

## **Exposant critique de Sobolev et régularité des solutions d'équations elliptiques**

par

**A. BENMOHAMED et L. ROBBIANO**

Université de Paris-Sud, Bâtiment n° 425, Mathématiques, 91405 Orsay Cedex, France

---

**RÉSUMÉ.** — Nous étudions la régularité des solutions de problèmes elliptiques avec des termes d'ordre un [resp. zéro] à coefficients dans  $L^n(\mathbf{R}^n)$  [resp.  $L^{n/2}(\mathbf{R}^n)$ ]. Cela permet de déduire la régularité des solutions de certains problèmes elliptiques non linéaires avec exposant critique de Sobolev.

*Mots clés :* Opérateurs elliptiques, régularité, exposant critique de Sobolev.

**ABSTRACT.** — We study the regularity of solutions to elliptic problems. The coefficients of the term of order one [resp. zero] are in  $L^n$  [resp.  $L^{n/2}$ ]. This allows us to deduce the regularity of solutions to some non linear elliptic problems with Sobolev critical exponent.

---

### **INTRODUCTION**

Ce travail a pour but l'étude systématique de la régularité des solutions d'équations elliptiques où interviennent des problèmes liés aux exposants critiques de Sobolev.

---

*Classification A.M.S. :* 35 B 65, 35 J 60..

*Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449*  
Vol. 8/91/01/103/15/\$3.50/

Ces problèmes se rencontrent, par exemple, dans les trois équations suivantes :

(1) Métriques conformes

$$\Delta u = R u^{(n+2)/(n-2)}, \quad n \geq 3, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

(2) Problème modèle (voir Aguirre, Escobedo et Zuazua [1])

$$u = |\nabla u|^{1+2/n}, \quad n \geq 3, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^n).$$

(3) Surface à courbure moyenne constante

$$\Delta u = 2H \partial_x u \wedge \partial_y u$$

où  $u: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  et  $u \in H^1(\mathbf{R}^2)$ ,  $H$  une fonction lipschitzienne.

Ces trois problèmes sont critiques car le gain de régularité des solutions ne s'obtient pas en appliquant seulement l'injection de Sobolev et la régularité des solutions des problèmes elliptiques.

Le premier théorème s'applique à la régularité des solutions de

$$A u = V_1 u + V_2 \nabla u + \sum_{i=1}^n v_i \partial_{x_i} (V_3^i u)$$

où  $A$  un opérateur elliptique d'ordre 2.

Ce théorème permet de traiter les exemples (1) et (2) ((1) est bien connu voir Trudinger [12] et Brezis-Kato [5]).

L'exemple (3), dont la régularité des solutions est par ailleurs connue (Wente [13]) ne rentre pas dans le cadre du premier théorème. Néanmoins, la méthode de démonstration s'adapte à ce cas, ce qui fait l'objet du deuxième théorème.

## 1. RÉSULTATS

### (a) Énoncé du théorème 1

Soit  $A$  un opérateur d'ordre deux, mis sous forme divergence

$$A = \sum_{1 \leq i, j \leq m} \partial_i (a_{ij} \partial_j)$$

où  $a_{ij} \in C^s(\Omega)$ ,  $0 < s < 1$ ,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ;  $C^s(\Omega)$  est l'espace de Holder;  $u \in C^s(\Omega)$  si  $u \in L^\infty$  et

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s} \leq C$$

pour  $x, y \in \Omega$ . On suppose  $A$  elliptique près d'un point  $x_0 \in \Omega$ , c'est-à-dire

$$\sum_{i, j} a_{ij}(x_0) \xi_i \xi_j \neq 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}^n / \{0\}.$$

Pour  $1 < p < +\infty$ ,  $s \in \mathbf{R}$ , on note

$$H^{s, p} = \{ u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) / (1 - \Delta)^{s/2} u \in L^p \}.$$

On dit que  $u \in H_{x_0}^{s, p}$  s'il existe une fonction  $\chi \in C_0^\infty$ ,  $\chi = 1$  près de  $x_0$  telle que  $\chi u \in H^{s, p}$ .

Soit  $u \in H_{x_0}^{1, p}$ ,  $1 < p < +\infty$  vérifiant

$$(4) \quad Au = V_1 u + \sum_{i=1}^n V_2^i \partial_i u + \sum_{i=1}^n v_i \partial_i (V_3^i u) + f.$$

Avec  $V_1 \in L_{x_0}^{n/2}$ ,  $V_2^i, V_3^i \in L_{x_0}^7$ ,

$$v_i \in \text{Lip} \quad (v_i, \nabla v_i \in L^\infty),$$

et  $f \in H_{x_0}^{\sigma-1, p}$  avec  $\sigma < s$ .

(5) On suppose que  $p < n$ .

De plus, on fait les hypothèses suivantes :

(6) si  $V_1 \neq 0$  ou  $V_2^i \neq 0$  alors  $\frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{p}$ .

(7) si  $V_3^i \neq 0$  alors  $\frac{1+\sigma}{n} < \frac{1}{p}$ .

