Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 11, n° 4, 1994, p. 427-440 *Analyse non linéaire*

Étude qualitative des solutions réelles d'une équation différentielle liée à l'équation de Ginzburg-Landau

par

Rose-Marie HERVÉ et Michel HERVÉ

Université Paris-VI,
Mathématiques Pures et Appliquées, Tour 45-46,
Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. – Nous étudions l'équation différentielle satisfaite par les fonctions réelles $f(r)$ telles que $u(re^{i\theta}) = f(r)\, e^{iq\theta}$ $(q \in N^*)$ soit solution de l'équation de Ginzburg-Landau $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$. Nous montrons: qu'une telle fonction $f(r)$, si elle est définie sur un voisinage de 0, est analytique et parfaitement déterminée par le nombre $a = f^{(q)}(0)/q!$; qu'une seule valeur de a, soit A, donne une fonction $f(r)$ croissant strictement de 0 à 1 quand r croît de 0 à $+\infty$, et dont nous donnons un développement asymptotique pour $r \to +\infty$. Nous montrons aussi que toute valeur $a \in\,]-\mathrm{A}, \mathrm{A}[\setminus\{0\}$ donne une fonction $f(r)$ oscillant indéfiniment, et que l'écart entre deux zéros consécutifs a pour limite π.

Mots clés : Équations différentielles, développements asymptotiques.

ABSTRACT. – We consider the ordinary differential equation satisfied by the real functions $f(r)$ such that the $u(re^{i\theta}) = f(r)\, e^{iq\theta}$ $(q \in N^*)$ are solutions of the Ginzburg-Landau equation $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$. We show: that such a function $f(r)$, if defined on a neighbourhood of 0, is analytic and uniquely determined by the number $a = f^{(q)}(0)/q!$; that one value of a only, say A, yields a strictly increasing function $f(r)$ running from 0 to 1 as r runs from 0 to $+\infty$, of which we give an asymptotic expansion for $r \to +\infty$. We also prove that any $a \in\,]-A, A[\setminus\{0\}$ yields an indefinitely oscillating function $f(r)$, and that the length of the interval between two consecutive zeroes has π as its limit.

Classification A.M.S.: 34 L 30, 35 B 05.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449
Vol. 11/94/04/$ 4.00/

1. INTRODUCTION

L'équation

$$\left.\begin{array}{c} r^2 f''(r) + r f'(r) - q^2 f(r) + r^2 f(r)\,[1 - f^2(r)] = 0,\ r \geqq 0,\ q \\ \text{donné} \in N^*, \end{array}\right\} \quad (1)$$

fournit les solutions de la forme $u(re^{i\theta}) = e^{iq\theta} f(r)$ de l'équation $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$ récemment étudiée dans $\mathbb{R}^2$ par Brézis, Merle et Rivière [1]; elle présente cette particularité remarquable, signalée par Hagan [2], que les solutions de (1) définies sur un voisinage de 0 sont de trois sortes bien distinctes, précisées par le

THÉORÈME. – 1) *Toute solution réelle de* (1) *sur un intervalle* $[0, R]$ *est au voisinage de* 0 *la somme d'une série entière de la forme*

$$f_a(r) = r^q \left[a + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}_k(a)\, r^{2k} \right], \qquad a \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Dans la suite, la notation $f_a(r)$ *désignera aussi le prolongement analytique de cette somme.*

2) *Parmi les* $a > 0$, *il existe une valeur A séparatrice en ce sens que :*

– Si $a > A$, $f_a(r)$ *croît strictement de* 0 *à* $+\infty$ *quand* r *croît de* 0 *à une certaine valeur finie.*

– $f_{\mathrm{A}}(r)$ *croît strictement de* 0 *à* 1 *quand r croît de* 0 *à* $+\infty$.

– Si $0 < a < A$, f_a *reste strictement comprise entre* ± 1 *et oscille indéfiniment, de part et d'autre de la valeur* 0, *sur l'intervalle* $[0, +\infty[$.

3) f_A *et la solution, dépendant de* $R \in]0, +\infty[$, *qui croît strictement de* 0 *à* 1 *quand* r *croît de* R *à* $+\infty$, *ont un développement asymptotique commun, quand* $r \to +\infty$, *suivant les puissances de* $1/r^2$ *jusqu'à un ordre quelconque : jusqu'à l'ordre* 2, *ce développement est* $f(r) = 1 - q^2/2r^2 - q^2(q^2+8)/8r^4 + o(1/r^4)$.

4) *Pour* $0 < a < A$, *les zéros* > 0 *de* f_a *sont en fait* $> q$; *si* r_n *est le* n^e, $r_{n+1} - r_n$ *et par conséquent* r_n/n *ont pour limite* π.

Remarques complémentaires. –

1) f_A est l'unique solution réelle du problème aux limites sur $[0, +\infty]$ formé de l'équation (1), $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$.

2) $\forall\, \mathrm{R} \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation (1) a aussi une solution réelle unique sur $[0, \mathrm{R}]$ valant 1 pour $r = R$: c'est une f_a avec $a > A$, donc croissant indéfiniment de 0 à $+\infty$ quand r croît de 0 à une certaine valeur finie $>$R.

3) Les solutions réelles de (1) définies sur tout $\mathbb{R}_+$ sont exactement les f_a, $|a| \leqq$ A, et sont toutes strictement comprises entre ± 1.

