Les champs vraiment non linéaires en tuent une partie tandis que les champs linéairement dégénérés en laissent une autre part se propager selon des vitesses de groupe obéissant à des formules compliquées. Cet article rassemble des résultats rigoureux via la compacité par compensation et des calculs heuristiques.

Mots clés : EDP hyperboliques, oscillations, convergence faible, homogénéisation.

ABSTRACT. — One studies the Cauchy problem for hyperbolic systems of first order conservation laws $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, with an oscillating sequence of initial data. The oscillations have an $O(1)$ amplitude; one may think to $u^\varepsilon(x, 0) = a\left(x; \frac{x}{\varepsilon}\right)$, where $a(x, .)$ is periodic.

It turns out that one part of the initial oscillations are killed because of genuine non-linearity. But the most of the physically relevant systems are endowed with at least one linearly degenerate characteristic field, which allows oscillations of a part of the field u.

Classification A.M.S. : 35 L 60, 35 B 99, 76 E 30, 76 Q 05.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449
Vol. 8/91/03-04/351/68/$8.80/

Our goal is to describe these oscillations and their propagation. There are several steps:

– to determine the possible oscillations, x and t being fixed;

– to parametrize them via a set of new variables $(v(x, t), w(x, t; y))$; here y plays the role of a "fast variable";

– to find an integro-differential system describing the evolution of (v, w);

– to find appropriate initial data.

Of particular interest is the computation of the group speeds, which are nothing but the characteristic values of the relaxed system. Formulas are given, especially for the full gas dynamics, which are all but trivial.

The description of oscillations has been asked by Ronald DiPerna in 1985, who introduced the similar concept of "measure-valued solutions". An equivalent problem is to determine whether the set of solutions is closed or not in the weak-star topology of L^∞. Thus this work is an attempt to understand well-posedness (or illposedness, the both occur depending on the system) in L^∞, one of the two classes where a ferv existence results are known.

This study has also implications for numerical analysis. It suggests multi-scale methods which would give accurate values of speed when mild oscillations occur.

The paper is organized into three parts. Section II-V are devoted to a rigourous analysis with applications. Sections VI-VIII concerns speculative (but efficient) ideas; this heuristic procedure gives the first description of the oscillations in gas dynamics and elastic string. The end of the article is concerned with a conjecture I made in 1983 about the compensated compactness method.

En souvenir de notre inspirateur et ami, Ronald DiPerna.

PLAN

I. INTRODUCTION

Cet article contribue à l'étude des systèmes hyperboliques de lois de conservation du premier ordre

$$\partial_t \mathcal{U} + \partial_x f(\mathcal{U}) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{1.1}$$

Le champ inconnu $\mathcal{U}(x, t)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$, tandis que $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est donné. La matrice jacobienne $\mathrm{D} f(u)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, localement uniformément par rapport à u (hyperbolicité). Lorsque cela est utile, nous supposons que l'hyperbolicité est stricte : les valeurs propres $\lambda_i(u)$, $1 \leqq i \leqq n$, de $\mathrm{D} f(u)$ sont simples et donc de classe $\mathscr{C}^2$. Dans ce cas on note $r_i(u)$ un champ de vecteurs propres non nuls associé.

Nous nous restreignons au problème de Cauchy, qui est mieux compris que le problème mixte avec conditions aux limites.

L'intérêt de cette classe de systèmes est considérable. Elle comprend de nombreux modèles de physique (électromagnétisme), de mécanique (élasticité d'un câble, dynamique des fluides) ou de chimie (chromatographie, électrophorèse) pour lesquels les effets de diffusion sont absents ou négligés.

En l'absence de diffusion pour contrebalancer la nature non linéaire de (1.1), il est classique que des données initiales $u_0(x)$ arbitrairement régulières conduisent à l'explosion des dérivées premières $\partial_t u$ et $\partial_x u$ au bout d'un temps fini T*, en raison d'une équation du type de Ricatti

$$(\partial_t + \mathrm{D} f(u) \partial_x) \xi + \mathrm{D}^2 f(u) \xi \otimes \xi = 0, \tag{1.2}$$

satisfaite par $\xi = \partial_x u$. Au-delà de T*, on est conduit à considérer des solutions faibles qui sont en général discontinues. Les lois de conservation sont alors à considérer dans l'espace des distributions et ont un sens dès que $u(x, t)$ est de classe L^∞.

L'extension du problème de Cauchy à la classe L^∞, ou à la classe BV qui est bien naturelle elle aussi, se heurte à une difficulté essentielle : la non-unicité. Comme l'explosion en temps fini, la non-unicité est liée à la non-linéarité. Il n'est donc pas étonnant que surgisse un critère d'admissibilité qui ne sera sélectif que dans la mesure où il y a vraiment non-linéarité. Ce critère est en général fournit par la nature du problème physique sous la forme d'une inégalité d'entropie (scalaire)

$$\partial_t \mathrm{E}(u) + \partial_x \mathrm{F}(u) \leqq 0. \tag{1.3}$$

La compatibilité de (1.3) avec (1.1) pour les solutions classiques s'exprime par $\mathrm{DF} = \mathrm{DE}.\mathrm{D} f$. Aussi (1.3) ne sert-elle qu'à choisir parmi les solutions discontinues celles qui ont un sens physique. Notons que E ne se ramène pas à une combinaison linéaire des lois de conservation car $\mathrm{D}^2 \mathrm{E} > 0$ en pratique.

Prenons comme exemple de base une onde simple de discontinuité, qui ne prend que deux valeurs :

$$u(x, t)=\left\{\begin{array}{lll} a & \text{si} & x<st, \\ b & \text{si} & x>st. \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Le champ ainsi défini est une solution de (1.1) pourvu que $f(b)-f(a)=s(b-a)$ soit satisfait. Il s'ensuit que le champ

$$u'(x, t)=\left\{\begin{array}{lll} b & \text{si} & x<st, \\ a & \text{si} & x>st. \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

est une deuxième solution de (1.1). Le critère d'entropie impose à la solution admissible u de satisfaire $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)\leqq s(\mathrm{E}(b)-\mathrm{E}(a))$. Clairement, u' ne sera également admissible que si l'égalité est satisfaite, de sorte que $\partial_t \mathrm{E}(u)+\partial_x \mathrm{F}(u)=0$; on parle dans ce cas de discontinuité réversible. Nous allons immédiatement produire une condition pour l'existence de petites discontinuités réversibles en termes des éléments spectraux de f. En effet, si b tend vers a, l'égalité $f(b)-f(a)=s(b-a)$ entraîne l'existence d'un indice $1\leqq i\leqq n$ tel que $s\sim\lambda_i(a)$ (cas strictement hyperbolique). Un développement limité de $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)-s(\mathrm{E}(b)-\mathrm{E}(a))$ à l'ordre deux montre alors que $\mathrm{D}\lambda_i(a).r_i(a)=0$.

La condition $\mathrm{D}\lambda_i.r_i\equiv 0$ s'appelle la dégénérescence linéaire du i-ième champ caractéristique. On vérifie réciproquement qu'elle permet de construire des discontinuités réversibles (ou de contact), en choisissant a et b sur une courbe intégrale du champ r_i. *A contrario*, la condition $\mathrm{D}\lambda_i(u).r_i(u)\neq 0$ pour tout u définit les champs vraiment non linéaires pour lesquels on peut construire des discontinuités irréversibles de faible amplitude; on parle alors d'onde de choc, et même de i-choc.

Étant données deux valeurs a et b dans $\mathbb{R}^n$, liées par une discontinuité de contact de vitesse s, on peut construire une solution de (1.1)-(1.3) dont la variation totale par rapport à x soit arbitrairement grande et constante par rapport à t : il suffit de poser $u(x, t)=g(x-st)$, où g est une fonction mesurable ne prenant que les valeurs a et b. Par exemple si $\mathrm{G}:\mathbb{R}\to\{a, b\}$ est périodique, on peut prendre

$$u^\varepsilon(x, t)=\mathrm{G}\left(\frac{x-st}{\varepsilon}\right). \tag{1.6}$$

Pour une telle solution, la seule vitesse de propagation qui entre en jeu est $\lambda_i(a)=\lambda_i(b)=s$ qui est constante. Il n'y a donc pas de différence essentielle avec le cas d'un système linéaire, celui-ci se découplant en n équations de transport à coefficients constants

$$u=\sum w_i(x, t)\, r_i, \qquad (\partial_t+c_i\,\partial_x)\, w_i=0. \tag{1.7}$$

Au contraire, si a et b sont liés par un choc, la condition initiale $u^\varepsilon(x, 0) = G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ne conduit pas à la solution donnée par (1.6), car celle-ci ne satisfait pas l'inégalité d'entropie. On observe dans ce cas (Lax [19]) un amortissement des oscillations de u^ε avec un temps de relaxation de l'ordre de ε; en fait u^ε converge en norme dans $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ vers la valeur moyenne de G, lorsque ε tend vers 0.

En conclusion provisoire, on constate donc qu'une condition initiale oscillante conduit à une propagation de ces oscillations, s'il y a dégénérescence linéaire, ou à leur disparation en cas de vraie non-linéarité. Cependant, et c'est fondamental, tous les exemples physiques cités au début de cette introduction, pour lesquels $n \geqq 2$, ont au moins un champ linéairement dégénéré et un autre vraiment non linéaire. Les deux phénomènes précédemment décrits coexistent donc et sont loin de tout expliquer puisqu'en raison de la non-linéarité, tous les champs sont couplés. On peut donc prévoir que pour une condition initiale oscillante donnée, une partie des oscillations va se propager tandis qu'une autre partie sera lissée. En déflorant quelque peu l'analyse qui suit, disons que la partie non oscillante sera décrite par un ensemble de variables $v(x, t) \in \mathbb{R}^p$, où $1 < p < n$, alors que la partie oscillante nécessitera un champ $w(x, t; y) \in \mathbb{R}^q$, $q = n - p$, dépendant d'un paramètre supplémentaire sans dimension, analogue de la variable rapide x/ε lorsque la condition initiale est donnée par $G(x/\varepsilon)$, G périodique. Naturellement le couplage présent dans le système (1.1) persiste, et le couple (v, w) devra satisfaire un ensemble de lois de conservation couplées, de type intégro-différentiel, pouvant être parfois extrêmement complexe. C'est l'objet de cet article que d'étudier systématiquement ces phénomènes d'oscillations, de caractériser les variables significatives v et w, de déterminer le système qui gouverne leur évolution ainsi que les conditions initiales qu'il faut lui adjoindre. Aucun de ces points n'est jamais trivial, il suffit d'observer les résultats pour s'en convaincre. Un intérêt particulier doit être apporté aux vitesses de groupe des oscillations; celles-ci ne sont presque jamais des moyennes triviales des vitesses locales λ_i mais font appel à des poids eux-mêmes oscillants avant moyennisation. A cet égard, la formule donnant la vitesse moyenne du son dans un fluide fortement oscillant (§ VII) est frappante.

La motivation que je viens d'exposer peut être qualifiée de naturelle. Par exemple, si (1.1) décrit l'évolution des ondes électromagnétiques planes, on se donne pour but l'étude du courant alternatif, constitué d'oscillations de hautes fréquences et de grande amplitude, de sorte qu'en moyenne le champ électrique soit nul ($< E > = 0$) avec une puissance positive ($< |E|^2 > > 0$). Cette étude est triviale dans le vide car les équations de Maxwell y sont linéaires et on profite du principe de superposition;

mais elle se complique dans les milieux non linéaires puisque deux seulement des quatre composantes du champ électromagnétique peuvent alors osciller (*voir* le paragraphe II).

Il existe en fait d'autres motivations à ce travail, qui trouvent leur source dans l'histoire des équations aux dérivées partielles.

Tout d'abord, il est classique de se demander si un système d'EDP est bien posé, c'est-à-dire si à toute donnée est associée de manière unique et continue une solution. Les questions d'unicité et de dépendance continue n'ont vraiment d'intérêt que lorsqu'elles sont posées dans des espaces fonctionnels pour lesquels on a résolu la question de l'existence. Tant qu'on ne s'intéresse qu'a l'existence locale du problème de Cauchy pour (1.1), des espaces du type $\mathscr{C}^\alpha$, $\alpha>1$ ou H^s, $s>\frac{3}{2}$, font parfaitement l'affaire, puisqu'on ne traite que des solutions régulières. Par contre l'existence globale requiert de travailler dans des espaces de fonctions discontinues, qui soient toutefois inclus dans L^∞ pour que (1.1) ait un sens. De fait, tous les théorèmes d'existence globale connus à ce jour ont été établis dans les classes BV ou L^∞. Il est ainsi normal de considérer les questions d'unicité et de continuité dans ces classes.

La question de l'unicité dans la classe BV est déjà extrêmement ardue, et on doit à Ronald DiPerna [7] une réponse partielle sur ce sujet. Dans L^∞, celui-ci reste complètement ouvert. En l'absence d'une conclusion définitive concernant l'unicité, la seconde question doit être formulée plus vaguement : étant donnée une suite bornée (dans BV ou L^∞) de solutions, ses valeurs d'adhérence sont-elles encore des solutions de (1.1) ? La réponse est affirmative dans BV à cause du théorème de compacité de Helly, mais la situation est beaucoup moins claire dans L^∞ car c'est alors la topologie faible-étoile qui est en jeu, pour laquelle le flux f n'est pas continu. Or de telles suites de solutions, qui, après extraction d'une sous-suite convenable, convergent dans L^∞ faible-étoile, ne sont rien d'autre que ce que j'ai appelé plus haut des solutions oscillantes (ou présumées telles puisque la non-linéarité peut s'opposer aux oscillations). L'article présent est donc une réponse partielle à ce problème. A travers divers exemples nous verrons que, sans préjuger de l'unicité, certains systèmes hyperboliques de lois de conservations sont bien posés dans L^∞ tandis que d'autres ne le sont pas. De façon surprenante, le système de la dynamique des gaz parfaits relève de l'un ou l'autre cas selon qu'on a affaire à un gaz idéal (relation d'état $PV=nRT$) ou non.

Bien entendu, lorsqu'un système est mal posé, il est indispensable de poursuivre l'étude jusqu'à l'obtention d'un système relaxé que l'on espère être bien posé et qui contienne le précédent. Ce n'est rien que le système évoqué auparavant, qui décrit la propagation et l'interaction des oscillations.

On peut transposer les idées ci-dessus en remplaçant une suite bornée de solutions par une suite bornée de solutions approchées. Le but est alors soit numérique (convergence des schémas numériques) soit théorique (preuve d'existence de solution au problème de Cauchy). La classe BV étant trop souvent restreinte à des données initiales petites via le schéma de Glimm, Tartar et DiPerna ([38], [8]) se sont résolus à travailler dans L^∞ en tirant parti de domaines positivement invariants [4]. Tartar a donné une résolution définitive du cas scalaire ($n=1$) tandis que DiPerna a donné l'essentiel des idées pour les systèmes, le cas $n \geqq 3$ restant cependant hors d'atteinte en général. Pour contourner les difficultés non résolues, DiPerna a introduit par la suite le concept de « measure-valued solutions »; il s'agit *grosso modo* de mesures de Young $(x, t) \mapsto \nu_{x,t}$ caractérisant les oscillations d'une suite de solutions approchées, via

$$\forall g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \nu_{x,t}, g \rangle = (\lim g(u^\varepsilon))(x, t), \tag{1.8}$$

pour presque tout (x, t). La limite est au sens de la topologie faible-étoile de L^∞. L'espoir de Ronald DiPerna, qui cherchait surtout un résultat d'existence au problème de Cauchy pour (1.1), était qu'une $m-v$ solution soit une solution ordinaire, c'est-à-dire $\nu_{x,t} = \delta\{u(x, t))\}$, au moins dès que $\nu_{.,0}$ est une donnée initiale ordinaire. Par contre, en raison de la présence des champs linéairement dégénérés, des solutions qui sont vraiment à valeurs mesures existent bien, pour lesquelles $\nu_{.,0}$ est aussi à valeurs non ordinaires.

La première description de $m-v$ solutions non triviales est sans doute due à Papanicolaou, McLaughlin et Tartar [20]; elle concerne deux systèmes semi-linéaires de cinétique des gaz discrète :

– Une étude complète du système de Carleman ($n=2$).

– Une étude partielle du système de Broadwell ($n=3$) nécessitant des hypothèses supplémentaires, par exemple une périodicité en espace des données.

Le cas semi-linéaire a été complété par les travaux de Joly [15] et de Hou [13], il est maintenant à peu près clos. Par un aspect essentiel, il est plus simple que le cas quasi linéaire en ce sens que les vitesses caractéristiques étant constantes, les vitesses de groupe leur sont égales. Il y a cependant des subtilités importantes : Hou a montré que ces systèmes sont bien posés en l'absence de résonnance des vitesses caractéristiques. Le travail de pionnier de McLaughlin *et al.* a donc été un obstacle à une meilleure compréhension pendant quelques temps car le système de Broadwell est justement résonnant, tandis que le cas $n=2$ ne peut jamais l'être et était résolu par une méthode impossible à généraliser (compacité par compensation).

Le cas quasi linéaire est bien différent car les méthodes de développements asymptotiques ont jusqu'à présent échoué, tandis que la résonnance est un phénomène intermittent qu'il est difficile de mesurer, les vitesses caractéristiques variant d'autant plus vite que la solution oscille. Son étude est essentiellement due à l'auteur ([28], [29], [31], [32]) et Bonnefille ([2], [3]), soit pour des cas particuliers, soit pour les systèmes 2×2 en général.

La dernière motivation de ce travail est l'étude du comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy pour (1.1). Si $u(x, t)$ est une telle solution, $u^n(x, t)=u(nx, nt)$ en est une autre et la limite de u_n pour $0<t<+\infty$ lorsque $n\to\infty$ décrit la limite de u lorsque $t\to\infty$. Bien entendu, cette façon de voir est moins fine que ce qui est déjà connu si $u(., 0)$ est à support compact : il n'est pas question d'observer des N-ondes d'amplitude $t^{-1/2}$ puisqu'on ne s'intéresse qu'à des phénomènes dont l'amplitude est $O(1)$. Par contre cette approche est fructueuse lorsque la variation totale de $u(., 0)$ est infinie hors de tout compact, car alors $u^n(., 0)$ est vraiment oscillante.

On ne peut achever la présentation des problèmes de solutions oscillantes sans évoquer les liens avec la théorie de l'homogénéisation. Je prendrai comme référence le cas elliptique

$$\operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \operatorname{grad} z^\varepsilon)=f. \tag{1.9}$$

En homogénéisation, les coefficients (donnés) A^ε subissent des variations d'amplitude $O(1)$, de haute fréquence (disons ε^{-1}), qui induisent des variations de même nature pour $v=\operatorname{grad} z$. Cependant les conditions aux limites ont peu ou pas d'influence sur l'apparition des oscillations, contrairement à notre étude, où seule la condition initiale semble pouvoir les provoquer. Une autre différence essentielle est due à la rigidité des problèmes elliptiques : la description des oscillations à l'aide d'une variable rapide y est limitée par l'équation homogénéisée $\operatorname{div}_y(B \operatorname{grad}_y z)=\ldots$, ce qui restreint $z(x, .)$ à un espace vectoriel de dimension finie. *A contrario*, la dépendance des variables oscillantes $w(x, t, .)$ est parfaitement libre par rapport à y, lorsque x et t sont fixés.

Les liens qui unissent l'homogénéisation et les systèmes hyperboliques sont les méthodes employées, et tout d'abord la compacité par compensation, proposée pour les deux thèmes par Tartar ([38], [39]). Mais alors que cette théorie est utilisée dans toute sa richesse en homogénéisation, avec une profusion d'espaces fonctionnels, elle est restée assez pauvre en direction des systèmes hyperboliques, seul le lemme divergence-rotationnel en dimension 2 se révélant utile. C'est pourquoi la plupart des études rigoureuses se sont limitées aux systèmes 2×2, et encore avec des hypothèses concernant les champs caractéristiques. Récemment une nouvelle classe de systèmes englobant les systèmes 2×2 (dits riches) a été dégagée, pour laquelle la compacité par compensation garde son efficacité. Mais cette classe est très restreinte et n'englobe ni la dynamique des gaz, ni l'élasticité d'un câble dans $\mathbb{R}^2$. En ce qui concerne les problèmes multidimensionnels

$$\partial_t u+\operatorname{div} f(u)=0, \qquad x\in\mathbb{R}^p, \quad t>0, \tag{1.10}$$

il semble n'y avoir aucun espoir au moyen de la compacité par compensation excepté peut-être pour le cas scalaire. En effet, si $n=1$, on obtient une liste infinie d'inégalités indépendantes qui mettent en jeu la mesure de Young, et il n'est pas impossible d'en tirer parti.

L'organisation du papier est la suivante. Les paragraphes II à V sont dévolus à ce qui peut être fait en toute rigueur mathématique à propos des solutions oscillantes. Le paragraphe II expose les principes avec un exemple simple. Le paragraphe III reprend en grande partie l'exemple de Bonnefille [3] relatif au système de Keyfitz et Kranzer, avec une attention particulière envers les vitesses de groupe. Le paragraphe IV traite de l'électrophorèse, qui est bien posé dans L^∞ faible-étoile ([1]). Enfin la section V traite le cas le plus complexe, un système riche dont tous les champs sont linéairement dégénérés. Celui-ci est mal posé dès que $n \geqq 3$, le système relaxé étant de taille $n(n-1)$ et chaque vitesse prenant la multiplicité $n-1$! L'article se poursuit par trois chapitres basés sur des méthodes heuristiques ([2]). La justification de ces méthodes à partir des exemples connus a lieu au paragraphe VI, tandis que les deux suivants sont consacrés à leur application à la dynamique des fluides (en coordonnées lagrangiennes et eulériennes) et à l'élasticité d'un câble dans $\mathbb{R}^{2 \text{ ou } 3}$. Dans le premier cas, un système décrivant complètement les oscillations est obtenu, tandis que dans le deuxième, seul un système de $n+2$ équations décrivant certaines quantités macroscopiques est établi. Il reste cependant des difficultés, puisqu'on ne décrit pas la transmission des oscillations à travers un choc. Au paragraphe VII notamment, on explique comment le système relaxé peut inspirer des schémas numériques qui resteraient consistants en présence d'oscillations, en pratiquant une analyse numérique multi-échelles. Il est également apporté une attention spéciale aux conditions initiales du système relaxé.

Les deux derniers chapitres reviennent sur la théorie de la compacité par compensation, dans l'esprit que lui a donné DiPerna. Le paragraphe IX est un argument qui donne un poids supplémentaire à une conjecture de l'auteur expliquée au paragraphe II. Plus précisément, on montre l'équivariance de cette formule sous les changements de variables $(x, t) \mapsto (y, s)$ de type Euler-Lagrange, tels qu'ils ont été définis par Wagner [42]. Le

---

([1]) A. Heibig a généralisé cette propriété à tous les systèmes de la classe de B. TEMPLE (*C. R. Acad. Sci. Paris*, 311, 1990, p. 861-866).

([2]) L'auteur a donné récemment une description plus satisfaisante et de portée plus générale au moyen de développements asymptotiques (*Collège de France Proceedings*. H. BRÉZIS, J.-L. LIONS éd., Longman, à paraître).

dernier paragraphe enfin est une analyse théorique d'un calcul de Rascle-Serre [24], tendant à montrer qu'une hypothèse plus faible que la non-linéarité vraie peut empêcher les oscillations ou assurer qu'un système est bien posé. Les calculs utilisent ici la conjecture déjà mentionnée.

Je n'ai pas inclus dans cet article une étude sur les systèmes avec terme source

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = g(u). \tag{1.11}$$

La raison en est simple : ces systèmes réunissent les difficultés des cas quasi linéaire et semi linéaire. Or pour $n \geqq 3$, l'angle d'attaque essentiel du cas semi linéaire est la méthode des développements asymptotiques. Celle-ci n'ayant pu jusqu'à présent être mise en œuvre dans le cas quasi linéaire, on n'a donc pas de résultat significatif. D'ailleurs, comme je l'ai dit plus haut, il y a pour $n \geqq 3$ des questions de résonnance qui n'ont même pas été étudiées dans le cas quasi linéaire.

