

CHUTE STATIONNAIRE D'UN SOLIDE DANS UN FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE LE LONG D'UN PLAN INCLINÉ

FREE STEADY FALL OF A SOLID IN A FLUID, ALONG A RAMP

M. HILLAIRET, D. SERRE*

ENS Lyon, UMPA (UMR 5669 CNRS), 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

Reçu en 11 février 2002, accepté le 23 septembre 2002

ABSTRACT. – The three-dimensional space is filled by a Newtonian fluid above a fixed ramp. A spherical solid body falls in the fluid under the action of the gravity. We are interested in permanent regimes, in which gravity and the action of the stress tensor of the fluid on the solid compensate. We prove that there exist such regimes, in which some parameters are given (including the gravity, the velocity of the solid and its distance to the ramp), but others, such the mass and the angular velocity, are determined by the motion.

We encounter two main difficulties. First in establishing a (non-explicit) *a priori* estimate. Last, because we are not able to convert the problem into the search of a zero of some outgoing vector field in a ball.

© 2003 L'Association Publications de l'Institut Henri Poincaré. Published by Elsevier B.V. All rights reserved

MSC: 35Q30; 76D03; 76D27

RÉSUMÉ. – Un demi-espace, dont le bord est un plan incliné, est rempli d'un liquide Newtonien. Un solide sphérique tombe dans le liquide, sous l'action de la gravité. Nous considérons ici le régime permanent, dans lequel la gravité et le tenseur des contraintes exercées par le fluide sur le solide se compensent. Le solide est donc en translation uniforme parallèle au bord, avec une rotation propre à vitesse constante.

Nous prouvons qu'il existe un tel régime, dans lequel certains paramètres sont donnés (en particulier la gravité, la vitesse du solide et sa distance au bord) tandis que d'autres, tels que la masse du solide et sa vitesse angulaire, font partie des inconnues.

La difficulté essentielle est l'estimation *a priori*, qui n'est pas explicite. En particulier, nous ne sommes pas capables de ramener le problème, ou un problème approché, à la recherche d'un zéro d'un champ de vecteur sortant sur une boule.

© 2003 L'Association Publications de l'Institut Henri Poincaré. Published by Elsevier B.V. All rights reserved

* Corresponding author.

Adresse e-mail : serre@umpa.ens-lyon.fr (D. Serre).

Introduction

L'étude de l'interaction entre un (ou plusieurs) solide indéformable et un fluide dans lequel il est plongé a fait l'objet de nombreux travaux. Nous renvoyons le lecteur aux articles récents [8] et [2], ainsi qu'aux références qu'ils contiennent. Dans le cas évolutif, les résultats démontrés sont valables aussi longtemps qu'aucun contact ne se produit entre deux solides, ou entre un solide et la paroi. Il est donc naturel de se demander s'il existe des configurations dans lesquelles un solide isolé évolue sans jamais rencontrer le bord du domaine.

Nous nous plaçons dans une situation aussi simple que possible. Tout d'abord, nous considérons qu'un seul solide se trouve à l'intérieur de la cavité et que celui-ci a une forme sphérique. De plus, nous supposons que les dimensions du solide sont infiniment petites devant celles de la cavité, de telle façon qu'à l'échelle de la boule le bord du domaine est un plan. Cette géométrie, qui admet une invariance de translation, permet d'envisager un mouvement permanent, dans lequel le solide se déplace à vitesse constante, parallèlement au bord, et tourne sur lui-même avec une vitesse angulaire constante. Comme dans [7,9], le champ de vitesse du fluide est indépendant du temps lorsqu'on le mesure dans le repère mobile dans lequel le volume occupé par le solide est fixe.

Ce régime permanent est décrit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles, du type de Navier–Stokes, avec des conditions aux limites qui prennent en compte le couplage fluide-solide. Ce système fait intervenir un certain nombre de paramètres, dont la distance du solide au plan, la vitesse de translation du solide, les densités du fluide et du solide et la direction du plan par rapport à celle de la verticale, ou, ce qui revient au même, la direction de la verticale par rapport à celle du plan. Nous verrons qu'il est impossible d'imposer la valeur de tous les paramètres simultanément, mais que certains peuvent l'être et déterminent alors les autres, *via* la solution du problème couplé.

Le problème tel que nous le formulons est très proche du problème de Navier–Stokes stationnaire dans des domaines extérieurs. Ce dernier a fait l'objet de nombreux travaux, dont on trouvera une synthèse dans le livre de G.P. Galdi [3] (Vol. II, pp. 61–246). Nous suivons de près la démarche que l'un des auteurs a utilisée [7] pour démontrer l'existence d'un régime permanent pour la chute d'un solide dans un fluide visqueux incompressible.

Dans le paragraphe suivant, nous expliquons en détails le problème physique et établissons les équations du mouvement. A la Section 2, nous décrivons les espaces fonctionnels, qui seront utilisés dans la section suivante pour la formulation variationnelle du problème.

Le problème naturel consiste, étant donnés le rayon r et la masse m du solide, la viscosité ν et la gravité ge , à trouver la distance du solide au bord d et sa vitesse de translation V . Notre méthode ne nous a pas permis de résoudre celui-ci, mais seulement de trouver la gravité lorsque m , r , d , ν et V sont donnés. Il resterait ensuite à inverser la relation qui, à d et V , associe la gravité. Même pour des données petites, ceci reste un problème ouvert ; il semble difficile d'utiliser le théorème des fonctions implicites, dans ce contexte où le domaine est non borné.

Pour cette raison, la valeur de V est fixée dans notre problème variationnel (voir la Section 4). Comme il est classique lorsque le domaine n'est pas borné, nous nous ramenons au cas d'ouverts bornés (problème *local*) de plus en plus grands. Cependant, le problème local présente une difficulté inédite : sauf si la viscosité est assez grande (et encore le seuil dépend-il de la taille du domaine tronqué) il n'y a pas d'estimation *a priori* explicite. Nous parvenons bien à montrer que l'ensemble des solutions reste borné tant que ν^{-1} , l'inverse de la viscosité, est borné ; c'est même l'argument crucial, dans lequel on procède par l'absurde. Mais, dans une méthode de point fixe, cela ne suffit pas pour construire une application d'une boule de rayon assez grand dans elle-même. C'est pourquoi nous mettons en œuvre au Paragraphe 4 la méthode de Leray–Schauder. Le passage à la limite, lorsque le domaine tronqué tend vers le demi-espace, utilise la même idée. En particulier, il n'y a pas d'estimation explicite, même pour une grande viscosité. Dans une dernière section, nous donnons un équivalent des solutions lorsque V est petit.

1. Le problème physique

1.1. Description

On considère le système formé par un solide de masse m uniformément répartie, et de matrice d'inertie J . On suppose que le solide occupe un volume S ayant la forme d'une boule de rayon r . On note G le centre d'inertie du solide. Ce centre G , et donc S , dépendent du temps.

Le solide considéré est supposé indéformable. Son champ de vitesse est donc un torseur de la forme $\dot{G} + \Omega \wedge (x - G)$. On pose $\dot{G} = V$. On suppose que le solide est soumis aux seules forces de pesanteur et d'interaction avec le fluide.

Le fluide, visqueux (viscosité ν) et incompressible de densité ρ_f , occupe un demi-espace limité par un plan \mathcal{P} . Il évolue sous les seuls effets de la pesanteur et des forces exercées par le solide au cours de son mouvement. Du fait que le fluide est visqueux, la vitesse du fluide est nulle sur le bord \mathcal{P} et est égale à celle du solide sur l'interface ∂S .

Le plan n'est *a priori* pas horizontal. Supposons, pour fixer les idées, que la gravité est dirigée vers l'extérieur du domaine, c'est-à-dire que celui-ci est situé au-dessus de \mathcal{P} , et que le solide est plus dense que le fluide. En l'absence de fluide, le solide roulerait sur le plan. C'est ce type de mouvement que nous voulons généraliser. Dans un régime permanent, le solide roule sur une couche fluide d'épaisseur d à déterminer. Cette couche limite est lente à cause de la condition de vitesse nulle sur \mathcal{P} , tandis que la couche externe de fluide, plus libre vis-à-vis des conditions aux limites, peut se mouvoir plus rapidement. Le freinage dû à la couche limite et l'accélération due à la gravité induisent le mouvement de rotation propre du solide (voir la Fig. 1).