THÉORÈME 1. — Soit  $u$  une solution du problème 4 vérifiant les conditions 5, 6 et 7 alors

$$\begin{aligned} \text{si } V_3^i &= 0, & u &\in H_{x_0}^{1+\sigma, p} \\ \text{si } V_3^i &\neq 0, & u &\in H_{x_0}^{1, r} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n}.$$

Remarques. — 1. Les hypothèses très faibles faites sur les fonctions  $V_j^i$  permettent d'appliquer ce théorème à des situations non linéaires avec exposant critique de Sobolev. Par exemple

$$\begin{aligned} u &\in H_{x_0}^1 \quad (H^1 = H^{1, 2}), \\ Au &= |\nabla u|^{1+(2/n)} = \sum_{i=1}^n V_i \partial_i u \end{aligned}$$

avec  $V_i = |\nabla u|^{(2/n)-1} \partial_i u$ . On a bien  $V_i \in L_{x_0}^n$ .

2. C'est une généralisation d'un théorème de Brezis et Kato [5]. Ces auteurs se placent dans le même cadre que nous mais avec  $V_2^i = V_3^i = 0$ .

3. Notre méthode de démonstration repose sur le calcul pseudo-différentiel ou plutôt le calcul paradifférentiel puisque les coefficients de  $A$  sont peu réguliers. La difficulté essentielle provient de la présence de certains opérateurs à coefficients dans  $L^p$  pour lesquels nous n'avons aucun calcul symbolique; ce qui, en partie, explique l'absence d'une version microlocale

du théorème 1. Cependant, on peut inverser (localement) ces opérateurs, puis étudier l'action, sur les espaces  $H^{s, p}$ , des inverses.

4. Beaucoup de travaux ont été faits sur la régularité (voir par exemple Trudinger [12]) ou sur l'existence (Brezis-Nirenberg [7]) des solutions d'équations du type  $Au = u^{(n+2)/(n-2)}$ . Mais peu de choses semblent connues pour des équations contenant des termes non linéaires d'ordre un avec exposant critique de Sobolev. Ce qui a motivé notre étude est le problème de Plateau qui consiste à résoudre l'équation  $\Delta u = 2H u'_x \wedge u'_y$  où  $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ , avec des conditions au bord de  $\Omega$  (voir Brezis et Coron [6] et leur bibliographie sur le problème de l'existence). Si  $u \in H^1$  avec les conditions au bord  $C^\infty$  (voir Wente [13], s'appuyant sur un résultat de Morrey [11]) alors  $u \in C^\infty$ .

Le théorème 1 ne s'applique pas à cette équation car l'hypothèse  $p < n$  n'est pas vérifiée (ici  $p = n = 2$ ). Plus précisément, la difficulté est la suivante :  $u'_x \wedge u'_y \in L^1$  donc  $\Delta u \in L^1$ .

De cela on ne peut pas déduire que

$$u \in H^{2,1} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n), \partial^\alpha u \in L^1, |\alpha| \leq 2\}.$$

Cependant, la technique développée pour démontrer le théorème 1 s'adapte à ce cas. Ce qui fait l'objet du théorème 2.

### (b) Énoncé du théorème 2

Soit  $u \in H^1_{(x_0, y_0)}$

$$u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbf{R}^2.$$

On appelle  $(x, y)$  les variables de  $\mathbf{R}^2$ . Soit  $A$  un opérateur matricielle d'ordre 2 elliptique près de  $(x_0, y_0)$  où chaque élément de la matrice s'écrit sous forme de divergence avec des coefficients  $C^s$  ( $0 < s < 1$ ).

La fonction  $u$  vérifie

$$(8) \quad Au = H(x, y)[\partial_x u \wedge \partial_y V - \partial_y u \wedge \partial_x V] + f$$

où  $V \in H^1_{(x_0, y_0)}$ ,  $V: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $f \in H^{\sigma-1}_{(x_0, y_0)}$ ,  $\sigma < s$ , et  $H \in \text{Lip}$ .

**THÉORÈME 2.** — Soit  $u \in H^1_{(x_0, y_0)}$  vérifiant l'équation (8) alors  $u \in H^{1+\sigma'}_{(x_0, y_0)}$ , pour  $\sigma' < \sigma$ .

*Remarques.* — 1. Bien entendu, l'énoncé de ce théorème est moins satisfaisant que celui du théorème 1. Mais comme il traite un problème géométrique important, il nous a semblé intéressant. Il est probable que pour des problèmes voisins, le théorème 1 ne s'applique pas mais que la technique de démonstration s'adapte.

2. Les résultats de régularité connus sur le problème de Plateau sont de nature différente. En effet, dans Wente [13], ce sont les points critiques d'une certaine fonctionnelle prise sur un certain espace, qui sont  $C^\infty$

jusqu'au bord si les données sont  $C^\infty$  (et analytiques si les données sont analytiques).

Le théorème 2 est un résultat local, seules les propriétés locales de  $A$ , de  $u$ , de  $V$ , et de  $f$ , interviennent. Ce qui est la situation habituelle pour un problème elliptique.

## 2. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

### (a) Rappels sur les opérateurs paradifférentiels

Nous allons rappeler quelques résultats classiques.

