

## Dédoublément de courbes invariantes sur le cylindre : petits diviseurs

par

Jérôme E. LOS

Laboratoire de Mathématiques,  
Université de Nice, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex

---

**RÉSUMÉ.** — On s'intéresse à une bifurcation de dédoublement de courbes invariantes sur le cylindre, qui provient de l'interaction des bifurcations de Hopf et de dédoublement, pour une famille générique à deux paramètres de difféomorphismes de  $\mathbf{R}^3$ , restreinte à sa variété centrale supposée  $C^\infty$ . On généralise à ce cas des résultats d'A. Chenciner sur la bifurcation de Hopf dégénérée. En particulier, on retrouve une structure locale analogue de l'espace des paramètres : à l'extérieur d'une infinité de bulles disjointes très fine, la dynamique ressemble (dans un sens précisé dans le texte) à une forme normale.

*Mots clés :* Système dynamique, difféomorphismes, bifurcations locales, courbes invariantes, petits diviseurs, espace de Fréchet, conjugaison différentiable.

**ABSTRACT.** — We study an invariant curve doubling bifurcation on the cylinder, obtained from a Hopf and a period doubling bifurcation interaction of a generic two parameter family of diffeomorphisms of  $\mathbf{R}^3$ , by restriction to its central manifold supposed to be  $C^\infty$ . We generalized to this case some results of Chenciner on degenerate Hopf bifurcation. We find in particular, an analogous local structure of the parameter space : except for an infinity of very thin bubbles, the dynamics looks like a normal form.

---

*Classification A.M.S. :* 57 R 50, 10 F XX, 42 A 50, 47 A 15, 35 B 32, 58 C 15, 49 A 51.

## TABLE DES MATIÈRES

0.	Introduction . . . . .	
I.	Famille de difféomorphismes. Formes normales . . . . .	
	Le problème réduit . . . . .	
II.	Bifurcation de dédoublement sur le cylindre . . . . .	
	Courbes dédoublées pour la forme normale. . . . .	
	Persistance des courbes médianes et dédoublées . . . . .	
	Domaines d'hyperbolicité et bassins. . . . .	
III.	Théorème de la courbe tournée . . . . .	
	Position du problème. . . . .	
	Réduction et mise en équation . . . . .	
	Le théorème de la courbe tournée . . . . .	
	Démonstration . . . . .	
IV.	Théorème de la courbe invariante . . . . .	
	Reformulation et modifications . . . . .	
	Estimations . . . . .	
	Méthode de M. Herman . . . . .	
	Estimations lipschitziennes . . . . .	
	Courbe $\lambda_\omega(\mu, 0) = 0$ . . . . .	
V.	Domaines de persistance et leurs complémentaires les bulles . . . . .	
	Changement de variables et de paramètres . . . . .	
	Diminution de la taille des bulles . . . . .	
	Ressemblance avec la forme normale dans $B_\omega^+ \cup B_\omega^-$ . . . . .	
	Conclusion . . . . .	

## 0. INTRODUCTION

Le phénomène des cascades de dédoublement de Feigenbaum-Couillet-Tresser pour les orbites périodiques est aujourd'hui bien compris. Une question encore ouverte est de savoir si une cascade analogue peut exister de façon générique pour des tores invariants.

Ce problème, traduit dans le langage de la dynamique des familles de difféomorphismes, consiste à étudier une suite de *dédouplements de courbes invariantes*. C'est une des motivations à long terme de ce travail.

Ce projet est sans doute hors de portée actuellement et cet article en constitue une étape préliminaire : l'étude de la bifurcation élémentaire. Pour être exact, nous ne présentons ici que la première partie de cette étude sur un cas particulier (*voir* §1.2), exhibant toute la complexité dynamique du cas général, la seconde partie suivra dans un prochain article.

Une autre motivation est le fait d'entrer dans le domaine des bifurcations de difféomorphismes de codimension supérieure à un, donc il n'existe pas de théorie générale. Par contre, les travaux d'A. Chenciner ([3], [4], [5]) sur la bifurcation de Hopf dégénérée, ont ouvert une brèche dans cette forteresse, et nous ont fortement guidé tout au long de cette étude. La concordance de nos résultats avec [3] nous laisse croire en la possibilité d'une telle théorie.

Le phénomène de dédoublement dont il est question correspond essentiellement en la perte de stabilité d'une courbe invariante, lorsque l'un des paramètres de la famille de difféomorphismes traverse une région critique, qui en général n'est pas une courbe, et donne naissance à un nouvel attracteur, composé de deux courbes qui s'échangent (elles sont donc invariantes par l'itéré second).

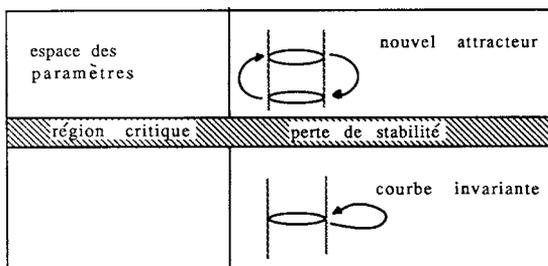


FIG. 1.

La perte de stabilité d'un point fixe se caractérise simplement par le spectre de la différentielle en ce point et, grâce au théorème des fonctions implicites, nous pouvons conclure (si  $+1$  n'appartient pas au spectre) en la persistance d'un point fixe et en l'unicité du point de bifurcation dans l'espace des paramètres. Il en va tout autrement si nous étudions la perte de stabilité d'une courbe invariante (par exemple par dédoublement), nous ne disposons en effet plus d'une caractérisation unique, d'où les questions (minimales) :

La bifurcation se produit-elle en un unique point de l'espace des paramètres?

Y a-t-il persistance d'une courbe invariante au voisinage de la courbe qui bifurque?

Les réponses à ces questions sont analogues à celles données par A. Chenciner dans [3] :

Dans l'espace des paramètres, l'ensemble suivant lequel la bifurcation se produit en un unique point est un ensemble de Cantor (et non plus une courbe).

Les régions de l'espace des paramètres où la dynamique est non triviale est une union disjointe de très petits ouverts, ce sont les « bulles » (voir fig. 12).

C'est pour les valeurs des paramètres appartenant à l'une de ces bulles que le système peut présenter une dynamique complexe, comme, par exemple, l'existence d'orbites homoclines, ou d'ensembles invariants d'Aubry-Mather (voir [4], [5]).

Les démonstrations de ces résultats s'articulent autour du très puissant théorème des fonctions implicites de R. S. Hamilton ([8], [2]), et de son utilisation dans le contexte des petits diviseurs par M. Herman [9]. Il permet, entre autres, de démontrer un analogue au théorème de la courbe translatée de Rüssemann ([15], [9], [11], [3]), que nous appelons : *théorème de la courbe tournée* (voir §III, §IV). Les résultats démontrés dans cet article ont été annoncés dans [19].

#### DES NOTATIONS :

$(\mathbf{R}^n, x_0)$  désigne un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbf{R}^n$ .

$f: (A, a) \rightarrow (B, b)$  désigne une application  $f$  définie sur un voisinage de  $a$  dans  $A$ ,  $a$  valeurs dans  $B$ , et telle que  $f(a) = b$ .

$\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$  est le tore de dimension  $n$ .

$C^k(E, \mathbf{R})$  est l'espace des fonctions de classe  $C^k$  sur  $E$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}$  muni, si  $E$  est compact, de la topologie de la convergence uniforme des dérivées jusqu'à l'ordre  $k$ ,  $\| \cdot \|_k$ .

$\text{Diff}_+^k(\mathbf{T}^n)$  est l'espace des difféomorphismes de classe  $C^k$  de  $\mathbf{T}^n$ ,  $C^k$  isotopes à l'identité (préservent l'orientation).

## I. FAMILLE DE DIFFÉOMORPHISMES. FORMES NORMALES

On peut naïvement construire un modèle de bifurcation de dédoublement de courbes invariantes, il suffit de considérer le produit direct d'une famille présentant une bifurcation de Hopf avec une famille présentant une

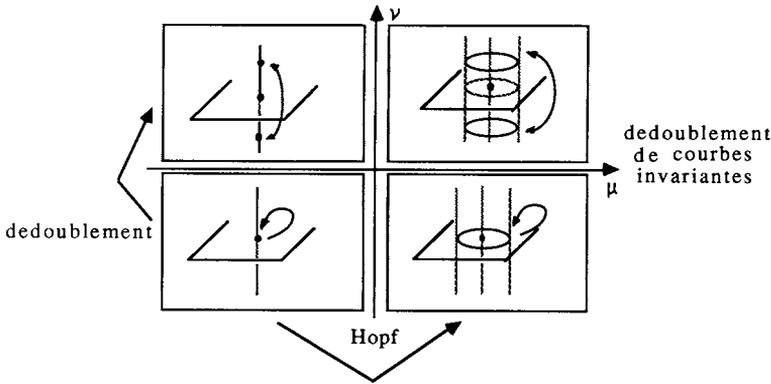


FIG. 2.

bifurcation de dédoublement (voir *fig. 2*). Cette approche permet de définir l'espace de phase ainsi que l'espace des paramètres. Il faut donc une famille de difféomorphismes dépendant de deux paramètres, dans l'espace :  $(\mathbb{R}^2, 0) \times (\mathbb{R}, 0)$ . La dynamique la plus simple est schématisée sur la figure 2.

Pour obtenir un cas générique, nous considérons une famille à deux paramètres construite par analogie avec le modèle précédent :

soit  $D_{\mu\nu} : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  vérifiant :

$$\left. \begin{aligned} D_{00}(0) &= 0 \\ \text{Sp}(D'_{00}(0)) &= \{-1, l_0, \bar{l}_0\} \\ l_0 &= e^{2i\pi\omega_0} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

### I. 1. Formes normales

Un difféomorphisme formel :  $N = (N_1, \dots, N_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  de partie linéaire diagonale :

$$N_i(z) = \lambda_i z_i + \sum_{|\alpha| \geq 2} N_{i,\alpha} \cdot z^\alpha, \quad z^\alpha = \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i}, \quad z_i \in \mathbb{C}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}$$

est une forme normale si :

$$\forall i, \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \geq 2, \quad N_{i,\alpha} \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda^\alpha \quad (\text{résonance})$$

Tout difféomorphisme dont la partie linéaire est diagonalisable est formellement conjugué à une forme normale (voir [1]). Pour passer du cas formel aux cas concrets il suffit de remarquer que la conjugaison formelle est obtenue en effectuant une suite infinie de changements de variables qui, en général, ne converge pas [1] (d'où le terme formel). Si nous nous contentons d'un nombre fini de tels changements de variables, le difféomorphisme en question sera alors conjugué à la somme d'une forme normale polynomiale, tronquée à un ordre fini, et d'une perturbation d'ordre supérieur, et ce pour toute classe de différentiabilité.

(a) *Hypothèse de non-résonance forte*

En considérant une forme normale tronquée à l'ordre  $N$ , nous supposons toujours que le couple de valeurs propre :  $e^{\pm 2i\omega_0}$  de la partie linéaire de  $D_{00}(1)$  ne présente pas de résonances fortes, ce qui signifie :

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}, \quad |q| < N, \quad \omega_0 \neq \frac{p}{q} \quad (2)$$

Dans ce cas, la forme normale tronquée à l'ordre  $N$  ne comporte que des termes provenant des résonances triviales :

$$(-1)^{2p} (l_0 \bar{l}_0)^k l_0 = l_0, \quad (-1)^{2r+1} (l_0 \bar{l}_0)^m = -1, \quad l_0 = e^{2i\omega_0}.$$

Ces termes sont de la forme :

$$z|z|^{2k}y^{2p}, \quad y^{2r+1}|z|^{2m},$$

où  $z \in (\mathbf{C}, 0)$  et  $y \in (\mathbf{R}, 0)$  sont les coordonnées sur les espaces propres associés respectivement aux valeurs propres :  $(l_0, \bar{l}_0)$  et  $-1$ . Ceci implique que la forme normale est équivariante sous l'action du groupe des rotations du plan propre associé au couple  $(l_0, \bar{l}_0)$ .

(b) *Déformations*

Nous cherchons maintenant à écrire l'expression de la famille  $\mathbf{D}_{\mu\nu}$ ,  $C^\infty$  en  $(\mu, \nu) \in (\mathbf{R}^2, \mathbf{0})$  annoncée en (1), en déployant  $D_{00}$ .

Les arguments sont classiques (voir par exemple [3], [6]), nous n'y revenons donc pas. Il est peut-être bon de rappeler que pour assurer la différentiabilité (et donc la continuité) par rapport aux paramètres, la déformation doit préserver les symétries de la forme normale polynomiale. Donc, les coefficients des polynômes (équivalents des invariants de Birkhoff), sont « simplement » remplacés par des fonctions  $C^\infty$  en  $(\mu, \nu) \in (\mathbf{R}^2, \mathbf{0})$ .

Pour une écriture plus agréable, nous donnons l'expression de la famille en coordonnées cylindriques :  $z = re^{2in\theta}$ ,  $(\mathbf{R}^2 - \{0\}) \cong \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^+$  :

$$D_{\mu\nu} : \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}.$$

$$D_{\mu\nu}(\theta, r, y) = N_{\mu\nu}(\theta, r, y) + P_{\mu\nu}(\theta, r, y)$$

$N_{\mu\nu}$  est la famille de formes normales tronquée :

$$N_{\mu\nu}(\theta, r, y) = \{ \theta + \omega_0 + \alpha_{\mu\nu}(r^2, y^2);$$

$$r[(1 + \mu) + \beta_{\mu\nu}(r^2, y^2)]; y[-(1 + \nu) + \gamma_{\mu\nu}(r^2, y^2)] \quad (3)$$

et  $P_{\mu\nu}$  est la perturbation :

$$P_{\mu\nu}(\theta, r, y) = \{ A_{\mu\nu}(\theta, r, y); B_{\mu\nu}(\theta, r, y); G_{\mu\nu}(\theta, r, y) \} \quad (4)$$

Dans ces relations  $\alpha, \beta, \gamma$ , sont des polynomes en  $r^2, y^2$ , de degré  $n$  ( $2n + 1 < N$ ) et de valuation supérieure à 1, leurs coefficients sont  $C^\infty$  en  $(\mu, \nu)$ .  $A, B, G$  sont des applications  $C^\infty$  en leurs arguments et peuvent s'écrire :

$$A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu} = O((|r| + |y|)^{2n+2}) \quad (5)$$

ces estimations étant uniformes en  $(\theta, \mu, \nu) \in \mathbf{T}^1 \times (\mathbf{R}^2, 0)$ .

On remarque que si  $\omega_0$  est irrationnel, on peut choisir  $n$  aussi grand que l'on veut, mais fini, puisque la conjugaison n'est que formelle.

(c) *Forme normale restreinte au plan  $y=0$*

Le plan  $y=0$  est globalement invariant par la forme normale, et, dans ce plan nous avons une simple bifurcation de Hopf.

L'invariance par rotation implique que les courbes invariantes sont des cercles dont le rayon  $r_0$  est solution de l'équation :

$$\mu + \beta_{\mu\nu}(r^2, 0) = 0$$

*Hypothèse générique.* — Fixons la condition « d'attractivité vague » (voir [14]), en imposant :

$$\frac{\partial \beta_{00}}{\partial (r^2)}(0, 0) = \beta_{00}^{10} \neq 0, \quad \text{par exemple } \beta_{00}^{10} < 0 \quad (5)$$

Dans ce cas, l'existence d'un cercle invariant pour  $\mathbf{N}_{\mu\nu}/y=0$  est assuré lorsque  $\mu \geq 0$  (fig. 2), ce cercle est attractif et son rayon est donné par :

$$r_0^2 = -\mu/\beta_{00}^1 + O(\mu^2, \mu\nu), \quad (\mu, \nu) \in (\mathbf{R}^2, 0), \quad \mu \geq 0 \quad (6)$$

## I. 2. Le Problème réduit

Dans [12] G. Iooss démontre l'existence (lorsque  $\mu \geq 0$ ) d'une variété centrale  $C^\infty$  (polynomiale), isotope à un cylindre, invariante pour la forme normale.

Par abus de langage, nous appellerons une telle variété un *cylindre invariant* pour la forme normale. Par des arguments classiques d'hyperbolicité, il est clair que la famille  $\mathbf{D}_{\mu\nu} = \mathbf{N}_{\mu\nu} + \mathbf{P}_{\mu\nu}$  possède également un cylindre invariant, pour chaque valeur des paramètres dans une certaine région de leur espace. Cette région est déterminée par la condition d'hyperbolicité normale de l'ensemble invariant, elle prend la forme suivante :  $|v| \leq K(n)|\mu|$  (voir [12]), où  $K$  ne dépend que de l'ordre  $(2n+2)$  de la perturbation.

Mais les méthodes liées à l'hyperbolicité ne nous permettent que de trouver une variété invariante de classe  $C^k$  ( $k$  fini). Or la perte de différentiabilité est une des caractéristiques majeure des problèmes de petits diviseurs (voir [9], [10], [11]) qui nous concernent dans la suite de cette étude. C'est pourquoi nous imposons une condition forte de différentiabilité  $C^\infty$ . Cette hypothèse sera supprimée dans l'article qui fera suite à celui-ci.

### (a) Hypothèses

Pour la suite de cette étude, nous supposons toujours vérifiées les conditions (1), (2), (5) et nous ajoutons l'hypothèse suivante :

(H1) Pour  $\mu \geq 0$ , il existe un cylindre invariant  $C^\infty$  pour  $\mathbf{D}_{\mu\nu}$ .

*Remarque 1.* — Par continuité, la composante radiale de ce cylindre satisfait :

$$r = O(|\mu|^{1/2}), \quad (7)$$

comme c'est le cas pour la forme normale.

*Remarque 2.* — A des changements de variables  $C^\infty$  près, on peut se ramener au cas d'un cylindre « droit », c'est-à-dire de rayon constant :  $r = r_0(\mu, \nu) = C(\mu)^{1/2}$ ,  $C$  étant une constante positive.

(b) *Le problème réduit*

En restreignant la famille  $D_{\mu\nu}$  à ce cylindre on se ramène à l'étude locale de la famille :

$$D_{\mu\nu} \in C^\infty(\mathbb{T}^1 \times [-1, 1])$$

$$D_{\mu\nu}(\theta, y) = N_{\mu\nu}(\theta, y) + P_{\mu\nu}(\theta, y)$$

définie par :

$$D_{\mu\nu}(\theta, y) = D_{\mu\nu}(\theta, r_0(\mu, \nu), y) \tag{8}$$

Fixons les notations, d'après (3), (4), (5), (7) nous avons :

$$N_{\mu\nu}(\theta, y) = \{ \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + a_2(\mu, \nu)y^2 + \dots$$

$$+ a_{2n}(\mu, \nu)y^{2n}, -(1+\nu)y + b_3(\mu, \nu)y^3 + \dots + b_{2n+1}y^{2n+1} \} \tag{9}$$

Pour ce qui est des perturbations  $P_{\mu\nu}$  nous les considérerons de la forme suivante :

$$P_{\mu\nu}(\theta, y) = O[(|\mu|^{1/2} + |y|)^{2n+2}]. \tag{9'}$$

Cette estimation provient effectivement du cas général (5) si nous imposons une contrainte sur les paramètres, de la forme :  $|\nu| \leq C|\mu|$ , où  $C$  est une constante positive. Cette condition correspond en fait aux domaines d'hyperbolicité du cylindre invariant, dans l'espace des paramètres.

## II. BIFURCATION DE DÉDOUBLEMENT SUR LE CYLINDRE

La famille des formes normales étant invariante par le groupe des rotations, la bifurcation de dédoublement pour  $N_{\mu\nu}$  est caractérisée par l'apparition de deux cercles  $C^+$ ,  $C^-$ , qui s'échangent par  $N_{\mu\nu}$ . Ces courbes sont donc invariantes par  $N_{\mu\nu}^{(2)} = N_{\mu\nu} \circ N_{\mu\nu}$ .

Nous appellerons *courbes dédoublées* pour  $D_{\mu\nu}$ , un couple de courbes fermées invariantes par  $D_{\mu\nu}^{(2)} = D_{\mu\nu} \circ D_{\mu\nu}$ , et non par  $D_{\mu\nu}$ .  $C^+$  et  $C^-$  sont donc des courbes dédoublées pour  $N_{\mu\nu}$ .

Pour la forme normale, le cercle  $y=0$  est invariant, nous appellerons *courbe médiane* invariante par  $D_{\mu\nu}$ , une courbe invariante proche de  $y=0$  (dans la topologie  $C^1$ ).

Pour un choix convenable des premiers invariants de Birkhoff (les premiers coefficients de la forme normale), la bifurcation se produit comme sur la figure 3.