Le mouvement relatif du fluide est inverse du mouvement du solide. La partie du fluide qui passe entre le solide et la paroi subit une surpression, inversement proportionnelle à la distance d . Cette surpression n'est pas compensée par celle de la couche extérieure, car l'épaisseur de fluide au-dessus du solide est infinie. La force résultante que le fluide exerce sur le solide est donc dirigée vers l'intérieur du domaine (bien que pas perpendiculaire à \mathcal{P} en raison du freinage discuté plus haut). C'est cette force qui peut

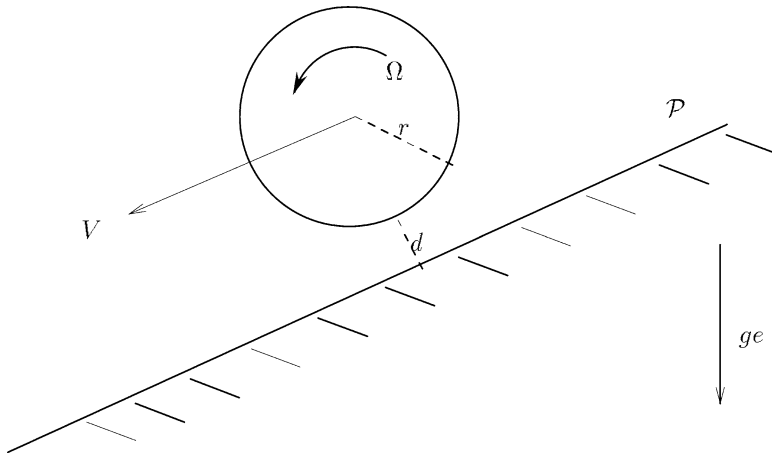


FIG. 1. Roulement d'une sphère à distance finie de la paroi.

empêcher le solide d'atteindre le bord. Dans le régime permanent que nous étudions, cette force s'oppose exactement à celle de la gravité.

1.2. Etablissement des équations

Dans le référentiel absolu \mathcal{F} , on désigne par u la vitesse du fluide en tout point et par p la pression associée. Le comportement du fluide est régi par les équations de Navier–Stokes :

$$\begin{cases} \rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \nu \Delta u + \nabla p = \rho_f g e, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (1)$$

et ce dans un domaine \mathcal{D} , demi-espace limité par le plan \mathcal{P} et privé du volume S . Le paramètre e désigne la verticale, c'est un élément de la sphère S^2 . On dispose, de plus, des conditions aux bords suivantes :

$$u = \begin{cases} 0 & \text{sur } \mathcal{P}, \\ V + \Omega \wedge (x - G) & \text{sur } \partial S, \\ 0 & \text{à l'infini.} \end{cases} \quad (2)$$

Le solide obéit aux lois de la mécanique classique :

$$\begin{cases} m \dot{V} = m g e + \int_{\partial S} \sigma n \, ds, \\ J \dot{\Omega} = \int_{\partial S} \sigma n \wedge y \, ds, \end{cases} \quad (3)$$

où n désigne et désignera par la suite la normale unitaire extérieure à ∂S . La matrice σ est le tenseur des contraintes du fluide :

$$\sigma_{i,j} = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - p \cdot \delta_{i,j}$$

avec

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous nous intéressons aux régimes permanents. Le solide reste alors à distance constante du plan \mathcal{P} . Ceci signifie que V est parallèle au plan \mathcal{P} . Nous privilégions donc l'étude dans le référentiel galiléen \mathcal{R} associé au centre d'inertie du solide, dans lequel tout point matériel de S , \mathcal{P} et \mathcal{D} est fixe. Dans ce référentiel, nous prenons comme origine le centre de la boule. Nous notons y la variable d'espace. Le plan \mathcal{P} a pour équation $y_3 = -(d + r)$ où d est la distance du plan au solide. Comme le plan \mathcal{P} n'est pas supposé horizontal, la direction e de la verticale, c'est-à-dire de la gravité, est en général différente du troisième axe de coordonnées. Enfin, la distance d est strictement positive car nous voulons que le solide ne soit pas en contact avec le plan.

Dans ce qui suit, nous faisons le changement de variables $(y, t) \mapsto (y - tV, t)$, qui a pour effet de remplacer $\partial_t u$ par $\partial_t u - V \cdot \nabla u$. Comme nous ne modifions pas l'inconnue u , on ne peut pas vraiment parler d'une transformation Galiléenne. Les équations de Navier–Stokes sont donc écrites dans le repère mobile \mathcal{R} , mais u est toujours le champ de vitesse dans le repère fixe \mathcal{F} . Ce choix permet d'une part de chercher le régime permanent comme solution stationnaire des équations, d'autre part de garder une condition aux limites homogène sur \mathcal{P} et à l'infini.

Pour une solution stationnaire, nous avons :

$$\dot{V} = \dot{\Omega} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Par conséquent, on obtient les équations :

$$\begin{cases} \rho_f [(u - V) \cdot \nabla] u - \nu \Delta u + \nabla p = \rho_f g e, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad \text{sur } \mathcal{D} \tag{4}$$

avec $\mathcal{D} = \{y; y_3 > -(d + r) \text{ et } |y| > r\}$,

$$u = \begin{cases} 0 & \text{sur } \mathcal{P}, \\ V + \Omega \wedge y & \text{sur } \partial S, \\ 0 & \text{à l'infini,} \end{cases} \tag{5}$$

et pour le solide :

$$\begin{cases} m g e + \int_{\partial S} \sigma n \, ds = 0, \\ \int_{\partial S} \sigma n \wedge y \, ds = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Pour un solide de masse et de forme données, nous disposons d’une famille d’équations aux dérivées partielles en (u, p) dépendant de plusieurs paramètres qui sont :

- le champ de vitesse du solide caractérisé par les deux vecteurs V et Ω ,
- la direction de la verticale e ,
- la distance de la boule au plan d .

Pour résoudre notre problème physique, nous devons déterminer s’il existe une solution à l’une de ces équations aux dérivées partielles (4) en (u, p) , avec les contraintes aux bords (5), (6), pour des valeurs des paramètres physiquement admissibles, c’est-à-dire :

- $V \in \mathbb{R}^3$, parallèle à \mathcal{P} et $\Omega \in \mathbb{R}^3$,
- $e \in \mathcal{S}^2$, la sphère unitaire de \mathbb{R}^3 ,
- $d \in \mathbb{R}_*^+$.

2. Cadre fonctionnel

Le problème que nous voulons traiter est déjà largement maîtrisé dans le cas où le fluide occupe tout l’espace en dehors du solide [7,6,9]. Pour résoudre le problème mixte, nous suivons la ligne décrite par ces différents articles en optant pour une approche variationnelle. Cependant, avant d’introduire la formulation faible du problème nous décrivons les espaces qui seront mis en jeu dans la résolution par cette approche.

Suivant l’approche de [7], nous introduisons \tilde{Y} le sous-espace de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{D} \cup S)$ des champs de vecteurs ϕ vérifiant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \phi = 0, \\ \exists (V_\phi, \Omega_\phi) \in (\mathbb{R}^3)^2 \text{ tels que } \phi = V_\phi + \Omega_\phi \wedge y \text{ sur } S. \end{cases}$$

2.1. Quelques propriétés de l’espace \tilde{Y}

Le premier point à vérifier est que cet espace n’est pas vide :

PROPRIÉTÉ 2.1. – Pour tout $V \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\Omega \in \mathbb{R}^3$, il existe $\phi \in \tilde{Y}$ tel que :

$$\phi = V + \Omega \wedge y \quad \text{sur } S.$$

Preuve. – Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{D} \cup S)$ une fonction à valeurs réelles valant 1 sur S . On pose :

$$\begin{aligned} U &:= \psi \cdot \left(\frac{1}{2} V \wedge y + (\Omega \cdot y)y \right), \\ \phi &:= \nabla \wedge U. \end{aligned}$$

Alors, $\phi \in \tilde{Y}$ et satisfait $\phi = V + \Omega \wedge y$ sur S . \square

Sur \tilde{Y} , on dispose d’une forme bilinéaire symétrique définie comme suit :

$$((\phi, \psi)) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} \right).$$

PROPRIÉTÉ 2.2. – Pour tout $(\phi, \psi) \in \tilde{Y}^2$ on a :

$$((\phi, \psi)) = \int_{\mathcal{D} \cup S} \nabla \phi \cdot \nabla \psi, \tag{7}$$

$$((\phi, \psi)) = 2(\Omega_\phi \cdot \Omega_\psi)|_S + \int_{\mathcal{D}} \nabla \phi \cdot \nabla \psi, \tag{8}$$

où

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi := \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}.$$

Preuve. – Du fait que ϕ (ou ψ) est un torseur sur S , on a :

$$((\phi, \psi)) = \int_{\mathcal{D} \cup S} \left(\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} \right).$$

Or, par intégration par parties, on a :

$$\int_{\mathcal{D} \cup S} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} = - \int_{\mathcal{D} \cup S} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_i}{\partial y_i} \right) \psi_j \right] = 0.$$

On a donc (7). Or, sur S

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} = 2(\Omega_\phi \cdot \Omega_\psi).$$

On obtient donc (8) à partir de (7). □

La forme bilinéaire $((\cdot, \cdot))$ définit un produit scalaire sur \tilde{Y} . Il est classique que pour la norme associée à ce produit scalaire, \tilde{Y} s’injecte continûment dans $\mathbf{L}^6(\mathcal{D} \cup S)$. Nous notons enfin Y le complété de \tilde{Y} pour la norme $\| \cdot \|$.