- Soit  $K > 1$  et soit  $(\psi, \varphi)$  un couple de fonctions de  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  tel que

$$\text{supp } \psi \subset \{ \eta \in \mathbf{R}^n \mid |\eta| \leq 1 \} \quad \text{et} \quad \psi(\eta) = 1$$

quand

$$|\eta| \leq \frac{1}{K} \quad \text{et} \quad \text{supp } \varphi \subset \left\{ \eta \in \mathbf{R}^n \mid \frac{1}{K} \leq |\eta| \leq 2K \right\}.$$

$(K, \psi, \varphi)$  est une décomposition dyadique de l'unité si pour tout  $\eta \in \mathbf{R}^n$ ,  $\psi(\eta) + \sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j} \eta) = 1$ .

- Une classe de symbole.

Pour  $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$  et  $m \in \mathbf{R}$ , on notera par  $\Sigma_\sigma^m$  l'ensemble des fonctions  $a : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$  vérifiant pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ .

(9)  $x \mapsto \partial_\eta^\alpha a(x, \eta)$  est une fonction de  $C^\sigma(\mathbf{R}^n)$ ;

(10) il existe une constante positive  $C^\alpha$  telle que

$$\| \partial_\eta^\alpha a(\cdot, \eta) \|_{C^\sigma} \leq C_\alpha (1 + |\eta|)^{m - |\alpha|}.$$

$\Sigma_\sigma^m$  peut être muni d'une structure d'espace de Frechet. A cette classe de symbole, on peut associer des opérateurs de  $\mathcal{C}_0^\infty$  dans  $\mathcal{D}'$  comme indiqué au paragraphe suivant.

- Opérateurs para-différentiels et pseudo-différentiels.

Une décomposition dyadique est choisie. Soit  $a \in \Sigma_\sigma^m$ ; pour  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ , on note par  $T_a$  l'opérateur défini par

$$(11) \quad T_a u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\eta} A_{k-N_0}(x, \eta) \hat{u}_k(\eta) d\eta,$$

où  $\hat{u}_k(\eta) = \varphi(2^{-k} \eta) \hat{u}(\eta)$ , pour  $k \geq 0$  et  $\hat{u}_{-1}(\eta) = \psi(\eta) \hat{u}(\eta)$

$$A_{k-N_0}(x, \eta) = \mathcal{F}^{-1} \psi(2^{-k+N_0-1} \xi) \mathcal{F} a(\xi, \eta)(x)$$

et  $N_0$  étant choisi assez grand pour que le spectre de  $x \mapsto \int e^{ix\eta} A_{k-N_0}(x, \eta) \hat{u}_k(\eta) d\eta$  soit dans une couronne de type  $\left\{ \eta \in \mathbf{R}^n \mid \frac{2^k}{K} \leq |\eta| \leq 2^{k+1} \tilde{K} \right\}$ .

Les opérateurs  $T_a$  jouissent des propriétés suivantes,

(1)  $T_a$  est un opérateur borné de  $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$  avec  $s \in \mathbf{R}$ ,  $1 < p < +\infty$  dans  $H^{s-m,p}(\mathbf{R}^n)$  avec une norme d'opérateur majorée par une semi-norme de  $a$ .

(13)  $T_a$  dépend du choix de  $N_0$  et de la décomposition dyadique; cependant une modification du choix de  $N_0$  ou de la décomposition pour  $T_a$  modifie cet opérateur par l'addition d'un opérateur  $\sigma$ -régularisant, c'est-à-dire borné de  $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$  dans  $H^{s-m+\sigma-\varepsilon,p}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , et dont la norme d'opérateur est majorée par une semi-norme de  $a$ . Désormais, nous appellerons opérateur paradifférentiel, tout opérateur qui ne diffère de  $T_a$  que d'un opérateur  $\sigma$ -régularisant.

Les opérateurs paradifférentiels ont été introduits par Bony [3], les propriétés ci-dessus découlent des travaux de Meyer [10], Metivier [9], et Benmohamed [2].

On pourra consulter Bourdaud [4] et Hörmander [8] pour une étude détaillée de ces classes.

Si  $a \in \Sigma_\sigma^m$ , on note par  $a(x, D)$  l'opérateur pseudo-différentiel défini par

$$a(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\eta} a(x, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta \quad \text{pour } u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

La différence entre  $a(x, D)$  et  $T_a$  est, dans certains cas, régularisante (voir [2]).

PROPOSITION 3. — Soit  $a \in \Sigma_\sigma^m$  et  $s \in \mathbf{R}$  tels que  $\sigma + s - m > 0$ . Alors l'opérateur  $a(x, D) - T_a$  est un opérateur borné de  $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$  dans  $H^{s',p}(\mathbf{R}^n)$  avec  $1 < p < +\infty$  et  $s' < \min(\sigma, \sigma + s - m)$ .

Ce qui, dans ces cas, permet de remplacer  $a(x, D)$  par  $T_a + R$ .

En vue d'inverser les opérateurs elliptiques, nous aurons besoin d'un calcul symbolique sur la classe  $\Sigma_\sigma^m$ .