En ce qui concerne le cas $n = 2$, les oscillations dans (1.11) sont bien comprises, dès qu'elles le sont pour (1.1). On pourra se reporter à [32] pour un exemple qui montre toutefois que l'expression des résultats est hautement non triviale.

II. LA PROPAGATION DES OSCILLATIONS

1. Solutions oscillantes

A partir de maintenant et jusqu'au paragraphe VIII inclus, on considère une suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de solutions faibles d'un système hyperbolique de lois de conservation ($u(x, t) \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$) :

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{2.1}$$

On supposera que cette suite est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Cette hypothèse peut découler de l'existence d'un domaine positivement invariant qui contiendrait les valeurs initiales de chaque solution (*cf.* Chuey-Conley-Smoller [4], Dafermos [6], Ventsel [41] et Serre [30]). En tout état de cause, une solution faible de (2.1) désigne une solution au sens des distributions qui satisfait également à un critère d'admissibilité supplémentaire, dont la forme la plus simple et la plus rigoureuse est l'inégalité de Lax pour une entropie $E(u)$ fortement convexe [c'est-à-dire que $E''(u)$ est toujours définie positive], de flux $F(u)$:

$$\partial_t E(u^\varepsilon) + \partial_x F(u^\varepsilon) \leqq 0. \tag{2.2}$$

Il est possible d'extraire de $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une sous-suite qui converge pour la topologie faible-étoile de $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. En fait, le procédé diagonal permet d'extraire une sous-suite pour laquelle les suites associées $(g(u^\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ convergent simultanément dans L^∞ faible-étoile, pour toute fonction g continue sur $\mathbb{R}^n$. On se placera toujours dans le cas où, cette extraction ayant déjà été faite, c'est toute la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui possède cette propriété. Les diverses limites $\hat{g}$ des suites $(g(u^\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ sont alors décrites par une seule famille de probabilités $\nu_{x,t}$ opérant sur $\mathbb{R}^n$, dépendant de x, t de façon mesurable, via la formule :

$$\hat{g}(x, t) = \langle \nu_{x,t}, g \rangle, \qquad pp(x, t). \tag{2.3}$$

Si la convergence de $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est « forte », c'est-à-dire a lieu pour une norme d'un espace de Lebesgue L^p, $1 \leqq p \leqq \infty$, alors d'une part $\nu_{x,t}$ est une masse de Dirac localisée au point $\widehat{\mathrm{id}}(x, t)$ [qu'on notera $u(x, t)$] pour presque tout (x, t); d'autre part $\hat{g} = g \circ u$ et le passage à la limite dans (2.1) et (2.2) montre que u est une solution faible du problème. Ce cas est évidemment le plus favorable et nous nous intéresserons maintenant aux suites $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui ne convergent pas fortement ou, ce qui revient au même, au cas $\langle \nu, |u|^2 \rangle > |\langle \nu, u \rangle|^2$. De telles suites sont appelées par abus de langage « solutions oscillantes », bien que l'oscillation ne puisse être que la propriété d'une suite de solutions et non d'une solution seule.

2. Solutions à valeur-mesure

La mesure de Young $\nu_{x,t}$ construite ci-dessus, comme limite (par un procédé non linéaire) de solutions oscillantes, satisfait un certain nombre de relations dont certaines sont algébriques et les autres sont différentielles. Les secondes proviennent du passage à la limite dans (2.1) et (2.2) :

$$\partial_t \langle \nu, u_i \rangle + \partial_x \langle \nu, f_i \rangle = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$
$$\partial_t \langle \nu, E \rangle + \partial_x \langle \nu, F \rangle \leqq 0.$$

Cependant, les solutions faibles u^ε satisfont parfois d'autres (in-)égalités d'entropies

$$\partial_t e(u^\varepsilon) + \partial_x g(u^\varepsilon) \leqq 0,$$

pour tout couple (e, g) d'un cône $\mathscr{C}$ inclus dans l'espace $\mathscr{E}$ des couples entropie-flux. Dans ce cas, le passage à la limite donne

$$\partial_t \langle \nu, e \rangle + \partial_x \langle \nu, g \rangle \leqq 0, \qquad \forall (e, g) \in \mathscr{C}. \tag{2.4}$$

Dans les cas favorables, et particulièrement si $n=2$, $\mathscr{C}$ est suffisamment grand pour contenir un sous-espace vectoriel qui soit *grosso modo* le dual de l'espace des mesures de Young qui satisfont aux relations de compacité par compensation. Ces relations sont de nature algébrique et leur réunion avec (2.4) peut permettre d'écrire un système d'évolution pour lequel le problème de Cauchy soit bien posé. La procédure générale pour $n=2$ est décrite dans Serre ([28], [29]), mais comme elle repose sur une conjecture (*cf.* Serre [34]) quant à la structure des mesures de Young, elle n'a pas encore atteint la rigueur; cependant cette conjecture a été prouvée pour tous les systèmes 2×2 dignes d'intérêt, de sorte que l'étude des oscillations pour ceux-ci est parfaitement correcte (Serre [32], Bonnefille [3], Serre [31]). On trouvera au paragraphe IX un nouvel argument en faveur de cette conjecture, qui vient compléter les calculs de Rascle-Serre [24]; ces calculs sont analysés puis généralisés au paragraphe X.

Les relations algébriques satisfaites par les mesures de Young proviennent de la compacité par compensation (Murat [21], Tartar [39]) et plus particulièrement du lemme divergence-rotationnel. Tout d'abord, la mesure $\partial_t \mathrm{E}(u^\varepsilon)+\partial_x \mathrm{F}(u^\varepsilon)$ est de signe constant. En intégrant par partie et en utilisant la borne $\sup\limits_{x,t,\varepsilon}|u^\varepsilon(x,t)|$, on constate que c'est une mesure bornée, uniformément par rapport à ε, sur tout compact de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Comme elle reste par ailleurs dans un borné de $\mathrm{W}^{-1,\infty}$, on conclut par le lemme de Murat [22] qe $\partial_t \mathrm{E}^\varepsilon+\partial_x \mathrm{F}^\varepsilon$ reste dans un compact de $\mathrm{H}^{-1}(\omega)$ pour tout ouvert ω borné dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. En fait, si $(e, g)\in\mathscr{E}$, on remarque que $|\partial_t e^\varepsilon+\partial_x g^\varepsilon|$ peut être majoré, à une constante multiplicative près, par $-\partial_t \mathrm{E}^\varepsilon-\partial_x \mathrm{F}^\varepsilon$. De sorte que $\partial_t e^\varepsilon+\partial_x g^\varepsilon$ est lui aussi dans un compact de $\mathrm{H}^{-1}(\omega)$ pour chaque $(e, g)\in\mathscr{E}$. Cet argument est dû à R. DiPerna [8]. Il permet donc d'appliquer le lemme div-rot sous la forme bien connue [38]

$$\left.\begin{array}{c}\langle \nu, eg'-e'g\rangle=\langle \nu, e\rangle\langle \nu, g'\rangle-\langle \nu, e'\rangle\langle \nu, g\rangle,\\ \forall (e, g)\in\mathscr{E},\qquad \forall (e', g')\in\mathscr{E}.\end{array}\right\}\tag{2.5}$$

Il semble nécessaire d'insister sur l'importance respective de (2.4) et (2.5) dans la notion de « solution à valeur-mesure ». Cette notion a été introduite par R. DiPerna [9] sans que le rôle de (2.5) soit clairement dégagé. Or (2.4) est trivialement mal posé car son inconnue ν parcourt l'espace (de dimension infinie) des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^n$ tandis que (2.4) est souvent constitué de n équations et d'une inéquation indépendantes; et même lorsque $\mathscr{C}$ est plus gros, il faudrait, pour que (2.4) soit bien posé, que pour toute fonction régulière e sur $\mathbb{R}^n$, il existât une fonction régulière g telle que $(e, g)\in\mathscr{C}$. Or ceci n'arrive que dans le cas scalaire $(n=1)$. Comme DiPerna a étudié en détail ce cas, la confusion a persisté et c'est ainsi que certains parlent de solutions à valeur-mesure plus dissipatives qu'une solution faible ayant la même condition initiale, alors que cette solution à valeur-mesure ne décrit la limite d'aucune suite de solutions ni de solutions approchées. Elle n'a donc aucun sens physique.

Après avoir ainsi affirmé le rôle de (2.5) auprès de (2.4), il est important de noter que, souvent, ces deux familles de relations sont insuffisantes pour caractériser $\nu_{x,t}$, c'est-à-dire écrire un système d'évolution pour lequel le problème de Cauchy soit bien posé. En effet, si $n\geqq 3$, l'espace $\mathscr{E}$ des couples entropie-flux est fréquemment de dimension finie, de sorte que (2.4) et (2.5) ne fournissent qu'un nombre fini de relations entre une infinité d'inconnues scalaires. C'est là le grand échec de la méthode de compacité par compensation à l'heure actuelle. Nous présenterons cependant aux paragraphes IV et V des systèmes ($n \geqq 3$) pour lesquels $\mathscr{E}$ et $\mathscr{C}$ sont suffisamment gros pour pouvoir conclure. Par ailleurs nous dégagerons au paragraphe VI des principes généraux, qui restent à prouver, et qui peuvent permettre de conclure pour des problèmes physiques d'un intérêt particulier : la dynamique des gaz (§ VII) et l'élasticité d'un câble (§ VIII).

3. Exemples élémentaires de solutions oscillantes

Nous allons maintenant construire quelques solutions oscillantes, et par voie de conséquence quelques solutions à valeur-mesure, non triviales.

Pour cela, on suppose que l'un des champs caractéristiques du système (2.1) est linéairement dégénéré, c'est-à-dire que la matrice jacobienne $\mathrm{D}f(u)$ possède un champ de vecteurs propres $r(u)$ associé à une valeur propre $\lambda(u)$, tels que

$$\mathrm{D}\lambda . r \equiv 0. \tag{2.6}$$

La plupart des systèmes d'origine physique, chimique ou biologique possèdent un champ linéairement dégénéré, et parfois plusieurs. On choisit alors une courbe intégrale Γ du champ $r(u)$, paramétrée par $s \mapsto v(s)$, $dv/ds = r(v)$. On construit enfin une solution exacte de (2.1) sous la forme

$$u(x, t) = v(\mathrm{S}(x - \lambda_0(t)),$$

où λ_0 est la valeur de λ sur Γ, qui est constante d'après (2.6). En fait, u satisfait l'égalité $\partial_t e + \partial_x g = 0$ pour tout $(e, g) \in \mathscr{E}$, et ceci quel que soit le choix de la fonction régulière $\mathrm{S} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En effet :

$$\begin{aligned} \partial_t e + \partial_x g &= \mathrm{S}' (\mathrm{D}g - \lambda_0 \mathrm{D}e) . (dv/ds) \\ &= \mathrm{S}' \mathrm{D}e (\mathrm{D}f - \lambda_0 \mathrm{I}) . r = 0. \end{aligned}$$

On profite alors de l'invariance de (2.1) par les homothéties de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ pour construire une suite de solutions

$$u^{\varepsilon}(x, t) = u\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right) = v\left(\mathrm{S}\left(\frac{x - \lambda_0 t}{\varepsilon}\right)\right).$$

Cette suite est bornée pourvu que S le soit et on peut alors lui appliquer l'analyse qui précède. Pour que la convergence de u^{ε} dans L^{∞} faible-étoile ne soit forte dans aucun L^p, il suffit que S soit périodique et non constante. Dans ce cas,

$$\langle \nu, g \rangle = \mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} g \circ v(\mathrm{S}(y))\, dy,$$

où T est la période de S.

Il n'est pas nécessaire que S soit une fonction régulière de y pour que u soit solution de (2.1)-(2.2); on vérifie que toute mesure de probabilité portée par une courbe intégrale d'un champ caractéristique linéairement dégénéré est une solution de (2.5). Elle fournit ainsi une solution à valeur-mesure, constante par rapport à x et t.

L'exemple ci-dessus, bien qu'ayant une portée très générale, ne contient pas toutes les situations possibles. Lorsque (2.1) comporte plusieurs champs linéairement dégénérés, le support de ν peut être plus grand qu'une simple courbe de l'espace des états $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, il n'est jamais possible que toute mesure de probabilité à support dans un compact K donné (de « dimension » > 1) soit solution de (2.5). Il y a des restrictions qui proviennent de (2.5) d'une part, et des obstructions à la construction de solutions de la forme $u\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right)$ d'autre part. On verra par exemple au paragraphe VIII que ces solutions particulières sont parfaitement décrites par un nombre fini de paramètres (7 au total) pour le système de l'élasticité d'un câble. On pourra se reporter à [32] pour la construction de solutions périodiques au système de Born-Infeld

$$\partial_t w + z\,\partial_x w = 0, \qquad \partial_t z + w\,\partial_x z = 0,$$

ainsi qu'à un système 2×2 général ne possédant qu'un seul champ linéairement dégénéré.

4. Les enseignements de la compacité par compensation

Comme il est dit précédemment, les relations de compacité par compensation (2.5) ne sont puissantes que si $\mathscr{E}$ est assez gros. Un cadre assez favorable est celui des systèmes « riches » (*cf.* Serre [27] pour cette notion). Comme le cas scalaire ($n=1$) est bien compris par le travail de Tartar [38], je décrirai la situation pour les systèmes 2×2 ($n=1$), qui sont l'archétype des systèmes riches sans autre restriction que la stricte hyperbolicité

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) \quad \text{pour tout } u. \tag{2.7}$$

Il est alors possible de construire des *invariants de Riemann*, c'est-à-dire deux fonctions $w_i(u)$, $i=1, 2$ dont les gradients $l_i(u)$ soient des vecteurs propres à gauche de $\mathrm{D}f(u)$:

$$\mathrm{D}w_i\,\mathrm{D}f = \lambda_i\,\mathrm{D}w_i, \qquad i=1,2. \tag{2.8}$$

Ces fonctions sont celles qui satisfont des équations de transport lorsque u est une solution régulière de (2.1) :

$$(\partial_t + \lambda_i\,\partial_x)\,w_i = 0, \qquad i=1,2. \tag{2.9}$$

Il est alors commode de travailler dans l'espace des états en utilisant les coordonnées w_1, w_2 plutôt que u_1, u_2. En fait la compacité par compensation ne tient pas compte de la forme conservative particulière revêtue par (2.1), mais seulement des équations de transport (2.9) et de leur couplage via les vitesses/valeurs propres λ_i. Ce faisant on introduit deux fonctions $N_i(w)>0$, $i=1, 2$ par les définitions

$$\left.\begin{aligned}\partial\lambda_1/\partial w_2=(\lambda_2-\lambda_1)\,\partial(\log N_1)/\partial w_2\\ \partial\lambda_2/\partial w_1=(\lambda_1-\lambda_2)\,\partial(\log N_2)/\partial w_1\end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

Ces fonctions auxiliaires interviennent dans la démonstration d'explosion en temps fini de Lax [19] lorsqu'un champ est vraiment non linéaire (*cf.* Lax [18] pour cette notion et pour son opposée : la dégénérescence linéaire) : pour une solution régulière, l'expression $N_1^{-1}\,\partial w_1/\partial x$ satisfait une équation différentielle de Ricatti le long des courbes $(t, x(t))$ définies par $dx/dt=\lambda_1(u)$.

Il n'est pas en général possible de définir des invariants de Riemann (dans le sens décrit ci-dessus) si $n\geqq 3$. Si malgré tout ceux-ci existent, il n'est pas en général possible de définir des fonctions auxiliaires N_i comme dans (2-10) ([3]). Les systèmes pour lesquels ces deux opérations sont possibles forment la classe des systèmes riches et sont décrits dans [27], [36] et [37].

Le premier résultat non trivial obtenu pour les systèmes 2×2 via la compacité par compensation est dû à R. DiPerna [8]. Soit $R=[w_1^-, w_1^+]\times[w_2^-, w_2^+]$ le plus petit rectangle caractéristique contenant le support d'une solution ν de (2.5) (l'hypothèse d'une borne uniforme sur les solutions oscillantes u^ε entraîne que ce support soit borné). On notera $\mu_i^\pm$ la « trace » de ν sur un côté $w_i=w_i^\pm$ du rectangle. Il existe différentes notions de trace mais toutes conviennent à l'énoncé qui suit; cependant une telle trace n'est pas nécessairement unique.

THÉORÈME (*DiPerna*). — *Si* $w_i^-<w_i^+$, *alors*

$$\left\langle \mu_i^\pm, \left(N_i^2\frac{\partial\lambda_i}{\partial w_i}\right)(w_i^\pm, .) \right\rangle=0.$$

Ce résultat a permis à DiPerna de régler le sort d'un champ caractéristique vraiment non linéaire : si $\partial\lambda_i/\partial w_i$ ne s'annule pas, la formule du théorème est impossible puisque $\mu_i^\pm$ est positive, non nulle. Ainsi $w_i^-=w_i^+$ et on est ramené au cas scalaire de la compacité par compensation, déjà traité par Tartar.

([3]) En fait, B. Sévennec a montré récemment que, pour un système conservatif, l'existence des invariants de Riemann est équivalente à la richesse (*Thèse*, E.N.S.-Lyon, 1991).

Signalons que DiPerna utilisait pour sa preuve les entropies construites par Lax [19] et que l'auteur [34] a pu généraliser le résultat ci-dessus à toute « trace » de ν sur des droites caractéristiques intérieures à R, en utilisant des entropies construites via un problème de Goursat. On a donc en fait :

THÉORÈME (*Serre*). — *Si* $w_i^- < w_i^+$, *alors*

$$\left\langle \nu, N_i^2 \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} f(w_i) \right\rangle = 0, \tag{2.11}$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([w_i^-, w_i^+])$.

Bien que (2.11) semble plus puissant que le théorème de DiPerna, il n'y a pas eu jusqu'à présent d'application de cette formule à d'autres systèmes ([4]). Il n'en est pas de même de la formule suivante, conjecturée par l'auteur en 1983 [35] et démontrée dès que l'un au moins des champs caractéristiques est linéairement dégénéré :

CONJECTURE. — Pour toute solution de (2.5), il existe deux mesures positives sur $\mathbb{R}$, ν_1 et ν_2, opérant respectivement sur les fonctions de w_1 et celle de w_2, telles que

$$(\lambda_2 - \lambda_1) N_1 N_2 \nu = \nu_1 \otimes \nu_2. \tag{2.12}$$

Une autre écriture de cette formule est la suivante. Pour tout g, $h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} &\langle \nu, (\lambda_2 - \lambda_1) N_1 N_2 \rangle \langle \nu, (\lambda_2 - \lambda_1) N_1 N_2 g(w_1) h(w_2) \rangle \\ &\qquad = \langle \nu, (\lambda_2 - \lambda_1) N_1 N_2 g(w_1) \rangle \langle \nu, (\lambda_2 - \lambda_1) N_1 N_2 h(w_2) \rangle. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Sous cette forme, (2.13) a une généralisation évidente à tous les systèmes riches, qui indique comment les oscillations selon deux champs caractéristiques distincts doivent interagir. La formule (2.11), qui se généralise aussi, montre au contraire comment la non-linéarité d'un champ produit un phénomène d'auto-interaction pour les oscillations de ce champ : cette formule a déjà un sens dans le cas scalaire et il est surprenant qu'on n'ait rien pu prouver jusqu'à présent pour un système général muni d'un champ caractéristique vraiment non linéaire.

Revenons une dernière fois à (2.12) pour signaler que sa démonstration doit être abordable pour les systèmes décrits par B. Temple [40], puisqu'on connaît bien les entropies [36] et que celles-ci peuvent être localisées dans des bandes caractéristiques de largeur arbitrairement petites.

([4]) Il y a une application récente à la convergence du système de la viscoélasticité $\partial_t u = \partial_x v$, $\partial_t v + \partial_x p(u) = \alpha \partial_x^2 v$ lorsque α tend vers zéro, dans le cas physiquement raisonnable $up''(u) < 0$ pour $u \neq 0$ (D. SERRE, J. SHEARER, en préparation).

5. Un exemple simple de propagation

Considérons le système suivant, qui est un modèle non linéaire de la propagation des ondes planes en électromagnétisme (*cf.* Coleman-Dill [5]) :

$$\left.\begin{aligned}\partial_t(p\,.\,g(a))+\partial_x(pv(r)g(a))=0,\\ \partial_t(p\,.\,h(b))-\partial_x(pv(r)h(b))=0,\end{aligned}\right\}\tag{2.14}$$

pour toute fonction g, $h\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Cette liste d'égalités correspond au sous-espace vectoriel maximal contenu dans $\mathscr{C}$. Il s'y ajoute une inégalité de Poynting qui décrit la dissipation de l'énergie pour les solutions faibles qui ne sont pas régulières. Les inconnues sont p, q, a, b, fonctions de x, t satisfaisant $p\geqq 0$, $q\geqq 0$ presque partout. La fonction $v(r)$, avec $r=(p^2+q^2)^{1/2}$, est donnée par la physique. Le cas $v=\text{Cte}$ correspond aux équations de Maxwell classiques. Sous des hypothèses convenables relativement à v (par exemple $v=r^\gamma$, $\gamma>0$, convient), ce système possède deux champs vraiment non linéaires et deux autres linéairement dégénérés (on a $n=4$), au lieu de quatre champs linéaires si v est constant. On montre dans Serre [31] l'existence globale de solutions faibles pour des données de classe L^∞, sans restriction de taille. En particulier ce système est riche et la formule (2.11) est correcte. Enfin l'existence de domaines bornés positivement invariants arbitrairement grands assure la borne uniforme si les conditions initiales sont bornées uniformément.

Ainsi à une condition initiale $u_0^\varepsilon(x)$ bornée correspond une solution $u^\varepsilon(x, t)$ bornée et, si u_0^ε converge vers u_0 dans $L^\infty(\mathbb{R})$ faible-étoile, on peut extraire une sous-suite telle que u^ε converge au sens de Young. Le sous-système 2×2

$$\left.\begin{aligned}\partial_t p+\partial_x(pv)=0,\\ \partial_t q-\partial_x(qv)=0,\end{aligned}\right\}$$

ayant ses deux champs vraiment non linéaires, p^ε et q^ε convergent fortement. En d'autres termes, Supp ν est inclus dans une surface de niveau de p et q. Il s'ensuit que $v(r^\varepsilon)$ converge fortement vers $v(r(\hat{p}, \hat{q}))$. On obtient donc, pour toutes fonctions continues g et h :

$$\left.\begin{aligned}\partial_t(\hat{p}\langle \nu, g(a)\rangle)+\partial_x(\hat{p}v(\hat{p}, \hat{q})\langle \nu, g(a)\rangle)=0,\\ \partial_t(\hat{q}\langle \nu, h(b)\rangle)-\partial_x(\hat{q}v(\hat{p}, \hat{q})\langle \nu, h(b)\rangle)=0,\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

On introduit alors, suivant une idée de L. Tartar (non publiée) des fonctions $A(x, t; y)$ et $B(x, t; y)$, croissantes en y sur $]0, 1[$, par les définitions valables pour presque tout (x, t) et tous $g, h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$:

$$\left.\begin{aligned}\langle \nu_{x,t}, g(a) \rangle &= \int_0^1 g(A(x, t; y))\, dy\\ \langle \nu_{x,t}, h(b) \rangle &= \int_0^1 h(B(x, t; y))\, dy.\end{aligned}\right\}$$

La propagation des oscillations est alors décrite par le système d'évolution suivant, dont une partie est formelle mais pourrait être rendue rigoureuse au prix d'une perte de clarté :

$$\begin{gathered}\partial_t \hat{p} + \partial_x (\hat{p} v(\hat{p}, \hat{q})) = 0,\\ \partial_t \hat{q} - \partial_x (\hat{q} v(\hat{p}, \hat{q})) = 0,\\ (\partial_t + v\,\partial_x) A = 0,\\ (\partial_t - v\,\partial_x) B = 0.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Les conditions initiales qu'il faut adjoindre à (2.16) sont les suivantes :

$$\begin{gathered}\hat{p}_0 = \lim p_0^\varepsilon, \qquad \hat{q}_0 = \lim q_0^\varepsilon\\ \hat{p}_0 \int_0^1 g(A(x, 0; y))\, dy = \lim p_0^\varepsilon g(a_0^\varepsilon), \qquad \forall g,\\ \hat{q}_0 \int_0^1 h(B(x, 0; y))\, dy = \lim q_0^\varepsilon h(b_0^\varepsilon), \qquad \forall h.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Les limites ci-dessus sont à prendre au sens de la topologie faible-étoile de $L^\infty(\mathbb{R})$.