Variantes de l'équation (1) *utilisées dans les preuves.* –

$$r \frac{d}{dr} [r f'(r)] = (q^2 - r^2) f(r) + r^2 f^3(r) \tag{3}$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^{2q-1}} \frac{d}{dr} (r^q f(r)) \right] = r^{1-q} f(r) [f^2(r) - 1] \tag{4}$$

$$\varphi''(t) = [q^2 + e^{2t} (\varphi^2(t) - 1)] \varphi(t) \qquad \text{pour} \quad \varphi(t) = f(e^t) \tag{5}$$

De (3) résulte que, si l'intervalle ouvert I a pour borne inférieure $R > 0$ (resp. : supérieure $R < +\infty$), une solution f bornée sur I se prolonge à gauche (resp. : droite) de R : en effet, $r f'(r)$ a une limite finie quand $r \to R$, comme primitive d'une fonction bornée, donc $f'(r) \to y'$ fini, $f(r) \to y$ fini, et f se prolonge en la solution qui, pour $r = R$, vérifie les conditions initiales y, y'. De son côté, (5) entraîne la propriété invoquée dans la suite sous le nom de convexité logarithmique : φ est convexe > 0 ou concave < 0 sauf si son graphe se trouve dans la région $\Omega = \{(t, \tau) : \tau^2 < 1 - q^2 e^{-2t}\}$.

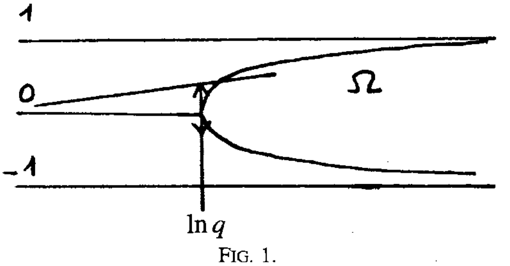

FIG. 1.

Enfin (4) équivaut au système différentiel

$$r f'(r) + q f(r) = r^q g(r), \; g'(r) = r^{1-q} f(r) [f^2(r) - 1] \tag{6}$$

ou à sa forme intégrée

$$f(r) = \frac{1}{r^q} \int r^{2q-1} g(r) \, dr, \qquad g(r) = \int r^{1-q} f(r) [f^2(r) - 1] \, dr \tag{7}$$

et l'on a, entre 2 solutions f, F, la relation

$$\frac{d}{dr} r [f'(r) F(r) - f(r) F'(r)] = r f(r) F(r) [f^2(r) - F^2(r)] \tag{8}$$

prouvant que la différence entre deux solutions > 0 ne peut s'annuler plus d'une fois sur $\mathbb{R}_+$: si l'on avait $f > F > 0$ sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ et $f = F$ aux bornes de I, r [ ] au 1er membre de (8) serait $\geqq 0$ à la borne inférieure de I, < 0 à la borne supérieure et croissant sur I.

2. PREUVE DE LA 1e PARTIE DU THÉORÈME

En portant $f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ dans (1), on trouve $a_n = 0 \forall n < q$, puis $a_n = 0$ pour tout n n'ayant pas la parité de q, $a_q = a$ indéterminé, mais déterminant $a_{q+2k} = P_k(a) \forall k \in N^*$ par la formule de récurrence

$$4k(k+q) P_k = \sum_{l+m+n=k-q-1} P_l P_m P_n - P_{k-1} \tag{9}$$

à partir de $P_0(a) = a$, où le $\sum$ disparaît si $k \leqq q$, et sinon compte $C_{k-q+1}^2 < k(k+q)/2$ termes. P_k est donc un polynôme impair et, en choisissant α et $\lambda > 0$ de manière que

$$\alpha^2 = 8\lambda^{q+1} - 2\lambda^q/(q+1) \tag{10}$$

on a $|P_k(a)| \leqq \lambda^k |a|$ pour $|a| \leqq \alpha \forall k \in \mathbb{N}$: la série (2) a donc un rayon de convergence $\geqq 1\sqrt{\lambda}$.

PROPOSITION 1. – *Toute solution f définie sur un intervalle* $]0, \mathrm{R}[$, *ou bien tend vers $\pm\infty$ quand $r \to 0$, ou bien prolonge une f_a.*

Preuve. – Pour cause de convexité logarithmique : si $f \geqq 1$ et $f' \leqq 0$ en un point $r_0 \in]0, \mathrm{R}[$, $f(r) \to +\infty$ quand $r \to 0$; si $f'(r_0) > 0$ et $f > 1$ sur $]0, r_0]$, $f(r)$ a une limite $\geqq 1$ quand $r \to 0$; si celle-ci était finie, soit l, deux intégrations de (3) donneraient $f(r) \sim (q^2 l/2) \ln^2 r$. Reste donc à étudier une solution f: $]0, R[\to]-1, +1[$.

Si g lui est associée par les formules (7) (où la 1e intégrale est prise de 0 à r puisque $r^q f(r) \to 0$ avec r), l'emploi de ces formules en alternance donne successivement, quand $r \to 0$: $g(r) = 0(r^{1-q})$, $f(r) = 0(r)$, $g(r) = 0(r^{2-q})$, $f(r) = 0(r^2)$, $\ldots$, $g(r) = 0(1)$, $f(r) = 0(r^q)$, et le processuss s'arrête là, car l'intégrand $0(r)$ dans la 2e intégrale n'entraîne que $g(r) = 0(1)$; les 2 dernières estimations donnent $f'(r) = 0(r^{q-1})$ par la 1e formule (6).

Alors le [ ] au 1er membre de (8), où $\mathrm{F} = f_1$, tend vers 0 avec r, tandis que le 2e membre est $0(r^{4q+1})$; le [ ] est donc $0(r^{4q+1})$, $\dfrac{d}{dr}\dfrac{f(r)}{f_1(r)} \to 0$ et $\dfrac{f(r)}{f_1(r)}$ a une limite finie a, qui est aussi celle de $f(r)/r^q$. Si α dans (10) est choisi $> |a|$ et si $r_0 < 1/\sqrt{\lambda}$, $f_{a'} \to f_a$ quand $a' \to a$ uniformément sur $[0, r_0]$; comme f est comprise entre $f_{a\pm\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$, on conclut $f = f_a$.