PROPOSITION 4. — Soit  $a \in \Sigma_\sigma^m$  et  $b \in \Sigma_\sigma^{m'}$ . Il existe  $C \in \Sigma_\sigma^{m+m'}$  tel que

$$c - a \# b \in \bigcap_{0 < \varepsilon \leq \sigma - [\sigma]} \Sigma_\sigma^{m+m'-\sigma+\varepsilon}$$

(où  $a \# b = \sum_{|\alpha| \leq [\sigma]} \partial_\eta^\alpha a D_x^\alpha b / \alpha!$ )

et  $T_a \circ T_b \equiv T_c$  modulo un opérateur  $\sigma$ -régularisant. On a noté par  $[\sigma]$  la partie entière de  $\sigma$ .

Remarquons que si  $0 < \sigma < 1$ ,  $[T_a, T_b] = T_a \circ T_b - T_b \circ T_a$  est un opérateur d'ordre  $m + m'$  et de régularité  $\sigma$ , mais de symbole nul et, par conséquent, il est  $\sigma$ -régularisant.

PROPOSITION. — Soit  $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \xi^\alpha$  avec  $a \in \Sigma_\sigma^2$ , on suppose que  $a(0, \xi) \neq 0$  pour tout  $\xi \neq 0$ . Il existe alors une fonction  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  égale à 1 au voisinage de zéro et un symbole  $b \in \Sigma_\sigma^{-2}$  tels que

$$T_b \circ T_a \equiv \chi \text{ modulo un opérateur } \sigma\text{-régularisant}$$

En tant qu'opérateur,  $\chi$  est défini par  $\chi : u \mapsto \chi \cdot u(x) = \chi(x) u(x)$ .

(b) Réduction du problème

Les hypothèses sont locales; pour se placer dans des espaces globaux il suffit de tronquer  $u$  avec une fonction  $\chi \in C_0^\infty$   $\chi$  valant 1 près de  $x_0$ , et de multiplier l'équation (4) par une autre fonction  $C_0^\infty$  à support  $\subset \{\chi = 1\}$  et valant 1 près de  $x_0$ . La forme de l'équation (4) est alors conservée, avec des hypothèses globales sur les  $V$ ,  $u$  et  $f$ .

Nous allons montrer qu'on peut remplacer l'opérateur

$$A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j)$$

par un paradifférentiel de symbole

$$a(x, \xi) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j.$$

En effet,  $a_{ij} \in \Sigma_s^0$  d'après la proposition 3,  $a_{ij} - T_{a_{ij}}$  est borné de  $H^{\sigma, p}$  dans  $H^{\sigma', p}$  pour  $\sigma' < \min(s, \sigma + s)$ .

Pour  $u \in H^{1, p}$ ,  $\partial_j u \in H^{0, p} = L^p$  donc  $a_{ij} \partial_j u - T_{a_{ij}} \partial_j u \in H^{\sigma, p}$  pour  $\sigma < s$ . Donc  $\partial_i a_{ij} \partial_j u - \partial_i T_{a_{ij}} \partial_j u \in H^{\sigma-1, p}$ . Le calcul symbolique (proposition 4) permet d'écrire  $\partial_i T_{a_{ij}} \partial_j u = T_{a_{ij} \xi_i \xi_j} u$  modulo un terme dans  $H^{\sigma-1, p}$ . Donc

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j u) = T_a u + f.$$

ou  $f \in H^{\sigma-1, p}$  avec  $\sigma < s$  et  $a(x, \xi)$  comme annoncé ci-dessous. Pour finir, nous remplaçons les  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  par  $\tilde{V}_i + \hat{V}_i$  où  $\tilde{V}_1 \in L^{n/2}$  avec  $\|\tilde{V}_1\|_{L^{n/2}} \leq \varepsilon$ ,  $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3 \in L^n$  avec  $\|\tilde{V}_i\|_{L^n} \leq \varepsilon$ ,  $i = 2, 3$  et  $\hat{V}_i \in C_0^\infty$ . Le paramètre  $\varepsilon$  sera choisi au paragraphe 3. On vérifie facilement que les termes provenant de  $\hat{V}_i$  peuvent être incorporés au reste  $f$ .

### 3. PREUVES DES THÉORÈMES DE RÉGULARITÉS

#### (a) Preuve du théorème 1

Après les réductions du paragraphe 2(b), la solution  $u$  du problème vérifie l'équation suivante

$$(14) \quad T_a u = V_1 u + \sum_{i=1}^n V_2^i \partial_i u + \sum_{i=1}^n v_i (\partial (V_3^i u)) + f$$

où

$$\begin{aligned} & u \in H^{1, p} \\ & a \in \Sigma_s^2 \\ & V_1 \in L^{n/2} \quad \text{avec} \quad \|V_1\|_{L^{n/2}} \leq \varepsilon \\ & V_2^i, V_3^i \in L^n \quad \text{avec} \quad \|V_j^i\|_{L^n} \leq \varepsilon, \quad j=2, 3 \\ & v_i \in \text{Lip} \\ & f \in H^{\sigma-1, p}, \quad s > \sigma > 0 \end{aligned}$$

Appelons  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ , les opérateurs suivants

$$\begin{aligned} Z_1 u &= V_1 u \\ Z_2 u &= \sum_{i=1}^n V_2^i \partial_i u \\ Z_3 u &= \sum_{i=1}^n v_i \partial_i (V_3^i u) \end{aligned}$$

(15) On a

$$\begin{aligned} Z_j &: H^{1, p} \rightarrow L^q, \quad j=1, 2 \\ Z_3 &: H^{1, p} \rightarrow H^{-1, p} \end{aligned}$$

avec  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$ , et des normes opérateurs majorées par une constante fois  $\varepsilon$ .