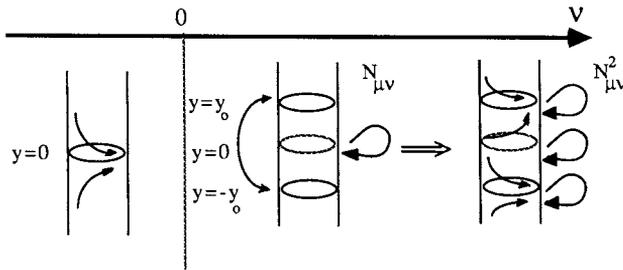


FIG. 3.

### II. 1. Courbes dédoublées pour la forme normale

Commençons par calculer l'itéré second de la forme normale, puis fixons les signes pour trouver les courbes invariantes de  $N_{\mu\nu}^{(2)}$ , nous nous limiterons aux termes de plus bas degré.

La recherche des courbes invariantes par  $N_{\mu\nu}^{(2)}$  se ramène, grâce à l'invariance par rotation, à résoudre l'équation :

$$\text{où } \left. \begin{aligned} y(2v + v^2 - B_3(\mu, \nu)y^2 + O(y^4)) &= 0, \\ B_3(\mu, \nu) &= b_3(\mu, \nu)[2 + 4v + O(v^2)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

*Hypothèse générique.* —  $b_3(0, 0) = \frac{\partial^2 \gamma_{00}}{\partial (y^2)}(0, 0) \neq 0$ , par exemple :

$$b_3(0, 0) > 0. \quad (11)$$

La bifurcation sera alors celle de la figure 3 et la solution qui nous intéresse est donc :

$$y_0^2 = 2v/B_3(0, 0) + O(v^2, \mu\nu) \quad (12)$$

### II. 2. Persistance des courbes médianes et dédoublées

Nous cherchons les domaines de l'espace des paramètres pour lesquels la famille  $D_{\mu\nu}$  « ressemble » à une forme normale.

**DÉFINITION** (voir [3]). — *Nous dirons que la famille  $D_{\mu\nu}$  ressemble à une forme normale  $N_{\mu'\nu'}$ ,  $(\mu, \nu) \simeq (\mu', \nu')$  si  $D_{\mu\nu} \circ D_{\mu\nu}$  et  $N_{\mu'\nu'} \circ N_{\mu'\nu'}$  possèdent le même nombre d'ensembles invariants, du même type, et la même décomposition locale en bassins d'attraction et de répulsion.*

Dans ce paragraphe nous définissons un voisinage  $\mathcal{V}$  de la région de bifurcation  $\{v=0, \mu>0\}$  dans l'espace des paramètres, en dehors duquel nous pourrions conclure à la ressemblance de  $D_{\mu v}$  avec  $N_{\mu v}$ , par un argument d'hyperbolicité normale.

NOTATIONS :

$$N_{\mu v}^{(2)}(\theta, y) = \{ \theta + 2\omega_0 + 2\mu\omega_1 + A_{\mu v}(y^2); y(1 + K_{\mu v}(y^2)) \}, \quad (13)$$

où nous avons posé :

$$\left. \begin{aligned} A_{\mu v}(y^2) &= A_2(\mu, v)y^2 + \dots + A_{2n}(\mu, v)y^{2n} \\ K_{\mu v}(y^2) &= 2v + v^2 - B_3(\mu, v)y^2 + \dots + B_{2n+1}(\mu, v)y^{2n} \\ B_3(0, 0) &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Les cercles invariants de la forme normale  $N_{\mu v}^{(2)}$  sont donc obtenus comme solutions de l'équation :

$$y K_{\mu v}(y^2) = 0. \quad (15)$$

Considérons, d'après (9') les termes de perturbation, qui sont pour chacune des composantes, de la forme :

$$\left. \begin{aligned} &y^{2n+2-k} \cdot \mu^{k/2} \cdot \varphi_k(\theta, y) \\ &k = 0, 1, \dots, 2n+2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Parmi ceux-ci, le plus gênant, celui qui détermine la taille de la perturbation est :  $\mu^{n+1} \cdot \varphi_{2n+2}(\theta, y)$ , qui en général ne s'annule pas en  $y=0$ .

Si nous bornons la composante normale (suivant  $y$ ) de  $P_{\mu v}$  par une perturbation invariante par rotation :  $P_{\mu v}^{\pm}(\theta, y) = \{0; \pm(\mu^p + y^{2p})\}$ , les courbes invariantes de  $N_{\mu v}^{(2)}$  et  $D_{\mu v}^{\pm} \circ D_{\mu v}^{\pm}$  sont données par :

$$\left. \begin{aligned} &y K_{\mu v}(y^2) = 0 \\ &y K_{\mu v}(y^2) \pm (\mu^p + y^{2p}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

qui définissent trois surfaces  $M^0, M_p^{\pm}$ , que nous pouvons représenter localement dans  $\mathbf{R}^3$  par les coordonnées  $(y, \mu, v)$  puisqu'il y a invariance par rotation (fig. 4).

On peut interpréter ces surfaces en terme d'ordre de grandeur comparé, entre la forme normale et la perturbation. En effet, dans les régions définies par :  $M_{n+1}^+ \leq 0$  ou  $M_{n+1}^- \geq 0$ , les termes de perturbation sont négligeables devant ceux de la forme normale, la dynamique normale est donc la même. De plus la distance entre les nappes voisines  $M^+$  et  $M^-$ , correspond à la taille que doit avoir le voisinage sur lequel est définie la courbe invariante cherchée. On constate alors que les difficultés, lorsque

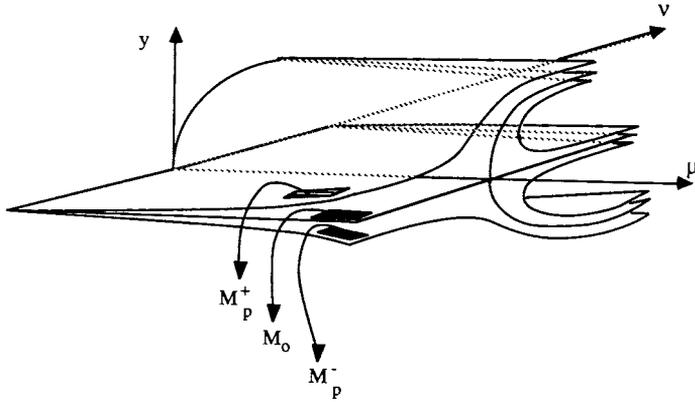


FIG. 4.

les ordres de grandeurs de la forme normale et de la perturbation sont comparables, ne peuvent avoir lieu qu'au voisinage de l'axe des  $\mu$ .

Nous allons montrer l'existence de courbes invariantes par  $D_{\mu\nu}^{(2)}$ , normalement hyperboliques, proches de celles de la forme normale. Nous appliquerons à plusieurs reprises la proposition 1 suivante, qui est classique, et dont la démonstration consiste à construire une transformation contractante dans un espace de Banach convenablement choisis [un sous-espace de  $C^k(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R})$ ], c'est la méthode de transformée de graphes (voir [6], [13], [16]).

PROPOSITION 1 (voir [13]). — Soit  $F_{\mu\nu}: \mathbf{T}^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{T}^1 \times [-1, 1]$  une famille locale [en  $(\mu, \nu)$ ] de difféomorphismes de classe  $C^k$ , qui s'écrit, pour  $(\mu, \nu, y)$  dans un voisinage de  $(0, 0, 0)$  :

$$F_{\mu\nu}(\theta, y) = \{ \theta + \Omega(\mu, \nu) + \tau^p \Pi_{\mu\nu}(\theta, y); \quad (1 - \tau)y + \tau^p \Gamma_{\mu\nu}(\theta, y) \} \quad (18)$$

où  $\tau = \tau(\mu, \nu) \geq 0$  est le paramètre d'hyperbolicité normale, continu en  $(0, 0)$  avec  $\tau(0, 0) = 0$ ,  $p$  est une puissance strictement supérieure à 1,  $\Pi$  et  $\Gamma$  sont des fonctions 1-périodiques en  $\theta$  et bornées uniformément [en  $(\mu, \nu)$ ] dans un voisinage de  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ .

Alors il existe un  $\varepsilon_0 > 0$  et un voisinage  $W_0$  de  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ , tel que, pour tout  $0 < \tau < \varepsilon_0$ ,  $F_{\mu\nu}$  possède une courbe fermée invariante dans  $W_0$ , lipschitzienne, attractive, dont la taille du bassin d'attraction est bornée par une constante indépendante de  $\tau, \mu, \nu$ .

*Remarque 1.* — La proposition 1 n'est pas formulée dans un cadre abstrait général, mais est suffisante pour les applications que nous voulons en faire.

*Remarque 2.* — La continuité de la fonction  $\tau(\mu, \nu)$  entraîne l'existence d'un ouvert  $U_0$  de l'espace des paramètres sur lequel s'applique le résultat de la proposition.

*Complément.* —  $F_{\mu\nu}$  étant de classe  $C^k$ , il existe une filtration :  $U_0 \supset U_1 \supset \dots \supset U_k$ , tel que si  $(\mu, \nu) \in U_m$ ,  $m=0, 1, \dots, k$ , alors  $F_{\mu\nu}$  possède une courbe invariante de classe  $C^m$ .

*Remarque 3.* — La démonstration étant basée sur le théorème du point fixe dans un espace de Banach, sous-espace de  $C^k(T^1, T^1 \times \mathbf{R})$ , nous ne pouvons pas étendre le résultat jusqu'à la différentiabilité  $C^\infty$ , puisque  $C^\infty(M)$ ,  $M$  étant compact, n'est pas un espace de Banach.

(A) Région  $\nu \leq 0$

Afin d'appliquer la proposition 1 à  $D_{\mu\nu}^{(2)}$ , on effectue une transformation d'échelle :

$$V_1 : T^1 \times \mathbf{R} \rightarrow T^1 \times \mathbf{R}, \quad V_1(\theta, y) = (\theta, x = y/\alpha),$$

où  $\alpha$  est un paramètre que nous déterminerons. Par abus de notation, écrivons :

$$D_{\mu\nu}^{(2)}(\theta, x) = V_1 \circ D_{\mu\nu}^{(2)} \circ V_1^{-1}(\theta, x),$$

nous obtenons alors :

$$D_{\mu\nu}^{(2)}(\theta, x) = \{ \theta + 2\omega_0 + 2\mu\omega_1 + \alpha^2 \bar{A}_{\mu\nu}(x^2, \alpha) + f_{\mu\nu}(\theta, \alpha x); \\ (1 + 2\nu + \nu^2)x + \alpha^2 \bar{B}_{\mu\nu}(x^2, \alpha) + 1/\alpha \cdot g_{\mu\nu}(\theta, \alpha x) \} \quad (19)$$

$f$  et  $g$  sont les perturbations provenant de (10), explicitons les termes importants :

$$\left. \begin{aligned} f(\theta, \alpha x) &= \mu^{n+1} f_0(\theta, \alpha x) + \alpha x \mu^{n+(1/2)} f_1(\theta, \alpha x) + \alpha^2 F(\theta, x) \\ 1/\alpha \cdot g(\theta, \alpha x) &= \mu^{n+1}/\alpha g_{-1}(\theta, \alpha x) + x^{n+(1/2)} g_0(\theta, \alpha x) \\ &\quad + \alpha x^2 \mu^n g_1(\theta, \alpha x) + \alpha^2 G(\theta, x). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

La relation (20) est sous la forme (18) si l'on pose  $\alpha = \nu$  et si on impose une condition du type :

$$|\mu^{n+1}/\nu| \leq C\nu^2. \quad (21)$$

On vérifie qu'alors tous les termes de la perturbation satisfont une estimation du même ordre, c'est-à-dire :

$$\|f\|_{C^0} \leq C v^2, \quad \|g\|_{C^0} \leq C v^2 \quad (22)$$

où  $C$  est une constante positive, indépendante des paramètres.

Ceci est bien vérifié puisque la perturbation initiale est bornée en norme  $C^k$ , pour tout  $k$ .

Donc, dans la région de l'espace des paramètres définie par :

$$(H_n^-) \left\{ \begin{array}{l} v < 0 \\ |\mu^{n+1}| < C |v^3|, \end{array} \right.$$

nous pouvons appliquer la proposition 1, avec  $\tau = -v$  et  $p = 2$ , ce qui montre l'existence d'une courbe médiane invariante par  $D_{\mu\nu}^{(2)}$ .

*Remarque 1.* — Nous avons mis la relation (19) sous la forme (18), grâce à la condition (21), ce qui revient à choisir  $p = 2$ , mais nous aurions pu choisir  $p$  plus petit, ce qui aurait augmenté la taille du domaine  $H_n^-$ .

*Remarque 2.* — La méthode de transformée de graphes utilisée pour démontrer la proposition 1, définit un voisinage de  $x = 0$  dont la taille est d'ordre 1 dans les variables  $(\theta, x)$ . D'après le changement de variables  $V_1$ , nous obtenons un voisinage de  $y = 0$ , dans les variables  $(\theta, y)$  dont la taille est d'ordre  $v$ .

### (B) Région des $v \geq 0$

Dans ce cas la forme normale  $N_{\mu\nu}^{(2)}$  possède trois courbes invariantes  $y = 0$ ,  $y = \pm y_0$ , il faut donc étudier séparément la persistance de chacune d'elles.

#### (B. 1) Persistance de la courbe médiane

Le cercle  $y = 0$  est répulsif pour  $N_{\mu\nu}^{(2)}$ , lorsque  $v \geq 0$ , il faut donc étudier le difféomorphisme inverse  $(D_{\mu\nu}^{(2)})^{-1}$  pour avoir une contraction. Supposons la condition (21) satisfaite, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{(2)}(\theta, x) &= \{ \Theta_2, X_2 \} \\ &= \{ \theta + \Omega(\mu, v) + v^2 \tilde{A}_{\mu\nu}(\theta, x); (1 + 2v)x + v^2 \tilde{B}_{\mu\nu}(\theta, x) \} \quad (23) \end{aligned}$$

localement, nous pouvons inverser cette relation :

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \Theta_2 + \Omega_1(\mu, \nu) + \nu^2 A_{\mu\nu}^*(\Theta_2, X_2), \\ \Omega_1(\mu, \nu) &= -\Omega(\mu, \nu) + O(\nu^2), \\ x &= (1 - 2\nu)X_2 + \nu^2 B_{\mu\nu}^*(\Theta_2, X_2). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Or cette expression est également sous la forme (18) de la proposition 1, ce qui montre l'existence d'une courbe médiane invariante, pour des paramètres appartenant à la région :

$$H_n^+ \left\{ \begin{aligned} &\nu > 0, \quad \mu > 0 \\ &|\mu^{n+1}| \leq C|\nu|^3 \end{aligned} \right.$$

(B. 2) *Persistence des courbes dédoublées, nouvelle localisation*

Nous faisons ici une étude locale, au voisinage de  $y = y_0$  (l'autre cas est identique). Pour cela, considérons le changement de variables :

$$\left. \begin{aligned} V_2 : (\theta, y) &\rightarrow (\theta, \sigma), \\ y &= y_0 \sqrt{1 + \alpha\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

où  $\alpha$  est un paramètre que nous déterminerons. Rappelons que  $y_0$  est solution de l'équation  $K_{\mu\nu}(y^2) = 0$ . Calculons chacune des composantes par le changement de variables (25) :

$$\left. \begin{aligned} \Theta_2 &= \theta + \Omega(\mu, \nu) + A_{\mu\nu}(y_0^2 + y_0^2 \alpha\sigma) + f(\theta, y_0 \sqrt{1 + \alpha\sigma}) \\ X_2 &= y_0 \sqrt{1 + \alpha\Sigma} = y_0 \sqrt{1 + \alpha\sigma} [1 + K_{\mu\nu}(y_0^2 + y_0^2 \alpha\sigma) \\ &\quad + g(\theta, y_0 \sqrt{1 + \alpha\sigma})] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Effectuons un développement de Taylor sur chacune des composantes :

$$\left. \begin{aligned} \Theta_2 &= \theta + \Omega'(\mu, \nu) + y_0^2 \alpha A'_{\mu\nu}(\sigma) + F'_{\mu\nu}(\theta, \sigma) \\ \Sigma &= \left( 1 + y_0^2 \frac{dK_{\mu\nu}}{d(y^2)}(y_0^2) \right) \sigma + \frac{y_0^4}{\alpha} S_{\mu\nu}(\theta, \sigma) + \frac{1}{\alpha y_0} T_{\mu\nu}(\theta, \sigma) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

avec :

$$\Omega'(\mu, \nu) = \Omega(\mu, \nu) + A_{\mu\nu}(y_0^2), \quad y_0 = O(\nu^{1/2})$$

$$A'_{\mu\nu}(\sigma) = \frac{dA_{\mu\nu}}{d(y^2)}(y_0^2) \sigma + O(\sigma^2)$$

$$\frac{dK_{\mu\nu}}{d(y^2)}(y_0^2) = -B_3(0, 0) + O(y_0^2) < 0,$$

pour  $\nu$  suffisamment petit.

Les applications  $A'$ ,  $F'$ ,  $S$ ,  $T$  sont  $C^\infty$  en leurs arguments, dans un voisinage de l'origine. Pour appliquer la proposition 1, nous posons  $\alpha = \nu^{1/2}$ , étudions les termes de perturbation qui ne sont pas immédiatement sous la forme (18) :

$$F'_{\mu\nu}(\theta, \sigma) = \mu^{n+1} F'_0(\theta, \sigma) + \mu^{n+(1/2)} y_0 F'_1(\theta, \sigma) + \mu^n y_0^2 F'_2(\theta, \sigma) + y_0^3 F''(\theta, \sigma) \quad (28)$$

$$\frac{1}{\alpha y_0} T_{\mu\nu}(\theta, \sigma) = \frac{\mu^{n+1}}{\alpha y_0} t_1 + \frac{\mu^{n+(1/2)}}{\alpha} t_2 + \frac{\mu^n}{\alpha} y_0 t_3 + \frac{\mu^{n-(1/2)}}{\alpha} y_0^2 t_4 + \frac{\mu^{n-1}}{\alpha} y_0^3 t'' \quad (29)$$

Comme dans le cas précédent, le terme le plus gênant est celui en  $\mu^{n+1}/\alpha y_0$ , si nous supposons à nouveau que les paramètres  $(\mu, \nu)$  satisfont l'estimation (21), nous pouvons alors écrire :

$$\left. \begin{aligned} \Theta_2 &= \theta + \Omega'(\mu, \nu) + \nu^{3/2} Q_{\mu\nu}(\theta, \sigma) \\ \Sigma &= (1 - \gamma\nu) \sigma + \nu^{3/2} R_{\mu\nu}(\theta, \sigma), \quad \gamma = B_3(0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Les applications  $Q$  et  $R$  ont toute la régularité nécessaire, elles sont  $C^k$ -uniformément bornées, l'expression (30) est donc bien sous la forme (18) et nous pouvons lui appliquer la proposition 1. D'après le changement de variables (25), la taille du voisinage sur lequel est définie la courbe invariante est d'ordre  $\nu$ , dans les variables  $(\theta, y)$ .

### II. 3. Domaines d'hyperbolicité et bassins

Résumons un peu notre connaissance du système perturbé. Nous avons dans le plan des paramètres différentes régions définies par (21) et ce dans un voisinage de l'origine.

L'hypothèse initiale d'existence d'un cylindre invariant, impose :  $\mu \geq 0$  et  $|\nu| \leq C(n)\mu$ , en regroupant toutes ces estimations, nous définissons les *domaines d'hyperbolicité normal* :

$$H_n^+ : \left\{ \begin{array}{l} |\mu|^{n+1} \leq |\nu|^3 \\ 0 \leq \nu \leq C(n)\mu \end{array} \right\}, \quad H_n^- : \left\{ \begin{array}{l} |\mu|^{n+1} \leq |\nu|^3 \\ -C(n)\mu \leq \nu \leq 0 \end{array} \right\} \quad (31)$$

Si  $n$  est suffisamment grand, ces domaines ont l'allure donnée sur la figure 5.

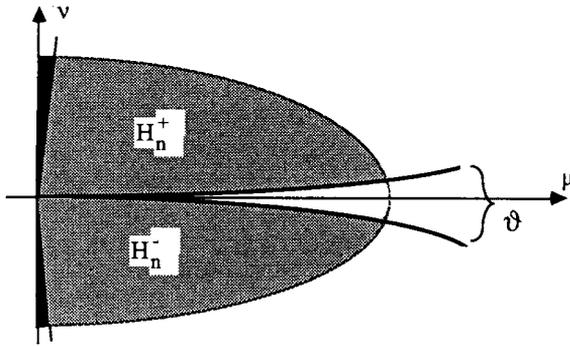


FIG. 5.