Remarquons, par une lecture attentive de (2.16)-(2.17), que le système de quatre lois de conservation ci-dessous est bien posé dans L^∞ faible-étoile, c'est-à-dire que la limite d'une suite de solutions est une solution faible, et que sa condition initiale est la limite de la suite de conditions initiales :

$$\begin{gathered}\partial_t p + \partial_x (pv) = 0,\\ \partial_t q + \partial_x (qv) = 0,\\ \partial_t (pa) + \partial_x (pva) = 0,\\ \partial_t (qb) + \partial_x (pvb) = 0.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Cependant le système des équations de Maxwell n'est pas écrit d'ordinaire sous la forme (2.18) car les composantes des champs électrique et magnétique sont $p \cos a \pm q \cos b$ et $p \sin a \pm q \sin b$. Dans ce système de variables naturelles, le système (2.14) n'est plus bien posé dans L^∞ faible-étoile, comme on s'en convainc aisément [31] par construction de solutions oscillantes explicites.

6. Conclusion

La méthode décrite auparavant semble devoir permettre l'étude de la propagation et de l'interaction des oscillations pour les systèmes riches et donc les systèmes 2×2. Les chapitres suivant sont consacrés à trois exemples.

Dans celui de M. Bonnefille ($n=2$), il n'est pas possible d'extraire du système relaxé, analogue à (2.16) mais plus compliqué, un système fini de lois de conservation. Il semble inévitable de traiter une infinité d'équations de transport (§ III).

Le système de l'électrophorèse ($n\geqq 2$) est au contraire naturellement bien posé, bien qu'il laisse passer les oscillations d'un des champs caractéristiques (§ IV).

Les systèmes riches linéairement dégénérés ($n\geqq 2$) ne sont pas bien posés car leurs oscillations sont décrites par un système de $n(n-1)$ lois de conservation. Celui-ci est cependant bien posé (§ V).

III. L'EXEMPLE DE M. BONNEFILLE

1. Le modéle

Nous considérons maintenant un système introduit par B. Keyfitz et H. Kranzer [16] pour l'étude d'ondes élastiques, mais qui sert également de modèle simplifié en théorie de la récupération pétrolière (*cf.* Isaacson-Temple [14]).

Étant donnée une fonction régulière $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, le système est formé des deux équations scalaires couplées (on a donc $n=2$) :

$$\left.\begin{aligned}\partial_t u+\partial_x(u\Phi(u, v))=0\\ \partial_t v+\partial_x(v\Phi(u, v))=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

Les vitesses caractéristiques du système sont

$$\lambda=\Phi\qquad\text{et}\qquad \mu=\Phi+u\,\partial_u\Phi+v\,\partial_v\Phi=\Phi+r\,\Phi_r.$$

Le système est hyperbolique sauf peut-être lorsque Φ_r s'annule. Nous supposerons que ce n'est pas le cas, au moins pour les valeurs de (u, v) comprises dans l'intersection R d'un secteur angulaire $\theta_-\leqq\theta\leqq\theta_+$ et d'une couronne $\alpha\leqq\Phi(u, v)\leqq\beta$. Un tel domaine est caractéristique et dans celui-ci, Φ et θ sont les invariants de Riemann; Φ et θ sont bien indépendants sur R puisque Φ_r ne s'y annule pas. Les solutions régulières de (3.1) satisfont

$$\begin{aligned}(\partial_t+\lambda\,\partial_x)\,\theta=0,\\ (\partial_t+\mu\,\partial_x)\,\Phi=0.\end{aligned}$$

Enfin, les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ et μ sont $(-\Phi_v, \Phi_u)$ et (u, v). Il s'ensuit que le champ caractéristique correspondant à λ est linéairement dégénéré tandis que le second est vraiment non linéaire si et seulement si $\partial_r^2 (r\Phi) \neq 0$, ce que nous supposerons à présent.

2. Existence globale de solutions faibles

On se place dans le cas où R n'atteint pas l'origine.

Lorsque la condition initiale ne prend que deux valeurs, l'une sur $\mathbb{R}^-$ et l'autre sur $\mathbb{R}^+$, on observe que la solution du problème de Riemann est définie de manière unique, ce qui permettra de mettre en œuvre les schémas numériques classiques, et que les invariants de Riemann varient de manière monotone par rapport à x/t. Il s'ensuit que leur variation totale par rapport à x décroît avec le temps dans l'approximation numérique par le schéma de Glimm. De plus, si la condition initiale prend ses valeurs dans le rectangle caractéristique R, alors la solution approchée y prend aussi ses valeurs.

Le schéma de Glimm fournit donc une suite de solutions approchées qui sont définies pour tout temps >0, car on peut choisir un nombre CFL constant qui ne dépend que de R. Par le théorème de Helly, cette suite est relativement compacte dans $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. L'analyse de Glimm [12] montre alors que toute valeurs d'adhérence, lorsque le pas d'espace Δ_x tend vers 0, est bien une solution de (3.1). En fait, comme la solution du problème de Riemann satisfait aussi $\partial_t (rg(\theta)) + \partial_x (r\Phi g(\theta)) = 0$, un argument classique montre que la solution ainsi construite satisfait cette famille d'égalités.

L'ensemble de cette construction, ainsi que l'étude de la propagation des oscillations pour (3.1), est l'œuvre de M. Bonnefille. Résumons le résultat d'existence, pour lequel l'hypothèse $\partial_r^2 (r\Phi) \neq 0$ est inutile :

THÉORÈME. — *Soit* $(u_0(x), v_0(x))$ *une condition initiale à variation bornée, prenant ses valeurs dans* R. *Alors il existe une solution* $(u(x, t), v(x, t))$, *à variation bornée en* x, *mesurable par rapport à* (x, t), *qui prend ses valeurs dans* R *et qui satisfait pour toute fonction* $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$

$$\partial_t (rg(\theta)) + \partial_x (r\Phi g(\theta)) = 0. \tag{3.2}$$

3. La propagation des oscillations

Si $(u_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une suite de conditions initiales comme ci-dessus, le domaine R ne dépendant pas de ε, alors la suite de solutions $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ du problème de Cauchy est bien bornée uniformément et on peut lui appliquer le procédé décrit au paragraphe II.

Supposant que $\partial_r^2(r\varphi)$ ne s'annule pas, le deuxième champ caractéristique est vraiment non linéaire et le théorème de DiPerna entraîne que Supp ν soit inclus dans une courbe de niveau de Φ, d'équation $\Phi(u, v)=\hat{\Phi}$. En particulier, $\Phi(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ converge fortement vers $\hat{\Phi}$ et un passage à la limite dans (3.2) fournit donc

$$\partial_t\langle \nu, rg(\theta)\rangle+\partial_x(\hat{\Phi}\langle \nu, rg(\theta)\rangle)=0, \tag{3.3}$$

pour toute fonction $g\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

L'étape suivante est l'introduction d'une fonction auxiliaire $T(x, t; y)$ qui dépend, outre x et t, d'une variable « rapide » y. Cette procédure fait penser aux développements asymptotiques en théorie de l'homogénéisation. Elle est quasiment systématique dans l'étude des propagations d'oscillations lorsque celles-ci survivent. Il serait fort intéressant de pouvoir utiliser des développements asymptotiques au lieu de la compacité par compensation; on pourrait ainsi dépasser le cadre des systèmes riches, au prix d'une hypothèse de périodicité sur la condition initiale. Il n'est pas exclu que de telles hypothèses sur la structure microscopique des données soient nécessaires dès que $n\geqq 3$, comme le suggère l'étude du système de Broadwell par McLaughlin, Papanicolaou et Tartar [20]. La raison essentielle est alors que la formule (2.12) ne permet pas de décrire l'interaction de trois ondes oscillant selon des champs caractéristiques distincts; cette insuffisance semble d'ailleurs déjà contenue dans (2.5). On peut observer des phénomènes de résonnance que la compacité par compensation ne sait pas détecter.

Pour revenir au système (3.1), la nouvelle fonction est définie par les égalités

$$\langle \nu_{x,t}, rg(\theta)\rangle=\hat{r}(x, t)\int_0^1 g(T(x, t; y))\,dy, \tag{3.4}$$

pour tout $g\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ est presque tout (x, t). Bien sûr, $\hat{r}=\langle \nu, r\rangle=\lim r^\varepsilon$ et T prend ses valeurs dans l'intervalle (θ_-, θ_+). L'unicité de T est assurée en imposant la croissance par rapport à y.

A cause de la convergence forte de Φ^ε vers $\hat{\Phi}$, on a immédiatement pour tout $h\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$

$$\langle \nu, rh(\Phi)g(\theta)\rangle=\hat{r}h(\hat{\Phi})\int_0^1 g(T)\,dy.$$

En passant au produit tensoriel, il vient

$$\langle \nu_{x,t}, rg(\theta, \Phi)\rangle=\hat{r}(x, t)\int_0^1 g(T(x, t; y), \hat{\Phi}(x, t))\,dy, \tag{3.5}$$

pour toute fonction $g\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2)$ et presque tout (x, t). Cette remarque va nous permettre d'exprimer $\hat{r}$ à l'aide de T et $\hat{\Phi}$, ou bien $\hat{\Phi}$ en fonction de $\hat{r}$ et T. Pour cela on introduit l'équation d'état réciproque, en remarquant que par hypothèse, Φ est monotone par rapport à r :

$$\varphi=\Phi(r, \theta) \quad \Leftrightarrow \quad r=\rho(\varphi, \theta). \tag{3.6}$$

Choisissant alors $g=1/\rho$ dans (3.5), il vient

$$1/\hat{r}=\int_0^1 \frac{dy}{\rho(\hat{\Phi}, \mathrm{T}(y))} \tag{3.7}$$

Enfin, en utilisant la monotonie de ρ par rapport à φ, on inverse la relation (3.7) sous la forme $\hat{\Phi}=\mathscr{F}(\hat{r}, \mathrm{T})$. Naturellement, $\mathscr{F}$ est une fonctionnelle et non une fonction, de surcroît extrêmement complexe.

Reprenant maintenant les inégalités (3.3), on obtient le système d'évolution qui décrit la propagation des oscillations. Il est écrit ci-dessous sous une forme non conservative, qui n'est donc pas rigoureuse, comme pour (2.16). Mais c'est la forme la plus lisible. Ce système est

$$\begin{aligned} &\partial_t \hat{r}+\partial_x(\hat{r}\hat{\Phi})=0,\\ &(\partial_t+\hat{\Phi}\,\partial_x)\mathrm{T}=0,\\ &\hat{\Phi}=\mathscr{F}(\hat{r}, \mathrm{T}), \quad \textit{i.e.}\,(3.7). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Enfin les conditions initiales qu'il faut adjoindre à ce système sont

$$\begin{gathered} \hat{r}_0(x)=\lim r_0^\varepsilon \\ \hat{r}_0(x)\int_0^1 g(\mathrm{T}(x, 0; y))\,dy=\lim r_0^\varepsilon g(\theta_0^\varepsilon), \end{gathered} \tag{3.9}$$

pour toute fonction $g\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

Remarquons qu'en général, le domaine R n'est pas convexe et que les valeurs de $\lim(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ ont donc la possibilité de se trouver hors de R, et éventuellement d'atteindre l'origine.

Pour finir, terminons par la question fondamentale suivante : peut-on, comme dans le paragraphe II.5, trouver un système fini de lois de conservation qui soit contenu dans (3.8)? L'utilité d'un tel système est évidente sur le plan numérique : c'est lui qu'on résoudra d'abord par un schéma classique; après quoi on traitera les équations $(\partial_t+\hat{\Phi}\,\partial_x)\mathrm{T}$, connaissant $\hat{\Phi}(x, t)$, en les considérant comme des équations linéaires de transport, ayant toutes le même champ de vitesses.

Malheureusement il semble qu'en général la réponse soit non, en raison de l'extrême complexité de la relation (3.7). Il y a cependant un cas où ce découplage est possible : lorsque Φ ne dépend que de r. Alors ρ ne dépend que de φ et $\hat{\Phi}=\mathscr{F}(\hat{r}, \mathrm{T})=\Phi(\hat{r})$. La première équation de (3.8) est une loi de conservation scalaire, qui fournit $\hat{r}$ et la vitesse $\hat{\Phi}$ des équations de transport.

4. Un invariant de Riemann

Les solutions régulières de (3.8) satisfont une équation de transport sous la forme

$$(\partial_t + \sigma\partial_x)\hat{\Phi} = 0. \tag{3.10}$$

La coordonnée $\hat{\Phi}$ peut donc être vue comme un invariant de Riemann du système relaxé. Sa vitesse de propagation σ est bien sûr liée au comportement de $\mu(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$, mais ce n'est pas en général la limite faible de μ^ε, comme on le voit ci-dessous.

Pour obtenir (3.10), on développe la première équation de (3.8) puis on utilise (3.7) avec la notation $g = 1/\rho$ pour tout exprimer à l'aide de $\hat{\Phi}$ et T :

$$(\partial_t + \hat{\Phi}\,\partial_x)\,\widehat{r^{-1}} = \widehat{r^{-1}}\,\partial_x\hat{\Phi},$$

$$(\partial_t + \hat{\Phi}\,\partial_x)\int_0^1 g(\hat{\Phi}, \mathrm{T})\,dy = \partial_x\hat{\Phi}\,.\int_0^1 g(\hat{\Phi}, \mathrm{T})\,dy,$$

$$\int_0^1 \{g_\varphi(\partial_t + \hat{\Phi}\,\partial_x)\hat{\Phi} + g_\theta(\partial_t + \hat{\Phi}\,\partial_x)\mathrm{T}\}\,dy = \partial_x\hat{\Phi}\,.\int_0^1 g\,dy.$$

On utilise maintenant la deuxième équation de (3.8), et on remarque que $(\partial_t + \hat{\Phi}\,\partial_x)\hat{\Phi}$ ne dépend pas de y pour réécrire

$$\left(\int_0^1 g_\varphi\,dy\right)(\partial_t + \hat{\Phi}\,\partial_x)\hat{\Phi} = \partial_x\hat{\Phi}\,.\int_0^1 g\,dy,$$

ce qui est bien de la forme (3.10), avec

$$\sigma = \hat{\Phi} - \left\{\hat{r}\int_0^1 g_\varphi\,dy\right\}^{-1}.$$

Maintenant, $g_\varphi = -\rho^{-2}\rho_\varphi = -(r^2\Phi_r)^{-1}$, et comme Φ^ε converge fortement, il vient d'après la définition (3.5)

$$\sigma = \langle \nu, \mu p\rangle\langle \nu, p\rangle^{-1} \tag{3.11}$$

où μ est la vitesse associée à l'invariant de Riemann Φ dans le système (4.1), et p est un poids donné par la formule $p = (r\Phi_r)^{-1} = (\mu - \lambda)^{-1}$. En d'autres termes, la formule (3.11) signifie que la vitesse (de groupe) des ondes macroscopiques n'est pas la limite des vitesses des ondes élémentaires, à moins que cette limite ne soit mesurée à l'aide du correcteur p.

Le système relaxé est donc muni de deux vitesses de groupe σ et $\hat{\Phi}$, analogues aux vitesses μ et λ de (4.1). La définition (3.11) est valable pour chacune des deux vitesses de groupe puisqu'à cause de la convergence forte, on a bien

$$\hat{\Phi} = \langle \nu, \lambda p\rangle\langle \nu, p\rangle^{-1}, \qquad \lambda \equiv \Phi.$$

IV. ÉLECTROPHORÈSE

1. Le modèle

L'électrophorèse est un processus de séparation d'ions chimiques dans un fluide. On applique un champ électrique et on profite d'une part des différences entre les charges électriques de chaque espèce et d'autre part des différences de leurs masses molaires. Des modèles mathématiques sont décrits et étudiés dans [25].

Lorsqu'une seule espèce possède une charge négative et qu'on néglige les termes de diffusion des ions dans le substrat, on obtient le système de lois de conservation suivant, qui traduit d'une part la conservation des espèces et d'autre part l'équation de Poisson :

$$\begin{gathered} \partial_t u_i + \partial_x \left(\frac{a_i u_i}{m} \right) = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq n \\ m = \sum_{i=1}^{n} u_i. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Les nombres a_i sont des constantes >0 qui dépendent des charges, des masses molaires des espèces et de quelques autres grandeurs caractéristiques du problème chimique étudié. On peut supposer $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, sans quoi, si a_{i+1} était égal à a_i, on pourrait diminuer (4.1) d'une équation en remplaçant la i-ième et la $(i+1)$-ième par

$$\partial_t (u_i + u_{i+1}) + \partial_x (a_i (u_i + u_{i+1})/m) = 0.$$

Les inconnues u_i sont des fonctions $\geqq 0$ qui représentent le rapport de la concentration de la i-ième espèce à celle de la 0-ième, celle qui est de charge négative.

On note immédiatement que la loi de conservation suivante découle de (4.1)

$$\partial_t w_1 = 0, \qquad w_1(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i/a_i. \tag{4.2}$$

Si $w_1 > 0$ à l'instant initial, w_1 restera >0, et comme chaque u_i est $\geqq 0$ (la i-ième loi de conservation assure l'invariance de ce demi-plan) on aura $m > 0$ de sorte qu'en retour (4.1) a un sens.

2. Champs caractéristiques

D'après (4.2), w_1 est un invariant de Riemann du système. On en trouve $n-1$ autres de la manière suivante. La fonction $e_d(u) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{a_i - d}$

est une entropie de flux $g_d = de_d/m$, pour toute valeur réelle de d distincte des a_i. Le fait que e_d et g_d s'annulent sur la même hypersurface H_d montre que celle-ci est caractéristique. Si u appartient au domaine physique ($u_i \geqq 0$, $\forall i$), il existe $n-1$ valeurs de d, notées $w_2(u), \ldots, w_n(u)$, pour lesquelles $u \in H_d$. Pour chaque $2 \leqq i \leqq n$, on a $w_i(u) \in]a_{i-1}, a_i[$. Les fonctions w_i sont analytiques et comme leurs gradients sont normaux aux hypersurfaces caractéristiques, ce sont des vecteurs propres à gauche de la matrice jacobienne $Df(u)$ du système (4.1). Les w_i sont donc les invariants de Riemann cherchés. La vitesse $\lambda_i(u)$ associée à $w_i(u)$ est caractérisée par l'égalité $Dg_d = \lambda De_d$ sur H_d, c'est-à-dire qu'on a $\lambda_i(u) = w_i(u)/m$, pour $2 \leqq i \leqq n$. Finalement, l'étude des pôles et des zéros de la fonction rationnelle $Q(d) = \sum_1^n \frac{u_i}{a_i - d}$ montre que

$$Q = m \frac{\prod_2^n (w_i - d)}{\prod_1^n (a_i - d)},$$

de sorte que la valeur de $Q(0)$ donne l'égalité

$$m = w_1 \frac{\prod_1^n a_i}{\prod_2^n w_i}. \tag{4.3}$$

On a donc en dérivant par rapport aux coordonnées caractéristiques

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} = m^{-1} - m^{-2} w_i \frac{\partial m}{\partial w_i} = 2m^{-1} > 0, \qquad 2 \leqq i \leqq n.$$

Tous les champs caractéristiques sauf un sont donc vraiment non linéaires.

3. Existence de solutions faibles

Une remarque cruciale en ce qui concerne l'électrophorèse est qu'il s'agit d'un système de la classe de B. Temple, c'est-à-dire que les hypersurfaces caractéristiques H_d sont affines. Elles sont donc invariantes. De plus chaque w_i est monotone à travers toute solution du problème de Riemann, d'où la décroissance au cours du temps de la variation totale par rapport à x de $w_i(u)$ pour chaque solution approchée fournie par le schéma de Glimm [33]. Comme enfin les domaines positivement invariants définis par

$$u_i \geqq 0, \qquad 1 \leqq i \leqq n \qquad \text{et} \qquad w_1(u) \leqq b$$

sont arbitrairement grands, on en déduit un résultat d'existence globale :

THÉORÈME. — *Soit* $u(.,0)\in(\mathrm{BV}(\mathbb{R}))^n$ *une condition initiale satisfaisant* $u_i(x,0)\geqq 0$ *pour tout* x. *Alors le système* (4.1) *possède une solution* $u\in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *telle que* $u(.,t)\in\mathrm{BV}(\mathbb{R})$ *pour tout* $t\geqq 0$. *De plus,* u *satisfait*

$$\partial_t g(w_1(u))=0, \qquad \forall g\in\mathscr{C}^0(\mathscr{R}). \tag{4.4}$$

L'existence d'une solution de classe BV peut aussi être obtenue par la convergence du schéma de Godunov ou de celui de Lax, comme par la convergence de la méthode de viscosité artificielle, toujours grâce à la décroissance de la variation totale de chaque $w_i(u(.,t))$ en temps. Cependant, aucun de ces procédés n'a permis de prouver (4.4). C'est un intérêt majeur du schéma de Glimm que de fournir les inégalités $\partial_t e+\partial_x g\leqq 0$ pour $(e,g)\in\mathscr{C}$ et pour une solution faible, dès que ces inégalités sont vérifiées par les solutions du problème de Riemann. Cette approche est très répandue quand on doit étudier la propagation d'oscillations puisqu'il faut passer à la limite dans un maximum d'(in)égalités pour espérer trouver un système d'évolution bien posé pour ν. Des quatre systèmes présentés dans la partie rigoureuse de cet article, seul le système de Maxwell relevait d'une autre technique : la construction directe, et non via une approximation, des solutions d'équations de transport.

4. Un système bien posé

L'étude des solutions oscillantes ne se heurte à aucun préalable en raison de l'existence de domaines positivement invariants arbitrairement grands — et d'entropies fortement convexes. Ces dernières sont définies par

$$e(u)=\text{affine}+\sum_{i=2}^{n}\int_{a_{i-1}}^{w_i(u)}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j}{a_j-d}\right)d\mu_i(d)+h(w_1(u)),$$

où h est une fonction convexe et μ_i une mesure bornée positive sur $]a_{i-1},a_i[$, pour laquelle $(a_{i-1}-d)^{-1}$ et $(a_i-d)^{-1}$ sont intégrables.

Soit donc une suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de solutions oscillantes et $\nu_{x,t}$ sa mesure de Young. Comme (4.1) appartient à la classe de B. Temple, la formule (2.11) est valide (en effet un tel système est riche). Ainsi, pour presque tout (x,t), $\nu_{x,t}$ est concentré sur un ensemble de niveau de $w_2,\ldots,w_n$, c'est-à-dire sur une droite vectorielle δ, intersection de $n-1$ sous-espaces H_d pour des valeurs

$$a_1<d_2<a_2<d_3<\ldots<d_n<a_n.$$

La droite Δ est évidemment engendrée par $\hat{u}=\langle\nu,u\rangle$ (à moins que $\hat{u}$ ne soit nul, ce qui correspond au cas de la convergence forte, puisque

$u_i^\varepsilon \geqq 0$, donc sans oscillation). Passant à la limite dans (4.1), on obtient

$$\partial_t \hat{u}_i + a_i \partial_x \left\langle \nu, \frac{u_i}{m} \right\rangle = 0.$$

Cependant u_i/m, homogène de degré zéro, est une fonction constante sur Δ, valant $\hat{u}_i/m(\hat{u})$. On a donc $\langle \nu, u_i/m \rangle = \hat{u}_i/m(\hat{u})$. Ainsi, $\hat{u}$ est aussi solution de (4.1). Le système de l'électrophorèse est bien posé dans L^∞ faible-étoile :

THÉORÈME. — *Les valeurs d'adhérence dans* $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, *muni de sa topologie faible-étoile, d'une suite de solutions faibles de* (4.1), *sont aussi des solutions faibles de* (4.1).

En revanche, il n'est pas clair que $\hat{u}$ satisfasse également (4.4) car $\widehat{g \circ w_1} \neq g \circ w_1(\hat{u})$ en général. Comme $\hat{u}$ n'est pas nécessairement à variation bornée et comme il n'y a pas de théorème d'unicité correct pour le problème de Cauchy actuellement, on ne peut pas utiliser le théorème d'existence mentionné au 3 pour démontrer (4.4), bien que cette égalité soit hautement probable.