En effet :  $u \in H^{1, p} \subset L^{q_1}$  avec  $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ , si  $\frac{1}{n} < \frac{1}{p}$ .

(16) Donc

$$\begin{aligned} \|Z_1 u\|_{L^q} &= \|V_1 u\|_{L^q} \leq \|V_1\|_{L^{n/2}} \|u\|_{L^{q_1}} \\ &\leq C \varepsilon \|u\|_{H^{1, p}}. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{1}{n} < \frac{1}{p}$ ; et  $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$  on a

$$\begin{aligned} \|Z_2 u\|_{L^q} &\leq \sum_{i=1}^n \|V_2^i \partial_i u\|_{L^q} \leq \sum_{i=1}^n \|V_2^i\|_{L^n} \|\partial_i u\|_{L^p} \\ &\leq C \varepsilon \|u\|_{H^{1, p}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|Z_3 u\|_{H^{-1, p}} &\leq C \sum_{i=1}^n \|\partial_i (V_3^i u)\|_{H^{-1, p}} \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \|V_3^i u\|_{L^p} \end{aligned}$$

or

$$C \sum_{i=1}^n \|V_3^i u\|_{L^p} \leq C \sum_{i=1}^n \|V_3^i\|_{L^n} \|u\|_{L^{q_1}}$$

finalemt

$$\|Z_3 u\|_{H^{-1, p}} \leq C \varepsilon \|u\|_{H^{1, p}}$$

Soit  $b \in \Sigma_s^{-2}$  tel que  $T_b T_a = \chi(x) + R$  où  $R : H^{\delta, t} \rightarrow H^{\delta+\sigma, t}$  ( $\sigma < s$ ) pour tout  $\delta \in \mathbf{R}$ ,  $1 < t < +\infty$  et  $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ .

On applique  $T_b$  à (14), on a

$$(17) \quad \chi u = T_b Z_1 u + T_b Z_2 u + T_b Z_3 u + h$$

où  $h = T_b f - R u \in H^{1+\sigma, p}$ , car  $f \in H^{\sigma-1, p}$ ,

D'après (12), (15) et (16), on a  $T_b Z_j u \in H^{2, q} \subset H^{1, p}$ ,  $j=1, 2$  et  $T_b Z_3 u \in H^{1, p}$ .

De plus,

$$\|T_b Z\|_{H^{1, p} \rightarrow H^{1, p}} \leq C \varepsilon.$$

On note  $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$ . L'idée est la suivante; on a un opérateur  $\chi - T_b Z$  qui envoie  $H^{1, p}$  dans  $H^{1, p}$  avec  $T_b Z$  de norme petite. On va l'inverser avec une série de Neumann,  $\chi$  étant presque l'identité.

D'une façon précise, on pose

$$\chi u = v \in H^{1, p}$$

(17) devient

$$(18) \quad v - T_b Z v = T_b Z (1 - \chi) u + h$$

avec  $h \in H^{1+\sigma, p}$ .

Il s'ensuit que

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (T_b Z)^k (1 - \chi) u + \sum_{k=0}^{\infty} (T_b Z)^k h$$

si  $\varepsilon$  est pris suffisamment petit pour que

$$\|T_b Z\|_{H^{1, p} \rightarrow H^{1, p}} \leq \frac{1}{2}.$$

Commençons par démontrer que le deuxième terme de  $v$  vérifie les affirmations du théorème. On remarque que  $T_b Z_j$  opère de  $H^{1+\sigma, p}$  dans  $H^{1+\sigma, p}$  avec une norme petite si  $j=1$  ou  $2$  et que  $T_b Z_3$  opère de  $H^{1, r}$  dans  $H^{1, r}$  avec une norme petite. En effet, si  $g$  est dans  $H^{1+\sigma, p}$ , on a

$$(19) \quad \begin{aligned} \|T_b Z_1 g\|_{H^{1+\sigma, p}} &\leq C \|T_b Z_1 g\|_{H^{2, \mu}} \\ &\leq C \|V_1 g\|_{L^\mu} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{L^v} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1+\sigma, p}} \end{aligned}$$

avec  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{p} + \frac{1-\sigma}{n}$  et  $\frac{1}{v} = \frac{1}{p} - \frac{1+\sigma}{n}$ .