3. PREUVE DE LA 2[e] PARTIE DU THÉORÈME

PROPOSITION 2. – *Si la solution f vérifie $f \geqq 1$ et $f' > 0$ en $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $R \in]r_0, +\infty[$ tel que $f(r)$ croisse strictement de $f(r_0)$ à $+\infty$ quand r croît de r_0 à R.*

Preuve. – La fonction φ associée par (5) étant strictement croissante pour $t \geqq t_0 = \ln r_0$, on choisit $t_1 \geqq t_0^+$ tel que $\varphi(t_1) \geqq \sqrt{2}$, puis $R \geqq e^{t_1}[1 + \varphi(t_1)/\varphi'(t_1)]$ tel que $(R - e^{t_1})^2 \geqq R + 1$, enfin $\rho \in [\sqrt{2}\sqrt{R+1}, \sqrt{2}(R - e^{t_1})]$. On compare alors, pour $t \geqq t_1$, φ considérée comme solution de $\varphi''(t) = \alpha(t)\varphi^3(t)$ avec $\alpha(t) = q^2\varphi^{-2}(t) + e^{2t}[1 - \varphi^{-2}(t)] > e^{2t}/2$, à $\psi(t) = \rho/(R - e^t)$ solution de $\psi''(t) = \beta(t)\psi^3(t)$ avec $\beta(t) = (1/\rho^2)(Re^t + e^{2t}) \leqq e^{2t}/2 < \alpha(t)$; les conditions initiales $\psi(t_1) \leqq \varphi(t_1)$, $\psi'(t_1)/\psi(t_1) \leqq \varphi'(t_1)/\varphi(t_1)$ entraînent $\psi(t) < \varphi(t)$ pour $t > t_1$, $e^t < R$: si en effet la fonction analytique $\varphi - \psi$ était > 0 sur $]t_1, t_2[$ mais nulle en t_2, la combinaison classique $\dfrac{d}{dt}(\psi\varphi' - \varphi\psi') = \varphi\psi(\alpha\varphi^2 - \beta\psi^2)$ donnerait φ/ψ strictement croissant sur $]t_1, t_2[$, $\geqq 1$ en t_1, $=1$ en t_2.

Ainsi $\varphi(t) \to +\infty$ quand $e^t \to R' \leqq R$. □

PROPOSITION 3. – *Si une solution f sur $[r_0, r_1]$ $(0 < r_0 < r_1)$ est < 0 sur $]r_0, r_1[$ mais nulle en r_0 et r_1, elle est > -1 sur ces intervalles, s'annule de nouveau en, $r_2 \in]r_1, r_1^2/r_0[$, $f > 0$ sur $]r_1, r_2[$ et $\sup\limits_{]r_1, r_2[} |f| < \sup\limits_{]r_0, r_1[} |f|$.*

Preuve. – S'il existait $r_2 \in]r_0, r_1[$ tel que $f(r_2) = -1$ mais $f > -1$ sur $]r_0, r_2[$, on aurait $f'(r_2) < 0$ d'après (1) et (Prop. 2) f ne pourrait s'annuler en r_1, d'où la 1[e] assertion. Pour les deux autres, considérons de nouveau $\varphi(t) = f(e^t)$ sur $[t_0 = \ln r_0, t_1 = \ln r_1]$: le symétrique, par rapport au point $(t_1, 0)$, du graphe de φ sur $[t_0, t_1]$ est celui d'une fonction ψ nulle en t_1 et en $2t_1 - t_0$, $0 < \psi < 1$ sur $]t_1, 2t_1 - t_0[$, enfin solution de (5') $\psi''(t) = q^2\psi(t) + e^{4t_1 - 2t}[\psi^3(t) - \psi(t)]$. La dérivation de (5) et (5') montre que φ et ψ ont mêmes dérivées en t_1 (la 1[e] étant > 0) jusqu'à l'ordre 3 inclus, mais que $\varphi^{(4)}(t_1) < \psi^{(4)}(t_1)$, de sorte que $0 < \varphi(t) < \psi(t)$ pour $t - t_1 > 0$ assez petit. Si cet encadrement ne subsistait que pour $t < t_2 < 2t_1 - t_0$, avec $\varphi(t_2) = \psi(t_2)$, dans la combinaison classique $\dfrac{d}{dt}(\psi\varphi' - \varphi\psi') = \varphi\psi[e^{4t_1 - 2t}(1 - \psi^2) - e^{2t}(1 - \varphi^2)]$, on aurait sur $]t_1, t_2[$ le $[\ \ ] < 0$ et φ/ψ strictement décroissant de 1 à 1. □

PROPOSITION 4. – *Soit $a > 0$: s'il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_a(r_0) = 1$, il existe aussi $R \in]r_0, +\infty[$ tel que $f_a(r)$ croisse strictement de 0 à $+\infty$ quand r croît de 0 à R.*

Preuve. – Quand t croît à partir de $-\infty$, la fonction φ_a associée par (5) à f_a est d'abord convexe strictement croissante; elle le reste indéfiniment si son graphe ne franchit pas la frontière de Ω (*fig.* 1) et l'assertion résulte alors de la proposition 2. S'il la franchit, φ_a devient concave et peut, soit rester strictement croissante, soit passer par un maximum situé dans Ω. Dans le 1^er^ cas, ou bien le graphe franchit à nouveau la frontière de Ω, alors φ_a redevient convexe strictement croissante et la proposition 2 s'applique encore; ou bien le graphe reste dans Ω, alors φ_a est strictement croissante et strictement comprise entre 0 et 1 sur tout $\mathbb{R}$. Dans le 2^e^ cas, après son maximum φ_a est concave strictement décroissante, puis s'annule et, d'après la proposition 3 appliquée au besoin une infinité de fois, ne peut jamais prendre la valeur 1. □

La démonstration précédente fait apparaître comme possibles les 3 sortes de solutions f_a annoncées par le Théorème, mais n'en prouve pas l'existence; c'est à celle-ci qu'on va s'employer maintenant, en commençant par la 1^e^ sorte.