La description peut être poussée plus loin. Le dernier théorème indique que, macroscopiquement parlant, le système (4.1) se suffit à lui-même. Si on veut analyser plus en détail les oscillations de u^ε, on désire pouvoir calculer $\nu_{x,t}$ pour $t>0$; or écrire que $\hat{u}$ est solution de (4.1) et que Supp $\nu_{x,t}$ est inclus dans $\mathbb{R}\hat{u}(x, t) = \Delta_{x,t}$ est insuffisant pour cela. On introduit donc comme dans les deux exemples précédents une fonction $A(x, t; y)$ à valeurs réelles, croissante en $y \in]0, 1[$, par la formule

$$\langle \nu_{x,t}, g \rangle = \int_0^1 g(A(x, t; y)\hat{u}(x, t))\, dy. \tag{4.5}$$

En choisissant $g = h \circ w_1$ et en passant à la limite dans (4.4), on obtient la famille d'équations de transport découplées, qui ici se réduisent à des équations différentielles ordinaires :

$$\partial_t A(x, t; y) = 0. \tag{4.6}$$

On détermine donc ν en résolvant (4.1) pour $\hat{u}$, puis (4.6) pour A. Les conditions initiales respectives sont

$$\hat{u}_i(., 0) = \lim u_i^\varepsilon(., 0), \tag{4.7}$$

$$\int_0^1 h(A(., 0; y)\hat{w}_1(., 0))\, dy = \lim h(w_1(u^\varepsilon(., 0))): \tag{4.8}$$

Les limites ci-dessus sont prises au sens de la topologie faible-étoile de $L^\infty(\mathbb{R})$. On prendra garde que la condition initiale pour A est loin d'être triviale. On l'obtient par le procédé général suivant. On écrit (4.4) sous forme intégrale avec une fonction test $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$:

$$0=\iint h(w_1(u^\varepsilon))\,\partial_t\theta\,dx\,dt+\int h(w_1(u^\varepsilon(x,0)))\,\theta(x,0)\,dx.$$

On passe alors à la limite quand $\varepsilon \to 0$:

$$0=\iint \langle \nu, h\circ w_1 \rangle\,\partial_t\theta\,dx\,dt+\int \theta(x,0)\lim h\circ w_1(u_0^\varepsilon)\,dx.$$

Tout d'abord on obtient $\partial_t\langle \nu, h\circ w_1\rangle=0$, puis en prenant une trace de $\langle \nu, h\circ w_1\rangle$ en $t=0$:

$$0=\int \theta_0(\operatorname{Tr}\langle \nu, h\circ w_1\rangle-\lim h\circ w_1(u_0^\varepsilon))\,dx,$$

ou

$$\operatorname{Tr}\langle \nu, h\circ w_1\rangle=\lim h\circ w_1(u_0^\varepsilon),$$

qui n'est rien d'autre que (4.8).

Terminons ce paragraphe en remarquant qu'on a prouvé l'existence d'une solution au problème de Cauchy lorsque $u_0\in L^\infty(\mathbb{R})^n$, $u_{oi}\geqq 0$ presque partout. En effet, une telle donnée peut-être approchée dans L^∞ faible étoile par une suite u_0^ε de $BV(\mathbb{R})^n$, uniformément bornée. On peut alors appliquer le dernier théorème à la suite des solutions $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ construites par le schéma de Glimm. On ne sait pas cependant si les solutions de classe L^∞ de (4.1) satisfont aussi les égalités (4.4).

V. UN SYSTÈME RICHE LINÉAIREMENT DÉGÉNÉRÉ

1. Le modèle

Ce paragraphe est consacré à l'étude d'un système riche de $n\,(\geqq 2)$ lois de conservation dont tous les champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. Un tel système s'écrit sous la forme quasi linéaire $(\partial_t+\lambda_i(w)\,\partial_x)\,w_i=0$, $1\leqq i\leqq n$, et il existe des fonctions régulières $N_i(w)$ ne s'annulant pas, telles que

$$(5.1)\qquad \partial\lambda_i/\partial w_j=(\lambda_j-\lambda_i)\,\partial(\log N_i)/\partial w_j,\qquad 1\leqq i, j\leqq n.$$

Les systèmes linéaires sont un exemple, peu intéressant, de cette famille. Nous nous intéressons au cas moins trivial où $\lambda_i(w)$ est le polynôme symétrique élémentaire de degré $r\,(\leqq n-1)$ en les variables $(w_j)_{j\neq i}$; cet ensemble de $n-1$ variables, obtenu en ôtant w_i de w, sera noté $\widehat{w}_i$. De même, σ_r^p désignera le polynôme symétrique homogène élémentaire de degré r à p variables; lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement σ_r. On a donc $\lambda_i(w)=\sigma_r(\hat{w_i})$. Les conditions (5.1) sont bien satisfaites en prenant

$$N_i(w)=\prod_{j\neq i}(w_i-w_j)^{-1}, \qquad 1\leqq i\leqq n. \tag{5.2}$$

Ce système n'a pas, à notre connaissance, de signification physique, excepté lorsque $n=2$ et $r=1$ où on retrouve le modèle de Born-Infeld. En revanche, il est extrêmement intéressant d'un point de vue mathématique pour comprendre comment interagissent des champs caractéristiques distincts lorsqu'ils oscillent simultanément.

Notons que le fait pour un système d'être riche est complètement indépendant du fait d'avoir des champs linéairement dégénérés, et réciproquement. Par exemple, le système suivant, qui décrit le mouvement d'une corde élastique dans le plan avec une relation linéaire entre la tension et l'allongement, n'a que des champs linéairement dégénérés mais ne possède aucun invariant de Riemann :

$$\begin{aligned} \partial_t u_1&=\partial_x v_1, & \partial_t u_2&=\partial_x v_2\\ \partial_t v_1&=\partial_x(S(r)u_1), & \partial_t v_2&=\partial_x(S(r)u_2)\\ S(r)&=\frac{r-1}{r}, & r&=(u_1^2+u_2^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

On étudiera au paragraphe VIII ce système, avec une loi d'état plus générale.

2. Entropies

Les entropies du système riche qui est en jeu ont déjà été étudiées dans [27]. Ce sont toutes les fonctions de la forme

$$e=\mathrm{Cte}+\sum_{i=1}^{n}N_i(w)f_i(w_i), \tag{5.3}$$

où $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions régulières d'une seule variable. Les flux associés sont donnés par la formule

$$f=\mathrm{Cte}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\hat{w_i})N_i(w)f_i(w_i). \tag{5.4}$$

C'est le choix de n entropies indépendantes qui permet d'écrire le système sous forme conservative. On voit donc qu'il vaut mieux se restreindre à un domaine $R=[a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n]$ sur lequel chaque N_i est bien défini. On choisira

$$0<a_1<b_1<a_2<\ldots<b_{n-1}<a_n<b_n.$$

En général, la solution faible du problème de Cauchy pour un système quasi linéaire dépend de la forme conservative que l'on choisit pour définir les conditions de Rankine-Hugoniot. Il n'en est rien ici en raison de la dégénérescence linéaire de tous les champs : les conditions de Rankine-Hugoniot de toutes les équations $\partial_t e + \partial_x f = 0$ sont compatibles entre elles. La solution du problème de Riemann pour w^g, $w^d \in R$ existe donc et est unique. Elle est formée de $n+1$ états constants séparés par n discontinuités de contact situées le long des droites d'équation

$$x = s_j t, \qquad \text{avec} \quad s_j = \sigma_r(w_1^g, \ldots, w_{j-1}^g, w_{j+1}^d, \ldots, w_n^d).$$

De part et d'autre de la j-ième discontinuité, $\hat{w}_j$ est inchangé, tandis que w_j passe de la valeur w_j^g à la valeur w_j^d.

On constate, comme au paragraphe IV, que w_i est une fonction monotone de la variable x/t au sein du problème de Riemann. La même procédure (schéma de Glimm) fournit donc une solution globale de classe BV pour toute condition initiale de classe BV à valeurs dans R. De plus la solution reste dans R. Enfin, elle satisfait toutes les relations d'entropies $\partial_t e + \partial_x f = 0$, c'est-à-dire que $\mathscr{C} = \mathscr{E}$:

THÉORÈME. — *Pour toute condition initiale* $w^0 \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}; \mathrm{R})$, *il existe une solution de classe* BV *de la collection d'équations :*

$$\partial_t(\mathrm{N}_i(w) f(w_i)) + \partial_x(\lambda_i(w)\mathrm{N}_i(w) f(w_i)) = 0, \tag{5.5}$$

pour tout $1 \leqq i \leqq n$ *et toute* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

On trouvera également dans [36] un théorème d'existence de solutions régulières pour une condition initiale régulière, de classe $\mathscr{C}^3$ ([5]).

3. Relations entre entropies

Apparemment, la formule (5.3) décompose $\mathscr{E}$ en sous-espaces supplémentaires : celui des fonctions constantes, plus n espaces isomorphes à $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. On doit prendre garde au fait que $\mathscr{E}$ n'est pas somme directe de ces sous-espaces : il existe des relations non triviales entre des éléments de différents sous-espaces. Ce sont même ces relations qui nous permettrons de décrire complètement la propagation des oscillations.

Nous allons faire la liste des relations dont nous aurons besoin au § 4.

Soit p un nombre entier, $0 \leqq p \leqq n-1$. Calculons une forme simplifiée de l'entropie $e = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i(w) w_i^p$. C'est une fraction rationnelle de w, qu'on

([5]) Le problème de Cauchy peut en fait être résolu par l'inversion de formules algébriques, ce qui fournit une autre preuve d'existence :D. SERRE, Préprint 1991, E.N.S.-Lyon.

peut mettre sous la forme

$$e = Q(w) / \prod_{i,j}^{i<j} (w_i - w_j),$$

Q étant un polynôme homogène de degré $p+(n-1)(n-2)/2$, ou étant nul.

Considérons tout d'abord e comme une fraction rationnelle de la variable w_1, en gelant $w_2, \ldots, w_n$. Puisque $w_2 < w_3 < \ldots < w_n$, e n'a que des pôles simples, situés en $w_2, \ldots, w_n$. Pour $k \geqq 2$, calculons le résidu de $e(w_1)$ en w_k. Seuls les termes d'indices 1 et k de la somme y contribuent :

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(e(w_1);\, w_k) &= \left[\frac{w_1^p}{\prod_{j \neq 1,k} (w_1 - w_j)} - \frac{w_k^p}{\prod_{j \neq 1,k} (w_k - w_j)} \right]_{w_1 = w_k} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, e est un polynôme par rapport à w_1, et par symétrie, c'est un polynôme par rapport à w. Ce polynôme est homogène de degré $p-(n-1)$, ou bien nul. Pour $0 \leqq p \leqq n-2$, on a donc $e \equiv 0$. Pour $p = n-1$, $e(w)$ est une constante qu'on calcule en faisant tendre w_1 vers l'infini; chaque terme d'indice $i \geqq 2$ de la somme s'annule à l'infini, tandis que le premier vaut 1, ainsi $e \equiv 1$.

Proposition. — *Pour* $n \in \mathbb{N}$, $p \leqq n-1$, *on a*

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(w)\, w_i^p = \delta_p^{n-1}. \tag{5.6}$$

Le calcul ci-dessus montre que le flux

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sigma_r(\hat{w}_i)\, N_i(w)\, w_i^p$$

est associé à une entropie constante. C'est donc à nouveau une constante pour $0 \leqq p \leqq n-1$. C'est d'autre part une fraction rationnelle homogène de degré $r+p+1-n$, à moins que f ne soit nulle. On obtient donc $f \equiv 0$ pour $p \neq n-r-1$.

On obtient la valeur de f, qu'on va noter f_r^n, lorsque $p = n-r-1$ en faisant tendre w_n vers l'infini.

$$f_r^n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_r(\hat{w}_i)\, N_i(w)\, w_i^{n-r-1}.$$

Si $r \geqq 1$, le n-ième terme tend vers zéro à l'infini, de sorte que

$$f_r^n = \lim_{w_n \to \infty} f_r^n(w) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{r-1}(\hat{w}_{in})\, N_i(\hat{w}_n)\, w_i^{n-r-1},$$

c'est-à-dire $f_r^n = -f_{r-1}^{n-1}$. Il vient par récurrence $f_r^n = (-1)^r f_0^{n-r}$. Or f_0^{n-r} a déjà été calculé comme entropie :

$$f_0^{n-r} = \sum_{i=1}^{n-r} \mathrm{N}_i(z) z_i^{n-r-1} \equiv 1, \qquad z = (w_1, \ldots, w_{n-r}).$$

PROPOSITION. — *Pour* $p \in \mathbb{R}$, $p \leqq n-1$, *on a*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{N}_i(w) \sigma_r(\hat{w_i}) w_i^p = (-1)^r \delta_p^{n-r-1}. \tag{5.7}$$

Cette proposition nous permet d'écrire (5.5) sous forme d'un système fini de n^2 lois de conservation

$$\partial_t u_{ip} + \partial_x f_{ip} = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq n, \quad 0 \leqq p \leqq n-1, \tag{5.8}$$

où $u_{ip} = \mathrm{N}_i(w) w_i^p$ et $f_{ip} = \lambda_i(w) u_{ip}$. Il faut montrer que f_{ip} est fonction des u_{jq}, ou encore que $\lambda_i(w)$ est fonction des u_{jq}. Pour cela, on remarque que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(w) u_{ip} = (-1)^r \delta_p^{n-r-1}, \qquad 0 \leqq p \leqq n-1, \tag{5.9}$$

est un système linéaire qui permet d'écrire λ_i sous forme de fraction rationnelle des u_{jq}, pourvu que ce système soit de Cramer. Or la matrice u est le produit de la matrice inversible $\mathrm{diag}(\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_n)$ par la matrice inversible de Van der Monde $(w_i^p)_{i,p}$.

Bien entendu, le système (5.8) est redondant puisqu'il comporte n^2 équations alors qu'il n'y a en réalité que n inconnues $w_1, \ldots, w_n$; mais il a une forme symétrique agréable. Enfin, et surtout, cette redondance va disparaître lorsqu'on considèrera des solutions oscillantes, exceptées les relations linéaires dues à (5.6). Ainsi les oscillations vont être décrites par un système de $n(n-1)$ équations [(5.6) fournit n relations entre les n^2 équations] indépendantes au lieu de n. Ceci corrobore les observations de l'auteur ($n=2$, [32]) et de Bonnefille ($n=3$, [3]). Finalement, nous verrons que le système (5.8) est bien posé dans L^∞ faible-étoile, ce qui traduit un principe métamathématique que le système relaxé d'un problème mal posé doit être bien posé.

4. Propagation des oscillations

Grâce au théorème d'existence globale et à l'invariance du domaine R, il n'y a pas d'objection à l'étude des solutions oscillantes $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de (5.5). La mesure de Young associée doit satisfaire les équations limites

$$\partial_t \langle \nu, \mathrm{N}_i f(w_i) \rangle + \partial_x \langle \nu, \lambda_i \mathrm{N}_i f(w_i) \rangle = 0, \tag{5.10}$$

pour tout i et toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

Nous commençons par montrer que (5.8) est bien posé, c'est-à-dire que $\hat{u} = \lim u^\varepsilon$ est solution de (5.8). Pour cela, on n'utilisera pas le fait que les u_{ip} ne forment que n variables indépendantes. Au contraire, on se placera dans le cas le plus général où les u_{ip} forment $n(n-1)$ variables indépendantes, n'étant liés que par les relations $\sum_{i=1}^{n} u_{ip} = \delta_p^{n-1}$, $0 \leqq p \leqq n-1$. Cependant, on se placera dans un domaine invariant sur lequel $\inf\{|u_{io}^\varepsilon(x, t)|, i, \varepsilon, x, t\} > 0$, par analogie avec le système original (5.5) pour lequel u_{io} valait $N_i(w)$.

Il s'agit donc de montrer que

$$\lim f_{ip}(u^\varepsilon) = f_{ip}(\hat{u}).$$

Pour cela, nous écrivons d'abord une relation de compacité par compensation de la forme (2.5), qui utilise le fait que $f_{ip} u_{iq} - f_{iq} u_{ip} \equiv 0$:

$$\hat{u}_{iq} \lim f_{ip}(u^\varepsilon) = \hat{u}_{ip} \lim f_{iq}(u^\varepsilon).$$

Comme $\hat{u}_{io} = \lim u_{io}^\varepsilon \neq 0$, on en déduit l'existence de fonctions $c_i(x, t)$ telles que

$$\lim f_{ip}(u^\varepsilon) = c_i \hat{u}_{ip}, \qquad 1 \leqq i \leqq n, \quad 0 \leqq p \leqq n-1.$$

Passons à la limite dans les relations $\sum_{i=1}^{n} f_{ip}(u^\varepsilon) = (-1)^r \delta_p^{n-r-1}$ pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \hat{u}_{ip} = (-1)^r \delta_p^{n-r-1}, \qquad 0 \leqq p \leqq n-1. \tag{5.11}$$

Par ailleurs, le passage à la limite dans les équations (5.8) donne

$$\partial_t \hat{u}_{ip} + \partial_x (c_i \hat{u}_{ip}) = 0. \tag{5.12}$$

La comparaison de (5.11) et (5.12) avec (5.8) et (5.9) montre que $c_i \hat{u}_{ip} = f_{ip}(\hat{u})$ comme annoncé.

THÉORÈME. — *Le système de n^2 équations à n relations*

$$\begin{aligned} &\partial_t u_{ip} + \partial_x (c_i(u) u_{ip}) = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq n, \quad 0 \leqq p \leqq n-1 \\ &\sum_{i=1}^{n} u_{ip} = \delta_p^{n-1}, \qquad 0 \leqq p \leqq n-1. \end{aligned} \tag{5.12}$$

où $(c_i(u))_i$ est la solution du système linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_{ip} = (-1)^r \delta_p^{n-r-1}, \qquad 0 \leqq p \leqq n-1, \tag{5.11}$$

est bien posé dans $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; D)$ *faible-étoile, pour tout domaine invariant* D *sur lequel* (5.11) *est un système de Cramer.*

En d'autres termes, si $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *est une suite de solutions à valeurs dans* D, *toute valeur d'adhérence* $\hat{u}$ *pour la topologie faible-étoile de* L^∞ *est encore une solution de* (5.11) *et* (5.12).

En particulier, si $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une suite de solutions bornées de (5.5), on peut appliquer le théorème ci-dessus à $u_{ip}^\varepsilon = N_i(w^\varepsilon)(w_i^\varepsilon)^p$.

THÉORÈME. — *Soit* $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une suite de solutions* (BV *ou de classe* $\mathscr{C}^3$) *de* (5.5), *qui prend ses valeurs dans* R. *Soit* ν *une mesure de Young associée à cette suite et* $\hat{u}_{ip} = \langle \nu, N_i(w)\, w_i^p \rangle$. *Alors* $\hat{u}(x, t)$ *est une solution de* (5.11)-(5.12). *Sa condition initiale est donnée par*

$$\hat{u}_{ip} = \lim N_i(w^\varepsilon(.,0))(w_i^\varepsilon(.,0))^p,$$

où la limite est au sens de la topologie faible-étoile de $L^\infty(\mathbb{R})$, *pour une sous-suite convenable.*

Bien entendu, (5.11)-(5.12) peut s'écrire sous la forme de $n(n-1)$ équations de transport indépendantes

$$(\partial_t + c_i \partial_x)(u_{ip}/u_{io}) = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq n, \quad 1 \leqq p \leqq n-1, \tag{5.13}$$

qui montrent que ce système n'a que n vitesses distinctes c_i, chacune étant de multiplicité $n-1$. Il semble que ce soit un phénomène général qu'un système strictement hyperbolique de n équations conduise à un système relaxé n'ayant que n vitesses de groupe distinctes, éventuellement de multiplicités >1. Le paragraphe VIII présente un phénomène analogue.

Notons que Bonnefille avait remarqué (pour $n=3$, $r=1$ ou 2) l'existence d'un système fermé de six équations analogue à (5.13), sans toutefois produire le système conservatif bien posé (5.11)-(5.12).

On termine l'étude des oscillations en fournissant un système d'évolution qui permet de calculer d'autres limites $\hat{f} = \langle \nu, f \rangle$. Il est naturel de définir des fonctions $A_i(x, t; y)$, monotones croissantes en y, par les égalités

$$\langle \nu, N_i(w) f(w_i) \rangle = \langle \nu, N_i \rangle \int_0^1 f(A_i(y))\, dy,$$

où $\nu = \nu_{x,t}$, et f parcourt $\mathscr{C}^\circ(\mathbb{R})$. Bien sûr, on retient que $\langle \nu, N_i \rangle = \hat{u}_{io}$.

La compacité par compensation implique

$$\langle \nu, N_i \rangle \langle \nu, \lambda_i N_i f(w_i) \rangle - \langle \nu, \lambda_i N_i \rangle \langle \nu, N_i f(w_i) \rangle = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\langle \nu, \lambda_i N_i f(w_i) \rangle &= c_i(\hat{u}) \langle \nu, N_i f(w_i) \rangle \\ &= c_i(\hat{u})\, u_{io} \int_0^1 f(A_i)\, dy.\end{aligned}$$

Passant à la limite dans (5.5), il vient

$$\partial_t\left(\hat{u}_{io} \int_0^1 f(A_i)\, dy\right) + \partial_x\left(c_i \hat{u}_{io} \int_0^1 f(A_i)\, dy\right) = 0,$$

pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Ceci est formellement équivalent aux équations de transport découplées, linéaires à coefficients variables :

$$(\partial_t + c_i(\hat{u})\,\partial_x)\,\mathrm{A}_i(w,\,t;\,y) = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq n. \tag{5.15}$$

Ce système est complété par les conditions initiales

$$\hat{u}_{io}(.\,,0)\int_0^1 f(\mathrm{A}_i(.\,,0;\,y))\,dy = \lim\,(\mathrm{N}_i(w^{0\,\varepsilon})\,f(w_i^{0\,\varepsilon})), \tag{5.16}$$

pour $1 \leqq i \leqq n$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. On peut ainsi calculer $\mathrm{A}_i(x,\,t;\,y)$ pour $t>0$ et en déduire les valeurs de $\langle \nu,\, \mathrm{N}_i f(w_i) \rangle$ et de $\langle \nu,\, \lambda_i \mathrm{N}_i f(w_i) \rangle$ grâce à (5.14). En fait, on peut aussi exprimer la valeur de

$$\langle \nu,\, (\lambda_i - \lambda_j)\,\mathrm{N}_i \mathrm{N}_j \mathrm{F}(w_i,\, w_j) \rangle$$

en appliquant à nouveau (2.5) :

$$\begin{aligned}\langle \nu,\, &(\lambda_i - \lambda_j)\,\mathrm{N}_i \mathrm{N}_j f(w_i)\,g(w_j) \rangle \\ &= \langle \nu,\, \lambda_i \mathrm{N}_i f \rangle \langle \nu,\, \mathrm{N}_j g \rangle - \langle \nu,\, \mathrm{N}_i f \rangle \langle \nu,\, \lambda_j \mathrm{N}_j g \rangle \\ &= (c_i - c_j)\,\langle \nu,\, \mathrm{N}_i f \rangle \langle \nu,\, \mathrm{N}_j g \rangle \\ &= (c_i - c_j)\,\hat{u}_{io}\,\hat{u}_{j0}\int_0^1 f(\mathrm{A}_i)\,dy \,.\int_0^1 g(\mathrm{A}_j)\,dy.\end{aligned}$$

Par densité, il vient

$$\begin{aligned}\langle \nu,\, &(\lambda_i - \lambda_j)\,\mathrm{N}_i \mathrm{N}_j \mathrm{F}(w_i,\, w_j) \rangle \\ &= (c_i - c_j)\,\hat{u}_{io}\,\hat{u}_{jo}\int_0^1\int_0^1 \mathrm{F}(\mathrm{A}_i(y),\, \mathrm{A}_j(z))\,dy\,dz.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Remarquons que (5.17) implique la conjecture (2.12) pour ce système particulier.

5. Le système original est-il bien posé ?

La réponse à cette question dépend d'abord de la forme conservative qu'il revêt. Pour $n=2$, il est bien posé puisqu'il suffit de l'écrire sous la forme (5.11)-(5.12) [remarquer que $n(n-1)=2=n$]. On supposera donc $n \geqq 3$ et $r \geqq 1$.