2.2. L’espace Y

L’espace normé Y est un sous-espace fermé de l’espace homogène $\dot{\mathbb{H}}_0^1(\mathcal{D} \cup S)$. Par densité, ses éléments sont à divergence nulle et leur trace sur \mathcal{P} est nulle. D’après (8), l’application linéaire $\phi \mapsto \Omega_\phi$, définie sur \tilde{Y} , admet un prolongement continu de Y dans \mathbb{R}^3 . D’après [7], il en est de même pour l’application $\phi \mapsto V_\phi$. On en déduit, par densité, que la restriction de $\phi \in Y$ au solide s’écrit $y \mapsto V_\phi + \Omega_\phi \wedge y$. En particulier, la trace de ϕ sur ∂S est de cette forme.

Pour $V \in \mathbb{R}^3$, on note Y_V l’ensemble des éléments $u \in Y$ tels que $V_u = V$. Pour construire une solution, nous nous limiterons à la recherche dans Y_V . D’autre part, nous voulons, comme dans la méthode de Leray [5], travailler sur des domaines bornés. Nous introduisons donc une famille croissante $(\mathcal{O}_R)_{(R>0)}$ constituée d’ouverts de \mathbb{R}^3

contenant S et recouvrant le demi-espace au dessus de \mathcal{P} quand R tend vers l’infini. Nous définissons

$$Y_V^R := Y_V \cap \mathbb{H}_0^1(\mathcal{O}_R).$$

Bien entendu, Y_V et Y_V^R sont des sous-espaces affines de Y et Y^R , respectivement, et de directions respectives Y_0 et Y_0^R . De plus, pour tout $R > 0$, $(Y_0^R, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert séparable.

3. La formulation faible du problème

Nous pouvons maintenant introduire la formulation faible du problème mixte.

3.1. Le problème variationnel

Nous rappelons que chaque paramètre est, pour l’instant, fixé arbitrairement à une valeur physiquement admissible.

THÉORÈME 3.1. – *Supposons que (u, p) est un couple régulier, solution des équations de Navier–Stokes (4) avec comme conditions aux bords (5) et (6), alors*

$$\rho_f b_V(u, u, \phi) + v((u, \phi)) = m_a \text{ge} \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in \tilde{Y}, \tag{9}$$

avec :

$$b_V(u, v, \phi) := \int_{\mathcal{D}} ((u - V) \cdot \nabla) v \cdot \phi,$$

$$((u, \phi)) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} \right),$$

$$m_a := m - \int_S \rho_f dy, \quad \text{masse apparente du solide.}$$

Preuve. – On sait que, pour tout $y \in \mathcal{D}$:

$$\rho_f ((u - V) \cdot \nabla) u - v \Delta u + \nabla p = \rho_f \text{ge}.$$

On a donc, pour tout $\phi \in \tilde{Y}$:

$$\rho_f ((u - V) \cdot \nabla) u \cdot \phi - v \Delta u \cdot \phi + \nabla p \cdot \phi = \rho_f \text{ge} \cdot \phi.$$

Intégrant cette égalité par parties, nous obtenons

$$\rho_f b_V(u, u, \phi) + v((u, \phi)) = \int_{\mathcal{D}} \rho_f \text{ge} \cdot \phi - \int_{\partial S} (\sigma n \cdot \phi) ds.$$

Cependant,

$$\int_{\partial S} (\sigma n \cdot \phi) ds = \int_{\partial S} \sigma n \cdot (V_\phi + \Omega_\phi \wedge y) ds,$$

d'où, utilisant les contraintes imposées au solide, on obtient :

$$m \operatorname{ge} \cdot V_\phi = - \int_{\partial S} (\sigma n \cdot \phi) \, ds. \tag{10}$$

D'autre part, $\rho_f \operatorname{ge} = \nabla(\rho_f \operatorname{ge} \cdot y)$, de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} e \cdot \phi \, dy &= - \int_{\partial S} (e \cdot y)(\phi \cdot n) \, ds = -V_\phi \cdot \int_{\partial S} (e \cdot y)n \, ds \\ &= -V_\phi \cdot \int_S \nabla(e \cdot y) \, dy = -|S|e \cdot V_\phi, \end{aligned}$$

ce qui fournit la formule annoncée. \square

On pose donc le problème variationnel suivant :

PROBLÈME VARIATIONNEL 3.1. – *Trouver $u \in Y_V$ tel que :*

$$\rho_f b_V(u, u, \phi) + v((u, \phi)) = m_a \operatorname{ge} \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in \tilde{Y}.$$

Nous venons de montrer que tout couple suffisamment régulier, solution d'un problème mixte, fournit une solution d'un tel problème variationnel. Nous examinons ci-dessous la réciproque.

3.2. Du problème variationnel au problème mixte

Le problème variationnel a bien un sens. En effet, pour tout $u \in Y$, $v \in Y$, $\phi \in \tilde{Y}$, $b_V(u, v, \phi)$ est défini et on a :

$$|b_V(u, v, \phi)| \leq \|u\|_{L^6(\mathcal{D})} \|v\| \|\phi\|_{L^3(\mathcal{D})} + \|V\| \|v\| \|\phi\|_{L^2(\mathcal{D})}, \tag{11}$$

par application de l'inégalité de Hölder pour un produit de trois termes.

Pour démontrer la réciproque évoquée ci-dessus, nous utiliserons le résultat de régularité suivant :

PROPRIÉTÉ 3.1. – *Soit $u \in Y$ tel que*

$$\rho_f b_V(u, u, \phi) + v((u, \phi)) = m_a \operatorname{ge} \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in \tilde{Y},$$

alors, pour tout ouvert régulier borné \mathcal{O} satisfaisant

$$\begin{cases} S \subset \mathcal{O}, \\ \bar{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D} \cup S. \end{cases} \tag{12}$$

u vérifie :

$$u \in C^\infty(\mathcal{O} \cap \mathcal{D}). \tag{13}$$

Preuve. – Nous disposons de l’estimation *a priori* suivante [1] :
 Soit \mathcal{O} ouvert borné de \mathbb{R}^3 , soit $f \in \mathbb{W}^{m,q}(\mathcal{O})$ et $g \in \mathbb{W}^{m+1,q}(\mathcal{O})$.
 Pour tout (u, p) satisfaisant :

$$\begin{cases} \Delta u + \nabla p = f, \\ \nabla \cdot u = g, \\ u = v_* \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}, \end{cases}$$

nous avons :

$$|u|_{\mathbb{W}^{m+2,q}(\mathcal{O})} + |p|_{\mathbb{W}^{m+1,q}(\mathcal{O})} \leq c(|f|_{\mathbb{W}^{m,q}(\mathcal{O})} + |v_*|_{\mathbb{W}^{m+2-\frac{1}{q},q}(\partial\mathcal{O})} + |g|_{\mathbb{W}^{m+1,q}(\mathcal{O})}). \quad (14)$$

Soit $u \in Y$ satisfaisant (9). *A fortiori*, u satisfait (9) pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ de divergence nulle. Selon le théorème de De Rham, associé à quelques estimations ([3, Vol. I, p. 180]), il existe $p \in L^2_{loc}(\mathcal{D})$ tel que :

$$\begin{cases} v\Delta u - \nabla p = \rho_f((u - V) \cdot \nabla u) & \text{sur } \mathcal{D}, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{sur } \mathcal{D}, \\ u = V_u + \Omega_u \wedge y & \text{sur } S. \end{cases}$$