Les domaines  $H_n^+$  et  $H_n^-$  ont la forme ci-dessus lorsque les relations (31) déterminent un contact au moins quadratique,  $n$  doit donc être supérieur à 5, mais nous avons déjà remarqué que la relation (21) et donc (31) n'est pas optimale. Dans le voisinage de l'origine, nous définissons le complémentaire  $\mathcal{V}$  de  $H_n^+ \cup H_n^-$ , c'est un voisinage effilé de la courbe de bifurcation ( $\nu=0$ ) qui est strictement analogue à celui étudié par A. Chenciner dans [3]. C'est pour ces valeurs de  $(\mu, \nu)$  que les comportements dynamiques compliqués peuvent exister, comme l'existence d'orbites homoclines, ce que nous n'étudierons pas ici (voir [4],[5]).

*Bassins d'attraction et de répulsion*

Reprenons la figure 4, dont nous allons considérer une coupe  $\mu = \text{Cte}$ . D'après ce qui précède, les difficultés se présentent pour les valeurs des paramètres tels que  $M_{n+1}^+ \geq 0$  et  $M_{n+1}^- \leq 0$ . Si nous définissons  $\mathcal{V}$  comme sur la figure, avec la perturbation (17), nous obtenons une taille d'ordre  $O(\mu^{2p-1/3})$ , ce qui correspond à (21) si  $p=n+1$ . La distance séparant  $M_{n+1}^+$  et  $M_{n+1}^-$  est d'ordre  $O(\mu^{n+1})$ . Or pour  $(\mu, \nu)$  vérifiant (21), la proposition 1 définit un voisinage d'ordre  $O(\nu)$  pour chacune des courbes invariantes, et d'après (21)  $|\nu| > C|\mu|^{n+1}$ .

Les voisinages sur lesquels sont définies les courbes invariantes étant plus grands que la région entre  $M_{n+1}^+$  et  $M_{n+1}^-$ , nous pouvons conclure, en recollant ces voisinages, que pour  $(\mu, \nu)$  dans  $H_n^+ \cup H_n^-$  la famille  $D_{\mu\nu}$  ressemble à la famille des formes normales  $N_{\mu\nu}$ , puisque  $D_{\mu\nu}^{(2)}$  et  $N_{\mu\nu}^{(2)}$  ont

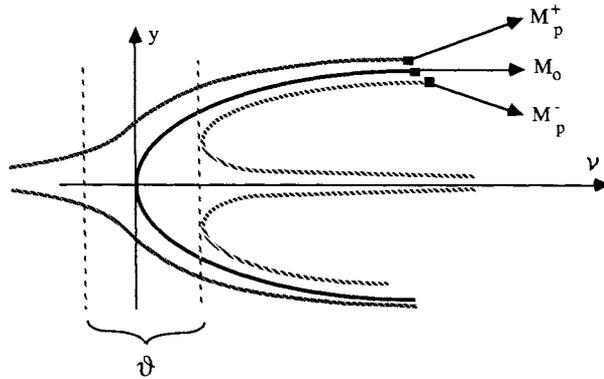


FIG. 6.

le même nombre de courbes invariantes, et la même décomposition uniforme en bassins. Remarquons, en passant l'avantage de la méthode de transformée de graphes sur des méthodes plus abstraites du type point fixe (Schauder, ...), en effet, elle nous permet d'une part, d'avoir une estimation du voisinage de définition de la courbe invariante, et d'autre part de connaître la dynamique au voisinage de celle-ci.

**THÉOREME 1.** — Soit  $D_{\mu\nu}: \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ , définis par (8), (9), (9') et vérifiant l'hypothèse générique (11), soient  $H_n^+$  et  $H_n^-$  définis par (31). Si  $n > 5$  est fixé, il existe un voisinage  $U_n$  de  $(0, 0)$  dans le plan des paramètres, et un voisinage  $W_n$  de 0 dans  $\mathbb{R}$  ayant les propriétés suivantes :

(i) Si  $(\mu, \nu) \in U_n \cap H_n^-$  et si  $y \in W_n$  alors  $D_{\mu\nu}(\theta, y) \in \mathbb{T}^1 \times W_n$  pour tout  $\theta \in \mathbb{T}^1$ , et  $D_{\mu\nu}$  possède une courbe fermée invariante, lipschitzienne, normalement hyperbolique et attractante, dont le bassin d'attraction contient  $W_n$ .

(ii) Si  $(\mu, \nu) \in U_n \cap H_n^+$  et  $y \in W_n$ , alors  $D_{\mu\nu}^{(2)}(\theta, y) = D_{\mu\nu} \circ D_{\mu\nu}(\theta, y)$  appartient à  $\mathbb{T}^1 \times W_n$  et  $D_{\mu\nu}^{(2)}$  possède trois courbes fermées invariantes, lipschitziennes, normalement hyperboliques, et dont la réunion des bassins d'attraction et de répulsion contient  $W_n$ . Parmi ces trois courbes une est médiane, les deux autres forment un couple de courbes dédoublées.

*Complément.* — Il existe une filtration :

$$\dots U_{n,k} \subset U_{n,k-1} \subset \dots \subset U_{n,1} \subset U_n$$

dans le plan des paramètres, tel que : si  $(\mu, \nu) \in H_n^\pm \cap U_{n,k}$  alors les courbes invariantes définies par (i) et (ii) sont de classe  $C^k$ .

### III. THÉORÈME DE LA COURBE TOURNÉE

#### III. 1. Position du problème

Nous étudions dans ce paragraphe, ainsi que dans le suivant, l'existence d'une courbe médiane invariante, pour des valeurs des paramètres appartenant à  $\mathcal{V}$  (fig. 5). La difficulté dans  $\mathcal{V}$  provient du défaut d'hyperbolicité qui nous conduit, en s'inspirant des théorèmes du type KAM, à chercher une courbe invariante, proche de  $y=0$  sur laquelle la restriction du difféomorphisme est conjuguée à une rotation diophantienne. Une démonstration directe d'un tel résultat est probablement délicate, c'est pourquoi nous utilisons une étape intermédiaire, analogue au théorème des courbes translatées de Rüssmann ([15], [9], [11], [3]). La différence est que nous considérons, non pas une translation de la courbe, mais une rotation. Nous cherchons donc une courbe, invariante par la composée de  $D_{\mu\nu}$  avec une « petite » rotation, ce résultat est appelé : *théorème de la courbe tournée*.

Dans ce paragraphe, nous démontrons une version simplifiée du théorème, que nous affinerons au paragraphe suivant, dans l'optique d'annuler la rotation, et donc de trouver une courbe invariante.

#### III. 2. Réduction du problème et mise en équation

Cherchons dans un premier temps à simplifier l'écriture de la composante angulaire de la famille  $D_{\mu\nu}$ , par un changement de variables.

##### (A) Changement de variables

Reprenons l'écriture de la famille  $D_{\mu\nu}$  donnée par (9), (9') :

$$D_{\mu\nu}(\theta, y) = \{ \Theta, Y \}$$

avec :

$$\begin{cases} \Theta = \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + a_2(\mu, \nu)y^2 + \dots + a_{2n}(\mu, \nu)y^{2n} + p_{\mu\nu}^0(\theta, y) \\ Y = -(1+\nu)y + b_3(\mu, \nu)y^3 + \dots + b_{2n+1}(\mu, \nu)y^{2n+1} + p_{\mu\nu}^1(\theta, y) \end{cases}$$

LEMME 1. — Supposons  $a_2(0, 0) \neq 0$ , par exemple :

$$a_2(0, 0) > 0. \tag{32}$$

Il existe un difféomorphisme localement  $C^\infty$  pour  $(\mu, \nu)$  suffisamment petits :

$$V^0: \mathbf{T}^1 \times (\mathbf{R}, 0) \rightarrow \mathbb{T}^1 \times (\mathbb{R}, 0), \quad V_{\mu\nu}^0(\theta, y) = (\theta, x),$$

tel que :

$$D'_{\mu\nu}(\theta, x) = V_{\mu\nu}^0 \circ D_{\mu\nu} \circ (V_{\mu\nu}^0)^{-1}(\theta, x) = \{ \Theta, X \},$$

ou l'on a :

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + x^2 + g_{\mu\nu}^0(\theta) \\ X &= -(1+\nu)x + \tilde{b}_3(\mu, \nu)x^3 + \dots + \tilde{b}_{2n-1}(\mu, \nu)x^{2n-1} + \tilde{p}_{\mu\nu}(\theta, x) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

et  $g_{\mu\nu}^0 = O(|\mu|^{n+1})$ ,  $\tilde{p}_{\mu\nu} = O(|x + \mu^{1/2}|^2)$ .

On remarque que l'hypothèse (32) est analogue au « twist monotone » pour les théorèmes du type KAM ([3], [11]).

*Démonstration.* — Réécrivons l'expression de  $\Theta$ , sous la forme :

$$\Theta = \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + a_2(\mu, \nu)[y^2 + \varphi_{\mu\nu}(\theta, y)],$$

où  $\varphi$  est une application  $C^\infty$  pour  $(\mu, \nu)$  dans un voisinage de l'origine. Cherchons maintenant  $\tilde{y}(\theta, \mu, \nu)$  solution de l'équation :

$$2y + \frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial y}(\theta, y) = 0 \quad (34)$$

D'après le théorème des fonctions implicites,  $\tilde{y}$  existe pour  $(\mu, \nu)$  suffisamment petits, et est de classe  $C^\infty$ . L'équation analogue pour la forme normale admet  $\tilde{y}=0$  comme solution, avec la perturbation (9') nous pouvons estimer l'ordre de grandeur de :

$\tilde{y} = O(\mu^{n+1/2})$ , posons :

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\theta) = \tilde{y}_{\mu\nu}^2(\theta) + \varphi_{\mu\nu}(\theta, \tilde{y}) = O(\mu^{n+1}), \quad (35)$$

l'expression analogue pour la forme normale est identiquement nulle. Effectuons maintenant le changement de variables :  $z = y - \tilde{y}$ , nous obtenons alors, en utilisant (34) et (35) :

$$y^2 + \varphi_{\mu\nu}(\theta, y) = \tilde{g}_{\mu\nu}(\theta) + z^2 + O(\mu^n z) = \tilde{x}^2 + \tilde{g}_{\mu\nu}(\theta), \quad (36)$$

où nous avons posé :  $\tilde{x} = (y - \tilde{y})[1 + O(\mu^n)]$ , et finalement posons :

$$x = \tilde{x} \sqrt{a_2(\mu, \nu)}, \quad (37)$$

ce qui est licite dans un voisinage de  $(0, 0)$  d'après (32). Le changement de variables :  $V_{\mu\nu}^0(\theta, y) = (\theta, x)$  est bien un difféomorphisme local, dans un voisinage de  $\mathbf{T}^1 \times \{0\}$ , et pour  $(\mu, \nu)$  proche de l'origine. Écrivons l'expression de la famille  $D_{\mu\nu}$  après le changement de variable  $V^0$ , nous

obtenons (par abus de notations) :

$$D_{\mu\nu}(\theta, x) = V_{\mu\nu}^0 \circ D_{\mu\nu} \circ (V_{\mu\nu}^0)^{-1}(\theta, x) = (\Theta, X),$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + x^2 + g_{\mu\nu}^0(\theta) \\ X &= -(1+\nu)x + \tilde{b}_3(\mu, \nu)x^3 + \dots + \tilde{b}_{2n+1}(\mu, \nu) + \tilde{p}_{\mu\nu}(\theta, x) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

et :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^0(\theta) &= a_2(\mu, \nu) \tilde{g}_{\mu\nu}(\theta) = O(\mu^{n+1}) \\ \tilde{p}_{\mu\nu}(\theta, x) &= O(\mu^{n+(1/2)}) + O\left|(x + \mu^{1/2})^{2n+2}\right| \end{aligned}$$

Nous pouvons condenser cette expression, en acceptant de perdre une unité d'ordre de grandeur pour la forme normale, nous obtenons finalement l'expression (33) du lemme.

(B) *Formulation du problème*

Le but de ce paragraphe est de trouver une courbe invariante par  $D_{\mu\nu}$ , suffisamment proche de  $x=0$  (en topologie  $C^1$  par exemple). Nous la chercherons comme graphe d'une application  $\psi$  de  $C^\infty(\mathbb{T}^1)$ . Écrivons l'équation fonctionnelle que doit vérifier  $\psi$ , traduisant l'invariance par  $D_{\mu\nu}$  de la courbe  $\{(\theta, \psi(\theta), \theta \in \mathbb{T}^1)\}$ .

$$\left. \begin{aligned} \Theta(\psi, g^0)(\theta) &\equiv f(\theta) \equiv \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + \Psi^2(\theta) + g_{\mu\nu}^0(\theta) \\ \Psi \circ f(\theta) &= -(1+\nu)\Psi(\theta) + \tilde{b}_3(\mu, \nu)\Psi^3(\theta) + \dots \\ &\quad + \tilde{b}_{2n-1}(\mu, \nu)\Psi^{2n-1} + \tilde{p}_{\mu\nu}(\theta, \Psi(\theta)) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

L'analogie déjà citée avec les théorèmes de courbes invariantes ([9], [3]), nous incite à chercher une solution de ce système en imposant au difféomorphisme, restreint à sa courbe invariante, d'être conjugué à une rotation diophantienne.

*Notations.* — Soit  $\text{Diff}_+^k(\mathbb{T}^1)$  le groupe des difféomorphismes du cercle, de classe  $C^k$ , qui préservent l'orientation. Notons  $R_\omega$  la rotation du cercle :  $R_\omega : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ ,  $R_\omega(\theta) = \theta + \omega$ , et  $\mathcal{R}_\lambda$  la rotation du cylindre,

$$\mathcal{R}_\lambda : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_\lambda(\theta, x) = (\theta + \lambda, x).$$

Nous cherchons donc  $\Psi$  satisfaisant (39) et  $h$  dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  vérifiant l'équation de conjugaison :

$$f(\theta) = h^{-1} \circ R_\omega \circ h(\theta). \quad (39')$$

(C) *Conjugaison locale à une rotation*

L'expression (39) montre que  $f$  est un difféomorphisme du cercle de classe  $C^\infty$ , or d'après Arnold, Herman, Yoccoz ([1], [10], [18]), pour étudier la conjugaison à une rotation, nous devons considérer son invariant topologique : le nombre de rotation. Malheureusement, contrairement aux cas [3], [9],  $f$  dépend quadratiquement de  $\Psi$ , donc en fixant  $f$  et par la même son nombre de rotation, la fonction inconnue  $\Psi$  n'est pas déterminée. Ce qui nous conduit à modifier la stratégie, et à « ajuster »  $f$  pour qu'il ait un nombre de rotation fixé. D'après M. Herman (voir [10], chap. III), nous avons :

PROPOSITION 2. — Soit  $\omega$  un nombre irrationnel, et  $\rho : \text{Diff}_+^0(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{T}^1$ , l'application continue « nombre de rotation ».

Il existe un voisinage  $W$  de  $(0,0)$  dans  $[C^\infty(\mathbb{T}^1)]^2$ , tel que pour tout  $(\psi, g^0)$  dans  $W$ , il existe  $\lambda_\omega$  dans  $\mathbb{T}^1$  vérifiant :

$$\rho[\Theta(\psi, g^0) + \lambda_\omega] = \omega.$$

De plus l'application :  $(\psi, g^0) \in [C^k(\mathbb{T}^1)]^2 \rightarrow \lambda_\omega \in \mathbb{T}^1$  est continue pour la  $C^k$ -topologie.

Si nous supposons maintenant que  $\omega$  est non seulement irrationnel, mais également satisfait une condition diophantienne (voir (43)), alors d'après le théorème local de conjugaison d'Arnold, ou d'après le théorème global de Herman-Yoccoz ([10], [18]), nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — Soit  $\omega$  un nombre diophantien (satisfaisant (43)), il existe un voisinage  $W'$  de  $(0,0)$  dans  $[C^\infty(\mathbb{T}^1)]^2$  tel que pour tout  $(\Psi, g^0)$  dans  $W'$ , il existe  $\lambda_\omega$  dans  $\mathbb{T}^1$  et  $h_\omega$  dans  $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$  tel que

$$\Theta(\psi, g^0)(\theta) + \lambda_\omega = h_\omega^{-1} \circ R_\omega \circ h_\omega(\theta),$$

de plus l'application :

$$(\psi, g^0) \in [C^\infty(\mathbb{T}^1)]^2 \rightarrow (\lambda_\omega, h_\omega) \in \mathbb{T}^1 \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$$

est différentiable, c'est même une bonne application de classe  $C^1$  (au sens de Hamilton [8]).

Cette dernière proposition réalise exactement le programme annoncé pour ce qui est de la conjugaison : il existe un paramètre qui « ajuste » le nombre de rotation à  $\omega$ . La fin de la proposition concernant la bonne application de classe  $C^1$  ne découle pas directement du théorème d'Herman, mais nous la montrerons, au passage, à la fin de ce paragraphe.

Notons que la stratégie, pour trouver une courbe invariante, qui consiste à ajouter un paramètre suivant la composante angulaire (et non sur la

composante normale comme pour le théorème de la courbe translatée), complique la méthode puisque le paramètre qui est introduit est une fonctionnelle, dépendant de la fonction inconnue  $\psi$ .

### III. 3. Théorème de la courbe tournée

Écrivons  $D_{\mu\nu}$  sous une forme simplifiée, qui nous suffira dans cette partie :

$$D_{\mu\nu}(\theta, x) = \{(\theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + x^2 + g_{\mu\nu}^0(\theta); -(1 + \nu)x + \Phi_{\mu\nu}(\theta, x))\} \quad (42)$$

**THÉORÈME 2.** — Soit  $\omega$  dans  $\mathbf{T}^1$ , fixé, satisfaisant une condition diophantienne :

$$\exists C > 0, \quad \exists \beta \geq 0 / \forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \quad \left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{|q|^{2+\beta}} \quad (43)$$

Soient  $\Phi \in C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1)$  et  $g^0 \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$ , suffisamment petits.

Alors il existe  $\lambda_{\omega\mu\nu} \in \mathbf{T}^1$ ,  $\psi_{\omega\mu\nu} \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$ ,  $h_{\omega\mu\nu} \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$ , tels que la courbe fermée  $\mathcal{C}_0$  d'équation  $x = \psi_{\omega\mu\nu}(\theta)$  est invariante par :  $D_{\omega\mu\nu} = \mathcal{R}_{\lambda_{\omega\mu\nu}} \circ D_{\mu\nu}$ , et  $D_{\omega\mu\nu}$  restreint à  $\mathcal{C}_0$  est conjugué par  $h_{\omega\mu\nu}$  à la rotation  $R_\omega$ . De plus les applications :

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbf{T}^1) \times C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1) &\rightarrow [C^\infty(\mathbf{T}^1)]^2 \rightarrow \mathbf{T}^1 \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1) \\ (g^0, \Phi) &\rightarrow (g^0, \psi) \rightarrow (\lambda, h) \end{aligned}$$

sont des bonnes applications au sens de Hamilton, et sont définies sur des voisinages respectifs de :  $(0,0)$ ,  $(0,0)$ ,  $(\lambda_0, \text{id})$ , avec  $\lambda_0 = \omega - \omega_0 - \mu\omega_1$ , qui est la valeur de  $\lambda$  pour la forme normale.

*Remarque 1.* — Pour la suite de la démonstration nous supprimons les indices  $\omega, \mu, \nu$  afin d'alléger les expressions.

*Remarque 2.* — Les paramètres  $(\mu, \nu)$  sont dans un voisinage de l'origine, compatible avec les changements de variables de III.2. Dans ce cas le théorème de Hamilton que nous utilisons implique une dépendance  $C^\infty$  de  $\lambda, h, \psi$  par rapport aux paramètres.

*Remarque 3.* — Nous avons supposé que la perturbation  $\Phi$  appartient à  $C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1)$ , ce qui revient à supposer  $\Phi$  périodique en sa seconde variable. Ceci ne restreint en rien le problème puisque  $x$  est dans un voisinage de l'origine.