Si le système

$$(\partial_t + \sigma_r(\hat{w}_i)\,\partial_x)\,w_i = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq n \tag{5.18}$$

est bien posé, l'analyse qui précède montre qu'on doit le retrouver comme une partie fermée de l'ensemble (5.11)-(5.12)-(5.15). C'est-à-dire qu'il doit exister des fonctions $\mathrm{F}_i(\hat{u},\,\mathrm{A})$ telles que $z_i = \mathrm{F}_i(\hat{u},\,\mathrm{A})$ soit solution de (5.18) lorsque $\hat{u}$ et A satisfont (5.11)-(5.12)-(5.15). Le système relaxé n'ayant que n vitesses caractéristiques distinctes, ce seront les $\lambda_i(z) = \sigma_r(\hat{z}_i)$. Comme $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$ et $c_1 > \ldots > c_n$, on en déduit la condition nécessaire

$c_i(\hat{u})=\sigma_r(\hat{z}_i)$, $1\leqq i\leqq n$. On a ainsi un système algébrique qui permet de reconstituer z, qui ne dépendra donc que de $\hat{u}: z_i=F_i(\hat{u})$. Les fonctions F_i sont entièrement définies par les relations sur les vitesses et il est aisé de vérifier qu'elles ne satisfont pas

$$\partial_t F_i(\hat{u})+c_i(\hat{u})\,\partial_x F_i(\hat{u})=0.$$

En fait, les seules fonctions à satisfaire une telle équation de transport sont les fonctions homogènes de degré 0 en $(u_{ip})_{0\leqq p\leqq n-1}$; F_i n'est pas de cette forme. Prenons par exemple $r=1$. Alors

$$F_i=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} c_j(\hat{u})-c_i(\hat{u})$$

et

$$c_i(\hat{u})=(-1)^{i+n}\frac{\|u_{jp}\|_{j\neq i,\ p\neq n-r-1}}{\|u_{jp}\|}$$

est un quotient de deux déterminants. Ainsi $F_i=P_i(\hat{u})/\|u_{jp}\|$ où P_i est un polynôme. Il est aisé de vérifier si $n=3$ que F_i ne dépend pas seulement de $(u_{ip})_{0\leqq p\leqq 2}$ mais aussi des autres valeurs u_{jp} pour $j\neq i$. Plus généralement, le polynôme $\|u_{jp}\|+Q(\hat{u})$ est irréductible pour tout Q appartenant à l'idéal engendré par les relations $\sum_{i=1}^{n} u_{ip}-\delta_p^{n-1}$; il suffit donc de vérifier que P_i n'est pas nul pour que F_i ne convienne pas.

6. Peut-on totalement décrire les oscillations?

On a décrit en 4 une façon de calculer les limites d'un certain nombre de quantités liées à la suite $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$:

$$N_i f(w_i),\qquad \lambda_i N_i f(w_i),\qquad (\lambda_i-\lambda_j)\,N_i N_j F(w_i, w_j). \qquad (5.19)$$

Est-il possible plus généralement de calculer les limites de toutes les expressions $f(w^\varepsilon)$? La réponse est non si $n\geqq 3$, car on a utilisé pleinement les informations (2.4) et (2.5) dont nous disposions, et (5.19) ne recouvre pas l'ensemble des fonctions de w. En revanche, si $n=2$, il suffit pour calculer $\lim g(w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon)$ de poser $F=g/[(\lambda_1-\lambda_2)N_1 N_2]$ dans (5.19).

Cette réponse négative est très gênante si on veut étudier, à l'instar de Broadwell, les oscillations dans un système avec termes sources

$$(\partial_t+\lambda_i\partial_x)\,w_i=h_i(w).$$

L'étude avec les idées du paragraphe II ne sera possible que si les fonctions $N_i h_i f(w_i)$ appartiennent à la liste (5.19) pour tout $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Cette étude est faite pour $n=2$ dans [32] et le résultat est particulièrement compliqué.

VI. PRINCIPES DU PASSAGE A LA LIMITE

Le but de ce chapitre est de dégager des principes généraux dans l'étude des solutions oscillantes. Ces principes seront motivés par les calculs rigoureux connus jusqu'à présent, mais ne seront pas prouvés. Leurs preuves nécessiteraient des idées nouvelles.

1. Support des mesures de Young

Le théorème de DiPerna et sa généralisation par l'auteur (*cf.* II.4) signifient que pour un système riche, un invariant de Riemann $w_i(u^\varepsilon)$ associé à un champ caractéristique vraiment non linéaire n'est pas oscillant : sa convergence est forte lorsque $\varepsilon \to 0$, dans tout L^p pour $p \geqq 1$ fini. En d'autres termes, le support de $\nu_{x,\,t}$ est inclus pour presque tout (x, t) dans un ensemble de niveau de $w_i(.)$. Une utilisation astucieuse de son théorème a permit à DiPerna d'établir la même propriété pour des champs où la non-linéarité est mise en défaut en quelque endroit; l'exemple essentiel était le p-système

$$\partial_t u = \partial_x u, \qquad \partial_t v = \partial_x (p(u)),$$

où la fonction d'état satisfait

$$\inf p' > 0, \qquad \inf (p''(u)/u) > 0.$$

Cependant, pour d'autres systèmes, cette généralisation n'est pas possible (*voir* [34]). Nous nous restreindrons donc au cas où les champs sont, soit vraiment non linéaires, soit linéairement dégénérés. En ce qui concerne les seconds, on a vu au paragraphe II comment construire des solutions oscillantes qui se concentrent sur des courbes intégrales d'un champ caractéristique. On peut également construire des solutions oscillantes qui se concentrent sur des variétés de dimension $\geqq 2$, dont l'espace tangent est engendré par des vecteurs propres $r_i(u)$ de $Df(u)$ associés à des champs linéairement dégénérés; on trouvera des exemples aux paragraphes II.5, V et VIII ci-dessous. La dimension d'une variété minimale contenant le support de ν ne semble donc limitée que par la dimension $D(u)$ de l'algèbre de Lie engendrée par les champs $r_i(u)$ linéairement dégénérés. Un cas favorable a lieu si $D = 1$, c'est-à-dire si un seul champ est linéairement dégénéré. Dans ce cas, on peut espérer que le support de $\nu_{x,\,t}$ soit inclus dans une courbe, qui dépend de (x, t) via $n-1$ paramètres. En général, on postulera que ce support est inclus dans une variété dont l'espace tangent est l'algèbre de Lie ci-dessus; cette variété dépendra de (x, t) via $n-D$ paramètres, $D(u)$ étant fréquemment indépendant de la position u. Le cas le plus défavorable a lieu pour $D = n$, puisqu'on ne peut plus exclure aucune oscillation. Heureusement, on ne connaît pas de tel cas, excepté celui du paragraphe V auquel on a donné une solution satisfaisante.

Une autre façon d'énoncer le principe ci-dessus, qui me semble plus confortable, est la suivante :

On suppose que les champs caractéristiques du système (2.1) *sont tous soit vraiment non linéaires, soit linéairement dégénérés :*

$$D\lambda_i . r_i \equiv 0 \qquad si \quad i \in \mathrm{I},$$
$$D\lambda_j . r_j \quad \textit{ne s'annule pas si } j \notin \mathrm{I}.$$

Soit $z(u)$ *une fonction régulière sur l'espace des états, qui est constante à travers toute discontinuité de contact, c'est-à-dire*

$$Dz . r_i = 0 \qquad si \quad i \in \mathrm{I}.$$

Alors $z(u^\varepsilon)$ *n'oscille pas quand* $\varepsilon \to 0$; *en d'autres termes, il existe une fonction bornée mesurable* $Z(x, t)$ *telle que*

$$\mathrm{Supp}\, \nu_{x,\, t} \subset \{ u;\ z(u) = Z(x, t) \},$$

pour presque tout x, t.

On trouve bien sûr $n-1$ telles fonctions indépendantes lorsque $|\mathrm{I}| = 1$, ce qui mène à des calculs performants. Par exemple en dynamique des gaz ($n=3$), la vitesse et la pression sont de telles fonctions. En revanche, le système des câbles élastiques dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ ($n=4$ ou 6) est moins agréable; en effet $|\mathrm{I}| = n-2$ et on ne trouve qu'une seule fonction (à composition près) convenable. Heureusement, nous verrons que le principe ci-dessus permet l'obtention d'un système d'évolution décrivant la propagation des oscillations.

Lorsque (2.1) est diagonalisable, on trouve immédiatement $n - |\mathrm{I}|$ fonctions indépendantes convenables, ce sont les invariants de Riemann w_j, $j \notin \mathrm{I}$. Cependant, on doit prendre garde au fait qu'en général, $z(u)$ ne satisfait pas d'équation de transport même si u est une solution régulière.

2. Concentration des chocs

On a expliqué au paragraphe II que la description de la propagation des oscillations provenait de deux types d'informations :

– la connaissance d'une structure maximale de $\nu_{x,\, t}$ en presque tout point;

– les inégalités $\partial_t \langle \nu, e \rangle + \partial_x \langle \nu, g \rangle \leqq 0$, $\forall (e, g) \in \mathscr{C}$.

L'alinéa précédent était consacré à l'extension du premier point lorsque la compacité par compensation est impuissante, faute d'un assez grand nombre d'entropies. La structure obtenue dépend d'un nombre de paramètres N, éventuellement infini, et la deuxième partie de la procédure sera insuffisante si $\mathscr{C}$ engendre un espace vectoriel de dimension $N_1 < N + 2$

(et non N, car $\mathscr{C}$ contient les constantes qui n'apportent aucune information). Or nous verrons aux paragraphes VII et VIII sur des exemples importants qu'en dehors des systèmes riches, on peut avoir $N_1 < N+2$. Pour la dynamique des gaz, $N_1 = +\infty$ mais il faut comparer un cône de fonctions croissantes convexes à l'espace des fonctions tout entier, tandis que pour le cable élastique, $N_1 = n+3$ et $N = +\infty$.

Reprenons donc l'étude des mesures $\mu^\varepsilon = \partial_t e(u^\varepsilon) + \partial_x g(u^\varepsilon)$ lorsque $(e, g) \in \mathscr{E}$. En supposant que μ^ε est lipschitzienne par morceaux, $\mu^\varepsilon = 0$ en dehors des chocs (rappelons que $\mu^\varepsilon = 0$ à travers les discontinuités de contact), tandis que la densité de masse de μ^ε le long d'une courbe de choc est de l'ordre du cube de l'amplitude $[u]$ du choc. Si e est fortement convexe, cette densité est strictement négative. Cette dissipation d'entropie contribue à la diminution de l'amplitude $[u]$ et de l'oscillation totale de u en x, par rapport à t. Cette diminution est sans importance lorsque le nombre de chocs dans une zone bornée Ω est petit. Elle peut le devenir si le nombre de chocs dans Ω augmente et tend vers l'infini lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans ce cas, l'amplitude de ces chocs doit tendre vers zéro avec ε, sans quoi le taux de diminution de l'entropie deviendrait infini, contredisant le fait que l'entropie totale est bornée à l'instant initial dans la zone d'influence de Ω. Il y a alors deux façons de conclure. Soit on postule que, lorsque $\varepsilon \to 0$, il apparaît un terme de dissipation d'entropie

$$\partial_t \langle \nu, e \rangle + \partial_x \langle \nu, g \rangle = \Delta_e(x, t), \qquad \forall (e, g) \in \mathscr{E},$$

où $\Delta_e \leqq 0$ si e est convexe; et $Z = \mathrm{Cte}$ implique $\Delta_e = 0$, pour tenir compte du fait que $\Delta_e = 0$ pour les solutions oscillantes qu'on sait construire en n'utilisant que des discontinuités de contact. Il y a alors un challenge en ce qui concerne la modélisation, et on a besoin d'évidences expérimentales pour déterminer Δ_e.

Soit on postule que

$$\partial_t \langle \nu, e \rangle + \partial_x \langle \nu, g \rangle = 0, \qquad \forall (e, g) \in \mathscr{E},$$

en dehors d'un ensemble très petit, disons un fermé dont la dimension de Hausdorff est $\leqq 1$, au voisinage duquel les chocs essentiels de u^ε se concentrent lorsque $\varepsilon \to 0$. Cette présentation n'est pas incompatible avec la précédente puisque lorsque u^ε ne dépend pas de ε, Δ_e est singulière et son support est la réunion des chocs. C'est cette deuxième approche qui sera adoptée sur les exemples qui suivent, à cause de sa simplicité et de son efficacité sur les exemples. L'inconvénient majeur de ce postulat (outre l'absence d'une justification rigoureuse) et de ne pas décrire ce qui se passe à travers les chocs essentiels de u^ε; il manque des conditions de transmission concernant $\nu_{x,t}$. Là encore, des évidences expérimentales ou numériques seraient les bienvenues. La seule simulation dans ce sens est, à notre connaissance, celle de Bonnefille [2] sur la dynamique des gaz. Elle concerne l'interaction d'un état constant avec une oscillation élémentaire dans laquelle la vitesse et la pression sont constantes à l'instant initial. Le schéma utilisé est celui de Glimm, pour éviter que la dissipation numérique ne tue quasi instantanément les oscillations. Malheureusement, la faible puissance de calcul (un PC-XT) et la difficulté de mise en œuvre d'une condition aux limites transparente pour une solution oscillante permettent seulement de conclure à la persistance des oscillations au-delà de la traversée d'un choc.

3. Divers commentaires

On pourra toujours utiliser les relations (2.5) de compacité par compensation dans le but de préciser la structure maximale de la mesure de Young. Ceci sera utile au paragraphe VIII notamment.

Par contre, une analyse reste à faire en ce qui concerne les systèmes de lois de conservation à plus d'une dimension d'espace. D'une part la compacité par compensation tombe presque totalement en défaut. D'autre part il n'y a pas en général de fonction $z(u)$ non constante, qui soit constante à travers les discontinuités de contact. Enfin des phénomènes nouveaux apparaissent comme l'instabilité du glissement de deux masses de fluides l'une par rapport à l'autre. Inutile de dire que beaucoup d'idées nouvelles seront nécessaires pour parvenir à une compréhension correcte de la réalité. En particulier, on ne peut plus se contenter de travailler dans l'espace des états $\mathbb{R}_u^n$ sans prendre en compte l'espace des fréquences $\mathbb{R}_\xi^m$, dual de l'espace physique $\mathbb{R}_x^m$.

Mentionnons une étude similaire menée par J. Duchon et R. Robert [43] à propos de l'équation bidimensionnelle d'Euler pour un fluide incompressible. Le problème n'est donc que partiellement hyperbolique. Le premier principe ci-dessus y est appliqué à la pression et la vitesse normale, sous une forme plus forte qui invoque certaines dérivées partielles. Le second principe devient une trivialité puisque toutes les lois de conservation $\partial_t e + \partial_x g = 0$ sont exactes pour les solutions faibles. En revanche, il est fait usage d'une hypothèse sur la géométrie des oscillations, ainsi que d'une simplification concernant la mesure de Young : elle est supposée la somme de deux masses de Dirac, ce qui est très restrictif.

VII. APPLICATION A LA DYNAMIQUE DES GAZ

1. Le modèle lagrangien

En coordonnées lagrangiennes de masse, le système monodimensionnel de la dynamique des fluides s'écrit en l'absence de vide sous la forme suivante. Les variables sont le volume spécifique v, la vitesse u, l'énergie spécifique e et la pression p. Celle-ci est liée à v et e par une relation d'état $p=p(v, e)$. Enfin x, une fois n'est pas coutume, a pour dimension une masse. Les particules de fluide se meuvent sur des droites $x=$constante.

$$\begin{gathered}\partial_t v=\partial_x u\\ \partial_t u+\partial_x p=0\\ \partial_t\left(\frac{1}{2}u^2+e\right)+\partial_x(pu)=0\end{gathered}\tag{7.1}$$

Ce système est hyperbolique en phases liquide et gazeuse, ce qui correspond à l'inégalité $pp_e>p_v$. Les vitesses caractéristiques sont alors $-c$, 0, $c(v, e)$, où $c^2=pp_e-p_v$. L'un des champs est donc linéairement dégénéré. En revanche, le vecteur propre associé à la valeur propre $\pm c$ est ${}^t(-1, \pm c, p)$, de sorte que

$$\mathrm{D}\lambda . r=pc_e-c_v \tag{7.2}$$

Pour les fluides idéaux $[p=(\gamma-1)e/v, \gamma\,\mathrm{Cte}>1]$, le second membre de (7.2) ne s'annule pas. Plus généralement, nous supposerons tout au long de cette section que c et $-c$ correspondent à des champs vraiment non linéaires. On s'autorisera donc à appliquer le principe VI.1 à $z=u$ ou p, qui sont les quantités constantes à travers les discontinuités de contact. En d'autres termes, u et p sont les invariants de Riemann au sens de Lax (mais pas au sens restrictif que nous avons adopté dans cet article) du deuxième champ caractéristique.

Nous aurons également besoin de connaître les entropies de (7.1). Classiquement, outre les lois constitutives de (7.1), on trouve les lois

$$\partial_t h\circ \mathrm{S}=0 \quad \text{(pour les solutions régulières)},$$

pour toute fonction continue h d'une variable réelle. L'entropie physique $\mathrm{S}(v, e)$ satisfait à $\mathrm{T}\,d\mathrm{S}=de+p\,dv$, T étant la température absolue; c'est donc une solution sans point critique de l'équation

$$\partial_v \mathrm{S}=p\,\partial_e \mathrm{S} \tag{7.5}$$

Dans le cas idéal, on prend couramment $\mathrm{S}=(\gamma-1)\log v+\log e$ qui est concave par rapport aux variables conservatives v, u, $\mathrm{E}=e+u^2/2$.

2. Un problème bien posé : le gaz idéal

On adopte dans cette partie la loi $p=(\gamma-1)e/v$, $1<\gamma<2$. On considère une suite oscillante de solutions $(v^\varepsilon, u^\varepsilon, e^\varepsilon)$ de (7.1). Le postulat VI.1 consiste à supposer que u^ε et p^ε convergent fortement dans $\mathrm{L}^q_{\mathrm{loc}}$ pour tout $q\geqq 1$ fini. Soient $\hat{u}$ et $\hat{p}$ leurs limites, ainsi que $\hat{v}$ et $\hat{e}$ les limites faible-étoile de v^ε et e^ε. Le passage à la limite dans (7.1) conduit à

$$\begin{gathered}\partial_t \hat{v} = \partial_x \hat{u} \\ \partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{p} = 0 \\ \partial_t\left(\frac{1}{2}\hat{u^2} + \hat{e}\right) + \partial_x(\hat{pu}) = 0\end{gathered} \tag{7.4}$$

puisque chaque produit est constitué d'au plus un facteur dont la convergence soit faible. Enfin, le passage à la limite dans la loi d'état $v^\varepsilon p^\varepsilon = (\gamma - 1) e^\varepsilon$ donne pour la même raison $\hat{vp} = (\gamma - 1) \hat{e}$. Ainsi, $\hat{p}$ *est exactement la pression qu'aurait le fluide dans l'état* $(\hat{v}, \hat{e})$. Le triplet $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{e})$ est donc une solution de (7.1), qui serait un système bien posé pour la topologie faible-étoile de L^∞.

3. Le gaz réel

Il en va différemment dans le cas général, pour une loi d'état quelconque; la construction de solutions oscillantes élémentaires le montre aisément. On doit alors appliquer les deux idées développées dans VI. La première conduit à nouveau à (7.4). La seconde affirme qu'en dehors des chocs essentiels de la solution oscillante, on a

$$\partial_t \langle \nu, h \circ S \rangle = 0, \qquad \forall h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}). \tag{7.5}$$

Naturellement $\nu_{x,t}$ est astreinte à une courbe d'équation $u = \hat{u}(x, t)$, $p = \hat{p}(x, t)$. En utilisant la loi d'état réciproque $(e = \theta(v, \pi) \Leftrightarrow \pi = p(v, e))$, on peut donc représenter $\nu_{x,t}$ à l'aide d'une fonction $V(x, t; y)$, monotone croissante en y,via la formule

$$\langle \nu, F \rangle = \int_0^1 F(V(y), \hat{u}, \theta(V(y), \hat{p}))\, dy, \tag{7.6}$$

pour tout $F \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^3)$. On peut donc remplacer (7.5) par

$$\partial_t \int_0^1 h \circ S(V(y), \theta(V(y), \hat{p}))\, dy = 0, \qquad \forall h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}). \tag{7.7}$$

L'ensemble d'équations (7.4)-(7.7) est le système d'évolution cherché, dont les inconnues sont $\hat{u}(x, t)$, $\hat{p}(x, t)$ et $V(x, t; y)$. Remarquer que

$$\hat{v} = \int_0^1 V\, dy, \qquad \hat{e} = \int_0^1 \theta(V(y), \hat{p})\, dy.$$

Comme ce système relaxé est peu parlant, nous allons par des calculs formels (nous ne sommes plus à cela près) le réécrire sous une forme plus simple qui est équivalente lorsque $\hat{u}$, $\hat{p}$ et V sont des fonctions régulières. Cette hypothèse est peu restrictive puisqu'on travaille une fois pour toutes en dehors des zones de choc essentiel pour la solution oscillante.

En fait, (7.7) ne signifie pas autre chose que $\partial_t S(V, \theta)=0$, c'est-à-dire $\partial_v S \, . \, \partial_t V + \partial_e S \, . \, \partial_t \theta = 0$ ou encore

$$\partial_t \theta + \hat{p}\, \partial_t V = 0. \tag{7.8}$$

On en déduit

$$\partial_t \hat{p} = \partial_v p \, . \, \partial_t V + \partial_e p \, . \, \partial_t \theta = (\partial_v p - \hat{p}\, \partial_e p)\, \partial_t V$$

ou

$$\partial_t \hat{p} + c(V, \theta(V, \hat{p}))^2\, \partial_t V = 0, \tag{7.9}$$

ce qu'on réécrit $K(V, \hat{p})\, \partial_t \hat{p} + \partial_t V = 0$, en notant $K(v, \pi) = c(v, \theta(v, \pi))^{-2}$. On intègre cette équation par rapport à y et en utilisant (7.4.1) on obtient

$$\partial_t \hat{p} + \left(\int_0^1 K(V(y), \hat{p})\, dy \right)^{-1} \partial_x \hat{u} = 0.$$

Utilisant une dernière fois (7.9), on écrit l'équation d'évolution de V :

$$\partial_t V = \left(\int_0^1 K\, dy' \right)^{-1} K\, \partial_x \hat{u}.$$

Le système cherché est donc

$$\begin{gathered} \partial_t V = \left(\int_0^1 K(V(y'), \hat{p})\, dy' \right)^{-1} K(V(y), \hat{p})\, \partial_x \hat{u} \\ \partial_t \hat{p} + \left(\int_0^1 K(V(y'), \hat{p})\, dy' \right)^{-1} \partial_x \hat{u} = 0 \\ \partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{p} = 0 \end{gathered} \tag{7.10}$$

L'égalité (7.4.3) n'a pas été utilisée mais on peut vérifier qu'elle découle de (7.10).

On constate que la vitesse moyenne (ou plutôt *apparente*) du son est maintenant

$$c_{\text{moy}} = \left(\int_0^1 K(V(y), \hat{p})\, dy \right)^{1/2},$$

ou encore

$$\left(\frac{1}{c_{\text{moy}}} \right)^2 = \lim \left(\frac{1}{c^{\varepsilon}} \right)^2 \tag{7.11}$$

Il faut cependant prendre garde au fait que la formule donnant la vitesse moyenne du son a une forme différente lorsqu'on travaille en coordonnées eulériennes (le cadre quasi systématique quand la dimension spatiale est $\geqq 2$), en raison du jacobien non trivial du changement de variables. Naturellement les deux formules (7.11) et (7.23) ci-dessous sont concordantes et ne sont que deux regards différents du même phénomène.