Soit alors \mathcal{O} ouvert borné vérifiant (12). Soit $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O} \cap \mathcal{D}$. Soit ψ , fonction à valeurs réelles, régulière, à support compact strictement inclus dans \mathcal{O} telle que :

$$\psi = 1 \quad \text{sur un voisinage } \mathcal{O}_1 \text{ de } S.$$

Posons $\psi_0 = \psi|_{\mathcal{O}_0}$, $v = \psi_0 u$, $q = \psi_0 p$, alors :

$$\begin{cases} v\Delta v - \nabla q = \rho_f \psi_0[((u - V) \cdot \nabla)u] - p\nabla\psi_0 + v(\Delta\psi_0)u + v(\nabla\psi_0 \cdot \nabla)u, \\ \nabla \cdot v = \nabla\psi_0 \cdot u, \\ v = V_u + \Omega \wedge y \quad \text{sur } \partial S, \\ v = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Remarquons que :

$$\nabla u \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O}_0), \quad u \in \mathbf{L}^6(\mathcal{O}_0),$$

donc on a, *a fortiori* :

$$(\psi_0[((u - V) \cdot \nabla)u] - p\nabla\psi_0 + v(\Delta\psi_0)u + v(\nabla\psi_0 \cdot \nabla)u) \in \mathbf{L}^{\frac{3}{2}}(\mathcal{O}_0).$$

De plus, le terme de bord, en tant que trace d’une fonction $C_c^\infty(\mathcal{D} \cup S)$, appartient à tous les espaces de Sobolev que l’on souhaite. On peut donc utiliser l’estimation (14) ce qui nous donne :

$$u \in \mathbb{W}^{2,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}_1), \quad p \in \mathbb{W}^{1,\frac{3}{2}}(\mathcal{O}_1).$$

Ce résultat obtenu sur \mathcal{O}_1 peut être obtenu sur \mathcal{O}_0 , en considérant un autre ouvert \mathcal{O} plus grand. La définition de \mathcal{O} nous garantit qu’il en existe un. Ceci permet de mettre en route

un processus récurrent, remarquant que les injections de Sobolev nous font alors gagner de l'intégrabilité pour u et p . On a donc, pour tout $n \geq 2$:

$$u \in \mathbb{W}^{n, \frac{3}{2}}(\mathcal{O}_0), \quad p \in \mathbb{W}^{n-1, \frac{3}{2}}(\mathcal{O}_0).$$

Finalement, u est bien régulière sur \mathcal{O}_0 , tout comme p . \square

Nous sommes maintenant en mesure de montrer de quelle manière, toute solution du problème variationnel nous permet de construire un couple (u, p) solution du problème mixte.

THÉORÈME 3.2. – *Supposons que, pour un certain $u \in Y_V$:*

$$\rho_f b_V(u, u, \phi) + v((u, \phi)) = m_a \text{ge} \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in \tilde{Y},$$

alors u est de classe C^∞ dans \mathcal{D} , au voisinage de S , et permet de définir p de la même classe telle que sur \mathcal{D} on ait

$$\begin{aligned} \rho_f [((u - V) \cdot \nabla)u] - v\Delta u + \nabla p &= \rho_f \text{ge}, \\ \nabla \cdot u &= 0, \end{aligned}$$

avec aux bords :

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{sur } \mathcal{P}, \\ u &= V + \Omega_u \wedge y && \text{sur } \partial S. \end{aligned}$$

De plus, u satisfait, en tant qu'élément de Y , des bonnes propriétés de décroissance à l'infini. On a aussi les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} m \text{ge} + \int_{\partial S} \sigma n \, ds &= 0, \\ \int_{\partial S} \sigma n \wedge y \, ds &= 0. \end{aligned}$$

Preuve. – La propriété précédente 3.1 nous assure que notre solution u est une solution régulière. Ensuite, les conditions aux limites et la condition de divergence nulle sont contenues dans l'hypothèse $u \in Y_V$.

D'autre part, on a

$$\rho_f b_V(u, u, \phi) + v((u, \phi)) = m_a \text{ge} \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in \tilde{Y}.$$

A fortiori, c'est vrai pour tous les $\phi \in C_c^\infty(\mathcal{D})$ et de divergence nulle. Le théorème de De Rham nous assure alors l'existence d'une fonction q qui sera ici régulière telle que sur \mathcal{D} :

$$\rho_f [((u - V) \cdot \nabla)u] - v\Delta u + \nabla q = 0.$$

Posant $p = q + \rho_f \text{ge} \cdot y$, on a bien que p est toujours régulière et, sur \mathcal{D} :

$$\rho_f [((u - V) \cdot \nabla)u] - v\Delta u + \nabla p = \rho_f \text{ge}.$$

Reprenons alors les calculs effectués dans le démonstration du Théorème 3.1. Nous pouvons les utiliser puisque u et p sont régulières :

$$\left(\int_{\partial S} (\sigma n \wedge y) ds \right) \cdot \Omega_\phi - \left(\int_{\partial S} \sigma n ds \right) \cdot V_\phi = m ge \cdot V_\phi.$$

On peut alors tester cette égalité sur tous les $V_\phi \in \mathbb{R}^3$ et tous les $\Omega_\phi \in \mathbb{R}^3$, conformément à la Propriété 2.1, ce qui nous donne bien :

$$m ge + \int_{\partial S} \sigma n ds = 0, \tag{15}$$

$$\int_{\partial S} \sigma n \wedge y ds = 0. \tag{16}$$

A partir de u , nous avons donc pu construire p tel que (u, p) soit solution de (4) avec comme conditions aux bords (5), (6). □

3.3. Quelques remarques sur le problème variationnel

- (1) On ne peut pas diminuer l'ensemble des fonctions-test car, d'une part, nous avons besoin de toutes les fonctions $C_c^\infty(\mathcal{D})$ pour pouvoir en déduire la partie équations aux dérivées partielles du problème et, d'autre part, nous avons besoin de toutes les valeurs de $V_\phi \in \mathbb{R}^3$ et $\Omega_\phi \in \mathbb{R}^3$ pour retrouver les équations du mouvement du solide.
- (2) La démonstration du Théorème 3.2 montre qu'il n'est en général pas possible d'imposer la valeur de Ω . En effet, la valeur de Ω apparaît comme le multiplicateur de Lagrange de la contrainte de moment nul dans les équations du mouvement du solide (6). De même, la valeur de V apparaît comme le multiplicateur de Lagrange de la contrainte de compensation des forces dans (6).
- (3) Si on n'a pu imposer la valeur de Ω dans la formulation du problème variationnel, il semble déraisonnable de vouloir fixer la valeur de V . Le Problème 3.1 est donc surdéterminé tel qu'il est formulé. Cependant, on ne peut laisser V totalement libre dans le problème variationnel car nos équations n'ont un sens physique que si V est parallèle à \mathcal{P} .
- (4) Si on veut fixer V , il nous faut assouplir la contrainte de compensation des forces dans (6), c'est le sens de l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3.3. – *Toute solution du Problème 3.1 est solution du problème :*

PROBLÈME VARIATIONNEL 3.2. – *Trouver $u \in Y_V$ tel que*

$$\rho_f b_V(u, u, \phi) + v((u, \phi)) = 0 \quad \forall \phi \in \tilde{Y}_0. \tag{17}$$

Réciproquement, si $u \in Y_V$ est solution de (17), alors, il existe $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\rho_f b_V(u, u, \phi) + v((u, \phi)) = \Sigma \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in \tilde{Y}.$$

Preuve. – La première assertion de cette propriété est une trivialité. Réciproquement, si u satisfait le problème variationnel 3.2, alors la forme linéaire

$$L(\phi) : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\phi \mapsto b_V(u, u, \phi) + \nu((u, \phi)),$$

est nulle sur le noyau de $\phi \mapsto V_\phi$. Il existe donc une forme linéaire ℓ sur \mathbb{R}^3 telle que $L(\phi) = \ell(V_\phi)$ pour tout ϕ dans \tilde{Y} . \square

Ceci nous amène à reformuler notre approche du problème physique. Dans un premier temps, nous allons montrer que, donnant à d et V des valeurs admissibles arbitraires, nous pouvons trouver une solution du Problème 3.2 que nous appellerons problème variationnel homogène par la suite. On en déduit, via le théorème ci-dessus, l’existence d’une solution du problème variationnel 3.1 pour une force Σ et donc l’existence d’une solution à un problème mixte pour une certaine vitesse de rotation Ω et une certaine force de gravité m ge obtenue à partir de Σ . Il nous faudra ensuite étudier les normes des forces de gravité m ge obtenues, quitte à faire varier les valeurs de d et V , pour montrer qu’un solide quelconque peut tomber dans un fluide sans toucher le bord.