Soit $a > 0$: tant que $0 < f_a < 1$, la fonction g_a associée par (6) décroît strictement à partir de $2\,qa$ (sa limite quand $r \to 0$), et les intégrales figurant dans (7), prises de 0 à r, donnent respectivement $r^q f_a(r)$ et $g_a(r) - 2\,qa$, d'où successivement

$$
\begin{aligned}
& g_a(r) < 2\,qa,\ f_a(r) < ar^q,\ g_a(r) > 2\,qa - ar^2/2, \\
& f_a(r) > a\,[r^q - r^{q+2}/4\,(q+1)] \qquad (11)
\end{aligned}
$$

le maximum du [ ] vaut $[2^{q+1}/(q+2)]\,[q\,(q+1)/(q+2)]^{q/2}$; si son produit par a dépasse 1, on est assuré que f_a prend la valeur 1 et par conséquent se comporte selon la proposition 4.

Si f_a prend la valeur 1, c'est une seule fois (prop. 4), pour $r = f_a^{-1}(1)$; il en est de même de $f_{a'}$ $\forall\, a' > a$, et alors $f_{a'}^{-1}(1) < f_a^{-1}(1)$, puisque $a' > a$ entraîne $f_{a'} > f_a$. De même, pour tout a' assez voisin de a, $f_{a'}$ prend la valeur 1 (une seule fois), et $f_{a'}^{-1}(1) \to f_a^{-1}(1)$ quand $a' \to a$. En effet, quand $a' \to a$, $f_{a'} \to f_a$, $f'_{a'} \to f'_a$, uniformément, sur un intervalle $[0, r_0]$ déterminé, à la fin de la preuve de la proposition 1, à partir des développements (2); partant de cette valeur r_0 qui n'est plus singulière pour l'équation (1), l'emploi répété de la dépendance continue (locale dans le cas non linéaire) de la solution vis-à-vis des conditions initiales prouve que : si f_a est prolongeable à $[0, r_1]$, $f_{a'}$ l'est aussi pour a' assez voisin de a, et $f_{a'} \to f_a$ uniformément sur $[0, r_1]$. D'où les deux assertions en prenant $r_1 = f_a^{-1}(1+\varepsilon)$, $r_2 = f_a^{-1}(1-\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$: en effet $|\,f_{a'} - f_a\,| < \varepsilon$

sur $[0, r_1]$ entraîne $f_{a'}^{-1}(1)$ compris entre r_1 et r_2, qui tendent vers $f_a^{-1}(1)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Ainsi les a pour lesquels f_a prend la valeur 1 forment un intervalle ouvert $]A, +\infty[$ ($A \geqq 0$ *a priori*) sur lequel $f_a^{-1}(1)$ est fonction continue strictement décroissante de a; $f_a^{-1}(1) \to 0$ quand $a \to +\infty$, car le 2e membre de la dernière inégalité (11) tend vers $+\infty$ avec $a \, \forall r \in]0, 2\sqrt{q+1}[$. Reste à savoir si $s = \sup\limits_{a>A} f_a^{-1}(1)$ est fini ou non. Pour répondre à cette question, et à quelques autres, admettons provisoirement $A > 0$, qui résultera de la proposition 5.

f_A ne peut, ni prendre la valeur 1, ni s'annuler en $r_1 \in \mathbb{R}_+^*$, puisque la fonction croissante f_a, $a > A$, devrait tendre vers f_A quand $a \to A$, uniformément sur $[0, r_1]$. En se reportant à la discussion du graphe de φ_a (preuve de la prop. 4) on voit que f_A reste strictement croissante (et même $f'_A > 0$) et strictement comprise entre 0 et 1, donc se prolonge à tout $\mathbb{R}_+$, et tend vers $L \in]0, 1]$ quand $r \to +\infty$; mais, avec $L \in]0, 1[$, (5) donnerait, pour $t \to +\infty$, $\varphi''_A(t) \sim L(L^2 - 1)e^{2t}$, qui est absurde. Puisque f_A est définie et strictement comprise entre 0 et 1 sur tout $\mathbb{R}_+^*$, s fini entraînerait, pour a assez voisin de A, f_a prolongeable à $[0, s+1]$ et < 1 sur cet intervalle, contrairement à la définition de s.

Soit maintenant $0 < a < A$: d'abord f_a ne peut avoir le même comportement que f_A, car alors on aurait $0 < f_a < f_A$ sur tout $\mathbb{R}_+^*$, et (8) donnerait $(f_a/f_A)(r)$ strictement décroissant de a/A à 1 quand r croît de 0 à $+\infty$. Alors φ_a s'annule sur $\mathbb{R}$, f_a s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$, et il suffit de montrer que f_a s'annule 2 fois, pour que la proposition 3 lui donne une suite infinie de zéros tendant vers $+\infty$; on aura en outre $-f_A < f_a < f_A$ sur tout $\mathbb{R}_+^*$. Supposons donc que f_a s'annule seulement en r_1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de sorte que $f_a(r) < 0 \; \forall r > r_1$: la preuve de la proposition 3, où φ est remplacée par $-\varphi_a$, t_0 par $-\infty$ et $\psi(t)$ par $\varphi_a(2t_1 - t)$, donnerait, pour $t > t_1$, $0 < -\varphi_a(t) < \varphi_a(2t_1 - t) \to 0$ quand $t \to +\infty$; alors, pour t assez grand, le graphe de φ_a serait dans Ω (*fig* 1), et $\varphi_a < 0$ entraînerait φ_a convexe.

