Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 5, n° 3, 1988, p. 221-225. *Analyse non linéaire*

Indice de Morse des points critiques obtenus par minimax

par

Claude VITERBO

C.N.R.S., CEREMADE, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny,
75775 Paris Cedex 16, France
visiting member at Courant Institute,
251 Mercer Street, New York, N.Y. 10012, U.S.A.

RÉSUMÉ. — On donne un encadrement de l'indice de Morse d'un point critique obtenu par minimax sur une classe d'homologie donnée. Ceci améliore les résultats précédemment obtenus en faisant un minimax sur une classe d'homotopie (resp. de cohomotopie) qui ne donnaient qu'une majoration (resp. minoration) de l'indice (*cf.* [B-L] par exemple).

ABSTRACT. — In this paper we give bounds for the Morse index of a critical point obtained by minmax on some homology class. This improves previous results in which the minmax was taken on a homotopy (resp. cohomotopy) class and one only obtains an upper (resp. lower) bound on the index (*see* for instance [B-L]).

Soit X une variété différentielle hilbertienne, munie d'une métrique riemanienne complète, G un groupe de Lie compact opérant sur X par isométrie. Soit f une fonction C^2 sur X, G-invariante, vérifiant la condition (C) de Palais-Smale.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449
Vol. 5/88/03/221/05/$ 2,50/

Soit F une sous-variété de X stable par G et par le flot de $-\nabla f(x)$, sur laquelle f n'a pas de point critique. Par exemple si H est un sous-groupe distingué de G, on peut prendre $F=X^H=\{x\in X \mid \forall h\in H, hx=x\}$.

Si A est un ensemble muni d'une action de G, et $EG\to BG$ est le G-fibré universel, on pose $A_G=A\times EG/G$, quotient homotopique de A par G, et $H_{G,*}(A)=H_*(A_G)$ (*cf.* [Bo], p. 52). Maintenant, si A est une partie de X stable par G, on note $h_*(A)=H_{G,*}(A, A\cap F)$. On suppose que R, l'anneau des coefficients satisfait la propriété suivante:

pour tout $x\in X\setminus F$, $H_*(BG_x;\theta)=0$ si $*\neq 0$ quel que soit le système local de coefficients, de fibre R (G_x désigne le groupe d'isotropie de x).

Notons encore $X^a(f)$ l'ensemble $\{x\in X \mid f(x)\leqq a\}$.

Soit maintenant $\gamma\in h_*(X)$ qui ne soit pas dans l'image de $h_*(X^a(f))$ pour un certain a; alors, posant,

$$K=\inf_{c\in\gamma}\sup_{x\in c} f(x) \tag{1}$$

il est classique de voir que K est une valeur critique de f.

On a alors:

PROPOSITION. — *On suppose que pour tout x dans X, $f''(x)$ est un opérateur de Fredholm (nécessairement d'indice zero). Alors soit $f^{-1}(K)$ contient une orbite critique non isolée, soit il existe une orbite critique Gx_0 d'indice i et de nullité n tels que l'on ait*:

$$i\leqq d\leqq i+n \tag{2}$$

où d désigne la dimension de γ.

Remarquons tout de suite que i est l'indice de $f''(x_0)$ sur $T_{x_0}X/T_{x_0}(Gx_0)$.

La démonstration s'appuie essentiellement sur le lemme suivant, qui est dû à Marino et Prodi (*cf.* [M-P]) si $G=\{e\}$ et à Wassermann (*cf.* [W], p. 149) si X est de dimension finie. On note par Z_f l'ensemble critique de f de niveau critique K.

LEMME. — *Soit f une fonction satisfaisant les hypothèses de la proposition. Alors il existe g satisfaisant les mêmes hypothèses, et vérifiant de plus les conditions suivantes*:

(i) *$g(x)=f(x)$ hors d'un voisinage U de Z_f*;

(ii) $|g-f|_{C^2}\leqq\varepsilon$;

(iii) *les points critiques de g sont non dégénérés.*

Démonstration. — Elle suit [W]; l'idée étant de modifier f par étapes, afin que le groupe d'isotropie des orbites critiques dégénérées décroisse strictement à chaque étape; le cas où G est trivial étant réglé par [M-P]. On se limitera au cas où Z_f est constitué d'orbites isolées seul cas utilisé dans la démonstration de la proposition (en fait ce cas entraîne le cas général). Remarquons aussi que le lemme est purement local comme on peut le vérifier en utilisant une partition de l'unité.