4. Le problème variationnel homogène

On fixe des valeurs de la vitesse $V \in \mathbb{R}^3$, parallèle à \mathcal{P} , et de $d > 0$ durant toute cette partie. On suppose, sans nuire à la généralité, que le fluide est de densité $\rho_f = 1$ et de viscosité $\nu > 0$. Pour montrer que le Problème 3.2 admet une solution, nous suivons la méthode de continuation de Leray [5]. Nous cherchons donc, dans un premier temps, une solution $u \in Y_V^R$ satisfaisant (17), pour tout $\phi \in \tilde{Y}_0^R$. Ce problème est appelé *Problème variationnel homogène local*.

4.1. Réduction du problème local

Tout d’abord, nous choisissons $U \in Y_V^R$ et posons $u = U + h$, le problème se ramène alors à un problème sur Y_0^R . On peut préciser la continuité de la forme b par une inégalité classique :

PROPRIÉTÉ 4.1. – *Pour tout $u \in Y$, $v \in Y$, $\phi \in Y^R$, on a :*

$$|b_V(u, v, \phi)| \leq (K|\mathcal{O}_R|^{\frac{1}{6}}\|u\| + K|V||\mathcal{O}_R|^{\frac{1}{3}})\|v\|\|\phi\|, \tag{18}$$

$$b_V(u, \phi, \phi) = 0, \tag{19}$$

$$b_V(u, v, \phi) = -b_V(u, \phi, v). \tag{20}$$

L’espace Y_0^R étant Hilbertien, on peut donc définir :

$$T_\nu : Y_0^R \rightarrow Y_0^R,$$

$$h \mapsto T_\nu h,$$

où $T_\nu h$ est l’unique élément de Y_0^R vérifiant :

$$\nu((U, \phi)) + b_V(U + h, U + h, \phi) = ((T_\nu h, \phi)) \quad \forall \phi \in Y_0^R.$$

PROPRIÉTÉ 4.2. – *L'opérateur T_ν est compact.*

Preuve. – Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Y_0^R convergeant faiblement vers h . Posons $\mu_n = T_\nu h_n$ et $\mu = T_\nu h$. On a alors :

$$\|\mu_n - \mu\|^2 = b_V(U + h_n, U + h_n, \mu_n - \mu) - b_V(U + h, U + h, \mu_n - \mu).$$

Or, nous avons le lemme suivant :

LEMME 4.1. – *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Y convergeant faiblement vers u . Alors, pour tout $\phi \in \tilde{Y}$, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{V_n}(u_n, u_n, \phi) = b_V(u, u, \phi),$$

where V and V_n are the translational velocities associated with u and u_n .

Preuve. – Posant $\mathcal{O} = \text{Supp}(\phi)$, le théorème de Rellich–Kondrachov nous assure que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} V_n &= V, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p(\mathcal{O})} &= 0, \quad 1 \leq p < 6. \end{aligned}$$

Ceci permet de démontrer, via la majoration (11), que :

$$b_V(u, u, \phi) - b_{V_n}(u_n, u_n, \phi) = b_{V-V_n}(u - u_n, u, \phi) + b_{V_n}(u_n, u - u_n, \phi)$$

tend vers zero quand n tend vers l'infini. \square

Ce lemme nous permet de nous ramener à l'étude de :

$$\Delta_n = b_V(U + h_n, U + h_n, \mu_n) - b_V(U + h, U + h, \mu_n).$$

Or, la Propriété 4.1 montre que μ_n est bornée. Les mêmes remarques quant à la compacité des injections de Y dans $L^p(\mathcal{O}_R)$ pour $p < 6$ permettent de conclure. \square

Notre problème consiste donc à trouver un $h \in Y_0^R$ annulant $\Lambda_\nu = I + \frac{1}{\nu} T_\nu$, où I est l'identité de Y_0^R .

4.2. Le problème homogène local pour $\nu \gg 1$

Pour isoler les limites de la construction à suivre, montrons tout d'abord que, sous certaines hypothèses, nous avons une certaine estimation d'énergie pour notre problème :

PROPRIÉTÉ 4.3. – *Supposons que h est à support compact et que $U + h$ satisfait (17) sur un ensemble de fonctions tests contenant h . Alors, si $\nu > K|U|_{L^3(\mathcal{D} \cup \mathcal{S})}$, on a l'estimation suivante :*

$$\|h\| \leq \frac{\nu \|U\| + |U|_{L^3(\mathcal{D})} \cdot |U|_{L^6(\mathcal{D})} + |V| \|U\|_{L^2(\mathcal{D})}}{\nu - K|U|_{L^3(\mathcal{D})}}.$$

Preuve. – Pour s’en convaincre, il suffit de tester (17) sur h et d’utiliser la continuité de b_ν . \square

Nous montrons maintenant que le problème local admet une solution par une méthode de point fixe. Pour cela, notons $f = f_\nu := -\nu^{-1}T_\nu$.

PROPRIÉTÉ 4.4. – *Il existe $\nu_0 = \nu_0(R)$ tel que, pour tout $\nu > \nu_0$:*

- *f envoie la boule de rayon $2\|U\|$ dans la boule de rayon $3\|U\|/2$, et donc dans elle-même,*
- *f est strictement contractante sur cette boule.*

Preuve. – D’une part, il existe A tel que pour tout h vérifiant $\|h\| \leq 2\|U\|$,

$$|b_\nu(U + h, U + h, \phi)| \leq A\|\phi\| \quad \forall \phi \in Y_0^R,$$

car la partie de T_ν bilinéaire en h est compacte, tout comme T_ν , donc bornée. Donc :

$$\|f(h)\| \leq \|U\| + \frac{1}{\nu}A.$$

Pour ν suffisamment grand f envoie bien la boule de rayon $2\|U\|$ dans celle de rayon $3\|U\|/2$.

Soit h, k deux éléments de Y_0^R , notons $\delta = h - k$, alors :

$$((f(h) - f(k), \phi)) = \frac{1}{\nu}(b_\nu(U + h, \delta, \phi) + b_0(\delta, U + k, \phi)) \quad \forall \phi \in Y_0^R,$$

prenant h et k de norme plus petite que $2\|U\|$, utilisant la Propriété 4.1, on a :

$$\|f(h) - f(k)\| \leq \frac{1}{\nu}(5K|\mathcal{O}_R|^{\frac{1}{6}}\|U\| + K|V||\mathcal{O}_R|^{\frac{1}{3}})\|\delta\|.$$

Donc, pour ν suffisamment grand, f est aussi contractante sur la boule de rayon $2\|U\|$. \square

PROPRIÉTÉ 4.5. – *Il existe ν_1 tel que, pour tout $\nu > \nu_1$, il existe un unique h_0 satisfaisant :*

$$\Lambda_\nu h_0 = 0.$$

De plus, cette solution satisfait $\|h_0\| \leq 3\|U\|/2$.

Preuve. – Remarquons que tout point fixe de f fournit un zéro de Λ_ν et réciproquement. Or, pour ν assez grand, nous savons grâce à la Propriété 4.4 que f conserve la boule de rayon $2\|U\|$ et que f y est contractante. L’application f a donc un unique point fixe à l’intérieur de cette boule. De plus, l’estimation d’énergie (Propriété 4.3) nous garantit que, pour ν suffisamment grand, tout zéro de Λ_ν se trouve dans la boule de rayon $3\|U\|/2$. Par conséquent, pour ν suffisamment grand Λ_ν a un unique zéro qui, de plus, se trouve dans la boule de rayon $3\|U\|/2$. \square

4.3. Cas général, théorie de Leray et Schauder

Pour étendre le résultat de la partie précédente à toute valeur de $\nu > 0$, nous utilisons le degré topologique de Leray et Schauder (voir par exemple [4, pp. 120–131]). Etant donnés deux réels vérifiant $0 < a < b$, $a < \nu$ et $\nu_1 < b$ nous définissons :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : [a, b] \times Y_0^R &\rightarrow Y_0^R, \\ (\mu, h) &\mapsto \frac{1}{\mu} T_\mu h, \end{aligned}$$

\mathcal{T} est compact comme T_ν . Définissons aussi :

$$\begin{aligned} \Lambda : [a, b] \times Y_0^R &\rightarrow Y_0^R, \\ (\mu, h) &\mapsto \Lambda_\mu(h). \end{aligned}$$