Pour achever, par $A > 0$, la preuve de la 2e partie du théorème, il suffit de montrer que, pour $|a|$ assez petit, f_a s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$, et ceci résultera de la partie (ii) de la

PROPOSITION 5. – (i) *Étant donné $r_1 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $a_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que les quotients f_a/a, $|a| \leqq a_1$, soient définis, bornés dans leur ensemble, équicontinus, sur $[0, r_1]$.*

(ii) *Quand* $a \to 0$, f_a/a *tend, uniformément sur tout conpact* $\subset \mathbb{R}_+$, *vers la fonction de Bessel* J_q, *donnée par la formule ci-dessous, qui a une infinité de zéros* >0.

Preuve . – (i) Si α et λ dans (10) sont choisis de manière que $\lambda < 1$, pour $|a| \leqq \alpha$ on a $|f_a/a|$ et

$|f'_a/a| \leqq \beta = \sum_{k=0}^{\infty} (q+2k)\,\lambda^k$ sur $[0, 1]$ (ce qui achève de prouver (i) si $r_1 \leqq 1$), en particulier $|\varphi_a(0)|$ et $|\varphi'_a(0)| \leqq |a|\beta$.

Si $r_1 > 1$, et si f_a est définie sur $[0, r_1]$, on peut considérer φ_a comme solution sur $[0, t_1 = \ln r_1]$ d'une equation de la forme $\varphi''(t) = c(t)\,\varphi(t)$: si $\gamma \geqq 1$ et $\gamma \geqq |c(t)|\,\forall t \in [0, t_1]$, un raisonnement classique montre que les conditions initiales ci-dessus, vérifiées par φ_a en 0, entraînent $|\varphi_a(t)|$ et $|\varphi'_a(t)| \leqq |a|\beta\, e^{\gamma t}\ \forall t \in [0, t_1]$. Posons donc $\gamma = q^2 + e^{2t_1}$: si $|a| \leqq \alpha$ et $|a|\,\beta\, e^{\gamma t_1} < 1$ alors φ_a est définie, de valeur absolue $\leqq |a|\beta\, e^{\gamma t_1}$ ainsi que $|\varphi'_a|$, sur tout $[0, t_1]$; d'où l'assertion en revenant à la variable $r = e^t$.

(ii) Quand $a \to 0$, $P_k(a)/a$ tend vers $P'_k(0)\,\forall\, k \in \mathbb{N}$, et la dérivation de (9) donne $4k(k+q)\,P'_k(0) = -P'_{k-1}(0)$; $P'_k(0)$ est donc le coefficient du terme de degré $q + 2k$ dans le développement taylorien à l'origine de la fonction de Bessel J_q :

$$J_q(r) = q!\,r^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, r^{2k}}{4^k\, k!\,(q+k)!}$$

α et λ étant choisis comme pour (i), on a $|P_k(a)/a| \leqq \lambda^k\,\forall\, k \in \mathbb{N}$ pour $|a| \leqq \alpha$, donc f_a/a et f'_a/a tendent vers J_q et J'_q uniformément sur $[0, 1]$.

D'autre part, sur un intervalle compact $[1, r_1]$: une borne commune pour les quotients f_a/a, f'_a/a, en implique une, d'après (1), pour les f''_a/a; alors le Théorème d'Ascoli fournit des suites $a_n \to 0$ telles que les suites correspondantes f_{a_n}/a_n, f'_{a_n}/a_n, f''_{a_n}/a_n convergent uniformément sur tout compact, et la limite F de la 1^e^ suite est solution de l'équation différentielle $r^2 F''(r) + r\,F'(r) + (r^2 - q^2)\,F(r) = 0$, c'est donc J_q. □

4. PREUVE DE LA 3^e^ PARTIE DU THÉORÈME

La valeur $R \in \mathbb{R}_+^*$ n'étant pas singulière pour l'équation (1), celle-ci admet, pour chaque $b \in \mathbb{R}_+^*$, une solution unique $f_{R,b}$ vérifiant $f_{R,b}(R) = 0$, $f'_{R,b}(R) = b$; elle est strictement croissante pour $r > R$ assez voisin de R. Quant à son comportement pour de plus grandes valeurs de r, les raisonnements qui prouvent la proposition 4, basés sur la figure 1 et la convexité logarithmique, font apparaître les trois mêmes possibilités que pour les f_a : croître strictement de 0 à $+\infty$ quand r croît de R à une certaine valeur finie; croître strictement, mais en restant strictement comprise entre 0 et 1, sur tout $]R, +\infty[$; passer par un maximum, puis décroître strictement, s'annuler, et par suite (prop. 3) osciller indéfiniment, en restant strictement comprise entre ± 1, sur tout $[R, +\infty[$. La seule nouveauté est dans les moyens à employer pour montrer que ces possibilités se réalisent toutes trois.

Au point $T = \ln R$, on a $\varphi_{R,b} = 0$, $\varphi'_{R,b} = Rb$; si $\varphi_{R,b}$ reste comprise entre 0 et 1 sur $[T, T+\theta]$ avec $0 < \theta \leqq 1/2$, sur cet intervalle on a $\varphi''_{R,b} > -e^{2T+1}$, donc $\varphi'_{R,b} > Rb - e^{2T+1}$ qui, pour b assez grand, entraîne $\varphi_{R,b}(T+\theta) = 1$ pour un θ convenable. Soient d'autre part r_1, $r_2\,(R < r_1 < r_2)$ deux zéros consécutifs de $f_{A/2}$ entre lesquels $f_{A/2} > 0$, et soit M le maximum de $f_{A/2}$ sur $]r_1, r_2[$: comme dans la preuve de la proposition 5 (i), pour b assez petit $\varphi_{R,b}$ est définie et de valeur absolue $< M$ sur $[T, \ln r_2]$; si $f_{R,b}$ restait > 0 sur $]R, r_2]$, la différence $f_{R,b} - f_{A/2}$ s'annulerait au moins 2 fois sur $]r_1, r_2[$.