Soit donc x dans Z_f, et S_x une section («slice» dans la terminologie de Palais). L'ensemble des fonctions G-équivariantes sur le voisinage $U_x = G.S_x$ de G_x, s'identifie à l'ensemble des fonctions G_x-équivariantes sur S_x. De plus l'action de G_x sur S_x est conjuguée à une action orthogonale sur un ouvert d'un espace de Hilbert, que l'on notera par E. Il nous suffit alors de considérer le cas $G_x = G$, et $U = U_x = B$ boule unité de E, $Z_f = \{0\}$, et de prouver que l'on peut modifier f en une fonction g dont les points critiques dégénérés soient dans $E \setminus \mathrm{Fix}(G)$, complémentaire de l'ensemble $\mathrm{Fix}(G)$ des points fixes de E sous l'action de G.

Par généricité des fonctions de Morse dans le cas non équivariant, on peut supposer que 0 est point critique non dégénéré de la restriction de f à $\mathrm{Fix}(G)$. Par conséquent, 0 est point critique isolé de cette restriction; on peut supposer qu'elle n'a pas d'autre point critique dans B.

Alors, posant $g(y) = f(y) + \varepsilon\lambda(\|y\|^2)\|Py\|^2$ où $\lambda(t) = 1$ pour t proche de 0, et $\lambda(t) = 0$ pour $t \geqq 1/2$, et P est la projection orthogonale sur l'orthogonal de $\mathrm{Fix}(G)$, on voit aisément que pour ε assez petit, $g''(y)$ sera aussi Fredholm, car l'ensemble de ces opérateurs est ouvert. Comme $g = f$ sur $\mathrm{Fix}(G)$, la restriction de g à $\mathrm{Fix}(G)$ a 0 pour seul point critique, et ce point critique est encore non dégénéré.

Montrons pour conclure que 0 est point critique non dégénéré de f: en effet, $f''(0)(h, h) = g''(0)(h, h) + \varepsilon.(Ph, h)$ dont le noyau est donné par l'équation $g''(0) + \varepsilon.Ph = 0$ Une solution h de cette équation appartient nécessairement à l'orthogonal de $\ker P = \mathrm{Fix}(G)$, car sur $\mathrm{Fix}(G)$ $g''(0) + \varepsilon.P = g''(0)$ est non dégénérée par hypothèse. Sur l'orthogonal de $\ker P$ notre équation se réduit à $g''(0)h + \varepsilon.h = 0$ ce qui revient à dire que ε est valeur propre de $g''(0)$. Mais si $g''(0)$ est un opérateur autoadjoint de Fredholm, son spectre est discret, et par suite on peut trouver ε arbitrairement petit tel que f soit non dégénérée en 0. Ceci termine la démonstration du lemme.

Comme conséquence du lemme, il est facile de voir que l'on a trouvé f telle que:

(a) $f=g$ dans $X \setminus g^{-1}(]K-\varepsilon, K+\varepsilon[)$;

(b) les points critiques de g dans $g^{-1}(]K-\varepsilon, K+\varepsilon[)$ sont non dégénérés et d'indice contenu dans $\bigcup_{r=1}^{r=q} [i_r, i_r+n_r]$.

On a alors:

LEMME 2. — $h_d(X^{K+\varepsilon}(g), X^{K-\varepsilon}(g))=0$.

Démonstration. — On notera par $h_*(B, A)$ l'anneau $H_{G,*}(j)$ où j est l'inclusion $(A, A \cap F) \to (B, B \cap F)$.

Soient $Gy_1, \ldots, Gy_r$ les orbites critiques de f, $i'_1, \ldots, i'_p$ leurs indices, $c_1, \ldots, c_p$ leurs valeurs critiques que l'on suppose ordonnées. Raisonnons par contraposition, et supposons $d \neq i'_r$ pour tout r; d'où on tire.

$$h_d(X^{c+\alpha}(g), X^{c-\alpha}(g))=0, \qquad \forall c=c_r, \quad \forall r \in 1, \ldots, p \tag{3}$$

(pourvu que α soit choisi assez petit) en effet par excision, notre groupe d'homologie s'identifie à $H_{G,*}(\nu^-, \partial\nu^-)$ où ν^- est le fibré en boules sur G_{y_r} dont la fibre est la boule unité de l'espace négatif de $g''(y_r)$.