Alors, $\Lambda = I + \mathcal{T}$, où I est l'opérateur identité de Y_0^R et \mathcal{T} est compact. Cet opérateur rentre donc dans le cadre de la théorie du degré topologique de Leray et Schauder. La Propriété 4.5 nous assure que le degré de Λ_b , relativement à toute boule de rayon $\rho > 2\|U\|$, est bien défini, égal à 1. Pour montrer que Λ_ν s'annule sur une boule de rayon $\rho > 2\|U\|$, il suffit de vérifier que les solutions de $\Lambda_\mu(h) = 0$ pour $\mu \in [\nu, b]$ ne traversent pas la sphère de rayon ρ , c'est-à-dire :

$$\Lambda_\mu(h) \neq 0 \quad \forall \mu \in [\nu, b], \quad \forall h \text{ tel que } \|h\| = \rho.$$

Pour pouvoir trouver un tel ρ il suffit de montrer que l'ensemble des points annulant Λ_μ pour $\mu \in [a, b]$ est borné. Nous utilisons pour cela la propriété suivante, qui est évidente lorsque u est assez régulier :

PROPRIÉTÉ 4.6. – *Supposons que $u \in Y_0$ vérifie :*

$$b_0(u, u, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in \tilde{Y}_0^R. \tag{21}$$

Alors pour tout $\phi \in \tilde{Y}^R$:

$$b_0(u, u, \phi) = 0.$$

Preuve. – Soit $u \in Y_0$, vérifiant (21). Un argument similaire à celui de la preuve du théorème 3.3 assure qu'il existe $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$b_0(u, u, \phi) = \Sigma \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in \tilde{Y}_0^R.$$

Notre objectif est de démontrer que $\Sigma = 0$. Pour cela, d'une part, nous écrivons $u = \bar{u} + z$ avec :

$$\bar{u} := \Omega_u \wedge y \in \mathbb{W}^{1,2}(\mathcal{O}_R), \quad z := u - \bar{u} \in \mathbb{W}^{1,2}(\mathcal{O}_R).$$

Notons que z est de trace nulle sur S et donc, posant $d = \text{dist}(y, S)$, l'inégalité de Hardy nous assure que :

$$\frac{z}{d} \in L^2(\mathcal{O}_R).$$

D'autre part, nous introduisons $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0, \\ \in [0, 1] & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

et nous posons, pour tout $V \in \mathbb{R}^3$ et pour $\gamma > 0$:

$$\phi_\gamma(y) = \nabla \wedge \left(\frac{1}{2} \psi \left(\frac{|y| - r}{\gamma} \right) V \wedge y \right).$$

Notant $B_\gamma = B(0, r + \gamma) \cap \mathcal{D}$, on a $\text{Supp}(\phi_\gamma) \subset B_\gamma$ et le théorème de convergence dominée nous assure que :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left| \frac{z}{d} \right|_{L^2(B_\gamma)} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} |z|_{L^2(B_\gamma)} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} |\bar{u}|_{L^2(B_\gamma)} = 0.$$

Pour γ suffisamment petit, ϕ_γ appartient à \tilde{Y}_V^R (voir la Propriété 2.1) et

$$b_0(u, u, \phi_\gamma) = \Sigma \cdot V,$$

d'où il vient

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} b_0(u, u, \phi_\gamma) = \Sigma \cdot V.$$

Or nous avons

$$b_0(u, u, \phi_\gamma) = b_0(\bar{u} + z, \bar{u} + z, \phi_\gamma).$$

Remarquant que

$$(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = \frac{1}{2} \nabla \left((\Omega_u \cdot y)^2 - |\Omega_u|^2 |y|^2 \right),$$

intégrant par parties et utilisant les symétries de la sphère, on a

$$b_0(\bar{u}, \bar{u}, \phi_\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^+.$$

D'autre part, comme la norme de $d\phi_\gamma$ dans $L^\infty(\mathcal{O}_R)$ est bornée indépendamment de γ , l'inégalité de Hölder fournit une majoration de la forme :

$$|b_0(z, \bar{u}, \phi_\gamma)| \leq \left| \frac{z}{d} \right|_{L^2(B_\gamma)} |\bar{u}|_{L^2(B_\gamma)} |d\phi_\gamma|_{L^\infty(B_\gamma)}, \tag{22}$$

$$|b_0(z, \bar{u}, \phi_\gamma)| \leq C_1 \left| \frac{z}{d} \right|_{L^2(B_\gamma)} |\bar{u}|_{L^2(B_\gamma)} \tag{23}$$

où C_1 ne dépend pas de γ . On dispose d'une inégalité analogue pour le terme $b_0(z, z, \phi_\gamma)$, par conséquent :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} b_0(z, z, \phi_\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} b_0(z, \bar{u}, \phi_\gamma) = 0.$$

Enfin, par intégration par parties :

$$b_0(\bar{u}, z, \phi_\gamma) = - \int_{B_\gamma} z \cdot ((\bar{u} \cdot \nabla)\phi_\gamma),$$

soit :

$$b_0(\bar{u}, z, \phi_\gamma) = - \int_{B_\gamma} z \cdot (\Omega_u \cdot ((y \wedge \nabla)\phi_\gamma)).$$

Notant $n = \frac{y}{|y|}$, on a la majoration suivante :

$$|b_0(\bar{u}, z, \phi_\gamma)| \leq |\Omega_u| \left| \frac{z}{d} \right|_{L^2(B_\gamma)} |y|_{L^2(B_\gamma)} |d(n \wedge \nabla)\phi_\gamma|_{L^\infty(B_\gamma)}, \tag{24}$$

$$|b_0(\bar{u}, z, \phi_\gamma)| \leq C_2 \left| \frac{z}{d} \right|_{L^2(B_\gamma)} |y|_{L^2(B_\gamma)}, \tag{25}$$

où C_2 ne dépend pas de γ . En effet, $|d(n \wedge \nabla)\phi_\gamma|_{L^\infty(B_\gamma)}$ est bornée en γ car ce terme correspond à la dérivation de ϕ_γ dans des directions tangentielles à la sphère centrée en 0. Or, les puissances de γ n'apparaissent dans les dérivées de ϕ_γ que par la dérivation de ψ et ce terme reste constant à $|y|$ constant. Finalement,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} b_0(\bar{u}, z, \phi_\gamma) = 0.$$

Donc, pour tout $V \in \mathbb{R}^3$, $\Sigma \cdot V = 0$, soit $\Sigma = 0$. Par conséquent :

$$b_0(u, u, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in \tilde{Y}^R. \quad \square$$

Nous pouvons donc maintenant montrer :

PROPRIÉTÉ 4.7. – *Pour tout $\varepsilon > 0$, posons :*

$$M(\varepsilon) = \sup\{\|u\| \text{ pour } u \text{ solution de } \Lambda_\nu(u) = 0 \text{ pour } \nu > \varepsilon\}.$$

Alors :

$$M(\varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Preuve. – Cette inégalité se démontre par l'absurde. Supposons que $M(\varepsilon_0) = \infty$ pour $\varepsilon_0 > 0$. On sait que pour $\nu > \nu_1$ toute solution de $\Lambda_\nu(v) = 0$ est dans la boule de rayon $2\|U\|$. Si $M(\varepsilon_0)$ est infini, il existe donc une suite $(\nu_m, v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que

– v_m est solution de $\Lambda_{\nu_m}(v) = 0$, soit

$$b_V(U + v_m, U + v_m, \phi) + \nu_m((U + v_m, \phi)) = 0 \quad \forall \phi \in Y_0^R, \tag{26}$$

– $\lim_{m \rightarrow \infty} \|v_m\| = \infty$,

– $\varepsilon_0 < \nu_m \leq \nu_1$.