Ainsi les $b \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels $f_{R,b}$ prend la valeur 1 sur $]R, +\infty[$, et ceux pour lesquels $f_{R,b}$ prend la valeur 0 sur $]R, +\infty[$, forment deux parties non vides de $\mathbb{R}_+^*$; ces deux parties étant disjointes et ouvertes, il y a aussi des $b \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels $f_{R,b}$ ne prend sur $]R, +\infty[$ ni la valeur 0 ni la valeur 1, donc reste strictement croissante (en fait $f'_{R,b} > 0$) et strictement comprise entre 0 et 1 sur tout $]R, +\infty[$. Ces $f_{R,b}$ tendent vers 1 quand $r \to +\infty$, comme f_A et pour la même raison; de ce fait il n'y en a qu'une, soit $f_{R,B}$.

Le développement asymptotique commun à f_A et aux $f_{R,B}$ va s'obtenir à l'aide du lemme suivant, relevant de la théorie des équations différentielles linéaires.

LEMME. – *Sur un intervalle* I *de borne* sup $+\infty$, *soient* $a(r)$ *une fonction continue tendant vers* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *quand* $r \to +\infty$, *et* $x(r)$ *une fonction* $\in C^2(I)$ *et tendant vers* 0 *quand* $r \to +\infty$: *si* $y(r) = x''(r) - a(r)\,x(r)$ *est* $0(1/r^k)$ [*resp.*: $o(1/r^k)$, $\sim \alpha/r^k$] $(k > 0,\ \alpha \neq 0)$, *alors* $x(r)$ *est* $0(1/r^k)$ [*resp.*: $o(1/r^k)$, $\sim -\alpha/\lambda r^k$] *et* $x'(r)$ *est aussi* $0(1/r^k)$ [*resp.* : $o(1/r^k)$].

Indication sur la preuve. – On choisit $x_0(r)$, solution > 0 de l'équation $x''_0(r) = a(r)\,x_0(r)$, et telle que $x'_0(r)/x_0(r)$ tende vers $\sqrt{\lambda}$ quand $r \to +\infty$; on pose

$$x(r) = x_0(r)\,z(r),$$

d'où $z'(r) = [1/x_0^2(r)] \int x_0(r)\, y(r)\, dr$, et l'on évalue $z(r)$ par la règle de l'Hôpital. Des exemples tels que $a(r) = 1$, $x(r) = (1/r)\sin r$ ou $(1/r) + (1/r^2)\sin r$ prouvent que k ne peut être remplacé par $k+1$ dans l'estimation de $x'(r)$, et ceci complique l'emploi du lemme dans la récurrence qui suit.

Emploi du lemme. – Les solutions f de (1) considérées ici correspondent à des solutions $\varphi > 0$ de (5) dont le graphe est situé dans Ω, donc concaves, et tendant vers 1 quand $t \to +\infty$; alors $\varphi'(t) \to 0$, ou $r f'(r) \to 0$ quand $r \to +\infty$. Dans toute la suite on prendra $a(r) = f(r)[1 + f(r)] \to 2$ quand $r \to +\infty$.

Appliquons d'abord le lemme à $x_0(r) = f(r) - 1$: d'après (1), $y_0(r) = x_0''(r) - a(r)\, x_0(r) = [q^2 f(r)/r^2] - [f'(r)/r] \sim q^2/r^2$, donc $x_0(r) \sim -q^2/2\,r^2$ ou $f(r) = 1 - q^2/2\,r^2 + o(1/r^2)$, $f'(r) = x_0'(r) = o(1/r^2)$, enfin $y_0(r) = q^2/r^2 + o(1/r^3)$.

On peut maintenant raisonner par récurrence en supposant (ce qui vient d'être vérifié pour $n = 1$) que $y_0(r)$ a un développement limité (en abrégé *d.l.*) suivant les puissances de $1/r^2$ avec reste $o(1/r^{2n+1})$ et que $f(r)$ en a un avec reste $o(1/r^{2n})$, soit (12) $f(r) = 1 + \sum_{k=1}^{n} c_k/r^{2k} + o(1/r^{2n})$, de sorte que $a(r)$ aussi en a un, avec même reste.

A $x_{n-1}(r) = f(r) - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} c_k/r^{2k}$ (où le $\sum$ disparaît si $n = 1$) correspond par le lemme $y_{n-1}(r) = y_0(r) - \left[\frac{d^2}{dr^2} - a(r)\right] \sum_{k=1}^{n-1} c_k/r^{2k}$ qui, d'après la double hypothèse de la récurrence, a un d.l. suivant les puissances de $1/r^2$ avec reste $o(1/r^{2n+1})$; puisque $x_{n-1}(r) \sim c_n/r^{2n}$, un 1[er] emploi du lemme prouve que ce d.l. est réduit à $-2\,c_n/r^{2n} + o(1/r^{2n+1})$.

A $x_n(r) = f(r) - 1 - \sum_{k=1}^{n} c_k/r^{2k}$ correspond de même

$$y_n(r) = y_{n-1}(r) + 2\,c_n/r^{2n} - \left[\frac{d^2}{dr^2} - a(r) + 2\right] c_n/r^{2n}$$

qui est d'abord $o(1/r^{2n+1})$; un 2[e] emploi du lemme fournit $x_n'(r) = o(1/r^{2n+1})$ ou

$$f'(r) = -\sum_{k=1}^{n} 2\,k c_k/r^{2k+1} + o(1/r^{2n+1}); \tag{13}$$

en portant (12) et (13) dans l'expression de $y_0(r)$, on obtient un d.l. de $y_0(r)$ avec reste $o(1/r^{2n+2})$, donc aussi un d.l. de $y_n(r) = y_0(r) - \left[\frac{d^2}{dr^2} - a(r)\right] \sum_{k=1}^{n} c_k/r^{2k}$ avec même reste.