### III. 4. Démonstration du théorème 2

Nous allons suivre la démonstration de M. Herman [9] du théorème de Rüssmann. Bien que le problème se présente sous une forme sensiblement différente, la méthode centrale, basée sur l'utilisation du théorème des fonctions implicites de Hamilton, sera analogue. Pour démontrer le théorème 2, nous devons prouver l'existence de  $\lambda$ ,  $\psi$ ,  $h$  vérifiant :

$$(a) \quad F[\Phi, g^0, \psi](\theta) \equiv \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + \lambda + \psi^2(\theta) + g^0(\theta) \\ = h^{-1} \circ R_\omega \circ h(\theta) \quad (44)$$

$$(b) \quad \mathcal{H}[\Phi, g^0, \psi](\theta) \equiv \psi \circ F(\theta) + (1 + \nu)\psi(\theta) - \Phi(\theta, \psi(\theta)) = 0$$

Nous appliquons le théorème de Hamilton à  $\mathcal{H}$  qui est une bonne application de classe  $C^\infty$ , en effet :

$$(f, g) \in C^\infty(\mathbf{T}^i, \mathbf{T}^j) \times C^\infty(\mathbf{T}^j, \mathbf{T}^m) \rightarrow g \circ f \in C^\infty(\mathbf{T}^i, \mathbf{T}^m)$$

est une bonne application  $C^\infty$ , ce qui découle des inégalités de convexité ([8], [11]) (inégalités de Hadamard) :

$$\|g \circ f\|_m \leq C_m \{ \|g\|_m \cdot \|f\|_1^m + \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 \cdot \|f\|_m + \|g\|_0 \}, \quad (45)$$

dans la suite nous utiliserons également le fait que les applications suivantes sont des bonnes applications  $C^\infty$ .

$$f \in \text{Diff}^\infty(\mathbf{T}^1) \rightarrow f^{-1} \in \text{Diff}^\infty(\mathbf{T}^1)$$

et

$$(f, g) \in [C^\infty(\mathbf{T}^1)]^2 \rightarrow f \cdot g \in C^\infty(\mathbf{T}^1),$$

ce qui découle également d'inégalités de convexité :

$$\|f^{-1} - \text{id}\|_m \leq C_m \{ \|f - \text{id}\|_m + 1 \} \quad \text{si} \quad \|f - \text{id}\|_1 \leq 1, \quad (45')$$

et

$$\|f \cdot g\|_m \leq C_m \{ \|f\|_m \cdot \|g\|_0 + \|f\|_0 \cdot \|g\|_m \} \quad (45'')$$

$\mathcal{H}$  vérifie donc la première partie des hypothèses du théorème de Hamilton ([8], [9]).

$$\mathcal{H}: C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1) \times [C^\infty(\mathbf{T}^1)]^2 \rightarrow C^\infty(\mathbf{T}^1)$$

est une bonne application de classe  $C^\infty$  entre deux bons espaces de Fréchet, et elle vérifie :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}(0, 0, 0) &= 0 \\ F(0, 0, \lambda_0) &= R_\omega, \quad \text{pour } \lambda_0 = \omega - \omega_0 - \mu\omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Dans le cas de la forme normale, nous avons :  $\lambda = \lambda_0$ ,  $\Psi = 0$ ,  $h = \text{id}$ .

Pour appliquer le théorème de Hamilton, il reste à démontrer l'existence d'un inverse pour  $D_2 \mathcal{H}$  (la dérivée partielle par rapport à  $\Psi$ ), pour tout  $(\Phi, g^0, \Psi)$  dans un voisinage de  $(0, 0, 0)$ . La démonstration de ce résultat va occuper la fin de ce paragraphe. L'existence de  $(\lambda, h)$  vérifiant (44) (a) est assuré par la proposition 3, le point important étant la propriété de différentiabilité des applications  $\lambda(g^0, \Psi)$  et  $h(g^0, \Psi)$  pour tout  $(g^0, \Psi)$  dans un voisinage de  $(0,0)$ .

(A) Calcul de la dérivée partielle  $D_2 \mathcal{H}$

Précisons que la dérivée s'entend au sens de Gateaux, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{1/t [\mathcal{H}(\Phi, g^0, \psi + t \Delta\psi) - \mathcal{H}(\Phi, g^0, \psi)]\}$$

*Remarque préliminaire.* — Dans ces calculs, les dépendances sont multiples, la plus délicate étant celle de  $\mathcal{H}$  en  $\Psi$  par l'intermédiaire de  $\lambda$ . D'après la proposition 3,  $\lambda(\Psi)$  est différentiable et nous avons donc :

$$\lambda(\Psi + t \Delta\Psi) - \lambda(\Psi) = t \Delta\lambda(\psi, \Delta\psi) + O(t^2) \tag{47}$$

$\Delta\lambda$  est la dérivée de  $\lambda$  par rapport à  $\Psi$ , c'est donc une fonctionnelle linéaire en  $\Delta\Psi$ , nous expliciterons cette dépendance à la fin de la démonstration. Dans un premier temps,  $\Delta\lambda$  sera considéré simplement comme un paramètres réel du système.

Dans le calcul de la dérivée  $D_2 \mathcal{H}$  nous devons, en particulier, exprimer  $D_2 F = \frac{\partial F}{\partial \Psi}$ , que nous noterons  $\Delta F$ . D'après la remarque précédente et la définition (47) de  $\Delta\lambda$ , nous obtenons :

$$\Delta F = \Delta\lambda + 2 \psi \cdot \Delta\Psi. \tag{48}$$

La dérivée  $D_2 \mathcal{H}$  s'exprime alors par :

$$\left. \begin{aligned} D_2 \mathcal{H}(\Phi, g^0, \Psi)(\Delta\Psi)(\theta) &= \Delta\Psi \circ F(\theta) + \eta(\theta) \Delta\Psi(\theta) + \gamma(\theta) \cdot \Delta\lambda \\ \eta(\theta) &= (1 + \nu) + [D\Psi \circ F(\theta)] \cdot 2\Psi(\theta) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\theta, \Psi(\theta)) \\ \gamma(\theta) &= D\Psi \circ F(\theta) \end{aligned} \right\} \tag{49}$$

Soit  $\Delta\eta$  donné dans  $C^\infty(T^1)$ , le problème d'inversion local de  $D_2 \mathcal{H}$  consiste à chercher une application  $L$  vérifiant :

$$D_2 \mathcal{H}(\Phi, g^0, \Psi) \cdot L(\Phi, g^0, \psi) \Delta\eta = \Delta\eta, \tag{50}$$

ce qui revient à résoudre l'équation suivante en  $\Delta\Psi$  :

$$\Delta\Psi \circ F(\theta) + \eta(\theta) \Delta\Psi(\theta) + \gamma(\theta) \Delta\lambda = \Delta\eta(\theta) \quad (51)$$

et à montrer que l'application :  $\Delta\eta \in C^\infty(\mathbf{T}^1) \rightarrow \Delta\Psi \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$  est une bonne application linéaire de classe au moins  $C^0$ .

Pour résoudre cette équation, nous effectuons une succession de bons changements de variables, analogues à ceux de M. Herman [9], dont l'objectif est de transformer (51) en une équation aux différences, qui sera résolue grâce à la condition diophantienne.

LEMME 2. — *L'équation (51) se réduit, par un bon changement de variables linéaire, en l'équation :*

$$\Delta\psi_1(\theta + \omega) + \eta_1(\theta) \Delta\psi_1(\theta) + \gamma_1(\theta) \Delta\lambda = \Delta\eta_1(\theta) \quad (52)$$

*Démonstration.* — Il suffit de poser  $X_1(\theta) = X \circ h^{-1}(\theta)$ , avec  $X = \Delta\Psi$ ,  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\Delta\eta$ . En effet, d'après (44) (a)  $F = h^{-1} \circ R_\omega \circ h$ , donc en composant (51) par  $h^{-1}$  nous obtenons bien (52). De plus, d'après (45), (45'), l'application :

$$(g, h) \in C^\infty(\mathbf{T}^1) \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1) \rightarrow g \circ h^{-1} \in C^\infty(\mathbf{T}^1),$$

est une bonne application de classe  $C^\infty$ , ce qui montre que le changement de variables, qui est linéaire, est une bonne application.

LEMME 3. — *On suppose que  $\eta_1 = \eta \circ h^{-1}$  est suffisamment proche de 1 (dans la  $C^k$ -topologie). Il existe alors un bon changement de variables qui transforme l'équation (52) en :*

$$\Delta\psi_2(\theta + \omega) + \alpha \Delta\psi_2(\theta) + \gamma_2(\theta) \Delta\lambda = \Delta\eta_2(\theta), \quad (53)$$

$\alpha$  étant un réel proche de 1.

*Démonstration.* —  $\omega$  satisfaisant une condition diophantienne, il existe  $a \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$  et  $\alpha \in \mathbf{R}^+$ , uniquement déterminés par :

$$\left. \begin{aligned} \log \eta_1(\theta) &= \log \alpha + \log a(\theta - \omega) - \log a(\theta) \\ \log a(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$\eta_1$  étant proche de 1, cette expression est bien définie, et l'existence provient de la résolution de l'équation aux différences (54),  $\alpha$  est défini par :

$$\log \alpha = \int_{\mathbf{T}^1} \log \eta_1(\theta) d\theta. \quad (54')$$

D'après (49), l'hypothèse du lemme sur  $\eta_1$  est satisfaite, et d'après [9] :  $\eta \in C^\infty(\mathbf{T}^1) \rightarrow (\alpha, a) \in \mathbf{R}^+ \times C^\infty(\mathbf{T}^1)$  est une bonne application de classe  $C^0$ . En posant :

$$\begin{cases} \Delta\Psi_2(\theta) = a(\theta - \omega)\Delta\Psi_1(\theta), \\ \gamma_2(\theta) = a(\theta)\gamma_1(\theta), \quad \Delta\eta_2(\theta) = a(\theta)\Delta\eta_1(\theta) \end{cases}$$

l'équation (52) se transforme en (53). Et ce changement de variables :  $\Delta\psi_1 \in C^\infty(\mathbf{T}^1) \rightarrow \Delta\psi_2 \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$  est une bonne application linéaire.

Le premier objectif de cette démonstration est atteint, nous avons transformé l'équation initiale (51) en une équation aux différences (53), et ce par une suite de bons changements de variables.

Nous pouvons résoudre (53), en considérant  $\Delta\lambda$  comme un paramètre réel.

LEMME 4. — *On se donne  $\alpha$  un réel voisin de 1,  $\Delta\lambda$  un réel et  $\omega$  satisfaisant une condition diophantienne.*

*Il existe alors  $(f_1, f_2) \in [C^\infty(\mathbf{T}^1)]^2$ , tel que :*

$$\Delta\psi_2 = f_1 + \Delta\lambda f_2 \tag{55}$$

*est solution de l'équation (53).*

*De plus il existe un entier  $k_1$ , et pour tout entier  $m$  une constante  $B_m$  positive tels que :*

$$\|\Delta\psi_2\|_m \leq B_m \{ \|\Delta\eta_2\|_{m+k_1} + |\Delta\lambda| \cdot \|\gamma_2\|_{m+k_1} \}, \tag{56}$$

*ce qui montre que l'application :  $(\Delta\eta_2, \gamma_2) \in [C^\infty(\mathbf{T}^1)]^2 \rightarrow \Delta\psi_2 \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$ , est une bonne application de classe  $C^0$ .*

*Démonstration.* — L'équation (53) étant simplement une équation aux différences, nous savons la résoudre. La différence par rapport aux cas [3], [9], est que le paramètre  $\alpha$  est proche de 1 (et non pas de  $-1$ ), ce qui évite d'imposer à cette équation une condition intégrale [du type (54')]. Donc pour toute valeur du paramètre  $\Delta\lambda$ , nous pouvons résoudre (53), sa solution est linéaire en  $\Delta\lambda$ . L'estimation (56) est classique pour les équations aux différences (voir [9], [11]),  $k_1$  étant la perte de différentiabilité. Nous avons donc montré à ce point que la suite de changements de variables (51)  $\rightarrow$  (53) est, par composition, une bonne transformation. En revenant à l'équation (51), soit  $(\Delta\lambda, \Delta\eta)$  fixés dans  $\mathbf{R} \times C^\infty(\mathbf{T}^1)$  il existe  $\Delta\Psi \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$  solution de l'équation (51), c'est une bonne application.

Pour conclure cette démonstration, il faut maintenant fixer la dépendance de  $\Delta\lambda$  par rapport à  $\Delta\Psi$  en considérant l'équation de conjugaison (44) (a).

Posons  $K(h) = h^{-1} \circ R_\omega \circ h$  et cherchons  $\Delta\lambda$  et  $\Delta h$  l'équation dérivée de (44) (a) :

$$\Delta F = \Delta\lambda + 2\Psi(\theta)\Delta\Psi(\theta) = DK(h)\Delta h \quad (57)$$

LEMME 5. — Soient  $(\psi, h)$  fixés dans un voisinage de  $(0, \text{id})$  de  $C^\infty(\mathbf{T}^1) \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$ , soit  $\Delta\psi$  dans  $C^\infty(\mathbf{T}^1)$  et  $\omega$  satisfaisant une condition diophantienne. Il existe  $(\Delta\lambda, \Delta h) \in \mathbf{R} \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$  solution de l'équation (57) et l'application  $\Delta\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^1) \rightarrow (\Delta\lambda, \Delta h) \in \mathbf{R} \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$  est une bonne application de classe  $C^0$ .

Démonstration. — Pour expliciter (57), calculons  $DK$  :

$$DK(h)\Delta h = (Dh^{-1} \circ R_\omega \circ h) \cdot (\Delta h - \Delta h \circ h^{-1} \circ R_\omega \circ h), \quad (58)$$

composons cette équation par  $h^{-1}$  (c'est une bonne transformation) :

$$\Delta\lambda + 2\Psi_1(\theta) \cdot \Delta\psi_1(\theta) = (Dh^{-1} \circ R_\omega) (\Delta h_1(\theta) - \Delta h_1(\theta + \omega))$$

avec  $X_1 = X \circ h^{-1}$ ,  $X = \psi$ ,  $\Delta\psi$ ,  $\Delta h$ .

Posons  $l(\theta) = (Dh^{-1} \circ R_\omega(\theta))^{-1}$ , nous obtenons alors :

$$h_1(\theta) - h_1(\theta + \omega) = l(\theta) (\Delta\lambda + 2\Psi_1(\theta)\Delta\Psi_1(\theta)), \quad (59)$$

qui est une équation aux différences, elle admet une solution si :

$$\int_{\mathbf{T}^1} l(\theta) [\Delta\lambda + 2\Psi_1(\theta)\Delta\Psi_1(\theta)] d\theta = 0 \quad (60)$$

ce qui détermine la dépendance linéaire de  $\Delta\lambda$  en  $\Delta\Psi$ , et permet de définir l'unique solution  $(\Delta\lambda, \Delta h)$ .

Remarquons que :  $\Delta\Psi \in C^\infty(\mathbf{T}^1) \rightarrow (\Delta\lambda, \Delta h) \in \mathbf{R} \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$  est une bonne application  $C^0$ , ce qui, en passant, démontre la fin de la proposition 3 (en appliquant le théorème de Hamilton).

Relions (60) à la solution (55) de l'équation (53), d'après (55) et le changement de variables du lemme 3, nous avons :

$$\Delta\psi_1 = \bar{f}_1 + \Delta\lambda \bar{f}_2, \quad (\bar{f}_1, \bar{f}_2) \in [C^\infty(\mathbf{T}^1)]^2, \quad (61)$$

et en combinant avec (60) nous trouvons finalement l'expression de  $\Delta\lambda$  :

$$\Delta\lambda = - \left( \int_{\mathbf{T}^1} 2l(\theta)\Psi_1(\theta)\bar{f}_1(\theta)d\theta \right) / \left( \int_{\mathbf{T}^1} l(\theta)(1+2\Psi_1(\theta)\bar{f}_2(\theta))d\theta \right). \quad (62)$$

Cette expression est bien définie, elle fixe la valeur de  $\Delta\lambda$  et donc, par (55) celle de  $\Delta\psi$ , nous avons donc démontré la proposition suivante :

LEMME 6. — Supposons  $(\Phi, g^0, \psi)$  dans un voisinage de  $(0, 0, 0)$  dans  $C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1) \times [C^\infty(\mathbf{T}^1)]^2$ . Il existe alors une bonne application de

classe  $C^0$  :

$$L(\Phi, g^0, \psi) : \Delta\eta \in C^\infty(\mathbf{T}^1) \rightarrow L(\dots) \Delta\eta = \Delta\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^1),$$

tel que l'on ait :

$$D_2 \mathcal{H}(\Phi, g^0, \psi) \cdot L(\Phi, g^0, \psi) \Delta\eta = \Delta\psi.$$

*Remarque.* —  $L$  est injective car si on prend  $\Delta\eta = 0$ , alors d'après (55),  $f_1 = 0$ , donc  $\bar{f}_1 = 0$ , et d'après (62),  $\Delta\lambda = 0$ , et dans ce cas l'équation (53) ne possède que la solution triviale  $\Delta\Psi_2 = 0$ , et donc  $\Delta\psi = 0$ .

En conclusion, la proposition 4 permet d'appliquer le théorème de Hamilton à  $\mathcal{H}$  ce qui clot la démonstration du théorème 2.

*Remarque.* — Nous n'avons pas cherché à préciser la taille des voisinages sur lesquels s'appliquent le théorème 2, car ce problème délicat sera détaillé dans le paragraphe suivant.

#### IV. THÉORÈME DE LA COURBE INVARIANTE

Dans ce paragraphe nous précisons le théorème 2, afin de prouver l'existence d'une courbe médiane invariante, qui sera obtenue en annulant le paramètre de rotation  $\lambda_\omega$ . A cette fin, il faudra modifier les hypothèses, notamment la condition diophantienne, ce qui nécessitera de préciser la taille des voisinages en fonction des paramètres.

##### IV.1. Reformulation et modifications

Pour la forme normale, le paramètre  $\lambda_0$  qui ajuste le nombre de rotation à  $\omega$  sur la courbe médiane invariante  $y=0$ , vaut :  $\lambda_0 = \omega - \omega_0 - \mu\omega_1$ . La proposition 3 qui assure l'existence du paramètre  $\lambda_\omega$  qui, par continuité, est dans un voisinage de  $\lambda_0$  de la forme :  $|\lambda_\omega - \lambda_0| \leq \varepsilon(C, \beta)$  où  $C$  et  $\beta$  sont les constantes diophantienne.

Pour que  $\lambda_\omega = 0$  appartienne à un tel voisinage,  $\mu$  étant petit, il faut que  $|\omega - \omega_0|$  soit aussi petit que l'on veut, mais ceci n'est en général pas compatible avec la condition diophantienne (par exemple si  $\omega_0$  est rationnel). Pour ne pas imposer à  $\omega_0$  de satisfaire également une condition diophantienne (nous voulons un résultat générique au sens fort), nous supposons que  $\omega$  vérifie une condition diophantienne dite « avec petite

constante », c'est-à-dire :

$$\exists C > 0, \quad \exists \beta \geq 0 / \forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \quad \left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq C |\delta| / |q|^{2+\beta}, \quad (63)$$

avec  $\delta = (\omega - \omega_0) / \omega_1$ .

D'après [17], [3], l'ensemble des  $\omega$  vérifiant (63) a une densité de mesure qui tend vers 1 lorsque  $\omega$  tend vers  $\omega_0$ .

### (A) Transformation d'échelle

Afin de « contrôler » la taille de la perturbation, nous effectuons le changement de variables suivant :

$$(\theta, x) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \rightarrow (\theta, z = x / \mu^{1/2}) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \quad (\mu > 0). \quad (64)$$

On déduit de (33) que  $D_{\mu\nu}(\theta, z) = (\theta, Z)$ , avec :

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \theta + \omega_0 + \mu \omega_1 + \mu z^2 + g^0(\theta) \\ Z &= -(1+\nu)z + \mu B_{\mu\nu}(z) + \frac{1}{\mu^{1/2}} O((\mu^{1/2}z + \mu^{1/2})^2)^n \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

$B$  est un polynôme dont tous les termes sont de degré impaire :  $2k+1$ ,  $k=1, \dots, n-1$ . Écrivons la perturbation  $P_{\mu\nu}$  sous la forme :

$$P_{\mu\nu}(\theta, z) = \{ \mu^{n+1} \varphi(\theta); \mu^n \xi(\theta, z) \}, \quad (66)$$

les fonctions  $\varphi$  et  $\xi$  sont  $C^\infty$  dans un voisinage de l'origine et sont  $C^k$ -bornées pour tout  $k$ .