(20) De même

$$\begin{aligned} \|T_b Z_2 g\|_{H^{1+\sigma, p}} &\leq C \|T_b Z_2 g\|_{H^{2, \mu}} \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \|V_1^i \partial_i g\|_{L^\mu} \\ &\leq C \varepsilon \|\nabla g\|_{L^r} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1, r}} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1+\sigma, p}} \end{aligned}$$

avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n}$ .

(21) Enfin

$$\begin{aligned} \|T_b Z_3 g\|_{H^{1, r}} &\leq C \sum_{i=1}^n \|\partial_i (V_3^i g)\|_{H^{-1, r}} \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \|V_3^i g\|_{L^r} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{L^v} \\ &\leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1, r}} \end{aligned}$$

avec  $g \in H^{1+\sigma, p} \subset H^{1, r}$ .

Il reste à traiter le premier terme. On va utiliser le fait que le support de  $1-\chi$  est loin de  $x_0$ .

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ , avec support  $\varphi$  compact dans un ouvert contenu dans  $\{\chi=1\}$ . De sorte que  $\varphi(1-\chi)=0$ .

LEMME 5.

$$(22) \quad \varphi T_b = T_b \varphi + R,$$

avec  $R: H^{\delta, t} \rightarrow H^{\delta+2+\sigma, t}$  pour  $\delta \in \mathbf{R}$  et  $1 < t < \infty$ . En outre

$$(23) \quad \varphi Z_2 = Z_2 \varphi + \tilde{V}_2,$$

avec  $\tilde{V}_2 \in L^n$ , et finalement

$$(24) \quad \varphi Z_3 = Z_3 \varphi + \tilde{V}_3 \quad \text{avec} \quad \tilde{V}_3 \in L^n.$$

(22) résulte de la proposition 4.

(23) vient de

$$\varphi Z_2 w - Z_2 \varphi w = - \sum_{i=1}^n V_2^i (\partial_i \varphi) w.$$

(24) vient de

$$\varphi Z_3 w - Z_3 \varphi w = - \sum_{i=1}^n v_i V_3^i (\partial_i \varphi) w.$$

Avec le R du (22) du lemme 5 et une fonction  $V \in L^n$ , on a

$$(25) \quad \varphi (T_b Z)^k = (T_b Z)^k \varphi + \sum_{j=0}^k (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V) (T_b Z)^j.$$

On a déjà vérifié que

$$\|T_b Z g\|_{H^{1+\sigma, p}} \leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1, p}} \quad \text{si} \quad V_3^i = 0$$

D'autre part, quand  $V_3^i \neq 0$ , en reportant dans la preuve de (19) et (20) les inégalités de Sobolev

$$\|g\|_{L^v} \leq C \|g\|_{H^{1, r}}$$

et

$$\|g\|_{H^{1, r}} \leq C \|g\|_{H^{1+\sigma, p}}.$$

on obtient alors,

$$\|T_b Z g\|_{H^{1, r}} \leq C \varepsilon \|g\|_{H^{1, r}} \quad \text{si} \quad V_3^i \neq 0.$$

On choisit  $\varepsilon > 0$  tel que tous les  $C \varepsilon \leq \delta$  (on peut prendre  $\delta = \frac{1}{2}$ ).

Si  $V_3^i = 0$ , on a  $\left(\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned} & \| (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V) (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma, p}} \\ & \leq \delta^{k-j-1} [ \| RZ (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma, p}} + \| (T_b V) (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma, p}} ] \\ & \leq C \delta^{k-j-1} [ \| RZ (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma, q}} + \| (T_b V) (T_b Z)^j g \|_{H^{2+\sigma, p}} ] \\ & \leq C \delta^{k-j-1} [ \| Z (T_b Z)^j g \|_{L^q} + \| V (T_b Z)^j g \|_{L^p} ] \\ & \leq C \delta^{k-j-1} [ \| (T_b Z)^j g \|_{H^{1, p}} + \| (T_b Z)^j g \|_{H^{1, p}} ] \quad [\text{voir (15)}] \\ & \leq C \delta^{k-1} \|g\|_{H^{1, p}} \end{aligned}$$

La constante C ne dépend pas de k. Si  $V_3^i \neq 0$ , on a de même

$$\begin{aligned} & \| (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V) (T_b Z)^j g \|_{H^{1, r}} \\ & \leq \delta^{k-j-1} [ \| RZ (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma, p}} + \| T_b V (T_b Z)^j g \|_{H^{1+\sigma, p}} ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \delta^{k-j-1} [\|RZ_3(T_b Z)^j g\|_{H^{1+\sigma, p}} \\
&+ \|T_b V(T_b Z)^j g\|_{H^{2, p}} + \|R(Z_1 + Z_2)(T_b Z)^j_g\|_{H^{2+\sigma, q}}] \\
&\leq C \delta^{k-j-1} [\|Z_3(T_b Z)^j g\|_{H^{-1, p}} \\
&+ \|V(T_b Z)^j g\|_{L^p} + \|(Z_1 + Z_2)(T_b Z)^j\|_{L^q}] \\
&\leq C \delta^{k-j-1} \|(T_b Z)^j g\|_{H^{1, p}} \\
&\leq C \delta^{k-1} \|g\|_{H^{1, p}}.
\end{aligned}$$

Or  $C$  ne dépend pas de  $k$ .