Compte tenu de $y_n(r) = o(1/r^{2n+1})$, ce dernier d.l. a une partie entière réduite à un terme en $1/r^{2n+2}$, dont on peut noter le coefficient $-2c_{n+1}$, d'où par un dernier emploi du lemme : $x_n(r) = c_{n+1}/r^{2n+2} + o(1/r^{2n+2})$ et $x'_n(r) = o(1/r^{2n+2})$; ces résultats permettent de remplacer: dans (12), le reste $o(1/r^{2n})$ par $c_{n+1}/r^{2n+2}+o(1/r^{2n+2})$; dans (13), le reste $o(1/r^{2n+1})$ par $o(1/r^{2n+2})$; en portant (12) et (13) ainsi améliorés dans l'expression de $y_0(r)$, on obtient un d.l. de $y_0(r)$ avec reste $o(1/r^{2n+3})$, et la récurrence est complète.

Calcul des termes c_n/r^{2n} du développement. Sachant que $f(r)$ et $f'(r)$ ont des d.l. de tous ordres, (1) en fournit pour $f''(r)$, et l'on est asssuré que la dérivation terme à terme des d.l. de $f(r)$ fournit ceux du 1er membre de (1); en annulant le coefficient de $1/r^{2n}$ au 1er membre de (1), on trouve $(4n^2 - q^2)c_n - 2c_{n+1}$ égal au coefficient de $1/r^{2n+2}$ dans le polynome $s_n(r)[1 + s_n(r)][2 + s_n(r)]$, où $s_n(r) = \sum_{k=1}^{n} c_k/r^{2k}$. Sachant que $c_1 = -q^2/2$, cette formule de récurrence donne

$$c_2 = -q^2(q^2 + 8)/8.$$

Remarque. – Le fait que toutes les solutions considérées ici ont le même développement asymptotique jusqu'à un ordre quelconque laisse présager que le quotient de deux d'entre elles tend vers 1 exponentiellement quand $r \to +\infty$: c'est ce qu'on va vérifier. f et F étant deux solutions de (1), > 0 ainsi que f' et F' sur $]R, +\infty[$ et tendant vers 1 quand $r \to +\infty$, en posant $1 + u = f/F$ on définit $u(r)$ solution d'après (8) d'une équation de la forme $\frac{d}{dr}[\mu(r)u'(r)] = \nu(r)u(r)$, où $\mu(r) = rF^2(r)$ et $\nu(r) = rf(r)F^2(r)[f(r) + F(r)]$ sont > 0 ainsi que μ' et ν' sur $]R, +\infty[$, $\mu(r) \sim r$ et $\nu(r) \sim 2r$ quand $r \to +\infty$. Alors $w = u/\mu u'$ vérifie l'équation de Riccati (14) $w' = (1/\mu) - \nu w^2$, dont les courbes intégrales dans le plan (r, w) se mettent en place à partir de la courbe Γ d'équation $w^2 = 1/\mu(r)\nu(r)$, lieu des points où $w' = 0$ (*fig.* 2).

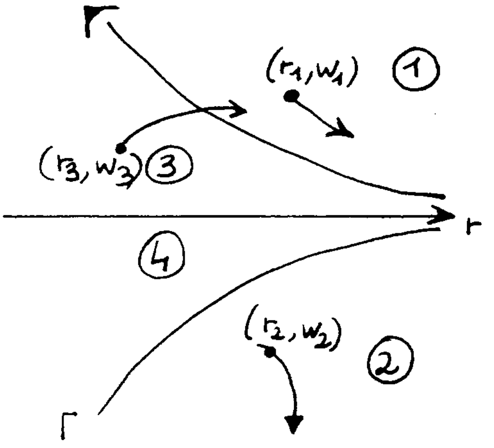

FIG. 2.

Une courbe intégrale partant, dans le sens r croissant, d'un point (r_1, w_1) de la 1e région a une pente < 0 et la conserve car elle ne peut franchir Γ; le long de cette courbe, r décrit $[r_1, +\infty[$; la fonction $w(r)$ correspondante étant > 0, il en est de même de $u'(r)/u(r)$, mais $|u(r)|$ strictement croissante contredit $u(r) \to 0$ quand $r \to +\infty$.

Une courbe intégrale partant d'un point (r_2, w_2) de la 2e région garde aussi une pente < 0; le long de cette courbe, w décrit $[w_2, -\infty[$, car la dérivation de (14) donne $w'' = -(\mu'/\mu^2) - \nu' w^2 - 2\nu w w' < 0$ si $ww' > 0$; mais r ne peut décrire qu'un intervalle borné, car (14) entraîne $\mu(r_2)\, w' < 1 - \mu\nu(r_2)\, w^2$, d'où résulte que l'intégrale de $\dfrac{dr}{dw}$ converge à l'infini.

Enfin, une courbe intégrale partant d'un point de la 3e région franchit Γ et se retrouve dans la 1e. Pour notre fonction $u = (f/F) - 1$, le graphe de $w(r)$ est donc dans la 4e région : $-1/\sqrt{\mu\nu(r)} < w(r) < 0$ entraîne $(u'/u)(r) < -\sqrt{\dfrac{\nu}{\mu}(r)}$ qui tend vers $-\sqrt{2}$ quand $r \to +\infty$, d'où $\limsup\limits_{r \to +\infty} \dfrac{1}{r} \ln |u(r)| \leqq -\sqrt{2}$.