4. Coordonnées eulériennes

En coordonnées eulériennes, les variables indépendantes sont le temps t et la position x dans l'espace physique. Si x' désigne la coordonnée utilisée en 2 et 3, alors $v\,dx'=dx$. Les variables dépendantes sont la densité ρ, la vitesse u, et l'énergie spécifique e; on a $\rho v=1$. Les équations sont

$$\begin{gathered}\partial_t \rho+\partial_x(\rho u)=0\\ \partial_t(\rho u)+\partial_x(\rho u^2+q(\rho, e))=0\\ \partial_t\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho e\right)+\partial_x\left(\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho e+q\right)u\right)=0.\end{gathered} \tag{7.12}$$

La pression $q(\rho, e)$ est évidemment égale à $p(\rho^{-1}, e)$. Comme précédemment, on supposera que le système est strictement hyperbolique, c'est-à-dire $q\,\partial_e q+\rho^2\,\partial_\rho q>0$, et que deux des champs sont vraiment non linéaires. Ceux-ci correspondent aux vitesses $u\pm c(\rho, e)$, où $c^2=\rho^{-2} q\,\partial_e q+\partial_\rho q$. La vitesse u est liée au champ linéairement dégénéré. Naturellement, u et q sont toujours constantes à travers les discontinuités de contact. Enfin les couples entropie-flux supplémentaires sont les $(\rho\, h\circ s, \rho\, uh\circ s)$ où $h\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ est arbitraire et $s(\rho, e)=\mathrm{S}(\rho^{-1}, e)$ qui satisfait

$$q\,\partial_e s+\rho^2\,\partial_\rho s=0. \tag{7.13}$$

Appliquant le principe VI.1, u^ε et q^ε convergent fortement vers des limites notées $\hat{u}$ et $\hat{q}$, tandis que ρ^ε converge faiblement vers $\hat{\rho}$. Pour le gaz idéal $(q=(\gamma-1)\rho e)$, un passage à la limite immédiat montre que $(\hat{\rho}, \hat{u}, \sigma)$ est solution de (7.12), en posant $\sigma=\hat{\rho}^{-1}\lim(\rho^\varepsilon e^\varepsilon)$. Cependant, σ ne sera pas en général égal à $\lim e^\varepsilon$. La conclusion est que (7.12) serait bien posé dans L^∞ faible-étoile lorsque le gaz est idéal.

Pour un gaz réel, on définit comme en 3 une fonction $\mathrm{R}(x, t; y)$, monotone croissante en y, qui représente « *grosso modo* » les oscillations de ρ^ε. Pour cela, on remarque que le support de $\nu_{x,t}$ est concentré sur une courbe d'équation $u=\hat{u}(x, t)$, $q(\rho, e)=\hat{q}(x, t)$. La définition est donc [pour tout $\mathrm{F}\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^3)$]

$$\hat{\rho}^{-1}\langle \nu_{x,t}, \rho\,\mathrm{F}(\rho, u, e)\rangle=\int_0^1 \mathrm{F}(\mathrm{R}(x, t; y), \hat{u}(x, t), \Sigma(\mathrm{R}, \hat{q}(x, t)))\,dy \tag{7.14}$$

où Σ est la relation d'état réciproque :

$$\mathrm{Q}=q(\rho, e) \quad\Leftrightarrow\quad e=\Sigma(\rho, \mathrm{Q}).$$

On notera la différence entre (7.14) et (7.6), caractérisée par le poids ρ au lieu de 1. On reconnaît le jacobien du changement de variables entre coordonnées lagrangiennes et eulériennes. L'introduction de ce poids n'est pas indispensable pour mener à bien les calculs, mais celui-ci amène les calculs et le système relaxé les plus simples possible. Notons aussi que ce poids apparaissait naturellement dans le cas des gaz idéaux.

On passe maintenant à la limite dans les équations, lois de conservation exactes ou approchées, hors d'un domaine « petit ». Avec (7.14) il vient

$$\begin{gathered}\partial_t(\hat\rho\,\hat u)+\partial_x(\hat\rho\,\hat{u^2}+\hat q)=0,\\ \partial_t\left(\frac{1}{2}\,\hat\rho\,\hat{u^2}+\hat{\rho\sigma}\right)+\partial_x\left(\left(\frac{1}{2}\,\hat\rho\,\hat{u^2}+\hat{\rho\sigma}+\hat q\right)\hat u\right)=0,\\ \partial_t\left(\hat\rho\int_0^1 h\circ s(\mathrm{R},\,\Sigma)\,dy\right)+\partial_x\left(\hat\rho\,\hat u\int_0^1 h\circ s(\mathrm{R},\,\Sigma)\,dy\right)=0.\end{gathered}\tag{7.15}$$

pour tout $h\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. En principe, ce système se suffit tel quel, mais puisqu'on se place dans un cadre relativement formel, on poursuit les calculs en supposant que $\hat\rho$, $\hat u$, R, $\hat q$ sont réguliers. Par ailleurs, il est important de noter que $\hat\rho$ ne dépend en fait que de R en prenant $\mathrm{F}=\rho^{-1}$ dans (7.14) :

$$\hat\rho(x,\,t)^{-1}=\int_0^1 \mathrm{R}(x,\,t;\,y)^{-1}\,dy.\tag{7.16}$$

La liste (7.15.3) équivaut en fait pour des fonctions régulières à

$$\begin{gathered}\partial_t\hat\rho+\partial_x(\hat\rho\,\hat u)=0\\ (\partial_t+\hat u\,\partial_x)s=0,\quad \text{noté } \mathrm{L}(s)=0\end{gathered}\tag{7.17}$$

Développant la dernière égalité et utilisant (7.13), il vient

$$\hat q\,\mathrm{L}(\mathrm{R})=\mathrm{R}^2\,\mathrm{L}(\Sigma).\tag{7.18}$$

Pour éliminer Σ, on applique l'opérateur L à l'égalité $q(\mathrm{R},\,\Sigma)=\hat q$:

$$\partial_\rho q\,.\,\mathrm{L}(\mathrm{R})+\partial_e q\,.\,\mathrm{L}(\Sigma)=\mathrm{L}(\hat q),$$

et finalement

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(\hat q)&=(\partial_\rho q+\hat q\,\mathrm{R}^{-2}\,\partial_e q)\,.\,\mathrm{L}(\mathrm{R})\\ &=-c(\mathrm{R},\,\Sigma)^2\,\mathrm{R}^2\,\mathrm{L}(\mathrm{R}^{-1})\end{aligned}\tag{7.19}$$

Notant $\mathrm{K}(\mathrm{R},\,\hat q)=\mathrm{R}^{-2}\,c(\mathrm{R},\,\Sigma(\mathrm{R},\,\hat q))^{-2}$, il vient

$$\mathrm{L}(\mathrm{R}^{-1})+\mathrm{K}(\mathrm{R},\,\hat q)\,\mathrm{L}(\hat q)=0,\tag{7.20}$$

ce qu'on intègre par rapport à y. D'après (7.16),

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{L}(\mathrm{R}^{-1})\,dy=\mathrm{L}\left(\int_0^1 \mathrm{R}^{-1}\,dy\right)&=\mathrm{L}(\hat\rho^{-1})\\ &=\hat\rho^{-1}\,\partial_x\hat u.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathrm{L}(\hat q)+\left(\hat\rho\int_0^1 \mathrm{K}(\mathrm{R}(y),\,\hat q)\,dy\right)^{-1}\partial_x\hat u=0\tag{7.21}$$

On peut ainsi éliminer $L(\hat{q})$ dans (7.20), et on obtient un système relaxé analogue à (7.10) :

$$(\partial_t+\hat{u}\,\partial_x)\,\hat{u}+\hat{\rho}^{-1}\,\partial_x\hat{q}=0,$$
$$(\partial_t+\hat{u}\,\partial_x)\,\hat{q}+\left(\hat{\rho}\int_0^1 \mathrm{K}(\mathrm{R}(y'),\hat{q})\,dy'\right)^{-1}\partial_x\hat{u}=0, \tag{7.22}$$
$$(\partial_t+\hat{u}\,\partial_x)\,\mathrm{R}+\mathrm{R}^2\,\mathrm{K}(\mathrm{R},\hat{q})\left(\hat{\rho}\int_0^1 \mathrm{K}(\mathrm{R}(y'),\hat{q})\,dy'\right)^{-1}\partial_x\hat{u}=0.$$

Les inconnues de ce système sont les fonctions $\hat{u}(x, t)$, $\hat{q}(x, t)$ et $\mathrm{R}(x, t, y)$, tandis que $\hat{\rho}$ est donné par la formule (7.16). On remarque que la vitesse moyenne du son satisfait maintenant

$$c_{\mathrm{moy}}^2=\hat{\rho}^{-2}\left(\int_0^1 \mathrm{K}\,dy\right)^{-1}$$

ou

$$\frac{1}{c_{\mathrm{moy}}^2}=\lim \rho^{\varepsilon}.\lim\frac{1}{\rho^{\varepsilon}(c^{\varepsilon})^2} \tag{7.23}$$

Comme annoncé, cette formule semble différente de (7.11), mais cela n'est dû qu'à la différence entre les deux notions de limite. En effet le jacobien ρ du changement de variable est lui-même oscillant, de sorte que les limites faibles en coordonnées eulériennes et lagrangiennes sont liées par la formule générale

$$\mathrm{L}-\lim \mathrm{F}^{\varepsilon}=(\mathrm{E}-\lim \rho^{\varepsilon}\,\mathrm{F}^{\varepsilon})\,(\mathrm{E}-\lim \rho^{\varepsilon})^{-1}. \tag{7.24}$$

De plus, les fonctions c qui désignent la vitesse du son ne représentent pas la même quantité dans les deux systèmes de coordonnées; c_{E} est bien une vitesse (LT^{-1}) tandis que c_{L} a pour dimension MT^{-1} : $c_{\mathrm{L}}=\rho\,c_{\mathrm{E}}$.

5. Commentaires

On prendra garde, si l'on utilise les systèmes (7.10) ou (7.22) qu'ils perdent probablement toute validité si $\hat{v}$ ou $\hat{\rho}$ s'annule. Les problèmes liés à l'apparition du vide ou à la concentration de masse relèvent sans doute d'une autre approche.

De même, la validité de ces descriptions tombe en défaut lorsque la solution $(\hat{u}, \hat{q}, \mathrm{R})$ ou $(\hat{u}, \hat{p}, \mathrm{V})$ cesse d'être régulière. A ce moment apparaissent certainement ce que j'ai appelé les chocs essentiels de la suite oscillante.

L'intérêt principal de (7.22) est numérique. Par exemple, si $\mathrm{R}(x, 0; y)$ est en escalier par rapport à y, pour tout x, alors il en est de même pour la solution et les points y_i de discontinuité sont constants le long des trajectoires des particules. Dans ce cas, (7.22) est un système constitué d'un nombre fini N d'équations aux dérivées partielles en (x, t), à N fonctions inconnues qui ne dépendent que de x et t; on pourra lui appliquer les procédés connus de résolution numérique des systèmes hyperboliques. Cet exemple simple est fondamental puisqu'on peut toujours s'y ramener en approchant la mesure de Young initiale $\mathrm{v}_{x,0}$ par une somme finie de masses de Dirac en tout point x.

Une autre approche numérique consiste à ne pas traiter (7.22) ni les solutions oscillantes, mais à traiter directement une solution faible ordinaire en tenant compte des informations fournies par (7.22). On applique une méthode de différences finies au système

$$\left.\begin{array}{c}(\partial_t+u\,\partial_x)\,u+\rho^{-1}\,\partial_x q=0\\ (\partial_t+u\,\partial_x)\,q+\rho\,c^2\,\partial_x u=0\\ (\partial_t+u\,\partial_x)\,\rho+\rho\,\partial_x u=0\end{array}\right\}\tag{7.25}$$

Les variables considérées par le schéma sont u, q, ρ, mais u et q sont calculés sur une grille grossière, tandis que ρ est calculé sur une grille plus fine en espace. Le point crucial est alors l'approximation des trois coefficients ρ^{-1}, $\rho\,c^2$, ρ. C'est (7.22) qui nous indique comment faire. Le coefficient ρ^{-1} sera remplacé par $\hat{\rho}^{-1}$, où $\hat{\rho}$ désigne la moyenne de ρ sur la maille grossière. Puis $\rho\,c^2$ sera remplacé par l'inverse de la moyenne de $\rho^{-1}\,c^{-2}$ sur la maille grossière. Ces deux coefficients sont donc définis sur la grille grossière et non sur la grille fine. Enfin, le dernier coefficient dans la troisième équation sera remplacé par le produit de c^{-2} (qui varie d'un point à l'autre de la grille fine) par le coefficient précédent. Il est raisonnable de penser qu'un tel schéma fournisse une bonne approximation des trajectoires des particules lorsque la condition initiale est oscillante, pourvu que le pas de la grille fine soit inférieur à une longueur caractéristique sur laquelle $\mathrm{v}_{x,0}$ varie notablement.

Terminons en signalant que (7.25) possède un analogue en dimension d'espace $\geqq 2$, sous la forme

$$\left.\begin{array}{c}(\partial_t+u\,.\,\nabla)\,u+\rho^{-1}\operatorname{div} q=0\\ (\partial_t+u\,.\,\nabla)\,q+\rho\,c^2\operatorname{div} u=0\\ (\partial_t+u\,.\,\nabla)\,\rho+\rho\operatorname{div} u=0.\end{array}\right\}$$

On peut donc écrire formellement une version multidimensionnelle de (7.22), qui pourrait représenter certaines solutions oscillantes, pour lesquelles les seules discontinuités de contacts mises en jeux satisfont la condition de transmission $[u]=0$, et non seulement la continuité de la vitesse normale. En effet, lorsque la vitesse tangentielle au front est discontinue, les phénomènes d'instabilité deviennent nécessairement prépondérants par rapport aux oscillations décrites ci-dessus.

6. Conditions initiales

L'établissement des conditions initiales pour (7.22) est assez délicat. La procédure a déjà été décrite au IV.4 : on passe à la limite dans une forme intégrale avec des fonctions test des équations satisfaites par $(u^\varepsilon, q^\varepsilon, \rho^\varepsilon)$. On obtient les conditions $(\forall h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}))$ [6]

$$\begin{gathered}\rho_0 u_0 = \lim(\rho_0^\varepsilon u_0^\varepsilon)\\ \rho_0 = \lim \rho_0^\varepsilon\\ \frac{1}{2}\rho_0 u_0^2 + \rho_0 \int_0^1 \Sigma(\mathrm{R}_0(y), \pi_0)\,dy = \lim\left(\frac{1}{2}\rho_0^\varepsilon (u_0^\varepsilon)^2 + \rho_0^\varepsilon e_0^\varepsilon\right)\\ \int_0^1 h\circ s(\mathrm{R}_0(y), \Sigma(\mathrm{R}_0(y), \pi_0))\,dy = (\lim \rho_0^\varepsilon h\circ s(\rho_0^\varepsilon, e_0^\varepsilon)).(\lim \rho_0^\varepsilon)^{-1}\end{gathered} \tag{7.26}$$

On a noté ρ_0, u_0, π_0, R_0 les valeurs initiales de $\hat{\rho}$, $\hat{u}$, $\hat{q}$, R, qui dépendent bien sûr de x. Les égalités ci-dessus s'entendent presque partout sur $\mathbb{R}$. Les valeurs ρ_0, u_0 sont définies de manière unique par les deux premières équations. Nous allons montrer que les deux dernières définissent $\mathrm{R}_0(y)$ de manière unique.

Tout d'abord, le second membre de (7.26.4) définit une mesure de probabilité ν_x^0 sur $\mathbb{R}$, à laquelle on peut associer une fonction $\mathrm{A}(x, y)$, croissante en y, via

$$\langle \nu_x^0, h\rangle = \int_0^1 h(\mathrm{A}(x, y))\,dy, \qquad \forall h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}).$$

Nous laissons maintenant de côté le point x, qui n'est plus rien q'un paramètre. Alors (7.26.4) revient à

$$s(\mathrm{R}_0(y), \Sigma(\mathrm{R}_0(y), \pi_0)) = \mathrm{A}(y), \tag{7.27}$$

qui est couplée à une équation fournie par (7.26.3) :

$$\int_0^1 \Sigma(\mathrm{R}_0(y), \pi_0)\,dy = \alpha \quad \text{donné.} \tag{7.28}$$

Nous montrons qu'en fait, (7.27) et (7.28) possède une solution unique. Tout d'abord, étant donné deux nombres a et π, l'équation $s(r, \Sigma(r, \pi)) = a$

---

[6] Seuls (7.26.1, 2 et 3) sont corrects. On doit remplaçer (7.26.4) par une inégalité $\leq$, valide seulement pour les fonctions h telles que $h\circ s$ soit convexe par rapport à ρ, ρu, $\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2$. Dans le cas où u_0^ε et q_0^ε convergent fortement, on pense que (7.24.4) est correct. Sinon, on ne peut pas déterminer R_0 de manière unique.

possède une solution unique $r(\pi)$ parce que

$$\partial_\rho s+\partial_\rho \Sigma\, \partial_e s=(q\,\partial_e q)^{-1}\rho^2 c^2\,\partial_\rho s>0$$

et $\inf_r$ (resp. $\sup_r$) $s(r, \Sigma(r, \pi))=-\infty$ (resp. $+\infty$) pour des gaz réalistes comme pour les gaz idéaux.

On note ensuite que

$$\partial_\pi(\Sigma(r(\pi), \pi))=\rho^{-2}c^{-2}q>0,$$

de sorte que le premier membre de (7.28) est strictement monotone par rapport à π_0, lorsque $R_0(y)$ est défini par (7.27). Il existe donc une et une seule valeur π_0 qui satisfasse (7.28) pourvu que α soit dans l'intervalle parcouru par les valeurs du premier membre lorsque π va de 0 à l'infini, c'est-à-dire pourvu que $\alpha\geqq 0$. Or

$$\alpha=\rho_0^{-1}\left\{\frac{1}{2}\lim(\rho_0^\varepsilon(u_0^\varepsilon)^2)-\frac{1}{2}\rho_0 u_0^2+\lim \rho_0^\varepsilon e_0^\varepsilon\right\}$$

$$\alpha\geqq \rho_0^{-1}\lim(\rho_0^\varepsilon e_0^\varepsilon),$$

grâce à l'inégalité du type de Cauchy-Schwarz

$$(\lim \rho_0^\varepsilon u_0^\varepsilon)^2\leqq \lim \rho_0^\varepsilon . \lim(\rho_0^\varepsilon(u_0^\varepsilon)^2).$$

Notons que, contrairement à ce qui a lieu pour $t>0$, $\rho_0^{-1}\neq\int_0^1 R_0^{-1}(y)\,dy$ en général, ce qui traduit un effet de couche initiale; cet effet est commun à tous les systèmes hyperboliques lorsque des oscillations ont lieu.

7. L'hypothèse des chocs essentiels

L'examen du cas du gaz idéal permet de justifier *a posteriori* l'hypothèse des chocs essentiels faite au paragraphe VI.2, c'est-à-dire le postulat :

$\Delta_l\equiv 1$ *hors d'un fermé dont la dimension de Hausdorff est* $\leqq 1$

Enfin, le calcul du système relaxé pour le gaz idéal n'utilise que l'hypothèse faite au paragraphe VI.1, quant à la convergence forte de la vitesse et de la pression. On peut donc calculer Δ_l en fonction de $(\hat\rho, \hat u, \sigma)$ pour toute entropie. Comme $(\hat\rho, \hat u, \sigma)$ est la solution faible des équations d'Euler, Δ_l est concentrée sur les courbes de choc de cette solution. La réunion des courbes de choc de $(\hat\rho, \hat u, \sigma)$ est donc la zone de chocs essentiels de $(\varphi^\varepsilon, u^\varepsilon, e^\varepsilon)$ telle qu'elle était envisagée au paragraphe VI.2.

Notons que pour le gaz idéal, on connaît les relations de transmission à travers les chocs essentiels, puisque les équations de conservation sont satisfaites partout au sens des distributions.

VIII. LA DYNAMIQUE D'UN CÂBLE ÉLASTIQUE

1. Le modèle

Considérons un câble, assimilé à une courbe de l'espace $\mathbb{R}^m$, $m=2$ ou 3, décrite paramétriquement par $y(x, t)$ où t est le temps et $x \in \mathbb{R}$ la position de la particule dans un état de référence. Celui-ci est supposé au repos. La densité linéique est prise égale à 1, de sorte que $\partial_t^2 y$ est égal au bilan des densités de forces appliquées en $y(x, t)$. Négligeant les forces extérieures et la résistance à la flexion, on a $\partial_t^2 y = \partial_x \tau$. Une hypothèse courante, en l'absence de mémoire viscoélastique est que la tension τ obéit à une loi

$$\tau = \mathrm{T}(r) r^{-1} \partial_x y.$$

Ci-dessus, r est le module du vecteur d'allongement $\partial_x y$, tandis que $\mathrm{T}(r)$, module du vecteur tension, est une fonction qui est caractéristique du matériau étudié. Le repos correspondant à $r=1$, on a $\mathrm{T}(1)=0$.

En posant $u=\partial_x y$, $v=\partial_t y$, on est ramené à un système de m lois de conservation

$$\partial_t u = \partial_x v, \qquad \partial_t v = \partial_x (\mathrm{T}(r) q), \tag{8.1}$$

avec $q = r^{-1} u$, vecteur unitaire tangent à la corde à l'instant t.

On se restreint à un domaine d'allongements pour lequel le câble ne possède qu'une seule phase, c'est-à-dire que $\mathrm{T}'(r)$ reste >0. Le système (8.1) est alors hyperbolique pour $r>1$ et mixte pour $r<1$. Les vitesses caractéristiques sont

$$\lambda_\pm = \pm \sqrt{\mathrm{T}'}, \qquad \mu_\pm = \pm \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{r}} = \pm c(r). \tag{8.2}$$

Leurs multiplicités sont respectivement 1 et $m-1$.

On supposera dans ce chapitre que

$$r_- = \inf \{ r^\varepsilon(x, t) ; \varepsilon > 0, x, t \} > 1,$$

de façon que le système (8.1) reste hyperbolique. Cette hypothèse n'est pas justifiée par l'existence d'un domaine positivement invariant; on peut d'ailleurs construire des solutions très régulières de (8.1) pour lesquelles $r(x, 0) \equiv r_0 > 1$ et $r(x, t_1) \equiv r_1 < 1$. De telles solutions sont très instables physiquement et aussi du point de vue numérique. L'étude de ces instabilités liées au changement de type du système a été abordé par Gilquin, Pego et l'auteur ([23], [10] et [11]). Cependant, l'hypothèse est peut-être satisfaite dans certains cas sur un intervalle de temps petit, pourvu que $\inf \{ r^\varepsilon(x, 0) ; \varepsilon > 0, x \} > 1$.

2. Champs caractéristiques

Les valeurs propres $\pm c(r)$ correspondent à des champs linéairement dégénérés. Les ondes associées sont dites *transversales*, car elles n'apparaissent pas pour un câble astreint à se mouvoir le long d'une droite fixe. Ces ondes peuvent prendre la forme d'une discontinuité de contact. Le câble présente alors un angle (kink) dont le sommet se déplace à la vitesse $c(r)$ le long de la corde. Bien entendu r est continu à travers ces discontinuités.

En revanche, les valeurs propres $\lambda_\pm$ correspondent à des champs vraiment non linéaires dès que T″ ne s'annule pas. Nous supposerons qu'il en est ainsi tout au long de ce chapitre. Les ondes associées à $\lambda_\pm$ sont dites longitudinales.

La somme des sous-espaces propres associés à $\pm c(r)$, de dimension $2m-2$, engendre une algèbre de Lie de dimension $2m-1$; de sorte que les seules fonctions continues à travers toutes les discontinuités de contact sont de la forme $h \circ r$. Avant de nous engager dans l'application des principes du paragraphe VI, cette remarque nous incite à chercher les solutions oscillantes élémentaires (u, v) $(x/\varepsilon, t/\varepsilon)$ pour lesquelles $r \equiv \mathrm{Cte}$. La classification en a été faite par Bonnefille [2]. On a

$$u = p(x+ct) + q(x-ct),$$
$$v = cp(x+ct) - cq(x-ct),$$

où p et q sont deux fonctions satisfaisant l'une des quatre conditions ci-dessous.

(i) q est constant; p est à valeurs dans une sphère de centre $-q$. Le rayon de cette sphère détermine r et par conséquent $c(r)$.

(ii) *idem*, en échangeant p et q.