En définitive, (18) et (25) donnent

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(T_b Z)^{k+1} (1-\chi) u = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k (T_b Z)^{k-j} [RZ + T_b V](T_b Z)^j (1-\chi) u$$

et la norme  $H^{1+\sigma, p}$  (où  $H^{1, r}$  si  $V_3 \neq 0$ ) de cette expression est majorée par

$$C \sum_{k=0}^{\infty} k \delta^k \|u\|_{H^{1, p}} \leq C \|u\|_{H^{1, p}}.$$

### (b) Preuve du théorème 2

Après les réductions du paragraphe 2(b), la solution  $u$  du problème vérifie l'équation suivante :

$$(26) \quad T_a u = 2H(x)(\partial_x u \wedge \partial_y V - \partial_y u \wedge \partial_x V) + f$$

avec  $f \in H^{\sigma-1}$ ,  $1 > \sigma > 0$ ,  $H \in \text{Lip}$ .

On note

$$(27) \quad Z_d g = \partial_x (g \wedge \partial_y d) - \partial_y (g \wedge \partial_x d).$$

où

$$\begin{aligned}
d &\in H^1, & d: \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\
g &\in H^\alpha, & g: \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^3, & \alpha > 0.
\end{aligned}$$

On remarque que

$$(28) \quad Z_d g = \partial_x g \wedge \partial_y d - \partial_y g \wedge \partial_x d$$

si  $\alpha \leq 1$ .

On note

$$V = \tilde{V} + \beta \quad \text{ou} \quad \tilde{V} \in H^1, \quad \|\tilde{V}\|_{H^1} \leq \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est à fixer et où  $\beta \in \text{Lip}$ .

(26) devient (en remplaçant la notation  $\tilde{V}$  par  $V$ )

$$(29) \quad T_a u = H(x) Z_V u + \tilde{f},$$

où  $\tilde{f} = f + \partial_x u \wedge \partial_y \beta - \partial_y u \wedge \partial_x \beta \in H^{\sigma-1}$ .

*Remarque.* — Il est très important pour la preuve du théorème que le second membre soit de la forme  $Z_V u$  de telle façon que  $Z_V$  s'écrive, soit sous la forme (27), soit sous la forme (28). Ce que l'on va voir dans la preuve du lemme suivant.

LEMME 6.

(30) Si  $0 < \alpha < 1$ ,  $Z_V : H^\alpha \rightarrow H^{-1, q}$ , avec  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ .

(31) Si  $1 < \alpha < 2$ ,  $Z_V : H^\alpha \rightarrow L^r$  avec  $\frac{1}{r} = 1 - \frac{\alpha - 1}{2}$ .

Dans les deux cas, la norme opérateur de  $Z_V$  est majorée par  $C \varepsilon$ .

*Preuve.* — On a  $\partial_x V$  et  $\partial_y V \in L^2$  et

$$g \in H^\alpha \hookrightarrow L^v, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} > 0$$

alors  $g \wedge \partial_{x_i} V \in L^q$  ( $x_1 = x, x_2 = y$ ); ce qui implique que  $Z_V g \in H^{-1, s}$  et  $\|Z_V g\|_{H^{-1, q}} \leq C \varepsilon \|g\|_{H^\alpha}$ .

D'autre part, quand  $1 < \alpha < 2$ , on a

$$\begin{aligned} &\partial_{x_i} V \in L^2 \\ &\partial_{x_i} g \in H^{\alpha-1} \hookrightarrow L^v \quad \text{avec} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha-1}{2}, \end{aligned}$$

et il en résulte que  $\partial_{x_i} g \wedge \partial_{x_j} V \in L^r$  et  $\|Z_V g\|_{L^r} \leq C \varepsilon \|g\|_{H^\alpha}$ , ce qui achève la preuve du lemme.

Soit  $b \in \Sigma_s^{-2}$  tel que  $T_b T_a = \chi + R$ .

On a noté  $\chi$  pour  $\chi \cdot \text{Id}$ , et  $R$  est un opérateur :  $H^{\delta, t} \rightarrow H^{\delta+\sigma, t}$  pour  $\delta \in \mathbf{R}$  et  $1 < t < \infty$ .

On applique  $T_b$  à (29), on obtient

$$\chi u = T_b H Z_V u + h, \quad \text{où} \quad h = T_b \tilde{f} - R u \in H^{1+\sigma}, \quad \text{car} \tilde{f} \in H^{\sigma-1}.$$

On va simplement donner les grandes lignes de la preuve du théorème 2.

Pour  $\alpha < 1$ ,

$$T_b H Z_V : H^\alpha \rightarrow H^{1, q} \hookrightarrow H^\alpha$$

avec  $\|T_b H Z_V\|_{H^\alpha \rightarrow H^\alpha} \leq C \varepsilon$ .