### (B). Théorème de la courbe tournée

THÉORÈME 3. — Soit  $\omega$  proche de  $\omega_0$  satisfaisant la condition diophantienne :

$$\exists C > 0, \quad \exists \beta \geq 0 / \forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq C |\delta| / |q|^{2+\beta}, \quad \delta = (\omega - \omega_0) / \omega_1$$

Il existe  $\varepsilon(C, \beta) > 0$  tel que si  $n \geq 9$  et  $|\omega - \omega_0| \leq \varepsilon(C, \beta)$ , alors il existe :  $\lambda_{\omega\mu\nu} \in \mathbf{T}^1$ ,  $\psi_{\omega\mu\nu} \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$ ,  $h_{\omega\mu\nu} \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1)$ , ayant les propriétés suivantes :

(a) La courbe fermée  $\mathcal{C}_{\omega\mu\nu}$  d'équation  $z = \psi_{\omega\mu\nu}(\theta)$  est invariante par  $D_{\omega\mu\nu} = \mathcal{R}_{\lambda_{\omega\mu\nu}} \circ D_{\mu\nu}$ ,  $\mathcal{R}_\lambda(\theta, z) = (\theta + \lambda, z)$ .

(b) La restriction de  $D_{\omega\mu\nu}$  à  $\mathcal{C}_{\omega\mu\nu}$  est conjuguée par  $h_{\omega\mu\nu}$  à la rotation  $R_\omega: \theta \in \mathbf{T}^1 \rightarrow \theta + \omega \in \mathbf{T}^1$ , (a) et (b) se traduisent par :

$$\left. \begin{aligned} F(g^0, \psi, \lambda)(\theta) &= \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + \lambda + \mu\psi^2(\theta) + g^0(\theta) = h^{-1} \circ R_\omega \circ h(\theta) \\ \mathcal{H}(\Phi, g^0, \psi)(\theta) &= \psi \circ F(\theta) + (1 + \nu)\psi(\theta) - \Phi(\theta, \psi(\theta)) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

avec  $g^0 = \mu^{n+1}\varphi$  et  $\Phi = \mu B + \mu^n \xi$ .

(c) Il existe un entier  $L$  et, pour tout entier  $m$ , une constante positive  $C_m$ , indépendante de  $\omega, \mu, \nu$  tel que :

$$\left. \begin{aligned} \|\psi\|_m &\leq C_m \mu^{n-3} \{ \|\xi\|_{m+L} + \|\Phi\|_{m+L} \} \\ |\lambda - \lambda_0| + \|h - \text{id}\|_m &\leq C_m \mu^{n-4} \{ \|\xi\|_{m+L} + \|\Phi\|_{m+L} \} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

(d) Pour  $\omega$  fixé, l'application :

$$(\mu, \nu) \in (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\lambda_{\omega\mu\nu}, h_{\omega\mu\nu}, \psi_{\omega\mu\nu}) \in \mathbf{T}^1 \times \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{T}^1) \times C^\infty(\mathbf{T}^1)$$

est de classe  $C^\infty$  sur son domaine de définition, et vérifie, si  $n \geq 13$  :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right\|_m &\leq C_m \left\{ \mu^{n-12} (\|\xi\|_{m+s} + \|\Phi\|_{m+s}) \right. \\ &\quad \left. + \mu^{n-6} \left( \left\| \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right\|_{m+s} + \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \right\|_{m+s} \right) \right\} \\ \left| \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} - \frac{\partial \lambda_0}{\partial \mu} \right| + \left\| \frac{\partial h}{\partial \mu} \right\|_m &\leq C_m \left\{ \mu^{n-13} (\|\xi\|_{m+s} + \|\Phi\|_{m+s}) \right. \\ &\quad \left. + \mu^{n-7} \left( \left\| \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right\|_{m+s} + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right\|_{m+s} \right) \right\} \end{aligned} \quad (69)$$

COROLLAIRE. — Sous les hypothèses précédentes, avec  $n \geq 13$ , et  $|\omega - \omega_0| \leq C\mu^5$ . Il existe une fonction de classe  $C^\infty: \mathcal{L}_\omega: V_0 \rightarrow W_0$ , où  $V_0$  et  $W_0$  sont des voisinages respectivement de 0 et  $\mu_\omega = \delta$  dans le plan des paramètres dont le graphe connecte les régions  $H^+$  et  $H^-$  définies par le théorème 1. Pour tout  $(\mu, \nu)$  appartenant au graphe de  $\mathcal{L}_\omega$ , la famille à un paramètre  $D_{\mathcal{L}_\omega(\nu)}$ ,  $\nu$  possède une courbe fermée invariante, de classe  $C^\infty$ , sur laquelle il induit un difféomorphisme conjugué à la rotation  $R_\omega$ .

Ce corollaire est illustré par la figure 7 plus loin.

Rappelons que pour la forme normale, définie par  $g^0 = 0, \xi = 0$ , nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} F(0, 0, \lambda_0) &= R_\omega \\ \mathcal{H}(\mu B, 0, 0) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Dans la démonstration qui suit, nous allons considérer l'application :

$$\mathcal{G} : \left. \begin{aligned} E = C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^1) \times [C^\infty(\mathbb{T}^1)]^2 &\rightarrow E \\ (\Phi, g^0, \Psi) &\rightarrow [\Phi, g^0, \mathcal{H}(\Phi, g^0, \Psi)] \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Nous montrons que  $\mathcal{G}$  est un bon difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0 = (\mu B, 0, 0) \in E$  sur un voisinage de  $x_0$ , d'une taille suffisante pour contenir  $y = (\mu B + \mu^n \xi, \mu^{n+1} \varphi, 0)$ . La topologie sur  $E$  est la topologie produit, définie par les familles des normes :  $\|\dots\|_m$ .

#### IV. 2. Estimation de $D\mathcal{G}$ , $D^2\mathcal{G}$ , $(D\mathcal{G})^{-1}$

Commençons par exprimer  $D\mathcal{G}$  et  $D^2\mathcal{G}$ , nous suivrons ensuite la dépendance des estimations par rapport aux paramètres.

$$D\mathcal{G}(\Phi, g^0, \Psi)[\Delta\Phi, \Delta g^0, \Delta\Psi]$$

$$= [\Delta\Phi, \Delta g^0, D\mathcal{H}(\Phi, g^0, \Psi)(\Delta\Phi, \Delta g^0, \Delta\Psi)]$$

où

$$\left. \begin{aligned} D\mathcal{H}(\dots)(\dots) &= -\Delta\Phi + \Delta\Psi \circ F + \eta \cdot \Delta\Psi + \gamma \Delta\lambda + \gamma \Delta g^0 \\ \eta &= (1 + \nu) + (D\Psi \circ F) 2\mu\Psi - \frac{\partial\Phi}{\partial x}(\text{id}, \Psi) \\ \gamma &= D\Psi \circ F. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

D'après (60)  $\Delta\lambda$  est une fonctionnelle linéaire en  $\Delta\Psi$ , dont on peut estimer la taille en fonction de  $\Delta\Psi$ .

$$D^2\mathcal{G}(\Phi, g^0, \Psi)[(\Delta\Phi, \Delta g^0, \Delta\Psi), (\Delta\Phi', \Delta g^{0'}, \Delta\Psi')]$$

$$= [0, 0, D^2\mathcal{H}(\dots)]$$

où

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad D^2\mathcal{H}(\dots) &= \left[ -\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\Phi)\Delta\Psi' - \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\Phi')\Delta\Psi \right] \\ (b) \quad &- \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \cdot \Delta\Psi \cdot \Delta\Psi' \\ (c) \quad &+ [(D\Delta\Psi) \circ F] \Delta F' + [(D\Delta\Psi') \circ F] \Delta F \\ (d) \quad &+ [(D^2\Psi \circ F) \Delta F'] \Delta F + [(D^2\Psi \circ F) \Delta F] \Delta F' \\ (e) \quad &+ (D\Psi \circ F) D(\Delta F') \Delta\Psi + (D\Psi \circ F) D(\Delta F) \Delta\Psi' \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Dans ces expressions, nous avons posé :  $\Delta F = \Delta\lambda + \Delta g^0 + 2\mu\Psi \Delta\Psi$ .

(A) Estimation de  $D\mathcal{G}$  et  $D^2\mathcal{G}$

Dans ce qui va suivre, nous noterons toutes les constantes positives par la même lettre  $C$  (il suffira de prendre la plus grande en fin de calcul), la notation  $C_m$  indiquera que la constante dépend de  $m$ , mais pas des paramètres  $\mu, \nu, \delta$ .

Nous détaillons l'estimation de  $D\mathcal{G}$ , procédons de la même façon pour les autres.

Commençons par majorer  $\eta, \gamma$  et  $\Delta\lambda$ , en utilisant les inégalités de convexité (45) :

$$\|\eta\|_m \leq C_m \{ 1 + \|\Phi\|_{m+1} + \|\Psi\|_{m+1} \},$$

en supposant  $\|\Psi\|_1 \leq 1$ , cette dernière hypothèse suffit car  $\|\Phi\|_1 \leq 1$  est satisfaite puisque  $\mu$  est petit.

De la même façon, nous obtenons :  $\|\gamma\|_m \leq C_m \|\Psi\|_{m+1}$ .

D'après (60) estimons maintenant  $\Delta\lambda$  :

$|\Delta\lambda| \leq C \|\Psi\|_0 \|\Delta\Psi\|_0$ , nous obtenons finalement l'estimation :

$$\left. \begin{aligned} &\|D\mathcal{G}(\Phi, g^0, \Psi)(\Delta\Phi, \Delta g^0, \Delta\Psi)\|_m \\ &\leq C_m \{ 1 + \|\Psi\|_{m+1} + \|\Delta\Phi\|_m + \|\Delta g^0\|_m + \|\Delta\Psi\|_m \} \end{aligned} \right\} (73)$$

en supposant :  $\|\Psi\|_1, \|\Delta\Psi\|_1, \|\Delta\Phi\|_1, \|\Delta g^0\|_1 \leq 1$ .

De la même façon, en estimant séparément chacune des expressions (72) (a), . . . , (e), avec les inégalités de convexité, nous obtenons l'estimation de  $D^2\mathcal{G}$  :

$$\left. \begin{aligned} &\|D^2\mathcal{G}(\Phi, g^0, \Psi)[(\Delta\Phi, \Delta g^0, \Delta\Psi), (\Delta\Phi', \Delta g^{0'}, \Delta\Psi')]\|_m \\ &\leq C_m \{ \|\Phi\|_{m+2} + \|\Psi\|_{m+2} + \|\Delta\Phi\|_{m+1} + \|\Delta\Phi'\|_{m+1} + \|\Delta\Psi\|_{m+1} \\ &\quad + \|\Delta\Psi'\|_{m+1} + \|\Delta g^0\|_{m+1} + \|\Delta g^{0'}\|_{m+1} + 1 \} \end{aligned} \right\} (74)$$

en supposant:  $\|\Psi\|_2, \|\Delta\Psi\|_2, \|\Delta\Psi'\|_2, \|\Delta\Phi\|_2, \|\Delta\Phi'\|_2, \|\Delta g_0\|_2,$

$\|\Delta g^{0'}\|$  majorés par 1.

(B) Estimation de  $(D\mathcal{G})^{-1}$

Soit  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  donnés dans  $C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^1) \times [C^\infty(\mathbf{T}^1)]^2$ , le problème consiste à résoudre l'équation suivante, et à majorer sa solution :

$$D\mathcal{G}(\Phi, g^0, \Psi)(\Delta\Phi, \Delta g^0, \Delta\Psi) = [\Delta\Phi, \Delta g^0, D\mathcal{H}(\dots)] = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3),$$

la seule difficulté consiste à résoudre :

$$D\mathcal{H}(\Phi, g^0, \Psi)(\Delta_1, \Delta_2, \Delta\Psi) = \Delta_3,$$

cette équation est précisément celle étudiée au paragraphe III, en posant  $\Delta\eta = \Delta_3 + \Delta_1 - \gamma\Delta_2$  (71), (51). D'après le lemme 6,  $(D\mathcal{H})^{-1}$  est une bonne application de classe  $C^0$ ,  $(D\mathcal{G})^{-1}$  vérifie donc une estimation de la forme :

$$\begin{aligned} & \|(D\mathcal{G})^{-1}(\Phi, g^0, \Psi)(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)\|_m \\ & \leq K_m(\delta) \{ 1 + \|\Phi\|_{m+r} + \|g^0\|_{m+r} + \|\Psi\|_{m+r} \\ & \quad + \|\Delta_1\|_{m+r} + \|\Delta_2\|_{m+r} + \|\Delta_3\|_{m+r} \} \end{aligned}$$

où  $r$  est un entier supérieur à 3.

Mais c'est précisément à ce point qu'interviennent les difficultés liées à la nouvelle condition diophantienne (63). En effet, la présence du paramètre  $\delta$ , introduit un facteur  $1/\delta$  dans l'estimation des solutions de chaque équation aux différences considérées au § III (voir [9] par ex). Or il a fallu résoudre successivement trois telles équations pour démontrer le lemme 6. Nous aurons donc un facteur  $1/\delta^3$  dans l'estimation de  $(D\mathcal{G})^{-1}$ , c'est-à-dire :

$$\|(D\mathcal{G})^{-1}(\Phi, g^0, \Psi)(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)\|_m \leq \frac{C_m}{\delta^3} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \|\Phi\|_{m+r} \\ & + \|\Psi\|_{m+r} + \|g^0\|_{m+r} + \|\Delta_1\|_{m+r} + \|\Delta_2\|_{m+r} + \|\Delta_3\|_{m+r} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

en supposant :  $\|\Phi\|_r, \|g^0\|_r, \|\Psi\|_r, \|\Delta_i\|_r \leq 1, i=1, 2, 3, r$  est la perte de différentiabilité ( $r \geq 3$ ).

Précisons les notations de (70), notons  $x$  un élément de  $E, x = (\Phi, g^0, \Psi)$  et  $y$  son image par  $\mathcal{G}$ , les normes de la topologie produit sont :

$$\|x\|_m = \|\Phi\|_m + \|g^0\|_m + \|\Psi\|_m. \quad (76)$$

Nous pouvons rendre les estimations (73), (74), (75) plus pratiques en appliquant des lemmes d'homogénéisation de Hamilton (voir [8], lemmes 2.17, 2.18) :

$$\begin{aligned} & \|D\mathcal{G}(x).u\|_m \leq C_m \{ \|x\|_m \|u\|_1 + \|u\|_m \} \\ & \|D^2\mathcal{G}(x)(u, v)\|_m \\ & \leq C_m \{ \|x\|_{m+2} \|u\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_{m+1} \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_{m+1} \} \\ & \|(D\mathcal{G}(x))^{-1}w\|_m \leq \frac{C_m}{\delta^3} \{ \|x\|_{m+r} \|w\|_r + \|w\|_{m+r} \} \end{aligned} \quad (77)$$

en supposant  $\|x\|_r \leq 1$ , cette condition est suffisante car  $r \geq 3$ . A ce point de la démonstration, du fait de la dépendance en  $\delta$  de l'estimation (77) [rappelons que  $\delta = 0(\mu)$ ], le théorème de Hamilton permet seulement d'af-

firmer que  $\mathcal{G}$  est un bon difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $y_0$  dont la taille est exponentiellement petite en  $\delta$ . Ce qui ne nous permet pas de conclure que  $y = (\mu B + \mu^n \xi, \mu^{n+1} \varphi, 0)$  appartient à ce voisinage. Remarquons que cette difficulté n'était pas présente dans la partie III, car la condition diophantienne ne dépendait pas de paramètres.

Heureusement, une astuce due à M. Herman et utilisée par A. Chenciner dans [3], va nous sortir de ce mauvais pas.

### IV. 3. Méthode de M. Herman

L'idée de la méthode est de transformer le voisinage précédent, exponentiellement petit en  $\delta$ , en un voisinage dont la taille est d'ordre  $\delta^k$  sur lequel nous concluons, si  $n$  est suffisamment grand. Pour cela, nous appliquons le théorème de Hamilton, non plus à  $\mathcal{G}$ , mais à une application dont nous supprimons la dépendance en  $\delta$  des estimations.

Considérons  $\mathcal{F} : (E, 0) \rightarrow (E, 0)$ , définie par :

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\delta^p} (D\mathcal{G}(x_0))^{-1} [\mathcal{G}(x_0 + \delta^p x) - \mathcal{G}(x_0)] \tag{78}$$

$p$  étant un entier que l'on déterminera.

LEMME 7. — Soit  $\mathcal{F}$  définie par (78) et  $\mathcal{G}$  satisfaisant les estimations (77),  $\mathcal{F}$  satisfait alors les estimations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \|D\mathcal{F}(x)u\|_m &\leq C_m \delta^{p-3} \{ \|x\|_{m+r+2} \cdot \|u\|_2 + \|u\|_{m+r+1} \} \\ \|D^2\mathcal{F}(x)(u, v)\|_m &\leq C_m \delta^{p-6} \{ \|x\|_{m+r+2} \cdot \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &\quad + \|u\|_{m+r+1} \|v\|_2 + \|v\|_{m+r+1} \|u\|_2 \} \\ \|(D\mathcal{F}(x))^{-1}w\|_m &\leq C_m \delta^{p-6} \{ \|x\|_{m+2r+1} \cdot \|w\|_{2r+1} + \|w\|_{m+2r+1} \} \end{aligned} \right\} \tag{79}$$

Pour  $\|x\|_{2r} \leq 1$ , les constantes  $C_m$  sont indépendantes de  $(\mu, v)$ .

Il suffit alors de choisir  $p \geq 6$  pour obtenir des estimations uniformes. Dans ce cas, en appliquant le théorème de Hamilton nous déduisons que  $\mathcal{F}$  est un bon difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 de la forme :  $\|z\|_L \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  est indépendant des paramètres). En traduisant

ce résultat en fonction de l'application  $\mathcal{G}$ , nous obtenons :

LEMME 8. —  $\mathcal{G}$  est un bon difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $x_0$  de la forme :

$$\|y - x_0\|_{\mathbb{L}} \leq \varepsilon' \delta^{p+3}, \quad p \geq 6. \quad (80)$$

Donc  $y = (\mu B + \mu^n \xi, \mu^{n+1} \varphi, 0)$  appartient à ce voisinage si  $n \geq 9$ .

Démonstration du lemme 7. — En utilisant la définition réécrivons  $\mathcal{F}$  en appliquant la formule de Taylor ce qui est licite dans un espace de Fréchet (voir [8]), dans un voisinage de  $x=0$  :

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(0) + D\mathcal{F}(0)x + \int_0^1 (1-t) D^2\mathcal{F}(tx)(x, x) dt$$

or, par construction :  $\mathcal{F}(0) = 0$  et  $D\mathcal{F}(0) = \text{id}_{\mathbb{E}}$ , nous pouvons donc écrire :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= x + \delta^p D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \int_0^1 (1-t) D^2\mathcal{G}(x_0 + t\delta^p x)(x, x) dt \\ D\mathcal{F}(x)u &= u + \delta^p D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \int_0^1 (1-t) D^2\mathcal{G}(x_0 + t\delta^p x)(u, x) dt \\ D^2\mathcal{F}(x)(u, v) &= \delta^p D\mathcal{G}(x_0)^{-1} D^2\mathcal{G}(x_0 + \delta^p x)(u, v) \\ (D\mathcal{F}(x))^{-1}w &= w + \delta^p \int_0^1 D[D\mathcal{G}(x_0 + t\delta^p x)^{-1} D\mathcal{G}(x_0)w]x dt \end{aligned} \right\} (81)$$

Les trois premières relations découlent directement de la formule de Taylor, montrons la dernière :

$$D\mathcal{F}(x)u = D\mathcal{G}(x_0)^{-1} D\mathcal{G}(x_0 + \delta^p x)u,$$

en inversant nous obtenons :

$$(D\mathcal{F}(x))^{-1}w = D\mathcal{G}(x_0 + \delta^p x)^{-1} D\mathcal{G}(x_0)w,$$

et en appliquant la formule de Taylor à cette relation, nous obtenons bien la dernière expression de (81). Explicitons le terme sous le signe intégral :

$$\begin{aligned} D[D\mathcal{G}(x_0 + t\delta^p x)^{-1} D\mathcal{G}(x_0)w]x \\ = -D\mathcal{G}(x_0 + t\delta^p x)^{-1} D^2\mathcal{G}(x_0 + t\delta^p x) \\ \times (D\mathcal{G}(x_0 + t\delta^p x)^{-1} D\mathcal{G}(x_0)w, x). \end{aligned}$$

En appliquant à (81) les estimations (77) et en utilisant les inégalités de convexité (45), nous obtenons bien les estimations (79) du lemme 7.

Pour démontrer le lemme 8, il suffit de relier les différents paramètres entre eux. Afin d'obtenir  $\lambda_\omega = 0$ , c'est-à-dire une courbe invariante,  $\lambda_0$  doit être proche de 0, or  $\lambda_0 = \omega - \omega_0 - \mu \omega_1$ , pour  $\lambda_0 = 0$ , nous avons  $\delta = \mu$ , il suffit alors de poser :

$$\delta = \mu + O(\mu^k), \tag{82}$$

avec  $k$  un entier suffisamment grand que nous déterminerons. Nous avons donc  $\delta = O(\mu)$  et l'estimation (80) est équivalente à :  $\|y - y_0\|_L \leq \varepsilon'' \mu^{p+3}$ , ce qui permet la conclusion du lemme 8.