Posons

$$z_m = \frac{v_m}{\|v_m\|}.$$

A extraction près, on peut supposer que :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} v_m &= v^0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} z_m &= z^0 \quad \text{dans } Y_0^R \text{ faible.} \end{aligned}$$

Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, divisant (26) par $\|v_m\|^2$, on obtient, pour tout ϕ dans Y_0^R

$$b_{V_m} \left(\frac{U}{\|v_m\|} + z_m, \frac{U}{\|v_m\|} + z_m, \phi \right) + \frac{v_m}{\|v_m\|} \left(\left(\frac{U}{\|v_m\|} + z_m, \phi \right) \right) = 0,$$

avec

$$V_m := \frac{V}{\|v_m\|}.$$

Passant à la limite quand m tend vers l'infini, on obtient

$$b_0(z^0, z^0, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in Y_0^R. \tag{27}$$

La Propriété 4.6 nous assure alors que

$$b_0(z^0, z^0, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in Y^R. \tag{28}$$

Or, prenant $\phi = v_m$ dans (26), il vient

$$b_V(U + v_m, U, v_m) + v_m \|v_m\|^2 = 0.$$

Divisons cette égalité par $\|v_m\|^2$, puis faisons tendre m vers l'infini. Nous obtenons l'égalité suivante :

$$b_0(z^0, U, z^0) + v^0 = 0.$$

Puisque $v^0 \geq \varepsilon_0 > 0$, il vient $b_0(z^0, z^0, U) \neq 0$, bien que $U \in Y^R$. Cette contradiction prouve que l'hypothèse est fausse. On a en fait

$$M(\varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0. \quad \square \tag{29}$$

Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. – *Soit un fluide de viscosité $\nu > 0$, un solide de rayon r , à une distance $d > 0$ et ayant une vitesse de translation V parallèle à \mathcal{P} . Alors, pour tout $R > 0$, il existe $h \in Y_0^R$ tel que :*

$$b_\nu(U + h, U + h, \phi) + \nu((U + h, \phi)) = 0 \quad \forall \phi \in Y_0^R. \tag{30}$$

Soit, posant $u = U + h$, il existe $u \in Y_V^R$ tel que :

$$b_\nu(u, u, \phi) + \nu((u, \phi)) = 0 \quad \forall \phi \in Y_0^R.$$

Preuve. – Soit $\rho > \max(2\|U\|, M(a))$. Nous avons montré que tout h annulant Λ_ν pour $\nu \in [a, b]$ est strictement dans la boule de rayon ρ . Par ailleurs, le degré de Λ_ν relativement à cette boule vaut 1 pour ν assez grand. La théorie de Leray et Schauder nous assure donc que ce degré vaut 1 pour toute valeur de ν supérieure à a . Il existe $h \in Y_0^R$ annulant Λ_ν . Cet h vérifie (30). Puisque $a > 0$ est arbitraire, le problème homogène local a bien une solution dans le cas général. \square

4.4. Retour au problème variationnel homogène global

Nous disposons maintenant d'au moins une solution du problème variationnel homogène local sur tout ouvert \mathcal{O}_R .

PROPRIÉTÉ 4.8. – *Soit u_R une solution du problème homogène local sur l'ouvert \mathcal{O}_R . Alors, la famille $(u_R)_{R>0}$ est bornée.*

Preuve. – Supposons qu'il existe une suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante, telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{R_n}\| = \infty.$$

Choisissant $U \in Y_V^{R_0}$, on pose $h_n = u_n - U$. Alors, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_V(U + h_n, U + h_n, \phi) + v((U + h_n, \phi)) = 0 \quad \forall \phi \in Y_0^{R_n}.$$

On peut alors se ramener à la démonstration de la Propriété 4.7. \square

Remarquons de plus que les solutions du Problème 3.2 vérifient une certaine forme de fermeture pour la topologie faible :

THÉORÈME 4.2. – *Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Y_0 convergeant faiblement vers h dans Y_0 . Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n vérifie (17) pour tout ϕ dans un sous-ensemble \tilde{Y}_n de \tilde{Y} . On suppose en outre que les $(\tilde{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissants pour l'inclusion. Alors, h satisfait*

$$b_V(U + h, U + h, \phi) + v((U + h, \phi)) = 0 \quad \forall \phi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{Y}_n.$$

Preuve. – Prenons $\phi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{Y}_n$. Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$:

$$b_V(U + h_n, U + h_n, \phi) + v((U + h_n, \phi)) = 0.$$

Or, d'après le Lemme 4.1 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_V(U + h_n, U + h_n, \phi) = b_V(U + h, U + h, \phi).$$

Donc à la limite :

$$b_V(U + h, U + h, \phi) + v((U + h, \phi)) = 0. \quad \square$$

Soit u_R une solution du problème homogène local, et $h_R := u_R - U$. La famille $(h_R)_{R>0}$ étant bornée, on peut en extraire une sous-suite h_{R_n} convergeant vers $h \in Y_0$ avec $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante non bornée. Le théorème précédent 4.2 nous assure donc que h vérifie (17) pour tout

$$\phi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{Y}_0^{R_n} = \tilde{Y}_0.$$

Par conséquent, h est une solution du problème variationnel homogène 3.2.

5. Etude des solutions obtenues

Dans la partie précédente, nous avons montré le théorème suivant :

THÉORÈME 5.1. – *Soit une viscosité $\nu > 0$, un rayon $r > 0$ et une distance $d > 0$. Soit V un vecteur parallèle à \mathcal{P} . Alors il existe $u \in Y_V$ et $\Sigma_u \in \mathbb{R}^3$ tels que :*

$$b_V(u, u, \phi) + \nu((u, \phi)) = \Sigma_u \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in \tilde{Y}.$$

Pour qu'un solide puisse évoluer dans l'écoulement caractérisé par u , il faut et il suffit que $m_a g e = \Sigma_u$. Or $m_a = m - |S|$. Donc

ou bien $|\Sigma_u| \geq |S|g$ auquel cas on doit poser

$$e = \frac{\Sigma_u}{|\Sigma_u|}, \quad mg = |\Sigma_u| + |S|g,$$

ou alors $0 < |\Sigma_u| < |S|g$ auquel cas on peut poser

$$e = -\frac{\Sigma_u}{|\Sigma_u|}, \quad mg = |S|g - |\Sigma_u|,$$

ou

$$e = \frac{\Sigma_u}{|\Sigma_u|}, \quad mg = |\Sigma_u| + |S|g.$$

On ne s'intéresse pas au cas où $\Sigma_u = 0$. Nous montrerons par la suite que ce n'est en général pas le cas. Déterminer pour quelles masses m et quelles gravités g une sphère de rayon r dans un fluide admet un régime permanent revient donc à déterminer l'ensemble des valeurs décrites par $|\Sigma_u|$.

5.1. Encadrement des masses obtenues

Soit un fluide (i.e., une viscosité) et un cadre spatial (i.e., $V \in \mathbb{R}^3$ parallèle à \mathcal{P} , $d > 0$ et $r > 0$) donnés. Nous notons α la norme de l'application linéaire $\phi \mapsto V_\phi$: $|V_\phi| \leq \alpha \|\phi\|$ pour tout ϕ dans Y .

THÉORÈME 5.2. – Soit u une solution d'un problème variationnel homogène 3.2, alors, il existe des constantes $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ne dépendant que de r et d telles que Σ_u vérifie :

$$\frac{\nu}{\alpha^2}|V| \leq |\Sigma_u| \leq \|u\|(\beta_0\nu + \beta_1\|u\| + \beta_2|V|).$$

Preuve. – Par construction u est obtenu comme limite faible de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où u_n est un élément de $Y_V^{R_n}$ tel que (17) est vérifié pour tout $\phi \in \tilde{Y}_0^{R_n}$. Par le même raisonnement que dans le Théorème 3.3, il existe Σ_n tel que, pour tout $\phi \in Y^{R_n}$:

$$b_V(u_n, u_n, \phi) + \nu((u_n, \phi)) = \Sigma_n \cdot V_\phi.$$

Pour $\phi = u_n$, on a donc

$$\nu\|u_n\|^2 = \Sigma_n \cdot V.$$

Par ailleurs, du Théorème 4.2, on tire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \Sigma_u.$$

Passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$\nu\|u\|^2 \leq \Sigma_u \cdot V,$$

dont on déduit

$$\frac{\nu}{\alpha^2}|V| \leq |\Sigma_u|.$$

D'autre part, dans la démonstration de la Propriété 4.6, fixant $\gamma < d$, l'application qui à $W \in \mathbb{R}^3$ associe le ϕ_γ de vitesse de translation W est linéaire continue à valeur dans \tilde{Y} et il existe β ne dépendant que de γ donc de d tel que :

$$\|\phi_\gamma\| \leq \beta|W|.$$

Alors, utilisant 4.1, on a pour tout $W \in \mathbb{R}^3$:

$$|\Sigma_u \cdot W| \leq (\nu + K|B_\gamma|^{\frac{1}{\delta}} + K|V||B_\gamma|^{\frac{1}{3}})\|u\|\|\phi_\gamma\|,$$

soit :

$$|\Sigma_u| \leq \beta(\nu + K|B_\gamma|^{\frac{1}{\delta}} + K|V||B_\gamma|^{\frac{1}{3}})\|u\|. \quad \square$$

Remarque. – Conformément à ce que nous avons noté ci-dessus, on a bien $\Sigma_u \neq 0$ lorsque $V \neq 0$. Cependant, la démonstration ci-dessus nous apprend plus que cela. En effet, l'estimation la plus fine obtenue sur Σ_u est :

$$\Sigma_u \cdot V \geq \frac{\nu}{\alpha^2}|V|^2,$$

qui montre que Σ_u a une composante positive dans la direction de V . Ce qui implique que la verticale n'est pas perpendiculaire au plan \mathcal{P} . Autrement dit, le plan \mathcal{P} ne peut être horizontal.