5. PREUVE DE LA 4e PARTIE DU THÉORÈME

Soit $|a| < A$. Le fait que φ_a n'a pas de zéro $\leqq \ln q$ est en évidence sur la figure 1. Soient $t_1, t_2, \ldots$ les zéros consécutifs de φ_a et σ_n le maximum de

$|\varphi_a|$ sur $[t_n, t_{n+1}]$: on sait que $0 < \sigma_n < 1$ et (proposition 3) que la suite σ_n décroît strictement vers $\sigma \in [0, 1[$. Sur $[t_n, t_{n+1}]$ on a la double inégalité

$$(1 - \sigma_n^2)\, e^{2t_n} - q^2 \leqq [1 - \varphi_a^2(t)]\, e^{2t} - q^2 \leqq e^{2t_{n+1}} - q^2$$

dont les membres extrêmes sont > 0 pour n assez grand; notant ceux-ci m_n^2, M_n^2 avec $0 < m_n < M_n$, et le membre médian $c(t)$, on a sur $[t_n, t_{n+1}]$

$$\varphi_a''(t) + c(t)\,\varphi_a(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad m_n^2 \leqq c(t) \leqq M_n^2,$$

d'où résulte de façon classique $\pi/\mathrm{M}_n \leqq t_{n+1} - t_n \leqq \pi/m_n$ et par suite: que, quand $r \to +\infty$, $t_{n+1} - t_n$ est infiniment petit et e^{t_n}, $e^{t_{n+1}}$, M_n, $m_n/\sqrt{1-\sigma^2}$ infiniment grands équivalents; puis que $r_{n+1} - r_n \sim e^{t_n}(t_{n+1} - t_n)$ a une limite inf $\geqq \pi$ et une limite sup $\leqq \pi/\sqrt{1-\sigma^2}$. Si $\sigma = 0$, on conclut que $r_{n+1} - r_n$ a pour limite π.

Pour montrer qu'effectivement $\sigma = 0$, raisonnons par l'absurde en supposant $\sigma \in]0, 1[$. Tout d'abord, sur $[t_n, t_{n+1}]$, $|\varphi_a''| < M_n^2$ entraîne $|\varphi_a'| < M_n^2(t_{n+1} - t_n)$ puisque φ_a' s'annule en un point de l'intervalle; par suite, sur $[r_n, r_{n+1}]$ on a $|f_a'| < M_n^2(t_{n+1} - t_n)\, e^{-t_n}$, dont la lim sup quand $r \to \infty$ est $\leqq \pi/\sqrt{1-\sigma^2}$: ainsi f_a' est borné sur R_+.

D'autre part, 0 et $\pm\sigma_n$ étant les valeurs extrêmes de φ_a sur $[t_n, t_{n+1}]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\sigma_n^2 \leqq (t_{n+1} - t_n)\displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi_a'^2(t)\, dt$, d'où

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-2t}\,\varphi_a'^2(t)\, dt &\geqq e^{-2t_{n+1}}\,\sigma_n^2/(t_{n+1} - t_n)\\ &\geqq e^{-2t_{n+1}}\,\sigma_n^2\, m_n/\pi \sim \sigma^2\sqrt{1-\sigma^2}/\pi\, r_n \qquad (15)\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$. Comme $r_{n+1} - r_n$ a une lim inf > 0 et une lim sup $< \infty$, il en est de même de r_n/n, et (15) prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2t}\,\varphi_a'^2(t)\, dt$ diverge, ainsi que l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty f_a'^2(r)\,\frac{dr}{r}$ qui s'en déduit par le changement de variable $r = e^t$ (L'idée de considérer cette dernière intégrale et la formule (16) ci-dessous nous a été inspirée par la lecture du preprint [3], et nous remercions M. Brézis de nous l'avoir communiqué).

Enfin l'équation (1) peut encore s'écrire

$$f''(r) + f(r) - f^3(r) = q^2 f(r)/r^2 - f'(r)/r,$$

d'où

$$f_a'^2(r) + f_a^2(r) - f_a^4(r)/2 = 2\,q^2 \int f_a(r)\, f_a'(r)\,\frac{dr}{r^2} - 2\int f_a'^2(r)\,\frac{dr}{r}. \qquad (16)$$

f_a et f_a' étant bornés sur R_+, la 1e intégrale indéfinie au 2e membre de (16) converge quand $r \to \infty$, et l'on vient de montrer que la 2e tend vers $+\infty$; alors le 1er membre tend vers $-\infty$, ce qui est absurde.

Remarque. – Le preprint [3] va beaucoup plus loin, puisqu'il donne pour $f_a(r)$ une évaluation asymptotique précise quand $r \to \infty$: il existe des constantes $A > 0$ et B telles que

$$f_a(r) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos\left(r - \frac{3}{8}A^2 \ln r - B\right) + 0\,(r^{-3/2}\ln r).$$

6. PREUVE DES REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

D'après la 1e partie du théorème, les solutions réelles définies sur un intervalle $[0, R]$ figurent toutes parmi les f_a. Les remarques 1 et 3 résultent donc des comportements distincts des f_a, précisés par la 2e partie.

Quant à la Remarque 2: on a vu, en prouvant la 2e partie, que $f_a^{-1}(1)$ croit strictement et continûment de 0 à $+\infty$ quand a décroît de $+\infty$ à A, donc vaut R pour une valeur de a et une seule.

RÉFÉRENCES

[1] H. Brézis, F. Merle, T. Rivière, *Quantization effects for* $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$ *in* $\mathbb{R}^2$, à paraître.

[2] P. Hagan, Spiral waves in reaction diffusion equations, *SIAM J. Applied Math.*, **42**, 1982, p. 762-786.

[3] X. Chen, C. Elliott, Q. Tang, Shooting method for vortex solutions of a complex valued Ginzburg-Landau equation, à paraître aux *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.*

[4] P. C. Fife, L. A. Peletier, On the location of defects in stationary solutions of the Ginzburg-Landau equation in $\mathbb{R}^2$, à paraître au *Quart. Applied Math.*

(Manuscript received July 17, 1993;
accepted September 30, 1993.)