Comme conséquence directe du théorème de Hamilton, pour  $\omega$  fixé, toutes les grandeurs  $\lambda, \Psi, h$  ont une dépendance  $C^\infty$  par rapport aux paramètres.

Nous avons ainsi démontré la partie existence du théorème 3, il nous reste à étudier les estimations lipschitziennes. Ces estimations, dont découlera le *théorème de la courbe invariante* (corollaire), nous permettront d'affirmer l'existence d'un  $\Psi$  tel que  $\lambda_\omega(\Psi) = 0$ , avec  $\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \neq 0$ , sur son domaine de définition. Ceci nous permettra alors, par le théorème usuel des fonctions implicites, de trouver une courbe du plan des paramètres suivant laquelle une courbe invariante existe, c'est-à-dire :  $\lambda_\omega(\mu, \nu) = 0$ .

#### IV. 4. Estimations lipschitziennes

Pour réaliser le programme décrit plus haut, puisque  $\lambda$  est une fonction de  $\Psi$ , il nous faut avant tout estimer la taille de  $\Psi$  par rapport à la perturbation.

##### (A) Estimations lipschitziennes sur $\Psi$

Nous venons de montrer que l'application  $\mathcal{G}^{-1}$  existe sur un voisinage de  $y_0$  contenant  $(\mu B + \mu^n \xi, \mu^{n+1} \varphi, 0)$ , en restreignant  $\mathcal{G}^{-1}$  à ces valeurs, nous définissons une bonne application  $C^\infty$  :

$$(g_0, \Phi) \in C^\infty(\mathbb{T}^1) \times C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^1) \rightarrow \Psi \in C^\infty(\mathbb{T}^1), \tag{83}$$

qui vérifie :

$$\mathcal{H}(\Phi, g_0, \Psi(\Phi, g_0)) = 0, \quad \Phi = \mu B + \mu^n \xi, \quad g_0 = \mu^{n+1} \varphi.$$

Pour la forme normale ( $\xi = 0, g_0 = 0$ ), nous avons :  $\Psi(\mu B, 0) = 0$ . D'après le théorème de Hamilton,  $\mathcal{F}$  ainsi que  $\mathcal{F}^{-1}$  et ses dérivées satisfont des

estimations lipschitziennes indépendantes des paramètres (voir [8], III. 1. 32). Soient  $z$  et  $\bar{z}$  appartenant au domaine de définition de  $\mathcal{F}$  :

$$\|\mathcal{F}^{-1}(z) - \mathcal{F}^{-1}(\bar{z})\|_m \leq C_m \{ \|z - \bar{z}\|_{m+s} + \|z\|_{m+s} \|z - \bar{z}\|_1 \} \quad (84)$$

pour  $\|z\|_L \leq \varepsilon$ ,  $\|\bar{z}\|_L \leq \varepsilon$  [voir (80)],  $s$  est un entier.

D'après la définition (78) de  $\mathcal{F}$ , nous avons :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(x) = z = D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \frac{1}{\delta^p} [\mathcal{G}(x_0 + \delta^p x) - \mathcal{G}(x_0)], \\ y_0 = \mathcal{G}(x_0), \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

d'où

$$x = \mathcal{F}^{-1}(z) = \frac{1}{\delta^p} [\mathcal{G}^{-1}(y_0 + \delta^p D\mathcal{G}(x_0)z) - x_0],$$

et l'estimation (84) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^p} \|\mathcal{G}^{-1}(y_0 + \delta^p D\mathcal{G}(x_0)\bar{z}) - \mathcal{G}^{-1}(y_0 + \delta^p D\mathcal{G}(x_0)z)\|_m \\ \leq C_m \{ \|z - \bar{z}\|_{m+s} + \|z\|_{m+s} \|z - \bar{z}\|_1 \}. \end{aligned} \quad (86)$$

Choisissons  $z$  et  $\bar{z}$  pour que  $\Psi$  apparaisse explicitement :

$$\left. \begin{aligned} z = 0 \\ \bar{z} = D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \left( \frac{\mu^n}{\delta^p} \xi, \frac{\mu^{n+1}}{\delta^p} \varphi, 0 \right) \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

et cherchons une majoration de  $\|\bar{z}\|_{m+s}$ , d'après (77), (87) :

$$\begin{aligned} \|z - \bar{z}\|_{m+s} = \|\bar{z}\|_{m+s} \leq C_{m+s} \delta^{-p-3} \mu^n \\ \times \{ \|x_0\|_{m+s+r} (\|\xi\|_1 + \mu \|\varphi\|_1) + (\|\xi\|_{m+s+r} + \mu \|\varphi\|_{m+s+r}) \} \end{aligned}$$

et, après un changement de constante nous obtenons :

$$\|\bar{z}\|_{m+s} \leq C_m \delta^{-p-3} \mu^n \{ \|\xi\|_{m+s+r} + \|\varphi\|_{m+s+r} \}. \quad (88)$$

En utilisant (85), (87), (88) nous pouvons expliciter (86) qui, en tenant compte de (82), donne exactement la première estimation (68) du théorème 3 :

$$\|\Psi\|_m \leq C_m \mu^{n-3} \{ \|\xi\|_{m+s+r} + \|\varphi\|_{m+s+r} \} \quad (89)$$

Passons à l'étape suivante, c'est-à-dire majorons  $\lambda$  en fonction de  $\Psi$ .

(B) *Estimations lipschitziennes sur  $\lambda$*

Pour cette majoration, rappelons que  $\lambda(g_0, \Psi)$  est définie comme solution de l'équation de conjugaison (67), que nous pouvons écrire sous la forme d'un opérateur fonctionnel :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(g_0, \Psi, h, \lambda)(\theta) = & \theta + \omega_0 + \lambda + \mu\omega_1 \\ & + \mu \Psi^2(\theta) + g_0(\theta) - h^{-1} \circ R_\omega \circ h(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (90)$$

Nous avons déjà vu (lemme 5) comment appliquer le théorème de Hamilton à cet opérateur. Mais à nouveau se présente le problème de la constante diophantienne. En effet, pour inverser la différentielle de cet opérateur, il faut résoudre une équation aux différences. Pour les mêmes raisons que précédemment, nous avons un facteur  $1/\delta$  dans les estimations de  $\|(\mathcal{D}\mathcal{S})^{-1}\|$ . En appliquant à  $\mathcal{S}$  la même méthode qu'à  $\mathcal{G}$ , nous obtenons l'estimation :

$$|\lambda - \lambda_0| + \|h - \text{id}\|_m \leq C_m \delta^{-1} \{ \|g_0\|_{m+j} + \|\Psi\|_{m+j} \}, \quad (91)$$

or  $g_0 = \mu^{n+1} \varphi$ , et en utilisant (89) nous obtenons la deuxième des estimations (68) du théorème 3 :

$$|\lambda - \lambda_0| + \|h - \text{id}\|_m \leq C_m \mu^{n-4} \{ \|\varphi\|_{m+s} + \|\xi\|_{m+s} \} \quad (92)$$

or  $\varphi$  et  $\xi$  sont uniformément bornés au voisinage de l'origine et, puisque  $n \geq 9$ , nous obtenons :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq C \mu^5, \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \omega_1(\delta - \mu), \quad \delta = \mu + O(\mu^k), \quad (93)$$

donc  $\lambda_\omega = 0$  appartient au voisinage (93) si nous choisissons  $k > 5$ .

Nous avons donc montré à ce point que, pour  $\omega$  suffisamment proche de  $\omega_0$ , il existe une courbe invariante  $C^\infty$  pour  $D_{\mu\nu}$ .

Mais nous voulons comparer plus finement la famille perturbée avec la famille des formes normales.

Pour cette dernière, il existe, dans le plan des paramètres, un ensemble de Cantor de droites  $\mu_\omega = \text{Cte}$  pour lesquelles :  $N_{\mu_\omega, \nu}$  restreinte à sa courbe médiane invariante ( $y=0$ ) est une rotation  $R_\omega$ ,  $\omega$  satisfaisant (63).

Montrons qu'à ces droites correspond des courbes  $C^\infty$  :  $\mu = \mathcal{L}_\omega(\nu)$ , paramétrées par le nombre de rotation  $\omega$ , tel que  $D_{\mathcal{L}_\omega(\nu), \nu}$  restreint à sa courbe médiane invariante soit conjuguée à la rotation  $R_\omega$ . Pour cela, il suffit de montrer que l'équation  $\lambda_\omega(\mu, \nu) = 0$  définit implicitement une telle courbe,

montrons donc que  $\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \neq 0$  sur son domaine de définition.

#### IV. 5. Courbe $\lambda_\omega(\mu, \nu) = 0$

Nous utilisons la même méthode que précédemment, c'est-à-dire que nous allons majorer  $\left| \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} - \frac{\partial \lambda_0}{\partial \mu} \right|$  en utilisant les estimations lipschitziennes du théorème de Hamilton pour les applications  $D\mathcal{F}$  et  $D\mathcal{S}$ . Commençons par majorer  $\left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right\|$  puisque  $\lambda$  est une fonction de  $\Psi$ .

(A) Estimation de  $\left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right\|$

Appliquons les estimations du type (84) à  $D\mathcal{F}$  :

$$\begin{aligned} \|D\mathcal{F}^{-1}(z) \cdot u - D\mathcal{F}^{-1}(\bar{z}) \cdot \bar{u}\|_m \leq C_m \{ \|z - \bar{z}\|_{m+s_1} + \|u - \bar{u}\|_{m+s_1} \\ + (\|z\|_{m+s_1} + \|u\|_{m+s_1}) (\|z - \bar{z}\|_{r_1} + \|u - \bar{u}\|_{r_1}) \}, \end{aligned} \quad (94)$$

choisissons  $z$  et  $\bar{z}$  comme en (87), et posons :

$$\left. \begin{aligned} u &= D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \mu}(\mu B), 0, 0 \right) \\ \bar{u} &= D\mathcal{G}(x_0)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \mu}(\mu B + \mu^n \xi), \frac{\partial}{\partial \mu}(\mu^{n+1} \varphi), 0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

En utilisant l'expression (85) de  $\mathcal{F}^{-1}$ , nous écrivons  $D\mathcal{F}^{-1}$  :

$$D\mathcal{F}^{-1}(z) \cdot u = D\mathcal{G}^{-1}(y_0 + \delta^p D\mathcal{G}(x_0)z) \cdot D\mathcal{G}(x_0) \cdot u, \quad (96)$$

réécrivons alors l'expression (95), en utilisant (77), (88), (95), ce qui démontre la première estimation (69) du théorème 3 :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right\|_m \leq C_m \left\{ \mu^{n-12} (\|\xi\|_{m+s+r} + \|\varphi\|_{m+s+r}) \right. \\ \left. + \mu^{n-6} \left( \left\| \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right\|_{m+s+r} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\|_{m+s+r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (97)$$

Nous avons utilisé pour démontrer cette relation  $p=6$ , et le fait que  $\frac{\partial B}{\partial \mu}$

et  $\frac{\partial \xi}{\partial \mu}$  sont uniformément bornés dans un voisinage de l'origine.

(B) Estimation de  $\left| \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} - \frac{\partial \lambda_0}{\partial \mu} \right|$

Nous allons utiliser exactement la même méthode sur l'opérateur  $\mathcal{S}$  que pour  $\mathcal{H}$ , soyons un peu plus précis, et donnons les correspondances.  $\mathcal{S}$  défini par (90) correspond à  $\mathcal{H}$  (67), à l'opérateur  $\mathcal{G}$  (70) on associe :

$$\mathcal{M}(g_0, \psi, h, \lambda) = (g_0, \psi, \mathcal{S}(g_0, \Psi, h, \lambda)), \tag{98}$$

et aux estimations (77) correspondent le même type de majorations, mais où le facteur  $\delta^{-3}$  est remplacé par  $\delta^{-1}$ .

De même on fait correspondre à  $\mathcal{F}$ , l'opérateur :

$$\mathcal{X}(X) = \delta^{-q} D \mathcal{M}(X_0)^{-1} [\mathcal{M}(X_0 + \delta^q X) - \mathcal{M}(X_0)], \tag{99}$$

pour  $\mathcal{F}$  nous avons  $p \geq 6$ , et ici  $q$  doit satisfaire  $q \geq 2$ . Nous avons posé ci-dessus :

$$X_0 = (0, 0, \text{id}, \lambda_0) \quad \text{et} \quad X \in [C^\infty(\mathbf{T}^1)]^2 \times \text{Diff}_\mp^q(\mathbf{T}^1) \times \mathbf{T}^1 \tag{100}$$

est dans un voisinage de l'origine.

Appliquons donc à  $\mathcal{X}$  les mêmes estimations uniformes que pour (94), avec la différence par rapport à (95) que nous choisissons ici  $u=0$ , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} & \left\| \left( \frac{\partial g_0}{\partial \mu}, \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \frac{\partial h}{\partial \mu}, \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right) - \left( 0, 0, 0, \frac{\partial \lambda_0}{\partial \mu} \right) \right\|_m \\ & \leq C_m \left\{ \delta^{-q-1} (\|\Psi\|_{m+r} + \|g_0\|_{m+r}) + \delta^{-1} \left( \left\| \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right\|_{m+r} + \left\| \frac{\partial g_0}{\partial \mu} \right\|_{m+r} \right) \right\} \end{aligned} \tag{101}$$

En fixant  $q=2$ , et en utilisant (97) et (89), nous obtenons la deuxième estimation (69) du théorème 3 :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} - \frac{\partial \lambda_0}{\partial \mu} \right| + \left\| \frac{\partial h}{\partial \mu} \right\|_m & \leq C_m \left\{ \mu^{n-13} (\|\xi\|_{m+k} + \|\Phi\|_{m+k}) \right. \\ & \left. + \mu^{n-7} \left( \left\| \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right\|_{m+k} + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right\|_{m+k} \right) \right\} \end{aligned} \tag{102}$$

Si nous fixons  $n \geq 14$ , nous obtenons une majoration uniforme :

$$\left| \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} - \frac{\partial \lambda_0}{\partial \mu} \right| \leq C \mu, \quad \text{or} \quad \lambda_0 = \omega_1 (\delta - \mu), \tag{103}$$

donc pour  $\omega$  fixé :  $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \mu} = -\omega_1$ , qui est une constante non nulle (c'est la condition du type « twist monotone » provenant de la forme normale sur

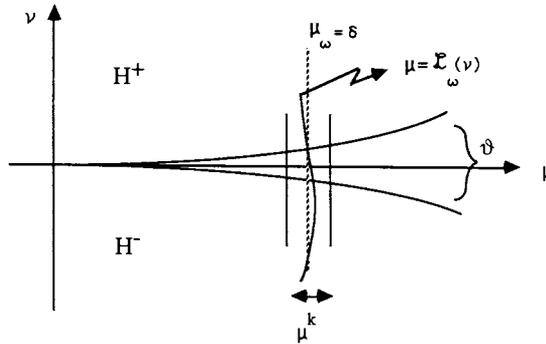


FIG. 7.

$\mathbf{R}^3$ ), donc pour  $\mu$  suffisamment petit (ou  $\omega$  suffisamment proche de  $\omega_0$ ), nous avons  $\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \neq 0$ , nous pouvons alors appliquer le théorème usuel des fonctions implicites, ce qui démontre le corollaire du théorème 3 (voir la *fig. 7* pour une illustration).

Nous remarquons que le chemin, défini par l'équation  $\lambda_\omega(\mu, \nu) = 0$ , grâce à la condition (103), est le graphe d'une fonction :  $\mathcal{L}_\omega : (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, \delta)$ , dont l'image est d'ordre  $\mu$ . Or la distance entre les domaines d'hyperbolicité normal  $H^+$  et  $H^-$  [voir (31)] ou la figure 5) est d'ordre (non optimal)  $\mu^{(n+1)/3}$ , donc pour  $n \geq 14$  on peut conclure que le graphe de  $\mathcal{L}_\omega$  connecte  $H^+$  et  $H^-$ , ce qui termine la démonstration du corollaire du théorème 3.

## V. DOMAINES DE PERSISTANCE ET LEURS COMPLÉMENTAIRES . . . LES BULLES

A ce stade de l'étude, nous avons montré l'existence, dans le voisinage  $\mathcal{V}$  (*fig. 7*), d'un ensemble de Cantor de chemins différentiables :

$$\mathcal{J}_\omega = \{(\mu, \nu) / \mu = \mathcal{L}_\omega(\nu)\}, \quad (104)$$

paramétrées par le nombre de rotation  $\omega$ , satisfaisant l'hypothèse du théorème 3, telles que la famille à un paramètre  $D_{\mathcal{J}_\omega}$  possède une courbe médiane invariante de classe  $C^\infty$ .

Dans ce paragraphe, nous montrons que cette propriété de persistance peut être étendue à un domaine « assez gros » autour de ces courbes.

Dans chacun de ces domaines, la famille  $D_{\mu\nu}$  possède une courbe médiane invariante, qui ne sera que de classe  $C^k$ , où  $k$  est fini et d'autant plus grand que  $(\mu, \nu)$  sera proche de  $\mathcal{J}_\omega$ . Ceci nous permettra de montrer ensuite la ressemblance de la famille  $D_{\mu\nu}$  avec une famille de formes normales.

La région qui échappe à cette étude est le complémentaire, dans  $\mathcal{V}$ , de l'union de ces domaines. Cette région est composée d'une infinité de « bulles » disjointes, analogues à celles décrites par A. Chenciner dans [3]. Pour les valeurs des paramètres appartenant à l'une de ces bulles, la dynamique peut être extrêmement complexe, et peut par exemple présenter des orbites homoclines, ou des ensembles invariants d'Aubry-Mather ([4], [5]).

### V. 1. Changement de variables et de paramètres

Nous allons centrer l'étude sur la courbe tournée définie par le théorème 3, pour une valeur fixée de  $\omega$ . Pour  $\lambda_\omega = 0$  ( $\mathcal{J}_\omega$ ), l'origine des nouvelles coordonnées sera la courbe invariante :  $z = \Psi_\omega(\theta)$ . Dans la suite, nous supprimerons les indices pour alléger les notations.

Considérons le changement de variables :

$$V_1 : (\theta, z) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \rightarrow (\theta, t = z - \Psi(\theta - \lambda)) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R},$$

l'expression (65), (66) de la famille  $D_{\mu\nu}$  se transforme alors en :

$$D_{\mu\nu}(\theta, t) = (\Theta, T)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \theta + \omega_0 + \mu\omega_1 + \mu\Psi^2(\theta - \lambda) + 2\mu t\Psi(\theta - \lambda) + \mu t^2 + g_0(\theta) \\ T &= -(1 + \nu)[\Psi(\theta - \lambda) + t] + \mu B(t + \Psi(\theta - \lambda)) \\ &\quad + \mu^n \xi(\theta, t + \Psi(\theta - \lambda)) - \Psi(\Theta - \lambda) \end{aligned} \right\} (105)$$

en utilisant les notations du théorème 3, cette expression devient :

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= F(\theta - \lambda) + 2\mu t\Psi(\theta - \lambda) + \mu t^2 + O_1(|\lambda|) \\ T &= -\mathcal{H}(\theta - \lambda) + O_2(|t| + |\lambda|) \end{aligned} \right\} (106)$$

Le théorème 3 implique donc :

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= h^{-1} \circ R_\omega \circ h(\theta - \lambda) + 2\mu t\Psi(\theta - \lambda) + \mu t^2 + O_1(|\lambda|) \\ T &= O_2(|t| + |\lambda|) \end{aligned} \right\} (106')$$

explicitons les termes  $O_1$  et  $O_2$  :

$$\begin{aligned}
 O_1 &= \lambda Dg_0(\theta) + O(\lambda^2) \\
 O_2 &= -(1 + X(\theta - \lambda))t + \lambda Y(\theta - \lambda) + \lambda t Z(\theta - \lambda) + O(\lambda^2 + t^2), \\
 \text{avec} \\
 X(\theta) &= \nu - \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\theta, \Psi(\theta)) - 2\mu \Psi(\theta) \cdot D\Psi \circ F(\theta), \\
 \Phi &= \mu \mathbf{B} + \mu^n \xi, \\
 Y(\theta) &= \mu^n \frac{\partial \xi}{\partial \theta}(\theta, \Psi(\theta)) - D\Psi \circ F(\theta) \cdot [-\lambda + O_1(|\lambda|)] \\
 Z(\theta) &= \mu^n \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta \partial z}(\theta, \Psi(\theta))
 \end{aligned} \tag{107}$$

Pour la forme normale ( $\xi = g_0 = \Psi \equiv 0$ ,  $h = \text{id}$ ,  $\lambda = \lambda_0$ ), le changement de variables  $V_1$  se réduit à l'identité, comparons alors l'expression ci-dessus avec la forme normale, c'est-à-dire, cherchons l'ordre de grandeur de la perturbation dans ces variables. En utilisant les estimations (68) du théorème 3, nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned}
 \Theta &= \Theta_0 + O(\mu^{n-2}) \\
 T &= T_0 + O(\mu^n)
 \end{aligned} \right\} \tag{108}$$

où  $\Theta_0$  et  $T_0$  sont les expressions de la forme normale dans les variables  $(\theta, t)$ .