(iii) q prend deux valeurs exactement q_1 et q_2 ; p est à valeurs dans l'intersection de deux sphères de centres $-q_1$ et $-q_2$, de même rayon.

(iv) idem, en échangeant p et q.

Notons que si $m=2$, les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes. Les points p_1, $-q_1$, p_2, $-q_2$ forment dans cet ordre un losange.

Les deux premières configurations sont celles construites en II.3, relativement à l'un des champs linéairement dégénérés. Au contraire, les deux dernières permettent la construction de mesures de Young dont le support n'est pas contenu dans une courbe caractéristique de l'espace des états. Si $m=2$, le régime (iii) [= (iv)] fait dépendre la mesure de Young ν de sept paramètres : cinq pour le choix du losange dans $\mathbb{R}^2$ et deux pour les proportions respectives des valeurs p_1 et q_1 dans les graphes des fonctions p et q.

On distingue donc deux régimes oscillants. Le régime I [cas (i) et (ii)] où les oscillations ne se produisent que dans une seule des deux directions $x \pm ct = \mathrm{Cste}$; ν se rapporte alors à une probabilité arbitraire sur une sphère de $\mathbb{R}^m$. Le régime II [cas (iii) et (iv)] où les oscillations se produisent dans les deux directions à la fois, mais dont la description ne fait appel qu'à sept paramètres réels si $m=2$, ou à une probabilité sur un cercle si $m=3$.

La question de l'existence d'autres régimes oscillants reste ouverte. Est-il possible de construire une suite de solutions dont la mesure de Young soit d'une autre nature que les deux régimes décrits ci-dessus? Nous verrons plus loin que cette question n'est pas essentielle car les régimes I et II suffisent à expliquer les solutions d'un système relaxé que nous allons établir.

3. Description macroscopique des oscillations

On considère donc une suite oscillante de solutions pour laquelle $r_- > 1$. L'extraction d'une sous-suite étant acquise, on s'intéresse à la mesure de Young $\nu_{x,t}$ associée. Plus précisément, nous allons établir à l'aide des principes du paragraphe VI un système de $2m+2$ équations dont les $2m+2$ inconnues seront

$$\begin{gathered} \mathrm{U}(x,t) = \langle \nu_{x,t}, u \rangle = (\lim u^\varepsilon)(x,t), \\ \mathrm{V} = \langle \nu_{x,t}, v \rangle, \\ \mathrm{R} = \langle \nu_{x,t}, r \rangle, \\ \mathrm{P} = 2\langle \nu_{x,t}, u.v \rangle. \end{gathered}$$

Le premier principe nous indique que la convergence de r^ε doit être forte, de sorte que par exemple

$$\langle \nu, c(r)^2 u \rangle = c(\mathrm{R})^2\,\mathrm{U}, \qquad \text{etc.}$$

Passant à la limite dans (8.1), il vient donc

$$\partial_t \mathrm{U} = \partial_x \mathrm{V}, \qquad \partial_t \mathrm{V} = \partial_x (c(\mathrm{R})^2\,\mathrm{U}).$$

Le deuxième principe s'applique aux deux lois de conservations supplémentaires, dont la première est un bilan énergétique ($\mathrm{E}' = \mathrm{T}$)

$$\begin{gathered} \partial_t \left(\frac{1}{2} v.v + \mathrm{E}(r) \right) = \partial_x (c(r)^2 u.v), \\ \partial_t (u.v) = \partial_x \left(\frac{1}{2} v.v + r\,\mathrm{T}(r) - \mathrm{E}(r) \right). \end{gathered}$$

Le passage à la limite dans ces deux équations fait appel à U, V, P, R et à $\langle \nu, v.v \rangle$. On peut éliminer ce dernier terme grâce à une relation de compacité par compensation. Il suffit d'appliquer (2.5) aux lois de base (8.1) :

$$\langle \nu, v.v - r^2 c(r)^2 \rangle = \langle \nu, v \rangle^2 - \langle \nu, u \rangle \langle \nu, c^2 u \rangle,$$

ou

$$\langle \mathrm{v}, v.v \rangle = \mathrm{V}.\mathrm{V} + c(\mathrm{R})^2 (\mathrm{R}^2 - \mathrm{U}.\mathrm{U}). \tag{8.3}$$

Le système annoncé est donc

$$\begin{aligned} &\partial_t \mathrm{U} = \partial_x \mathrm{V}, \\ &\partial_t \mathrm{V} = \partial_x (c(\mathrm{R})^2 \mathrm{U}), \\ &\partial_t \mathrm{P} = \partial_x (\mathrm{V}.\mathrm{V} + c(\mathrm{R})^2 (3\mathrm{R}^2 - \mathrm{U}.\mathrm{U}) - 2\mathrm{E}(\mathrm{R})), \\ &\partial_t (\mathrm{V}.\mathrm{V} + c(\mathrm{R})^2 (\mathrm{R}^2 - \mathrm{U}.\mathrm{U}) + 2\mathrm{E}(\mathrm{R})) = \partial_x (c(\mathrm{R})^2 \mathrm{P}). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ce système est bien d'évolution car

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{R}} (\mathrm{V}.\mathrm{V} + c(\mathrm{R})^2 (\mathrm{R}^2 - \mathrm{U}.\mathrm{U}) + 2\mathrm{E}(\mathrm{R})) \\ = (\mathrm{R} - \mathrm{R}^{-1} \mathrm{U}.\mathrm{U}) \mathrm{T}' + (3 + \mathrm{R}^{-2} \mathrm{U}.\mathrm{U}) \mathrm{T} \geqq 3\mathrm{T}(\mathrm{R}) > 0,$$

car $\mathrm{R} \geqq r_- > 1$.

Notons que les variables U, V, P, R subissent une restriction due aux inégalités de convexité

$$|\langle \mathrm{v}, v \pm c(r) u \rangle|^2 \leqq \langle \mathrm{v}, |v \pm c(r) u|^2 \rangle,$$

qui jointes à (8.3), imposent

$$|\mathrm{P} - 2\mathrm{U}.\mathrm{V}| \leqq 2c(\mathrm{R})(\mathrm{R}^2 - \mathrm{U}.\mathrm{U}) \tag{8.5}$$

cela nous incite à introduire les fonctions auxiliaires

$$\mathrm{G}_\pm = \mathrm{P}/2 - \mathrm{U}.\mathrm{V} \pm c(\mathrm{R})(\mathrm{R}^2 - \mathrm{U}.\mathrm{U}).$$

Les restrictions (8.5) indiquent que les domaines $\{\mathrm{G}_- \leqq 0\}$ et $\{\mathrm{G}_+ \geqq 0\}$ doivent être positivement invariants pour le système (8.4) si celui-ci traduit bien la réalité. Un calcul direct montre qu'en effet, (8.4) entraîne

$$c(\mathrm{R}) \partial_t \mathrm{G}_\pm = \pm \partial_x (c(\mathrm{R})^2 \mathrm{G}_\pm).$$

On obtient donc un système équivalent à (8.4) mais d'aspect plus simple, qui permet en particulier de distinguer le régime I $(\mathrm{G}_- \mathrm{G}_+ = 0)$ du régime II $(\mathrm{G}_- \mathrm{G}_+ < 0)$:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t \mathrm{U} = \partial_x \mathrm{V}, \qquad \partial_t \mathrm{V} = \partial_x (c(\mathrm{R})^2 \mathrm{U}), \\ &c\partial_t \mathrm{G}_+ = \partial_x (c^2 \mathrm{G}_+), \qquad c\partial_t \mathrm{G}_- = -\partial_x (c^2 \mathrm{G}_-), \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

où $\mathrm{R} > 1$ est la solution de l'équation

$$2c(r)(r^2 - \mathrm{U}.\mathrm{U}) = \mathrm{G}_+ - \mathrm{G}_-.$$

4. Type du système relaxé

L'étude du type du système relaxé montre une différence importante entre le régime I $(\mathrm{G}_- \mathrm{G}_+ = 0)$ et le régime II $(\mathrm{G}_- \mathrm{G}_+ < 0)$. Dans le second cas, le système (8.6), ou (8.4) qui lui est équivalent, est hyperbolique. Les vitesses caractéristiques sont $\pm c(\mathrm{R})$, de multiplicités m (et non plus $m-1$), et les racines $\Lambda_{\pm}$ de l'équation du second degré

$$a\lambda^2+2cc'(\mathrm{P}-2\mathrm{U}.\mathrm{V})\lambda-c^2(a+4cc'(\mathrm{R}^2-\mathrm{U}.\mathrm{U}))=0, \quad (8.7)$$

où

$$a=\frac{\partial}{\partial \mathrm{R}}(c(\mathrm{R})^2(\mathrm{R}^2-\mathrm{U}.\mathrm{U})+2\mathrm{E}(\mathrm{R}))>0.$$

Lorsqu'on fait l'hypothèse $r\mathrm{T}'-\mathrm{T}>0$, le régime II possède la propriété

$$\Lambda_-<-c(\mathrm{R})<0<c(\mathrm{R})<\Lambda_+.$$

Par contre le régime I conduit à $\Lambda_+=c$ (si $\mathrm{G}_-=0$) ou $\Lambda_-=-c$ (si $\mathrm{G}_+=0$). Dans l'un ou l'autre cas, la valeur propre concernée est de multiplicité algébrique $m+1$, mais de multiplicité géométrique m : l'hyperbolicité est donc perdue. Cette perte n'est cependant pas trop grave, car si $\Lambda_+\equiv c$, alors $\mathrm{G}_-\equiv 0$ et le système relaxé se réduit à 5 équations

$$\partial_t \mathrm{U}=\partial_x \mathrm{V}, \qquad \partial_t \mathrm{V}=\partial_x(c^2\mathrm{U}), \qquad c\,\partial_t \mathrm{G}=\partial_x(c^2\mathrm{G}) \qquad (8.8)$$

avec $2c(\mathrm{R}^2-\mathrm{U}.\mathrm{U})=\mathrm{G}$. Or le système (8.8) est à nouveau strictement hyperbolique, à moins que $\mathrm{G}=0$. De même, si $\Lambda_+\equiv c$ et $\Lambda_-\equiv -c$, alors $\mathrm{G}_+\equiv\mathrm{G}_-\equiv 0$ et on est ramené au système original (8.1) qui est bien hyperbolique.

On peut donc raisonnablement espérer que le problème de Cauchy soit bien posé pour (8.4) dans des espaces de Hölder $\mathscr{C}^\alpha$, contrairement au système 2×2 ci-dessous pour lequel $\lambda_1\equiv\lambda_2\equiv 0$, dont la solution est de classe $\mathscr{C}^{\alpha-1}$ lorsque la condition initiale est de classe $\mathscr{C}^\alpha$, $\alpha\geqq 1$:

$$\partial_t u+\partial_x f(u/v)=0,$$
$$\partial_t v+\partial_x g(u/v)=0,$$

où $f'(s)\equiv sg'(s)$.

IX. CHANGEMENTS DE VARIABLES

1. L'approche de D. Wagner

En 1985, D. Wagner [42] a trouvé une justification de la transformation Euler-Lagrange entre les deux versions de la dynamique des gaz monodimensionnelle, valable pour des solutions faibles, de classe L^∞. Cette approche est en fait très générale et concerne tous les systèmes de lois de conservation dès qu'on se donne deux couples entropies-flux (e_i, g_i), $i=1, 2$, pour lesquels les équations $\partial_t e_i+\partial_x g_i=0$ sont exactes. Dans ce cas, on peut remplacer x et t par deux nouvelles variables y et s définies à constante près par

$$\left.\begin{array}{ll}\partial_t y=-g_1(u), & \partial_x y=e_1(u),\\ \partial_t s=g_2(u), & \partial_x s=-e_2(u),\end{array}\right\} \qquad (9.1)$$

Ce changement de variable [dès que le jacobien $\Delta(u)=e_1 g_2-e_2 g_1$ reste strictement positif, uniformément] dépend bien sûr de la solution, mais il conduit à réécrire le système (2.1) sous une nouvelle forme conservative en variables (s, y). Plus précisément, à tout couple entropie-flux (e, g) de (2.1) correspond un couple entropie-flux (E, G) du système modifié, défini par les formules linéaires

$$e_1 \mathrm{E}+e_2 \mathrm{G}=e, \qquad g_1 \mathrm{E}+g_2 \mathrm{G}=g. \qquad (9.2)$$

De plus, si $\partial_t e+\partial_x f \leqq 0$, alors $\partial_s \mathrm{E}+\partial_y \mathrm{G} \leqq 0$, et réciproquement.

Si (2.1) est le système de la dynamique des gaz en coordonnées eulériennes, le choix $e_1=\rho$, $g_1=\rho u$, $e_2=0$, $g_2=1$ (ρ=densité de masse, u=vitesse) conduit aux coordonnées lagrangiennes.

Naturellement, les invariants de Riemann, s'ils existent, sont inchangés; En revanche, les vitesses le sont. Les nouvelles vitesses λ_i' sont exprimées en fonction des anciennes via la formule

$$\lambda_i'=\frac{e_1 \lambda_i-g_1}{g_2-e_2 \lambda_i}. \qquad (9.3)$$

2. Changements de variables et richesse

A cause de la formule (9.2), on constate que si (2.1) est riche, alors le nouveau système l'est aussi. Tout d'abord, il dispose des invariants de Riemann de (2.1). Il suffit ensuite de vérifier l'existence d'une fonction N_i', $i=1, \ldots, n$, telle que

$$\partial_j \lambda_i'=(\lambda_j'-\lambda_i')\, \partial_j \log \mathrm{N}_i'. \qquad \forall j \neq i, \qquad (9.4)$$

sachant qu'il existe des fonctions analogues N_i telles que

$$\partial_j \lambda_i=(\lambda_j-\lambda_i)\, \partial_j \log \mathrm{N}_i, \qquad \forall j \neq i.$$

On a noté $\partial_j=\partial / \partial w_j$ la dérivée par rapport au j-ième invariant de Riemann.

Proposition. — *La fonction* $\mathrm{N}_i'=\Delta^{-1}(g_2-e_2 \lambda_i)\, \mathrm{N}_i$ *satisfait* (9.4).

Le calcul est laissé au lecteur.

3. Changements de variables et mesure de Young

On considère maintenant une suite oscillante de solution $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de (2.1) et $\nu_{x,t}$ sa mesure de Young associée. On supposera que

$$\inf\{\Delta(u^\varepsilon(x,t))\,;\,x,t,\varepsilon\}>0, \tag{9.5}$$

de sorte que les changements de variables $(x,t)\mapsto(y^\varepsilon,s^\varepsilon)$ sont possibles. On doit prêter une attention particulière à leur dépendance en ε. Nous allons montrer que la suite est associée à une nouvelle mesure de Young $\nu'_{y,s}$ dans les nouvelles variables, avec une formule explicite reliant ν' à ν.

Pour cela, rappelons que si $H\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^n)$, alors ν est définie par les égalités

$$\int_{\mathbb{R}^2}\langle\nu_{x,t},H\rangle\Phi(x,t)\,dx\,dt=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^2}H(u^\varepsilon(x,t))\Phi(x,t)\,dx\,dt. \tag{9.6}$$

pour tout $\Phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, ou plus généralement, tout $\Phi\in\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^2)$. On effectue le changement de variables défini par u^ε dans la dernière intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2}H(u^\varepsilon(x,t))\Phi(x,t)\,dx\,dt=\int_{\mathbb{R}^2}H(v^\varepsilon(y,s))\Psi^\varepsilon(y,s)\frac{dy\,ds}{\Delta(u^\varepsilon)}. \tag{9.7}$$

On note alors que les changements de variables sont équilipschitziens, ainsi que leurs inverses de sorte que le théorème d'Ascoli entraîne leur convergence uniforme vers une application lipschitzienne $(y^0(x,t),s^0(x,t))$. Enfin, d'après J. Ball [1], on peut passer à la limite dans les jacobiens

$$\frac{\partial(y^0,s^0)}{\partial(x,t)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\partial(y^\varepsilon,s^\varepsilon)}{\partial(x,t)}=\lim_{\varepsilon\to0}\Delta(u^\varepsilon)=\langle\nu_{x,t},\Delta\rangle.$$

On réécrit donc (9.7) pour $L(u)=H(u)\Delta(u)^{-1}$

$$\int_{\mathbb{R}^2}L(v^\varepsilon(y,s))\Psi^\varepsilon(y,s)\,dy\,ds=\int_{\mathbb{R}^2}L(u^\varepsilon)\Delta(u^\varepsilon)\Phi(x,t)\,dx\,dt.$$

Bien entendu, Ψ^ε converge uniformément vers une fonction Ψ qui parcourt $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^2)$ lorsque Φ parcourt $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^2)$. On a donc

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^2}L(v^\varepsilon(y,s))\Psi(y,s)\,dy\,ds\\ &=\int_{\mathbb{R}^2}\langle\nu_{x,t},L\Delta\rangle\Phi(x,t)\,dx\,dt\\ &=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\langle\nu_{x,t},L\Delta\rangle}{\langle\nu_{x,t},\Delta\rangle}\Psi(y,s)\,dy\,ds.\end{aligned}$$

Ceci prouve l'existence de la mesure de Young $\nu'_{y,s}$, et fournit l'égalité

PROPOSITION. — $\nu'_{y,s}=\langle\nu_{x,t},\Delta\rangle^{-1}\Delta\,\nu_{x,t}$.

4. Invariance de la conjecture (2.12)

Un argument en faveur de la conjecture (2.12) est son invariance sous l'action des changements de variables décrits ci-dessus. Plus précisément, on a l'énoncé suivant.

THÉORÈME. — *Soient deux systèmes de n équations de transport :*

$$\begin{aligned}(\partial_t + \lambda_i(\omega)\,\partial_x)\,w_i = 0, &\qquad 1 \leqq i \leqq n,\\ (\partial_s + \lambda'_i(w)\,\partial_y)\,w_i = 0, &\qquad 1 \leqq i \leqq n,\end{aligned}$$

où

$$\lambda'_i = (e_1\lambda_i - g_1)(g_2 - e_2\lambda_i), \qquad e_1(w),\ e_2,\ g_1,\ g_2$$

étant des entropies, et leurs flux, du premier système, tels que $\partial_t e_i + \partial_x g_i \equiv 0$ pour toutes les solutions faibles.

On suppose que le premier système est riche, de sorte que le second l'est aussi.

Soit $\nu_{x,t}$ la mesure de Young d'une suite de solutions oscillantes du premier système, de sorte que $\nu'_{y,s} = \langle \nu_{x,t}, \Delta\rangle^{-1}\Delta\nu_{x,t}$ est celle d'une suite de solutions oscillantes du second.

Alors ν satisfait la formule (2.12) [*sous sa forme plus précise* (2.13) *si* $n > 2$] *si et seulement si ν' satisfait* (2.12) *avec λ'_i et N'_i au lieu de λ_i et N_i.*

En d'autres termes, (2.12) apporte exactement la même information quel que soit le système de variables indépendantes utilisé.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que

$$M_{ij} \overset{def}{=} \partial_i\partial_j \log\left[\Delta\frac{(\lambda'_j - \lambda'_i)\,N'_i N'_j}{(\lambda_j - \lambda_i)\,N_i N_j}\right]$$

est nul. Or

$$M_{ij} = \partial_i\partial_j \log\frac{\Delta^2 N'_i N'_j}{(g_2 - e_2\lambda_i)(g_2 - e_2\lambda_j)\,N_i N_j},$$

et on a vu au 2 qu'on pouvait choisir

$$N'_i = (g_2 - e_2\lambda_i)\,N_i\,\Delta^{-1}.$$

On a donc bien $M_{ij} \equiv 0$.

C.Q.F.D.

La proposition et le théorème expliquent la similitude des calculs de Rascle et l'auteur [24] entre le p-système (dynamique des gaz isentropiques en coordonnées lagrangiennes) et la formulation en coordonnées eulériennes.

Rappelons enfin que l'invariance de la formule (2.12) avait déjà été notée [34] dans le cas de changements affines de variables, cas qui correspond aux entropies constantes.

5. Lien avec les entropies de Lax

Une autre façon de démontrer le théorème est d'utiliser les entropies de Lax, qui peuvent être construites pour tout système riche. Ces entropies dépendent d'un paramètre réel k et d'un indice $i=1$ ou 2. Elles satisfont à la formule asymptotique, lorsque k tend vers l'infini :

$$e^k \sim \mathrm{N}_i(w)\, e^{kw_i}, \qquad g^k \sim \lambda_i \mathrm{N}_i e^{kw_i}. \tag{9.8}$$

Les entropies e^k et f^k sont bien entendu relatives au système (2.1). Il leur correspond par la formule (9.2) des entropies E^k et G^k du système transformé, qui satisfont lorsque k tend vers l'infini :

$$\mathrm{E}^k \sim a(w)\, e^{kw_i}, \qquad \mathrm{G}^k \sim b(w)\, e^{kw_i}. \tag{9.9}$$

Les fonctions a et b sont les solutions du système linéaire

$$e_1 a + e_2 b = \mathrm{N}_i, \qquad g_1 a + g_2 b = \lambda_i \mathrm{N}_i.$$

De ce qui précède, on déduit qu'on peut choisir $a=\mathrm{N}'_i$; on a alors $b=\lambda'_i \mathrm{N}'_i$ et

$$(e_1 + e_2 \lambda'_i)\, \mathrm{N}'_i = \mathrm{N}_i, \qquad (g_1 + g_2 \lambda'_i)\, \mathrm{N}'_i = \lambda_i \mathrm{N}_i. \tag{9.10}$$

Pour trouver le théorème, il suffit de vérifier l'égalité de $(\lambda_2-\lambda_1)\mathrm{N}_1 \mathrm{N}_2$ et de $\Delta(\lambda'_2-\lambda'_1)\mathrm{N}'_1 \mathrm{N}'_2$. Or d'après (9.10) :

$$\begin{aligned}(\lambda_2-\lambda_1)\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2 &= (\lambda_2\mathrm{N}_2)\mathrm{N}_1-(\lambda_1\mathrm{N}_1)N_2\\ &= [(e_1+e_2\lambda'_1)(g_1+g_2\lambda'_2)-(e_1+e_2\lambda'_2)(g_1+g_2\lambda'_1)]\,.\,\mathrm{N}'_1\mathrm{N}'_2\\ &= (e_1g_2-e_2g_1)(\lambda'_2-\lambda'_1)\mathrm{N}'_1\mathrm{N}'_2.\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

X. IDÉES NOUVELLES EN COMPACITÉ PAR COMPENSATION

Ce paragraphe est destiné à donner un cadre général aux calculs que M. Rascle et l'auteur [24] ont menés pour le p-système et la dynamique des gaz isentropiques.

1. Doublement de la mesure de Young

Commençons par une remarque de portée très générale. La plupart des résultats de compacité par compensation concernent des couples (θ, Q) où θ est une mesure de probabilité sur un espace $\mathbb{R}^p$ et Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^p$, qui prend des valeurs positives ou nulles sur un cône convenable. Le résultat s'exprime sous la forme

$$\mathrm{Q}(\langle \theta, \lambda \rangle) \leqq \langle \theta, \mathrm{Q}(\lambda) \rangle, \tag{10.1}$$

où λ désigne l'application identique de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même. Lorsque Q est positive partout, (10.1) n'est rien d'autre que l'inégalité de Jensen.

Un défaut essentiel de cette inégalité est d'être inhomogène par rapport à θ; on le corrige en multipliant le second membre par l'unité $\langle \theta, 1 \rangle$. l'expression obtenue se simplifie grandement par l'introduction du carré tensoriel $\theta \otimes \theta$. Cette nouvelle mesure de probabilité est définie sur $\mathbb{R}^{2p}$ par la formule

$$\langle \theta\otimes\theta, g(\lambda) h(\sigma) \rangle = \langle \theta, g \rangle \langle \theta, h \rangle$$

pour tous g et h dans $\mathscr{C}_k(\mathbb{R}^p)$. La propriété (10.1) équivaut alors à

$$\langle \theta\otimes\theta, Q(\lambda-\sigma) \rangle \geqq 0 \tag{10.2}$$

Cette remarque s'applique bien sûr aux systèmes de lois de conservation; elle permet de simplifier (2.5) en utilisant le carré tensoriel $\nu\otimes\nu$, mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{2n}$. L'équation de Tartar (2.5) équivaut à

$$\langle \nu\otimes\nu, [e][g'] - [e'][g] \rangle = 0, \tag{10.3}$$

pour tous couples (e, g) et (e', g') de $\mathscr{E}$. On a noté $[h](u, v) = h(v) - h(u)$.