L'isomorphisme de Thom identifie alors $H_{G,*}(\nu^-, \partial v^-)$ à $H_{G,*-i'_r}(BG_{y_r}, \theta)$ où θ est le fibré d'orientation de ν^-. Comme par hypothèse, ce dernier anneau s'annule pour $* \neq i'_r$, on en déduit (3).

On voit maintenant aisément par récurrence que

$$h_d(X^{c+\alpha}(g), X^{K-\alpha}(g))=0, \qquad \forall c=c_r, \quad r \in \{1, \ldots, p\}$$

— pour $r=1$ c'est clair, car c_1 étant le plus petit niveau critique de f, on a $X^{K-\varepsilon}(g) \approx X^{c_1-\alpha}(g)$;

— supposons la propriété (4) vérifiée jusqu'à la valeur r, et démontrons la pour $r+1$: écrivons la suite exacte d'homologie de $(X^{c_{r+1}+\alpha}(g), X^{c_r+\alpha}(g), X^{K-\varepsilon}(g))$:

$$h_d(X^{c_{r+1}+\alpha}(g), X^{c_r+\alpha}(g)) \\ \to h_d(X^{c_{r+1}+\alpha}(g), X^{K-\varepsilon}(g)) \to h_d(X^{c_r+\alpha}(g), X^{K-\varepsilon}(g))$$

le dernier terme est nul par hypothèse de récurrence, le premier en appliquant (3) et le fait que $X^{c_{r+1}-\alpha}(g) \approx X^{c_r+\alpha}(g)$.

Le terme central est alors nul, ce qui démontre (4) et le lemme.

La démonstration de la proposition est alors immédiate: du lemme 2 et de la propriété (*a*), on tire

$$h_d(X^{K+\varepsilon}(f), X^{K-\varepsilon}(f))=0$$

par suite l'application

$$h_d(X^{K-\varepsilon}(f)) \to h_d(X^{K+\varepsilon}(f))$$

est surjective, donc si γ n'est pas dans l'image de $h_d(X^{K-\varepsilon}(f))$ dans $h_d(X)$, il ne sera pas non plus dans l'image de $h_d(X^{K+\varepsilon}(f))$, ce qui contredit la définition de K et termine la démonstration de la proposition.

Ce résultat trouve des applications dans [E-L] où X est l'espace des lacets de $L^{3/2}(R^{2n})$, l'action de S^1 étant l'action ordinaire, $F=\{0\}$. Bien que $L^{3/2}$ ne soit pas un espace de Hilbert, une réduction à la dimension finie permet de se ramener à ce cas.

Il nous faut vérifier que $H_*(BZ_k; Q)$ est trivial (c'est classique, *cf.* [Bo]), et que $H_*(BZ_2;\theta)=H_*(RP^\infty;\theta)$ aussi, θ étant le fibré en droites non trivial sur RP^∞. Comme l'espace total de θ est $R^\infty-\{0\}$, et on a d'après l'isomorphisme de Thom: $H_{*-1}(RP^\infty;\theta)=H_*(R^\infty-\{0\})=0$ si $*\geqq 1$.

Le théorème 3.3 de [E-L] résulte alors immédiatement de la théorie de Lusternik-Schnirelman, et de la proposition. Notons que si l'on s'est embarassé du cas avec point fixes, c'est en vue d'applications ultérieures.

RÉFÉRENCES

[Bo] A. Borel, Seminar on Transformation Groups, *Annals of Math. Studies*, n° 46, Princeton University Press, New York, 1960.

[B-L] A. Bahri et P. L. Lions, Remarques sur la théorie variationnelle des points critiques et applications, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **301**, 1985, p. 145-147.

[E-L] I. Ekeland et L. Lassoued, Multiplicité des trajectoires fermées de systèmes hamiltoniens convexes, *Annales de l'Institut H. Poincaré: Analyse non linéaire* (à paraître).

[F-H-R] E. R. Fadell, S. Y. Husseini et P. H. Rabinowitz, Borsuk-Ulam Theorems for Arbitrary S^1 Actions and Applications, *T.A.M.S.*, vol. **274**, n° 1, 1982, p. 345-360.

[M-P] A. Marino et G. Prodi, Metodi perturbativi nella teoria di Morse, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (4), vol. **11**, Suppl. fasc. 3, 1975, p. 1-32.

[W] A. G. Wasserman, Equivariant Differential Topology, *Topology*, vol. 8, n° 2, 1969, p. 127-150.

(*Manuscrit reçu le* 20 *décembre* 1986)
(*révisé le* 8 *juillet* 1987.)