Après ce changement de variables, nous faisons apparaître la proximité avec la rotation diophantienne, grâce à un nouveau changement de variables (et ça n'est pas le dernier) :

$$V_2 : (\theta, t) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \rightarrow (\varphi = h(\theta - \lambda), t) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}, \tag{109}$$

qui transforme (106), (107) en :

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi &= h[h^{-1}(\varphi + \omega) + 2\mu t \Psi \circ h^{-1}(\varphi) + \mu t^2 + O_1(|\lambda|) - \lambda] \\
 T &= -[1 + X \circ h^{-1}(\varphi)]t + \lambda Y \circ h^{-1}(\varphi) \\
 &\quad + \lambda t Z \circ h^{-1}(\varphi) + O(\lambda^2 + t^2)
 \end{aligned} \right\} \tag{110}$$

Exprimons  $\Phi$  de façon précise :

$$\Phi = \varphi + \omega - \underbrace{\lambda Dh(h^{-1}(\varphi + \omega))}_I + \underbrace{2\mu t \Psi \circ h^{-1}(\varphi) Dh(h^{-1}(\varphi + \omega))}_II + \underbrace{\mu t^2 Dh(h^{-1}(\varphi + \omega))}_III + O(|\lambda| + |t|^3) \quad (110')$$

et, d'après (68), estimons chacun de ces termes par rapport à la forme normale :

$$I = \lambda_0 + O(\mu^{n-4})$$

$$II = O(\mu^{n-2})$$

$$III = \mu t^2 + O(\mu^{n-3})$$

La taille de la perturbation dans ces variables est donc :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + O(\mu^{n-4}) \\ T &= T_0 + O(\mu^n) \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Par un nouveau changement de variables, nous éliminons la dépendance angulaire du terme linéaire.

LEMME 9. — Soit  $\omega$  satisfaisant les hypothèses du théorème 3,  $X$  défini par (107) et  $h$  donné par le théorème 3. Il existe  $b \in C^\infty(\mathbf{T}^1)$  et  $\chi \in \mathbf{R}$ , tel que :

$$\frac{b(\varphi + \omega)}{b(\varphi)} \cdot (1 + \chi) = 1 + X \circ h^{-1}(\varphi), \quad (112)$$

$b$  satisfait l'estimation :

$$\|b - 1\|_m \leq C_m \delta^{-1} \|O(\mu^n)\|_{m+r} \leq C'_m \mu^{n-1} \quad (113)$$

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme 3, il suffit de résoudre une équation aux différences en considérant la fonction inconnue  $\log(b)$ , nous pouvons de plus exprimer :

$$1 + \chi = \exp \int_{\mathbf{T}^1} \log(1 + X \circ h^{-1}(\varphi)) d\varphi = 1 + \nu + O(\mu^n) \quad (114)$$

considérons alors le changement de variables :

$$V_3 : (\varphi, t) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \rightarrow (\varphi, u = t/b(\varphi)) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}, \quad (115)$$

qui est bien défini d'après (110), c'est un difféomorphisme local qui transforme (110) en l'expression suivante :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \omega + u F_1(\varphi, u, \lambda, \mu, \nu) + \lambda F_2(\varphi, u, \lambda, \mu, \nu) \\ U &= -(1 + \chi)u + u^2 G_1(\varphi, u, \lambda, \mu, \nu) + \lambda G_2(\varphi, u, \lambda, \mu, \nu) \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

où  $F_1, F_2, G_1, G_2$  sont des applications localement  $C^\infty$ . Nous vérifions que dans ces variables, la perturbation par rapport à la forme normale a le même ordre de grandeur que précédemment, il n'y a pas de « perte d'ordre de grandeur » :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + O(\mu^{n-4}) \\ U &= U_0 + O(\mu^n) \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Dans l'expression (116) le paramètre  $\chi$  est l'analogue de  $\nu$  pour l'expression initiale de  $D_{\mu\nu}$ , nous allons utiliser  $(\lambda, \chi)$  comme nouveau paramétrage au voisinage de la courbe  $\mathcal{S}_\omega$  (104).

LEMME 10. — Soit  $\omega$  fixé satisfaisant les hypothèses du théorème 3, soit  $\lambda$  donné par le théorème 3 et  $\chi$  défini par le lemme 9, l'application :  $(\mu, \nu) \in (\mathbf{R}^2, 0) \rightarrow (\lambda_\omega, \chi_\omega) \in (\mathbf{R}^2, 0)$  est un difféomorphisme local dont l'image contient  $(0, 0)$ .

Cette proposition démontre que  $(\lambda_\omega, \chi_\omega)$  est un système local de coordonnées dans l'espace des paramètres (fig. 8).

Pour démontrer cette proposition nous utilisons, sur la grandeur  $\chi_\omega$ , la même méthode que celle employée dans la démonstration du théorème 3 sur  $\lambda_\omega$ . En particulier, il faut obtenir des estimations lipschitziennes sur  $|\chi_\omega - \nu|$  et  $\left| \frac{\partial \chi_\omega}{\partial \nu} - 1 \right|$ , qui sont analogues à (68), (69) (une démonstration similaire est faite dans [3]).

COROLLAIRE. — Soit  $\omega$  fixé satisfaisant les hypothèses du théorème 3. Sur la courbe  $\mathcal{S}_\omega$  (104), il existe un unique point  $\gamma_\omega$  tel que  $D_{\gamma_\omega}$  possède une courbe invariante  $C^\infty$ , non normalement hyperbolique.

D'après le lemme 10 ce résultat est immédiat, car pour  $(\mu, \nu) \in \mathcal{S}_\omega$  on a  $\lambda_\omega = 0$ , donc  $D_{\mu\nu}$  possède une courbe invariante  $C^\infty$ , soit l'unique point de  $\mathcal{S}_\omega$  vérifiant  $\chi_\omega = 0$ , alors, d'après (116) le paramètre d'hyperbolicité normale étant nul, la courbe invariante est non normalement hyperbolique.

### (B) Transformée de graphe, domaines d'hyperbolicité

Le changement de paramètres du lemme 10 permet d'exprimer la famille  $D_{\mu\nu}$  uniquement en fonction des paramètres  $(\lambda, \chi)$ .

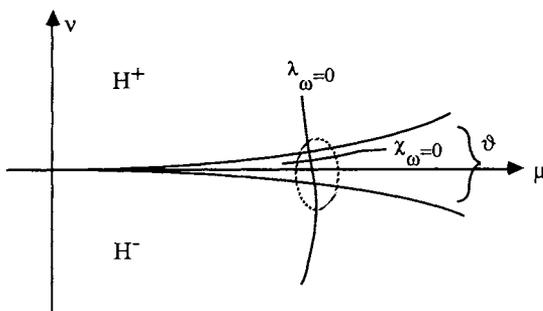


FIG. 8.

Notons  $D_{\lambda, \chi}$  cette famille qui est donnée par (116), à la différence près que les applications  $F_i$  et  $G_i$  ne dépendent que des paramètres  $\lambda$  et  $\chi$ . Appliquons la méthode de transformée de graphes (proposition 1) à cette famille. Pour cela nous considérons le changement d'échelle suivant :

$$V_4 : (\varphi, u) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \rightarrow (\varphi, v = u \chi^{-k}) \in \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} \quad \text{avec } k > 1. \quad (118)$$

Ce changement de variables nous permet d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \omega + \chi^k F'_1(\varphi, v, \lambda, \chi) + \lambda F'_2(\varphi, v, \lambda, \chi) \\ V &= -(1 + \chi)v + \chi^k v^2 G'_1(\varphi, v, \lambda, \chi) + \frac{\lambda}{\chi^k} G'_2(\varphi, v, \lambda, \chi) \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

où les applications  $F'_i$  et  $G'_i$  sont localement  $C^\infty$ .

La proposition 1 nous permet de conclure à l'existence d'une courbe médiane invariante lipschitzienne, proche de  $v=0$ , si l'estimation suivante est satisfaite :

$$|\lambda| \leq C |\chi|^{2k}, \quad (120)$$

prenons par exemple  $k=3/2$ , dans ce cas (119) peut alors s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \omega + \chi^{3/2} K_1(\varphi, v, \lambda, \chi) \\ V &= -(1 + \chi)v + \chi^{3/2} K_2(\varphi, v, \lambda, \chi), \quad |\lambda| \leq C |\chi|^3. \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Les domaines d'hyperbolicité normal correspondant à (121) ont la forme donnée sur la figure 9.

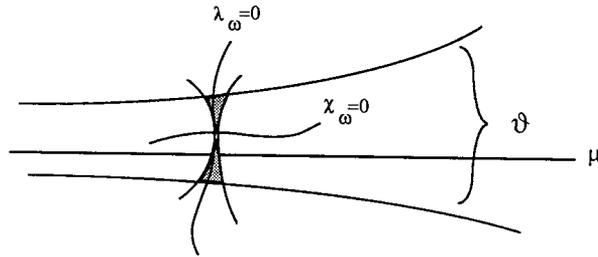


FIG. 9.

Ce résultat n'est pas complètement satisfaisant car l'ensemble des chemins du plan des paramètres suivant lesquels nous ne pouvons pas affirmer l'existence d'une courbe invariante, c'est-à-dire le complémentaire dans  $\mathcal{V}$  de l'union de ces domaines (les bulles), est trop « gros ». En effet il peut exister des ouverts, connectants  $H^+$  et  $H^-$  [voir (31)], dans cet ensemble.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons montrer que l'on peut diminuer la taille de ces bulles, et nous montrerons qu'à l'extérieur de celles-ci, la famille  $D_{\mu\nu}$  ressemble à une forme normale. Pour cela nous effectuons une suite finie de changements de variables afin de supprimer des termes, qualifiés de « gênants », dans l'expression (116). L'objectif étant d'obtenir en fin de compte une perturbation d'ordre  $\lambda^K$ , avec  $K$  suffisamment grand.

## V. 2. Diminution de la taille des bulles

Précisons un peu ce que nous entendons par termes gênants. Nous cherchons à transformer l'expression (116) de la famille  $D_{\lambda\chi}$  afin d'appliquer la méthode de transformée de graphes, mais avec une perturbation d'ordre  $\lambda^K$ . Donc tous les termes d'ordre inférieur en  $\lambda$  seront gênants. Explicitons (116) :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \omega + \sum_{i=1}^{K-1} e_i(\varphi) \lambda^i + u E(\varphi, u, \lambda, \chi) + O(|\lambda|^K) \\ U &= - \left( 1 + \chi + \sum_{i=1}^{K-1} g_i(\varphi) \lambda^i \right) u + u^2 F(\varphi, u, \lambda, \chi) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{K-1} m_i(\varphi) \lambda^i + O(|\lambda|^K) \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Pour ce qui est des ordres de grandeur, d'après les estimations précédentes (111) nous avons :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= O(1) & g_i &= O(\mu^n), \quad \forall i \geq 1 \\ e_i &= O(\mu^{n-4}), \quad \forall i > 1 & m_i &= O(\mu^n), \quad \forall i \geq 1 \\ E &= O(\mu^{n-4}) & F &= O(\mu^n) \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

L'objectif de cette partie est d'éliminer les termes  $\lambda^i m_i$  et de supprimer la dépendance angulaire des termes  $\lambda^i g_i$  et  $\lambda^i e_i$ , ce qui nous permettra d'appliquer la méthode de transformée de graphes.

(A) Première étape

Nous commençons par supprimer les termes  $\lambda^i m_i$  jusqu'à l'ordre  $\lambda^K$ , pour cela, considérons la suite de changements de variables [7] :

$$V_5^i : (\varphi, u_{i-1}) \rightarrow (\varphi, u_i = u_{i-1} - \lambda^i R_i(\varphi)) \quad (124)$$

LEMME 11. — Soit  $\omega$  satisfaisant les hypothèses du théorème 3.

Il existe une suite  $R_1, R_2, \dots, R_{k-1}$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^1)$ , satisfaisant les estimations :

$$\|R_i\|_m \leq C_m \mu^{n-i}, \quad (125)$$

et tel que le changement de variables :  $V_5^1 \circ V_5^2 \circ \dots \circ V_5^{k-1}$  transforme l'expression (122) de la famille  $D_{\lambda, \chi}$  en :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \omega + \sum_{i=1}^{k-1} e_i^*(\varphi) \lambda^i + u^* E^*(\varphi, u^*, \lambda, \chi) + O(|\lambda|^K) \\ U^* &= - \left( 1 + \chi + \sum_{i=1}^{k-1} g_i^*(\varphi) \lambda^i \right) u^* + u^2 F^*(\varphi, u^*, \lambda, \chi) \\ &\quad + \lambda^K G^*(\varphi, u^*, \lambda, \chi) \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

avec

$$\begin{aligned} G^* &= O(\mu^{n-K-1}), & e_1^* &= O(1) \\ g_i^* &= O(\mu^{n-K}), \quad \forall i \geq 1, & e_i^* &= O(\mu^{n-4}), \quad \forall i > 1 \end{aligned}$$

Démonstration. — Étudions la première étape de cette suite. Choisissons  $R_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^1)$  satisfaisant l'équation :

$$(1 + \chi) R_1(\varphi) + R_1(\varphi + \omega) = -m_1(\varphi), \quad (127)$$

c'est une équation aux différences, qui admet une solution puisque  $\omega$  satisfait une condition diophantienne. Cette condition dépend du

paramètre  $\delta$ , nous pouvons, en utilisant les équivalents (123) donner une estimation de  $R_1$  :

$$\|R_1\|_q \leq C_q \delta^{-1} \|m_1\|_{q+r} \leq C'_q \mu^{n-1}. \quad (128)$$

Le changement de variables  $V_5^1$  transforme alors (122) en :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \omega + \sum_{i=1}^{K-1} e_i^1(\varphi) \lambda^i + u_1 E_1(\varphi, u_1, \lambda, \chi) + O(|\lambda|^K) \\ U_1 &= - \left( 1 + \chi + \sum_{i=1}^{K-1} g_i^1(\varphi) \lambda^i \right) u_1 \\ &\quad + u_1^2 F^1(\varphi, u_1, \lambda, \chi) + \sum_{i=2}^{K-1} m_i^1(\varphi) \lambda^i + O(|\lambda|^K) \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Pour les ordres de grandeur, la perte d'une unité provenant de l'estimation (128) se répercute uniquement sur le terme  $m_2^1$  :

$$m_2^1 = O(\mu^{n-1}) \quad (130)$$

Les autres changements de variables  $V_5^i$  se construisent exactement de la même façon,  $R_i$  est solution d'une équation analogue à (127). A chaque étape, il y a perte d'une unité d'ordre de grandeur, ce qui démontre (125) ainsi que (126).

### (B) Deuxième étape

Dans cette partie, nous allons procéder comme ci-dessus afin d'éliminer la dépendance angulaire des termes linéaires de la composante normale, c'est-à-dire les termes  $\lambda^i g_i^*$  dans l'expression (126).

Considérons les changements de variables de la forme suivante :

$$V_6^i : (\varphi, v_{i-1}) \rightarrow \left( \varphi, v_i = \frac{1}{(1 + \lambda^i S_i(\varphi))} \cdot v_{i-1} \right) \quad (131)$$

LEMME 12. — Il existe une suite  $S_1, \dots, S_{k-1}$  dans  $C^\infty(\mathbf{T}^1)$  vérifiant les estimations :

$$\|S_i\|_m \leq C_m \mu^{n-k-i} \quad (132)$$

telle que le changement de variables :  $V_6^1 \circ \dots \circ V_6^{k-1}$  transforme (126) en :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \omega + \sum_{i=1}^{k-1} \hat{e}_i(\varphi) \lambda^i + v \hat{E}(\varphi, v, \lambda, \chi) + O(|\lambda|^k) \\ V &= - \left( 1 + \chi + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i \lambda^i \right) v + v^2 \hat{F}(\varphi, v, \lambda, \chi) + \lambda^k \hat{G}(\varphi, v, \lambda, \chi) \end{aligned} \right\} (133)$$

avec

$$\hat{G} = O(\mu^{n-2k-1}), \quad \hat{e}_1 = O(1), \quad \hat{e}_i = O(\mu^{n-4}), \quad \forall i > 1$$

*Démonstration.* — Comme pour le lemme 11 nous allons étudier la première étape de cette suite, les autres se construisant sur le même modèle. En appliquant  $V_6^1$  à l'expression (126) nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \omega + O(|\lambda| + |v_1|) \\ V_1 &= - [1 + \chi + \lambda g_1^*(\varphi) + O(\lambda^2)] \frac{(1 + \lambda S_1(\varphi))}{(1 + \lambda S_1(\Phi))} \cdot v_1 + O(v_1^2 + |\lambda|^k) \end{aligned} \right\} (134)$$

Choisissons  $S_1 \in C^\infty(T^1)$ , solution de l'équation :

$$(1 + \chi) [S_1(\varphi) - S_1(\varphi + \omega)] + g_1^*(\varphi) = \rho_1 = \int_{T^1} g_1^*(\varphi) d\varphi. \quad (135)$$

nous obtenons alors :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \omega + \sum_{i=1}^{k-1} e_i^1(\varphi) \lambda^i + v_1 E^1(\varphi, v_1, \lambda, \chi) + O(|\lambda|^k) \\ V_1 &= - \left[ 1 + \chi + \lambda \rho_1 + \sum_{i=2}^{k-1} g_i^1(\varphi) \lambda^i \right] v_1 \\ &\quad + v_1^2 F^1(\varphi, v_1, \lambda, \chi) + O(|\lambda|^k) \end{aligned} \right\} (136)$$

En utilisant les équivalents (126) la solution  $S_1$  de l'équation (135) vérifie :

$$\|S_1\|_m \leq C_m \delta^{-1} \|g_1^* - \rho_1\|_{m+r} \leq C'_m \mu^{n-k-1} \quad (137)$$

En étudiant les pertes d'ordre de grandeur dues à cette estimation, nous constatons que ce changement de variable n'affecte pas les ordres de grandeur des termes de la composante angulaire, c'est-à-dire que les équivalents des  $e_i^1$  sont les mêmes que ceux des  $e_i^*$  (126). Par contre il y aura

une perte d'une unité pour le terme  $g_2^1$  :

$$g_2^1 = O(\mu^{n-K-1}). \quad (138)$$

Cette perte va se répercuter pour les autres changements de variables  $V_6^i$  qui se construisent exactement comme  $V_6^1$ , ce qui démontre le lemme.

(C) *Troisième étape*

Encore un peu de patience, nous approchons du but, construisons une dernière suite de changements de variables afin de supprimer la dépendance angulaire des termes  $\hat{e}_i$ , considérons alors la suite :

$$V_7^i : (\varphi_{i-1}, v) \rightarrow (\varphi_i = \varphi_{i-1} + \lambda^i L_i(\varphi_{i-1}), v) \quad (139)$$

LEMME 13. — Il existe une suite  $L_1, \dots, L_{K_0-1}$  dans  $C^\infty(\mathbf{T}^1)$  vérifiant les estimations :

$$\|L_i\|_m \leq C_m \mu^{n-4-i} \quad (140)$$

telle que le changement de variables :  $V_7^1 \circ \dots \circ V_7^{K_0-1}$  transforme l'expression (133) de la famille  $D_{\lambda, \chi}$  en :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \bar{\varphi} + \omega + \sum_{i=1}^{K_0-1} b_i \lambda^i + v \bar{E}(\bar{\varphi}, v, \lambda, \chi) \\ V &= - \left[ 1 + \chi + \sum_{i=1}^{K-1} \rho_i \lambda^i \right] v + v^2 \bar{F}(\bar{\varphi}, v, \lambda, \chi) + \lambda^K \bar{G}(\bar{\varphi}, v, \lambda, \chi) \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

avec  $\bar{A} = O(\mu^{n-K_0-4})$ ,  $\bar{G} = O(\mu^{n-2K+1})$ .