Notons avant de poursuivre qu'une remarque analogue a lieu pour les résultats de compacité par compensation concernant des formes homogènes de degré > 2. Pour cela on raisonne par récurrence sur ce degré en utilisant les remarques de F. Murat sur la forme polaire [21] d'une telle forme homogène.

2. Positivité et compacité par compensation

Une idée classique de L. Tartar [38] reprise par R. DiPerna ([8], [9]), puis par Rascle et l'auteur [24], consiste à essayer de définir une mesure bornée μ et une fonction G sur le même espace, de sorte que

$$\mu \geqq 0, \qquad G \geqq 0 \tag{10.4}$$

d'une part,

$$\langle \mu, G \rangle = 0 \tag{10.5}$$

d'autre part.

La mesure μ est construite à partir de ν. C'est ν elle-même pour Tartar ($n=1$); c'est une trace de ν sur une droite caractéristique pour DiPerna ($n=2$); enfin Rascle et Serre choisissent le carré $\nu\otimes\nu$. Pour Tartar et DiPerna, (10.5) est une application plus ou moins directe de la compacité par compensation (2.5); il y a un passage à la limite respectivement à un paramètre dans le travail de DiPerna. En tout état de cause, l'hypothèse de vraie non linéarité est essentielle dans ces deux travaux. Par contre, Rascle et l'auteur établissent (10.5) comme une conséquence de (2.5) et de la conjecture (2.13). L'adoption de cette conjecture permet alors de s'affranchir de toute hypothèse concernant la non-linéarité sur les exemples du p-système et de la dynamique des gaz isentropique. C'est à généraliser ce procédé si efficace que ce paragraphe est consacré.

Lorsque (10.4) et (10.5) sont établis, le support de μ est inclus dans le domaine d'équation $G=0$, sur lequel on a aussi $dG=0$. Ce domaine est en général très petit et connu avec une grande précision dans les exemples de [8], [9], [24], [38] et la conséquence attendue est que Supp ν soit réduit à un point, ou plus généralement que f soit « linéaire » sur Supp ν, de façon qu'on ait

$$\partial_t \langle \nu, \lambda \rangle + \partial_x f(\langle \nu, \lambda \rangle) = 0. \tag{10.6}$$

Naturellement, lorsque le raisonnement ci-dessus est possible, le système (2.1) est bien posé dans L^∞ faible-étoile. Il y a donc des systèmes (*cf.* § III, VII et VIII) pour lesquels cette approche est sans espoir et il serait intéressant de caractériser les systèmes qui conviennent.

Une première idée, plus faible que celle de [24], est de choisir $\mu = \nu \otimes \nu$ et $G = [e][g'] - [e'][g]$, de sorte que (10.3) entraîne (10.5). Malheureusement, le support de μ rencontre la diagonale $\{(u, v) \in \mathbb{R}^{2n};\ v = u\}$, au voisinage de laquelle G n'est pas de signe constant. Par exemple, dans le cas favorable où le système (2.1) est diagonalisable, on peut introduire les invariants de Riemann $w_i (1 \leqq i \leqq n)$ de u et ceux $z_i (1 \leqq i \leqq n)$ de v pour calculer

$$G(u, v) = 4 \sum_{i, j} (\lambda_j - \lambda_i) \frac{\partial e}{\partial w_i} \frac{\partial e'}{\partial w_j} \Delta_i \Delta_j + \mathcal{O}(\Delta^3) \tag{10.7}$$

lorsque v tend vers u. On a noté $\Delta_i = (z_i - w_i)/2$. On remarque que la partie quadratique du second membre de (10.7) ne contient aucun terme carré pour lesquels $j = i$. Si G est de signe constant et $n \geqq 2$, on a donc localement $de \equiv 0$ ou $de' \equiv 0$, de sorte que $G \equiv 0$, ce qui est sans intérêt. Le cas $n = 1$ (*voir* [38]) sera discuté plus loin car il a une portée générale.

3. Doublement de ν dans la conjecture

On se place maintenant dans le cadre des systèmes riches (on peut penser à un système 2×2 général) et on adopte la conjecture (2.13) dans les calculs qui suivent. De même que pour (2.5), nous allons la simplifier en utilisant le carré tensoriel de ν.

Commençons par un exemple simple en supposant que (2.13) s'écrive

$$\langle \nu, g(w_1) h(w_2) \rangle = \langle \nu, g \rangle \langle \nu, h \rangle, \tag{10.8}$$

pour tous g, $h \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. On a supposé $n=2$, ce qui n'est pas restrictif. On constate aisément que (10.8) équivaut à la propriété suivante :

$$\left\langle \nu\otimes\nu, \iint_w^z \mathrm{D}(s)\,ds \right\rangle = 0, \qquad \forall\, \mathrm{D}\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^2), \tag{10.9}$$

où par définition,

$$\iint_w^z \mathrm{D}(s)\,ds = \int_{\omega_1}^{z_1}\int_{w_2}^{z_2} \mathrm{D}(s)\,ds_1\,ds_2.$$

Il est clair que (10.9) entraîne (10.8), au moins pour g et h de classe $\mathscr{C}^1$, en prenant $\mathrm{D}=g'(s_1)h'(s_2)$, puis pour g et h continues par densité. Réciproquement (10.8) entraîne (10.9) dès que D est une combinaison linéaire de produits $a(s_1)b(s_2)$ avec a et b continus. Un raisonnement par densité permet à nouveau de conclure.

Dans le cas général (toujours avec $n=2$, pour alléger la présentation des calculs), la formule (2.13) s'écrit

$$\langle \nu, \rho\rangle\langle \nu, \rho g h\rangle = \langle \nu, \rho g\rangle\langle \nu, \rho h\rangle, \tag{10.10}$$

avec $\rho=(\lambda_2-\lambda_1)\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2$, g et h parcourant $\mathscr{C}(\mathbb{R})$. En remplaçant ν par $\rho\nu$ dans l'argument précèdent, on constate que (10.10) est équivalent à la propriété

$$\left\langle \nu\otimes\nu, \rho(w)\rho(z)\iint_w^z \mathrm{D}(s)\,ds \right\rangle = 0, \tag{10.11}$$

pour tout $\mathrm{D}\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$.

4. Positivité (*bis*)

L'idée de Tartar et DiPerna, une fois remaniée, consiste donc à prendre $\mu=\nu\otimes\nu$ et

$$\mathrm{G}\equiv[e][g']-[e'][g]-\rho(w)\rho(z)\iint_w^z \mathrm{D}(s)\,ds. \tag{10.12}$$

L'égalité (10.5) dépend bien sûr de la validité de la conjecture (2.13). Les couples (e, g) et (e', g') de $\mathscr{E}$ et la fonction $\mathrm{D}\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$ sont à choisir de sorte que G soit de signe constant, sans être trivial. A ce niveau, il est essentiel de noter que les choix de (e, g) et de (e', g') imposent celui de D. En effet, lorsque v tend vers u, on a

$$\mathrm{G}=4(\lambda_2-\lambda_1)\left(\frac{\partial e}{\partial w_1}\frac{\partial e'}{\partial w_2}-\frac{\partial e}{\partial w_2}\frac{\partial e'}{\partial w_1}\right)\Delta_1\Delta_2-4\rho(w)^2\mathrm{D}(w)\Delta_1\Delta_2+\mathscr{O}(\Delta^3),$$

de sorte qu'un signe constant pour G entraîne :

$$D \equiv \rho^{-2}(\lambda_2-\lambda_1)\left(\frac{\partial e}{\partial w_1}\frac{\partial e'}{\partial w_2}-\frac{\partial e}{\partial w_2}\frac{\partial e'}{\partial w_1}\right) \tag{10.13}$$

Il reste maintenant à déterminer si un choix de (e, g), (e', g') dans $\mathscr{E}$ permet avec (10.13) d'obtenir $G \geqq 0$. On a vu que pour certains systèmes, cela ne sera pas possible. Nous allons voir, en cherchant un équivalent de G le long de la diagonale $\{v=u\}$, que les quantités $\partial\lambda_i/\partial w_i$, qui mesurent la non-linéarité du système, jouent un rôle dans le signe de G. Cependant, l'annulation de $\partial\lambda_i/\partial w_i$ ne signifie pas nécessairement un changement de signe pour G, comme le suggèrent les exemples de Rascle et Serre.

5. Un équivalent pour $G(u, v)$

On considère donc G donné par (10.12), D étant défini par (10.13), lorsque v tend vers u. On calcule un développement limité de G à l'ordre 4 en développant chaque terme au point $\frac{w+z}{2}$, à l'ordre 4 pour e, e', g et g', à l'ordre 2 pour ρ et D.

On adopte la convention des indices muets répétés, et on note par un indice i la dérivation par rapport à w_i d'une fonction de w. On a alors

$$\begin{aligned}[e][g']-[e'][g] = {} & 4\Delta_1\Delta_2(\rho^2 D)\left(\frac{w+z}{2}\right) \\ & +\frac{2}{3}\Delta_i\Delta_j\Delta_k\Delta_l(e_{ijk}g'_l+e_l g'_{ijk}-e'_{ijk}g_l-e'_l g_{ijk})+\mathcal{O}(\Delta^5).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\rho(w)\rho(z)\iint_w^z D(s)\,ds = {} & 4(\rho^2 D)\left(\frac{w+z}{2}\right)\Delta_1\Delta_2 \\ & +4(\rho\rho_{ij}-\rho_i\rho_j)D\Delta_1\Delta_2\Delta_i\Delta_j+\frac{2}{3}\rho^2 D_{ii}\Delta_1\Delta_2\Delta_i^2+\mathcal{O}(\Delta^5).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}G(u, v) = {} & c_{1111}\Delta_1^4+c_{1112}\Delta_1^3\Delta_2+c_{1122}\Delta_1^2\Delta_2^2 \\ & +c_{1222}\Delta_1\Delta_2^3+c_{2222}\Delta_2^4+\mathcal{O}(\Delta^5).\end{aligned}$$

En utilisant la formule (2.13) et en appliquant $\partial g/\partial \omega_l = \lambda_l \partial e/\partial w_l$ et de même pour (e', g'), on obtient une expression assez simple des coefficients :

$$c_{1111} = \frac{4}{3}\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1}\left(\frac{\partial e}{\partial w_1}\frac{\partial^2 e'}{\partial w_1^2} - \frac{\partial^2 e}{\partial w_1^2}\frac{\partial e'}{\partial w_1}\right),$$

$$c_{2222} = \frac{4}{3}\frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2}\left(\frac{\partial e}{\partial w_2}\frac{\partial^2 e'}{\partial w_2^2} - \frac{\partial^2 e}{\partial w_2^2}\frac{\partial e'}{\partial w_2}\right),$$

$$c_{1122} = 8\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_1}\frac{\partial \lambda_2}{\partial w_2}(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\left(\frac{\partial e}{\partial w_1}\frac{\partial e'}{\partial w_2} - \frac{\partial e}{\partial w_2}\frac{\partial e'}{\partial w_1}\right)$$

$$\frac{3}{8}c_{1112} = \rho^{-1}(\partial \rho/\partial w_1)^2 \partial/\partial w_1 (\rho^2 \mathrm{D}(\partial \rho/\partial w_1)^{-1}) + f_{11} e'_{12} + f_{12} e'_{11} - e_{11} f'_{12} - e_{12} f'_{11},$$

et c_{1222} obéit à une formule symétrique. On constate que c_{1111} et c_{1122} s'annulent dès que $\partial \lambda_1/\partial w_1 = 0$. Pour que G soit de signe constant, il est donc nécessaire que

$$(\partial \lambda_1/\partial w_1 = 0) \quad \Rightarrow \quad (c_{1112} = c_{1222} = 0), \tag{10.14}$$

puisque la forme biquadratique $c_{ijkl}\Delta_i \Delta_j \Delta_k \Delta_l$ doit être elle aussi de signe constant.

6. Le cas $z_2 = w_2$

Naturellement, (10.4) nécessite au moins la positivité de G sur l'ensemble $\{(u, v);\ w_2 = z_2\}$, ou sur le plan $\{(u, v);\ w_2 = z_2 = \alpha\}$, α étant une constante donnée. Comme une entropie peut être choisie de manière quelconque sur un axe caractéristique $w_2 = \alpha$, et que l'intégrale de D est nulle pour $z_2 = w_2$, on est ramené à l'étude de $[e][g'] - [e'][g] \equiv \mathrm{H}$ lorsque e, g, e', g' sont des fonctions d'une variable satisfaisant $dg/dw = \lambda\, de/dw$, $dg'/dw = \lambda\, de'/dw$ avec le même $\lambda(w)$.

En reprenant des notations classiques pour les dérivées, on a $\mathrm{H} = [e][l] - [k][h]$, où $h' k' \equiv e' l'$. De plus,

$$\frac{3}{4}c_{1111} = h'' k'' - e'' l''.$$

On a vu que la positivité de H entraîne celle de c_{1111}, c'est-à-dire celle de $h'' k'' - e'' l''$. La réciproque est-elle vraie ? En d'autres termes, étant données quatre fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ satisfaisant

$$\left.\begin{aligned} h' k' &\equiv e' l' \\ h'' k'' &\geqq e'' l'', \end{aligned}\right\} \tag{10.15}$$

a-t-on nécessairement

$$(e(y) - e(x))(l(y) - l(x)) \geqq (k(y) - k(x))(h(y) - h(x))$$

pour tous x, y?

La réponse est oui si on suppose de plus que l'inégalité est stricte dans (10.15) et qu'une combinaison linéaire m de e et h (ou de e et k, ou de l et h, ou de l et k) satisfait $m'>0$. Dans ce cas, on peut se ramener à $m\equiv e$, et en posant

$$p\circ e=h, \qquad q\circ e=k, \qquad r\circ e=l,$$

on a $p' q'=r'$, $p'' q''>0$ et

$$H=(y-x)(r(y)-r(x))-(p(y)-p(x))(q(y)-q(x)). \qquad (10.16)$$

Les deux fonctions p et q sont alors soit strictement convexes, soit strictement concaves et une remarque de Tartar [38] indique que $H\geqq 0$.

Dans le cas général cependant, la réponse est non, ce qui est dû indépendamment à C. Réal et B. Sévennec et l'École Normale Supérieure de Lyon. Nous donnons ci-dessous l'argument de Sévennec.

On se place dans le cas où $F=(e, k)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et (e', k') ne s'annule pas, de sorte que $h'=ae'$, $l'=ak'$ où $a(x)$ est régulier. L'hypothèse est alors

$$a' F' \wedge F''\geqq 0. \qquad (10.17)$$

Par ailleurs, la quantité dont on cherche le signe est

$$d\equiv(F(y)-F(x)) \wedge \int_x^y a(s) F'(s)\, ds$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $F(x)=0$, x étant fixé; une intégration par parties donne alors

$$d(y)=-F(y) \wedge \int_x^y a'(s) F(s)\, ds=\int_x^y a'(s)(F(s) \wedge F(y))\, ds. \qquad (10.18)$$

Plaçons-nous dans le cas où la fonction $s\mapsto F(s)$ décrit une courbe strictement convexe dans le plan, c'est-à-dire par exemple $F' \wedge F''>0$ pour tout s. Alors (10.17) entraîne (10.18) si et seulement si $F(s) \wedge F(y)\geqq 0$ pour tout $x\leqq s\leqq y$. En s'affranchissant de la simplification $F(x)=0$, on constate que si (10.15) entraîne $[e][l]-[h][k]\geqq 0$, alors

(i) $$F' \wedge F''>0, \qquad \forall s\in(a, b)$$

entraîne

(ii) $$\begin{cases} (F(s)-F(x)) \wedge (F(y)-F(x))\geqq 0, \\ \qquad \forall x\leqq s\leqq y \quad \text{dans } (a, b). \end{cases}$$

Or cette implication, qui est vraie localement, est fausse globalement. En terme de représentation en coordonnées polaires (r, θ) [en fixant à nouveau $F(x)=0$], (i) signifie que $\theta'(s)>0$, c'est-à-dire que θ est croissant, tandis que (ii) signifie $\theta(y)-\theta(s)\in(0, \pi)$, modulo 2π. N'importe quelle courbe strictement convexe $s \mapsto F(s)$ dont une tangente recoupe la courbe en un autre point constitue un contre-exemple.

RÉFÉRENCES

[1] J. M. BALL, Constitutive Inequalities and Existence Theorems in Non-Linear Elastostatics. *Nonlinear Analysis and Mechanics. Herriot-Watt Symposium*, Edinburgh, vol. **I**, 1976, p. 187-241, KNOPS éd., Pitman.

[2] M. BONNEFILLE, *Thèse*, Saint-Étienne, France, 1987.

[3] M. BONNEFILLE, Propagation des oscillations dans deux classes de systèmes hyperboliques (2×2 et 3×3), *Comm. in PDEs*, vol. **13**, 1988, p. 905-925.

[4] K. N. CHUEH, C. C. CONLEY et J. A. SMOLLER, Positively Invariant Regions for Systems of Nonlinear Diffusion Equations, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. **26**, 1977, p. 373-392.

[5] B. D. COLEMAN et E. H. DILL, *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. **22**, 1971, p. 691-702.

[6] C. DAFERMOS, Estimates for Conservation Laws with Little Viscosity, *S.I.A.M. J. Math. Anal.*, vol. **18**, 1987.

[7] R. J. DIPERNA, Uniqueness of Solutions to Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. **28**, 1979, p. 137-188.

[8] R. J. DIPERNA, Convergence of Approximate Solutions to Conservation Laws, *Arch Rat. Mech. Anal.*, vol. **82**, 1983, p. 27-70.

[9] R. J. DIPERNA, Measured-Valued Solutions to Conservation Laws, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. **88**, 1985, p. 223-270.

[10] H. G. GILQUIN, Glimm's Scheme and Conservation Laws of Mixed Type, *S.I.A.M. J. Sci. Stat. Comput.*, vol. **10**, 1989, p. 133-153.

[11] H. G. GILQUIN et D. SERRE, Well-Posedness of the Riemann Problem; Consistency of the Godunov's Scheme. *Proceeding of an A.M.S.-S.I.A.M. conference*, Bowdoin college, 1988, GLIMM, KEYFITZ et LINDQUIST éd., Contemporary Mathematics n° 100.AMS, Providence, 1989.

[12] J. GLIMM, Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations. *Comm. Pure Appl. Maths.*, vol. **18**, 1965, p. 697-715.

[13] T. Y. HOU, Homogenization for Semilinear Hyperbolic Systems with Oscillatory Data. *Comm. Pure Appl. Maths.*, vol. **41**, 1988, p. 471-495.

[14] E. ISAACSON et B. TEMPLE, *The Structure of Asymptotic States in a Singular System of Conservation Laws* (à paraître).

[15] J. L. JOLY, Sur la propagation des oscillations par un système hyperbolique semi-linéaire en dimension 1 d'espace, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **296**, série I, 1983, p. 669-672.

[16] B. L. KEYFITZ et H. C. KRANZER, A System of Non-Strictly Hyperbolic Conservation Laws Arising in Elasticity Theory, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. **72**, 1980, p. 219-241.

[17] S. N. KRUZKOV, First Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables, *Mat. Sbornik*, vol. **81**, 1970, p. 217-243.

[18] P. D. LAX, Hyperbolic Systems of Conservation Laws. II, *Comm. Pure Appl. Maths.*, vol. **10**, 1957, p. 537-566.

[19] P. D. LAX, Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves, *S.I.A.M. series*, 1973, Philadelphia.

[20] D. MCLAUGHLIN, G. PAPANICOLAOU et L. TARTAR, Weak Limits of Semi-Linear Hyperbolic Systems with Oscillating Data, *Macroscopic Modelling of turbulent flows*, Nice, 1984. *Lect. Notes Phys.*, n° **230**, p. 277-298, Springer-Verlag, Heidelberg.

[21] F. MURAT, Compacité par compensation, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, cl. di Sc., série IV, vol. **5**, 1978, p. 489-507.

[22] F. MURAT, L'injection du cône positif de H^{-1} dans $W^{-1,q}$ est compacte pour tout $q<2$, *J. Math. Pures et Appl.*, t. **60**, 1981, p. 309-322.

[23] R. L. PEGO et D. SERRE, Instabilities in Glimm's Scheme for Two Systems of Mixed Type, *S.I.A.M. J. Num. Anal.*, vol. **25**, 1988, p. 965-988.
[24] M. RASCLE et D. SERRE, Compacité par compensation et systèmes hyperboliques de lois de conservation. Applications, *C.R. Acad. Sci., Paris*, t. **299**, série I, 1984, p. 673-676.
[25] D. A. SAVILLE et O. A. PALUSINSKI, Theory of Electrophoretic Separations, Parts 1 et 2, *A.I.C.H.E. J.*, vol. **32**, 1986.
[26] S. SCHOCHET, Examples of Measure-valued Solutions. *Comm. in PDEs*, vol. **14**, 1989, p. 545-575.
[27] D. SERRE, Systèmes hyperboliques riches de lois de conservation, Collège de France, *Seminar X. Pitman Res. Notes Math. Ser.*, Longman (à paraître).
[28] D. SERRE, Large Oscillations in Hyperbolic Systems of Conservation Laws, *Rend. Sem. Mat.*, Univ. Pol. Torino, Fascicolo speciale 1988, *Hyperbolic equations*, 1987, p. 185-201.
[29] D. SERRE, Propagation des oscillations dans les systèmes hyperboliques non linéaires, *Nonlinear Hyperbolic Problems*, Proceedings, Saint-Étienne, 1986, *Lecture Notes in Maths*, n° **1270**, Springer-Verlag, 1987.
[30] D. SERRE, Domaines invariants pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation. *J. Diff. Eq.*, **69**, 1987, p. 46-62.
[31] D. SERRE, Les ondes planes en électromagnétisme non linéaire, *Physica D*, vol. **31**, 1988, p. 227-251.
[32] D. SERRE, Un système hyperbolique non linéaire avec des données oscillantes, *C.R. Acad. Sci., Paris*, t. **302**, série I, 1986, p. 115-168.
[33] D. SERRE, Solutions à variation bornée pour certains systèmes hyperboliques de lois de conservation, *J. Diff. Eq.*, vol. **68**, 1987, p. 137-168.
[34] D. SERRE, La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations à une dimension d'espace, *J. Math. Pures et Appl.*, t. **65**, 1986, p. 423-468.
[35] D. SERRE, Compacité par compensation et systèmes hyperboliques de lois de conservation, *C.R. Acad. Sci., Paris*, t. **299**, série I, 1984, p. 555-558.
[36] D. SERRE, Richness and the Classification of Quasilinear Hyperbolic systems, *I.M.A. volumes in Mathematics and its applications n°* 29, J. GLIMM & A. MAJDA éds., Springer-Verlag, Heidelberg.
[37] D. SERRE, Systèmes d'EDO invariants sous l'action de systèmes hyperboliques d'EDPs, *Ann. Inst. Fourier*, vol. **39**, 1989, p. 953-968.
[38] L. TARTAR, Compensated Compactness and Applications to PDEs, *Nonlinear Analysis et Mechanics*, Herriot Watt Symposium, 1979, *Pitman Res. Notes Maths.*
[39] L. TARTAR, *Cours Peccot*, Collège de France, non publié.
[40] B. TEMPLE, Systems of Conservation Laws with Invariant Submanifolds, *Trans. A.M.S.*, vol. **280**, 1983, p. 781-795.
[41] T. D. VENTTSEL', Estimates of Solutions of the One-Dimensional System of Equations of Gas Dynamics With "Viscosity" Not Depending on "Viscosity", *J. Soviet Maths.*, vol. **31**, 1985, p. 3148-3153.
[42] D. H. WAGNER, Equivalence of the Euler and Lagrangian Equations of Gas Dynamics for Weak Solutions, *J. Diff. Eq.*, vol. **68**, 1967, p. 118-136.
[43] J. DUCHON et R. ROBERT, Élargissement diphasique d'une nappe tourbillonaire en dynamique du fluide parfait incompressible, Preprint, Equipe d'Analyse Numérique Lyon-I, n° **64**, 1987.

(*Manuscrit reçu Novembre* 1989.)