D'autre part

$$T_b H Z_V : H^{1+\sigma} \rightarrow H^{2, r} \hookrightarrow H^{1+\sigma} \quad \left( \frac{1}{r} = 1 - \frac{\sigma}{2} \right)$$

Pour imiter la preuve du théorème 1, il suffit de contrôler  $\varphi T_b - T_b \varphi$  et  $\varphi Z_V - Z_V \varphi$ , où  $\varphi$  est la même fonction  $C_0^\infty$  que celle intervenant au théorème 1.

LEMME 7 :

(33)  $\varphi T_b - T_b \varphi = R_1$  où  $R_1 : H^\delta, t \rightarrow H^{\delta+1}, t$  pour  $\delta \in \mathbf{R}, 1 < t < +\infty$ .

(34)  $\varphi Z_V - Z_V \varphi = R_2$  où  $R_2 : H^\alpha \rightarrow L^q, 0 < \alpha < 1, \frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ .

(33) provient du calcul symbolique (proposition 4).

(34) On a

$$\partial_{x_i}(\varphi g) \wedge \partial_{x_j} V = \varphi \partial_{x_i} g \wedge \partial_{x_j} V - \partial_{x_i} \varphi (g \wedge \partial_{x_j} V).$$

Donc, la formule (28) donne que

$$\begin{aligned} (\varphi Z_V - Z_V \varphi) g &= \partial_x \varphi (g \wedge \partial_y V) - \partial_y \varphi (g \wedge \partial_x V) \\ &= R_2 g. \end{aligned}$$

$g \in H^\alpha \subset L^v, \frac{1}{v} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}$ . Donc  $g \wedge \partial_{x_i} V \in L^q$ . Ce qui achève la preuve du lemme.

Pour finir la preuve comme celle du théorème 1, on obtient une formule similaire à (25), avec un terme

$$(T_b HZ_V)^{k-j-1} [R_1 Z_V + T_b R_2] (T_b HZ_V)^j.$$

Vérifions rapidement que cet opérateur envoie  $H^\alpha$  dans  $H^{\alpha+\sigma}$ .

On a

$$\begin{array}{ccc} H^\alpha & \xrightarrow{(T_b HZ_V)^j \quad R_2} & H^\alpha \rightarrow L^q \\ L^q \xrightarrow{T_b} H^2, q \subset H^{1+\alpha} & \xrightarrow{(T_b HZ_V)^{k-j-1}} & H^{1+\alpha} \end{array}$$

avec  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ; et

$$\begin{array}{ccc} H^\alpha & \xrightarrow{(T_b HZ_V)^j \quad Z_V} & H^\alpha \rightarrow H^{-1}, q \\ H^{-1}, q & \xrightarrow{R_1} & H^{1+\sigma}, q \subset H^{\alpha+\sigma} \\ H^{\alpha+\sigma} & \xrightarrow{(T_b HZ_V)^{k-j-1}} & H^{\alpha+\sigma}. \end{array}$$

Il suffit de poser  $\alpha = 1 + \sigma' - \sigma$  pour démontrer le théorème 2.

Bien entendu, le calcul précis des normes d'opérateurs permet de faire le même raisonnement que pour le théorème 1. Ceci est laissé au lecteur.

### BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AGUIRRE, M. ESCOBEDO et E. ZUAZUA, Existence de solutions à moyenne donnée pour un problème elliptique dans  $\mathbf{R}^N$ , *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **307**, série I, 1988, p. 463-466.

- [2] A. BENMOHAMED, Espaces de Besov et propagation des singularités des solutions non bornées d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires, *Thèse*, Orsay.
- [3] J. M. BONY, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sc. E.N.S.*, t. **14**, 1981, p. 209-246.
- [4] G. BOURDAUD, Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels, *Comm. Partial Diff. Eq.*, vol. **13**, 1988, p. 1059-1083.
- [5] H. BREZIS, Some Variational Problems with Lack of Compactness, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. **45**, 1983, p. 165-201.
- [6] H. BREZIS et J. M. CORON, Multiple Solutions of H-Systems and Rellich's Conjecture, *C.P.A.M.*, vol. **37**, 1984, p. 149-187.
- [7] H. BREZIS et L. NIRENBERG, Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents *C.P.A.M.*, vol. **36**, 1983, p. 437-477.
- [8] L. HORMANDER, Pseudo-Differential Operators of Type 1, 1, *Commun. in Partial Diff. Eq.*, vol. **13**, 1988, p. 1085-1111.
- [9] G. METIVIER, Intégrales singulières, *Cours de D.E.A. 1881-1982*, Université de Rennes.
- [10] Y. MEYER, Remarques sur un théorème de J. M. Bony, *Supl. ai. Rend. del Circolo, Mat. di Palermo. Atti de Seminario di Analisi Armonica*, Pisa, 1980, série II. 1, 1981, p. 1-20.
- [11] C. MORREY, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer Verlag, New York, 1966.
- [12] N. TRUDINGER, Remarks Concerning the Conformal Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds, *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, vol. **22**, 1968, p. 265-274.
- [13] H. WENTE, An Existence Theorem for Surfaces of Constant Mean Curvature, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. **26**, 1969, p. 318-344.

(Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> mars 1989)  
(révisé le 9 juin 1989.)