*Démonstration.* — La démonstration est exactement du même type que pour les deux lemmes précédents. Étudions  $V_7^1$ , la composante normale garde la même forme que (133), quant à la composante angulaire, elle se transforme en :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi_1 + \omega - \lambda L_1(\varphi_1) + \lambda \hat{e}_1(\varphi_1 - \lambda L_1(\varphi_1)) \\ &\quad + \lambda L_1(\varphi_1 + \omega + O(|\lambda| + |v|)) + O(\lambda^2 + |v|) \end{aligned} \quad (142)$$

Choisissons  $L_1$  solution de l'équation :

$$L_1(\varphi_1 + \omega) - L_1(\varphi_1) + \hat{e}_1(\varphi_1) = b_1 = \int_{\mathbf{T}^1} \hat{e}_1(\varphi) d\varphi. \quad (143)$$

Pour ce premier terme, il semble y avoir un problème d'ordre de grandeur, puisque d'après (133) on a :  $\hat{e}_1 = O(1)$ , mais cette difficulté n'est qu'appa-

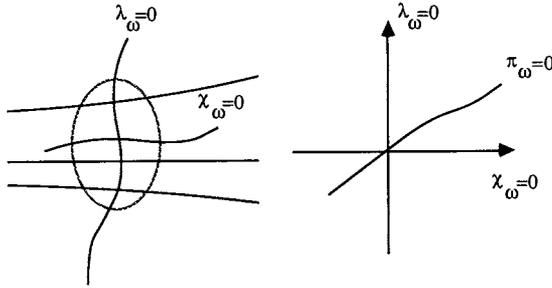


FIG. 10.

rente, en effet, d'après (110') (I) nous avons :  $\lambda \hat{e}_1 = \lambda_0 + O(\mu^{n-4})$ , nous pouvons donc écrire :  $\hat{e}_1 = b_1 + \bar{e}_1(\varphi)$ , avec  $\bar{e}_1 = O(\mu^{n-4})$  et  $\int_{T^1} \bar{e}_1(\varphi) d\varphi = 0$ .

Ceci nous permet de résoudre l'équation (143) dont l'ordre de grandeur de la solution ne tient compte que de  $\bar{e}_1$ , c'est-à-dire :

$$\|L_1\|_m \leq C_m \|\bar{e}_1\|_{m+r} \leq C'_m \mu^{n-5}. \tag{144}$$

Ce qui démontre bien le premier pas du lemme, nous pouvons également estimer l'ordre du terme en  $\lambda^2$  :  $\hat{e}_2^1 = O(\mu^{n-5})$ . La suite  $V_7$  se construit ensuite exactement de la même façon, ce qui démontre le lemme.

(D) *Transformée de graphes*

Nous allons commencer à récolter les fruits de ces longues suites de changements de variables, en appliquant la méthode de transformée de graphes à l'expression (141). Pour cela, il nous reste quelques mises en forme à faire.

Tout d'abord effectuons un changement de coordonnées dans l'espace des paramètres, au voisinage de la courbe  $\mathcal{S}_\omega(\lambda_\omega = 0)$  :

$$(\lambda_\omega, \chi_\omega) \rightarrow (\lambda_\omega, \pi_\omega = \chi_\omega + \lambda_\omega \rho_1 + \dots + \lambda_\omega^{K-1} \rho_{K-1}). \tag{145}$$

Cette application est clairement un difféomorphisme local, et donc  $(\lambda_\omega, \pi_\omega)$  est un système local de coordonnées au voisinage de  $\mathcal{S}_\omega$  (fig. 10).

Et finalement, nous faisons un changement d'échelle (en supprimant les indices) :

$$(\varphi, v) \rightarrow (\varphi, w = |\pi|^{-s} v) \quad \text{avec } s > 1. \tag{146}$$

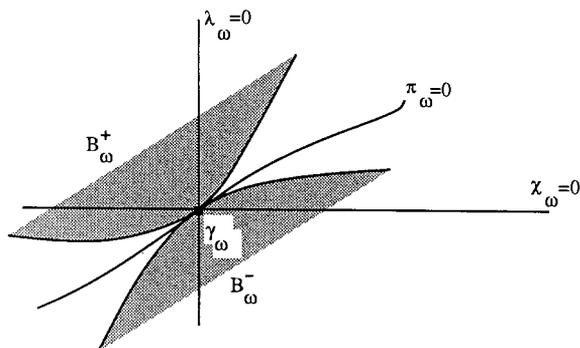


FIG. 11.

L'expression (141) devient alors :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \Omega + |\pi|^s w E'(\varphi, w, \lambda, \pi) + \lambda^{K_0} A'(\varphi, \lambda, \pi) \\ W &= -(1 + \pi) w + |\pi|^s w^2 F'(\varphi, w, \lambda, \pi) + \frac{\lambda^K}{|\pi|^s} G'(\varphi, w, \lambda, \pi), \end{aligned} \right\} (147)$$

$$\text{avec } \Omega = \omega + \sum_{i=1}^{K_0-1} b_i \lambda^i$$

Cette dernière expression de la famille  $D_{\lambda\pi}$  nous permet de conclure d'après la proposition 1 (§ II. 2), à l'existence d'une courbe invariante, lipschitzienne, si les estimations suivantes sont satisfaites :

$$\left. \begin{aligned} |\lambda|^K &\leq C |\pi|^{2s} \\ |\lambda|^{K_0} &\leq C |\pi|^s \end{aligned} \right\} (148)$$

Prenons par exemple  $s=3/2$ , alors pour  $K \geq 4$  et  $K_0 \geq 2$ , les domaines définis par (148) que nous notons  $B_\omega^+$  et  $B_\omega^-$  ont la forme suivante donnée sur la figure 11.

Le contact entre les domaines  $B_\omega^+$  et  $B_\omega^-$ , défini par (148) est d'autant plus élevé que  $K$  et  $K_0$  sont grands, mais d'après les ordres de grandeur de (141), pour  $n$  fixé,  $K$  et  $K_0$  sont bornés.

Donc, dans un cas générique, la taille des bulles ne peut être rendue arbitrairement petite.

Pour appliquer le théorème 3 et son corollaire, nous avons supposé  $n \geq 13$ ,  $K$  doit alors être inférieur à 6, et les domaines  $B_\omega^\pm$  ont bien la forme de la figure 11.

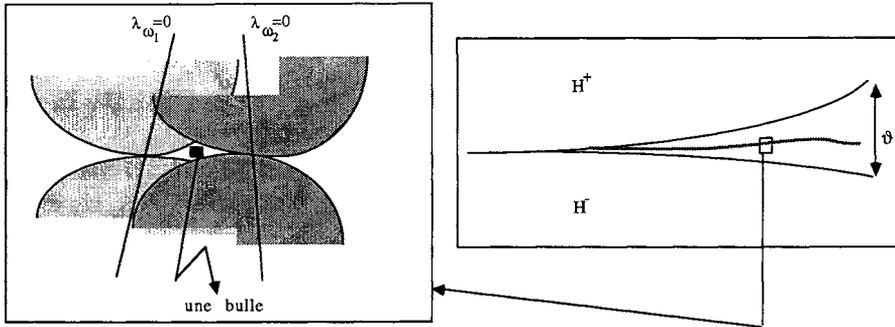


FIG. 12.

Éloignons un peu notre microscope de la courbe  $\mathcal{F}_\omega$ , nous observons que les  $B_\omega^\pm$ , pour différents  $\omega$  satisfaisant (63) s'intersectent, ce qui donne à leur complémentaire (les bulles) l'allure donnée sur la figure 12.

Terminons par quelques remarques :

*Remarque 1.* — Le point de contact de  $B_\omega^+$  et  $B_\omega^-$  est le point  $\gamma_\omega$  en lequel la courbe invariante de  $D_{\mu\nu}$  est non normalement hyperbolique (corollaire du lemme 10).

*Remarque 2.* — Si  $\omega_0$  est irrationnel, nous pouvons considérer une forme normale d'ordre arbitrairement grand (mais fini) dans ce cas, les bulles peuvent être rendues arbitrairement fines (l'ordre du contact arbitrairement grand).

**V.3. Ressemblance avec une forme normale dans  $B_\omega^+ \cup B_\omega^-$**

Nous venons de montrer que pour  $(\mu, \nu)$  dans  $B_\omega^+ \cup B_\omega^-$ , la famille  $D_{\mu\nu}$  possède une courbe médiane invariante, c'est une étape nécessaire pour montrer la ressemblance avec une forme normale (§II.2), en fait, comme dans la partie II, c'est également suffisant.

**THÉORÈME 4.** — *Supposons satisfaites les hypothèses du théorème 3 et de son corollaire, et fixons  $n \geq 13$ . Soit  $(\lambda_\omega, \pi_\omega)$  le système de coordonnées locales du plan des paramètres, défini par (145), dans un voisinage  $\Gamma_\omega$  du*

point  $\gamma_\omega = (\lambda_\omega = 0, \pi_\omega = 0)$ . Soient  $B_\omega^+$  et  $B_\omega^-$  les domaines définis par :

$$B_\omega^\pm = \{(\lambda_\omega, \Pi_\omega) \in \Gamma_\omega / |\lambda_\omega| \leq C |\Pi_\omega|^{3/K},$$

$$4 < K \leq \frac{n+1}{2}, (+) : \pi_\omega > 0, (-) : \pi_\omega < 0\}$$

Si  $(\mu, \nu)$  appartient à  $B_\omega^+ \cup B_\omega^-$ , la famille de difféomorphismes  $D_{\mu\nu}$  ressemble à une famille de formes normales  $N_{\mu', \nu'}$ , pour  $(\mu', \nu')$  dans un voisinage de  $(\mu, \nu)$ .

De plus il existe une filtration :  $\dots B_{\omega, k}^\pm \subset B_{\omega, k-1}^\pm \subset \dots \subset B_\omega^\pm$  tel que : si  $(\mu, \nu) \in B_{\omega, k}^\pm$  la courbe médiane ainsi que les courbes dédoublées (voir § II) sont de classe  $C^k$ .

Pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que l'expression de  $D_{\lambda, \pi}$  a exactement la même forme que  $D_{\mu, \nu}$  dans le paragraphe II.

La suite de changements de variables, conduisant à l'expression (141) se réduit à l'identité pour la forme normale  $N_{\mu\nu}(\xi = g_0 \equiv 0)$ .

Explicitons un peu plus cette expression :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \Omega + \mu\alpha(\lambda, \pi)v^2 + \lambda^{K_0} O(\mu^{n-K_0-4}) + vO(\mu^{n-4}) \\ V &= -(1+\pi)v + \mu\beta_3(\lambda, \pi)v^3 + \dots + \mu^m \beta_{2m+1} v^{2m+1} \\ &\quad + \lambda^{K_0}(\mu^{n-2K+1}) + v^2 O(\mu^{n-4}) \end{aligned} \right\} (149)$$

d'après (65) les coefficients sont de la forme suivante :

$$\alpha = 1 + O(\mu^{n-4}), \quad \beta_3 = b_3(\mu, \nu) + O(\mu^{n-4}), \dots$$

Dans cette relation, les  $O(\dots)$  peuvent être regroupés avec ceux de la perturbation. Nous avons laissé explicitement la dépendance en  $(\mu, \nu)$  pour une analogie plus évidente, mais il est clair que ces termes sont des fonctions de  $(\lambda, \pi)$ , d'après le lemme 10 et (145). Pour retrouver une expression de  $N_{\lambda, \pi}$  équivalente à (9), effectuons la transformation d'échelle inverse de (64), ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \Omega + \hat{v}^2 + \lambda^{K_0} O(\mu^{n-K_0-4}) + \hat{v} O(\mu^{n-9/2}) \\ \hat{V} &= -(1+\pi)\hat{v} + b_3 v^3 + \dots + b_{2m+1} \hat{v}^{2m+1} \\ &\quad + \lambda^K O(\mu^{n-2K+3/2}) + \hat{v}^2 O(\mu^{n-7/2}) \end{aligned} \right\} (150)$$

Nous constatons donc que (150) a exactement la même forme que (9). Nous pouvons alors appliquer directement le théorème 1 qui suppose une perturbation d'ordre  $O(\mu^5)$  [en fait  $O(\mu^4)$  suffit], donc puisque le paramètre  $\lambda$  correspond à  $\mu$ , pour  $K \geq 4$ , le résultat du théorème 4 est acquis, si les

termes  $O(\mu^{n-2K+3/2})$  et  $O(\mu^{n-K_0-4})$  sont suffisamment petits, imposons par exemple :  $K \leq \frac{n+1}{2}$ , ce qui termine la démonstration.

En conclusion, pour tout chemin de l'espace des paramètres, traversant  $\mathcal{V}$  à l'intérieur de  $B_\omega^+ \cup B_\omega^-$ , la bifurcation se produit comme pour la forme normale. En particulier, il y a un unique point de bifurcation, le point  $\gamma_\omega$  en lequel la courbe médiane est invariante, de classe  $C^\infty$  et est non normalement hyperbolique.

### CONCLUSION

Dans cet article nous avons caractérisé la bifurcation de dédoublement de courbes invariantes pour une famille générique à deux paramètres de difféomorphismes de  $(\mathbb{R}^3, 0)$  :  $D_{\mu\nu}$ , restreinte à un cylindre invariant supposé  $C^\infty$  (hypothèse  $H_1$ , §I). Cette hypothèse forte sera supprimée dans un article qui suivra [20], la difficulté supplémentaire étant la résolution d'équations aux différences matricielles. Nous avons décrit les cas où la bifurcation se produit aussi simplement que pour une forme normale, c'est-à-dire qu'une courbe invariante perd sa stabilité en un unique point de l'espace des paramètres, ou elle est non normalement hyperbolique et donne naissance à un nouvel attracteur, composé de deux courbes qui s'échangent (les courbes dédoublées). Nous obtenons des résultats qui sont analogues à ceux d'A. Chenciner [3] pour l'élimination d'un couple de courbes invariantes.

Pour résumer ces résultats, un dessin vaut mieux que...

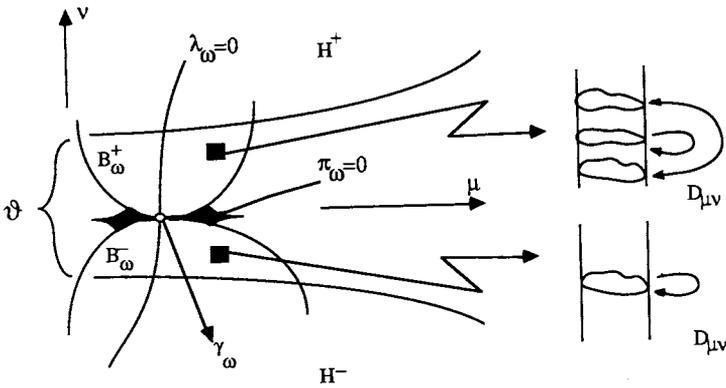


FIG. 13.

Décrivons brièvement la figure 13 qui représente une région de l'espace des paramètres  $(\mu, \nu)$  et explicitons les notations. Les régions  $H^+$  et  $H^-$  correspondent aux domaines où les courbes invariantes et dédoublées sont normalement hyperboliques (voir théorème 1, § I), le voisinage éffilé  $\mathcal{V}$  désigne la région où les méthodes directes d'hyperbolicité normale ne permettent pas de conclure à la persistance de ces courbes.

Le résultat principal de cette étude concerne l'existence d'un chemin  $\lambda_\omega = 0$ , qui connecte  $H^+$  et  $H^-$  suivant lequel la sous-famille à un paramètre possède une courbe invariante  $C^\infty$  dont la restriction est  $C^\infty$  conjuguée à une rotation  $R_\omega$  (voir théorème 3 et son corollaire, § IV),  $\omega$  étant un nombre diophantien qui vérifie la condition (63). C'est pour démontrer ce résultat que nous avons développé la méthode dite de la *courbe tournée* (théorème 2, § III). Une telle méthode s'apparente au théorème de la courbe translatée de Rüssemann ([15], [9], [11], [3]) et permet d'envisager un résultat général pour l'étude des singularités sur une courbe fermée. Poursuivons la description de la figure 13. Sur le chemin  $\lambda_\omega = 0$ , il existe un unique point  $\gamma_\omega$  tel que la courbe invariante  $C^\infty$  est non normalement hyperbolique (voir lemme 10, § V), c'est le point de bifurcation. L'ensemble des points  $\gamma_\omega$ , pour les  $\omega$  satisfaisant (63) est un ensemble de Cantor, dont la densité de mesure tend vers 1 lorsque  $\omega$  tend vers  $\omega_0$  [où  $(-1, e^{\pm i\pi\omega_0})$  est le spectre de  $DD_{00}(0)$ ].

La dernière partie consiste à montrer l'existence des régions  $B_\omega^+$  et  $B_\omega^-$  autour de  $\lambda_\omega = 0$ , pour lesquelles les courbes invariantes et dédoublées sont normalement hyperboliques (théorème 4, § V).

La région de l'espace des paramètres non décrite correspond donc au complémentaire dans  $\mathcal{V}$  de l'union des  $(B_\omega^+ \cup B_\omega^-)$  pour les  $\omega$  satisfaisant (63). Cette région est constituée d'une infinité d'ouverts disjoints : les bulles, qui sont analogues à celles introduites en [3].

Certaines questions sur la dynamique lorsque les paramètres appartiennent à l'une de ces bulles ont été résolues pour le problème de l'élimination des courbes invariantes, comme par exemple l'existence d'ensembles invariants d'Aubry-Mather [4] ou d'orbites homoclines [5], et il semble clair que ces résultats se transportent à notre cas.

#### REMERCIEMENTS

Ce travail n'existerait pas sans Alain Chenciner, je le remercie vivement pour ses encouragements, merci également à Michel Herman pour ses conseils. Cette recherche a été partiellement financée par la D.R.E.T. contrat n° 861445.

## RÉFÉRENCES

- [1] V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir, 1978.
- [2] J. B. BOST, Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens, *Séminaire Bourbaki*, n° 639, 1984-1985.
- [3] A. CHENCINER, Bifurcation de points fixes elliptiques I, Courbes invariantes, *Publ. I.H.E.S.*, vol. 61, 1985, p. 67-127.
- [4] A. CHENCINER, Bifurcations de points fixes elliptiques, II, Orbites périodiques et ensembles de Cantor invariants, *Invent. Math.*, vol. 80, 1985, p. 81-106.
- [5] A. CHENCINER, *Bifurcations de points fixes elliptiques, III, Orbites périodiques de petites périodes et élimination résonnante des couples de courbes invariantes*, Preprint, Université Paris-VII, 1986.
- [6] A. CHENCINER, *Bifurcations de difféomorphismes de  $\mathbf{R}^2$  au voisinage d'un point fixe elliptique*, Cours à l'école des Houches, juillet 1981, North-Holland, 1983.
- [7] A. CHENCINER et G. IOOSS, Bifurcations de tores invariants, *Arch. Rat. Mech. Ana.*, vol. 69, n° 2, 1979, p. 109-198 et vol. 71, n° 4, 1979, p. 301-306.
- [8] R. S. HALMITON, *The Inverse Function Theorem of Nash and Moser*, Preprint, Cornell University, 1974, et *B. A. M. S.*, vol. 7, n° 1, 1982, p. 65-222.
- [9] M. HERMAN, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, Chap. VIII, *Astérisque* (à paraître).
- [10] M. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Pub. I.H.E.S.*, vol. 49, 1979.
- [11] M. HERMAN, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau I, *Astérisque*, n° 103-104, 1983.
- [12] G. IOOSS, Manuscrit, 1984.
- [13] O. E. LANFORD, Bifurcation of Periodic Solutions into Invariant Tori : the Work of Ruelle and Takens, *Lect. Notes. Math.*, n° 322, 1973, p. 159, Springer.
- [14] D. RUELLE et F. TAKENS, On the Nature of Turbulence, *Comm. Math. Phys.*, vol. 20, 1971, p. 167-192.
- [15] H. RÜSSEMAN, Über invariante kurven differenzierbarer abbildungen eines kreisrings, *Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math., Phys. Kl.*, vol. II, 1970, p. 67-105.
- [16] M. SHUB, Stabilité globale des systèmes dynamiques, *Astérisque*, n° 56, 1978.
- [17] C. L. SIEGEL et J. MOSER, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, 1971.
- [18] J. C. YOCOZ, Conjugaison des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne, *Annales scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 1984, p. 333-359.
- [19] J. E. LOS, Phénomènes de petits diviseurs dans les dédoublements de courbes invariantes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 303, série II, 1986, p. 429-432.
- [20] J. E. Los, General curve doubling bifurcation, soumis à *Nonlinearity*.

(Manuscrit reçu le 9 décembre 1986.)