De l’encadrement ci-dessus, nous pouvons déjà déduire que les forces Σ obtenues peuvent prendre des normes arbitrairement petites et arbitrairement grandes. On peut même être plus précis en ce qui concerne le comportement de Σ quand V s’approche de 0.

5.2. Comportement de Σ au voisinage de 0

Prenons V unitaire, posons $W_\varepsilon = \varepsilon V$. Pour tout ε on dispose de u_ε solution du problème variationnel homogène associé à la vitesse de translation W_ε et du $\Xi_\varepsilon = \Sigma_{u_\varepsilon}$ associé. Posons :

$$u_\varepsilon = \varepsilon z_\varepsilon, \quad \Xi_\varepsilon = \varepsilon \zeta_\varepsilon.$$

Pour ε assez petit, remarquons que la Propriété 4.3 s’étend par limite faible à la solution sur le demi-espace tout entier. En effet, prenons $U \in Y_V^R$ comme origine de Y_V^R , alors $\varepsilon U \in Y_{\varepsilon V}^R$. Pour ε suffisamment petit $|\varepsilon U|_{L^3} \ll \nu$, de sorte que εU vérifie la condition pour que l’estimation d’énergie de la Propriété 4.3 soit valable. Or, dans la construction de u_ε , on peut garder U comme origine de $Y_V^{R'}$ pour tout $R' \geq R$ et l’estimation qui était valable sur \mathcal{O}_R reste valable dans $\mathcal{O}_{R'}$. Il existe donc, pour ε suffisamment petit, une majoration de $\|u_\varepsilon\|$ de la forme :

$$\|u_\varepsilon\| \leq A_1 \varepsilon |V|.$$

Ceci implique, grâce au Théorème 5.2, une autre majoration sur Ξ_ε du même type. Pour ε au voisinage de 0, (z_ε) et (ζ_ε) sont donc bornées dans Y_V . On peut extraire une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $(z_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un $z_0 \in Y_V$ et la suite des $(\zeta_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ associés converge vers un $\zeta_0 \in \mathbb{R}^3$. Or, nous avons, pour tout $\phi \in \tilde{Y}$:

$$b_{W_\varepsilon}(u_\varepsilon, u_\varepsilon, \phi) + \nu((u_\varepsilon, \phi)) = \Xi_\varepsilon \cdot V_\phi.$$

Soit, factorisant un ε :

$$\varepsilon b_V(z_\varepsilon, z_\varepsilon, \phi) + \nu((z_\varepsilon, \phi)) = \zeta_\varepsilon \cdot V_\phi.$$

Quand ε tend vers zéro, il vient, puisque z_ε tend vers z_0 faiblement,

$$\nu((z_0, \phi)) = \zeta_0 \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in \tilde{Y}.$$

Or, nous avons l’estimation suivante :

$$\nu \|z_\varepsilon\|^2 \leq \zeta_\varepsilon \cdot V,$$

qui nous donne, à la limite quand ε tend vers 0 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|z_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\zeta_0 \cdot V}{\nu}.$$

D’autre part, prolongeant l’égalité vérifiée par z_0 à tous les $\phi \in Y$ par continuité, on obtient :

$$\nu \|z_0\|^2 = \zeta_0 \cdot V.$$

Finalement :

$$\|z_0\| \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|z_\varepsilon\|$$

ce qui nous garantit la convergence forte de z_{ε_n} vers z_0 .

Par densité, le couple (z_0, ζ_0) satisfait la formulation variationnelle linéaire

$$\nu((z_0, \phi)) = \zeta_0 \cdot V_\phi \quad \forall \phi \in Y, \tag{31}$$

où $z_0 \in Y_V$ et $\zeta_0 \in \mathbb{R}^3$. Testant dans (31), contre la différence de deux solutions (pour cette différence, on a $V_\phi = 0$), on voit que la solution de (31) est unique. C’est donc la famille $(z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ toute entière qui converge vers z_0 , ainsi que $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vers ζ_0 . Notons que l’application $V \mapsto \zeta_0$ est linéaire et satisfait $\zeta_0(V) \cdot V = \nu \|z_0\|^2$. Comme $V \neq 0$ implique $z_0 \neq 0$, cette application est injective. Nous résumons cela sous la forme suivante :

THÉORÈME 5.3. – *Pour $|V|$ petit, pour toute force Σ associée à un écoulement u solution du Problème 3.2 on a :*

$$\Sigma = \zeta_0(V) + o(|V|)$$

où $\zeta_0(V)$ est l’unique vecteur de \mathbb{R}^3 auquel on peut associer $z_0 \in Y_V$ tel que $(z_0, \zeta_0(V))$ vérifie (31). Ici, $\zeta_0(V)$ est la force appliquée par un écoulement de Stokes de vitesse de translation V sur la boule S .

Remarque ajoutée après acceptation de l’article

Par la formulation variationnelle du problème linéaire, on obtient la formule suivante :

$$\zeta_0(V) \cdot V = \nu \inf_{w \in Y_V} \|w\|^2.$$

En outre, $V \mapsto \zeta_0(V)$ est linéaire et symétrique : $\zeta_0(V) \cdot W = \zeta_0(W) \cdot V$. Enfin, cette application commute avec les rotations d’axe perpendiculaire au plan \mathcal{P} . On en déduit que, lorsque V est parallèle à \mathcal{P} , on a $\zeta_0(V) = \nu \chi V$, où χ est l’infimum de

$$\frac{\|w\|^2}{|V_w|^2},$$

parmi les $w \in \tilde{Y}$ tels que V_w est parallèle à \mathcal{P} .

6. Conclusion

Nous avons donc montré qu’étant données une géométrie, une masse, une vitesse de translation et une viscosité, il existe un mouvement du solide, une direction de la

verticale, une gravité et un écoulement du fluide tels que le solide puisse évoluer dans le fluide en restant à distance du plan. Cependant, la méthode utilisée ici ne permet pas de garantir l'existence d'une vitesse de translation, d'une distance au bord et d'un régime permanent lorsque la gravité et la verticale sont données.

Par ailleurs, nous n'avons considéré que des solides dont la forme est sphérique. La méthode utilisée ici ne permet pas de traiter le cas de solides de formes quelconques. Pour une forme cylindrique générale, le changement de référentiel effectué pour obtenir les équations introduit une condition sur Ω de la même façon qu'il introduit une condition sur V . Notant u_z l'axe d'invariance par rotation du solide, on devrait alors avoir :

$$\Omega \wedge u_z = 0.$$

L'étude de cette situation reste à faire.

Pour V au voisinage de 0 , la solution peut être déterminée avec précision car l'écoulement fluide se comporte comme un écoulement de Stokes.

RÉFÉRENCES

- [1] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 31 (1961) 308–340.
- [2] B. Desjardins, M.J. Esteban, On weak formulation for fluid–rigid structure interaction: compressible and incompressible models, *Comm. Partial Differential Equations* 25 (2000) 1399–1413.
- [3] G.P. Galdi, An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations, in: *Springer Tracts in Natural Philosophy*, Vols. 38, 39, 1998.
- [4] O. Kavian, Introduction à la théorie des points critiques, in: *Mathématiques & Applications*, Vol. 13, Springer, 1993.
- [5] J. Leray, Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *J. Math. Pures Appl.* 12 (1933) 1–82.
- [6] G.P. Galdi, J.R. Rabier, Sharp existence results for the stationary Navier–Stokes problem in three-dimensional exterior domains, *Arch. Rational Mech. Anal.* 154 (2000) 343–368.
- [7] D. Serre, Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible existence, *Japan J. Appl. Math.* 4 (1987) 99–110.
- [8] C. Conca, J. San Martín, M. Tucsnak, Motion of a rigid body in a viscous fluid, *C. R. Acad. Sci. Paris* 328 (1999) 473–478.
- [9] H. Weinberger, On the steady fall of a body in a Navier–Stokes fluid, in: *Proc. Symposia Pure Math.*, Vol. XXIII, American Mathematical Society, Providence, RI, 1973.