Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 7, n° 2, 1990, p. 91-96. *Analyse non linéaire*

Un résultat de non-existence de solution positive pour une équation elliptique

par

Xiaomin ZHENG

Laboratoire d'analyse numérique, Tour 55-65, 5[e] étage,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On montre que l'équation $-\Delta u = f(u(x)) - \lambda g(x)$ sur Ω avec la condition Dirichlet n'a pas de solution positive quand λ est assez grand sous des conditions assez générales sur f et g.

Mots clés : Équation elliptique non linéaire; la première valeur propre et fonction propre associée de l'opérateur de Laplace.

ABSTRACT. — We prove that, when λ is great enough, there is no positive solution for the equation $-\Delta u = f(u(x)) - \lambda g(x)$ on Ω with the Dirichlet condition.

1. ÉNONCÉ DU RÉSULTAT PRINCIPAL

On considère l'équation suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) - \lambda g(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(x) > 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné, régulier.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire - 0294-1449
Vol. 7/90/02/91/06/$2.60/

On fait les hypothèses suivantes:

(2) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f(0)=0$;

(3) $\frac{f(u)}{u}$ est une fonction croissante et $\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$;

(4) On pose $\partial\Omega_c = \{ x \in \partial\Omega \mid \Omega$ est localement strictement convexe en $x \}$, et n_x la dérivée normale extérieure en x. On suppose qu'il existe $x_0 \in \partial\Omega_c$, $R_0 > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$g(x_0) > 0$$

et

$$\forall (x, y) \in B(x_0, R_0) \cap \Omega, \quad \left| \frac{y-x}{|y-x|} - n_{x_0} \right| < \delta \quad \Rightarrow \quad g(x) \leqq g(y).$$

Notre résultat principal est le suivant:

THÉORÈME 1. — *Supposons que f vérifie les conditions* (2), (3) *et que g vérifie la condition* (4). *Alors, il existe* $\lambda^* > 0$, *tel que pour* $\lambda > \lambda^*$, *l'équation* (1) *n'ait pas de solution.*

En particulier, on a le

COROLLAIRE 2. — *Pour tout* $p > 1$, *il existe* $\lambda^* > 0$, *tel que si* $\lambda > \lambda^*$, *l'équation*

$$(5) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p - \lambda & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

n'a pas de solution.

Remarque 1. — F. Merle [4] a obtenu récemment un résultat comparable. Il a montré que l'équation

$$(6) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p - \lambda g(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec $1 < p < (N+2)/(N-2)$ n'a pas de solution pour $\lambda > \lambda^*$ si $g(x)$ vérifie la condition (4). *Voir* [4]. Notre démonstration est différente et plus simple mais elle utilise un lemme de [4].

Remarque 2. — Pour $1 < p < (N+2)/(N-2)$, H. Brézis et L. Nirenberg ont montré que l'équation (5) admet au moins une solution quand λ est assez petit. *Voir* [1].

Remarque 3. — Le problème (5) était motivé initialement par l'article de J. Smoller et A. Wasserman [7]. Pour le cas où Ω est une boule, ils ont montré que si $1 < p < N/(N+2)$ l'équation (5) admet au moins une solution quand λ est assez petit. *Voir* [7]. Ultérieurement, M. Ramaswamy et

P. N. Srikanth ont complété leur résultat pour ce cas particulier. Ils ont montré que si $1<p<(N+2)/(N-2)$, alors, il existe $\lambda^*>0$ tel que
- si $0<\lambda\leqq\lambda^*$, l'équation (5) admet au moins une solution;
- si $\lambda>\lambda^*$, l'équation (5) n'a pas de solution.

Voir [5] et [6]. Dans un autre article, K. McLeod et J. Serrin ont obtenu l'unicité de la solution de (5) pour Ω une boule, *Voir* [3].

Dans la démonstration du théorème 1, on va utiliser un résultat de F. Merle [4]. (Dans ce lemme, l'hypothèse $p<(N+2)/(N-2)$ n'intervient pas.)

LEMME 3. — *Si u est une solution de* (1), *alors il existe un voisinage* ω *de* n_{x_0} *dans* S^{N-1} *et* $R_1>0$ (*indépendant de* λ) *tel que*

(7) $$\forall x\in B(x_0, R_1)\cap\tilde{\Omega},\quad \forall\xi\in\omega,\qquad \partial u/\partial\xi\leqq 0.$$

Pour la démonstration du lemme 3, *Voir* [4]; celle-ci utilise la technique des « moving planes » (*voir* par exemple Gidas-Ni-Nirenberg [2] et J. Serrin [8]).

2. LA DÉMONSTRATION

Dans la suite, on note $\Omega^*=B(x_0, R_1)\cap\Omega$.

Démonstration du théorème 1 : On pose

(8) $$\Omega_\lambda=\{x\in\Omega^*\,|\,u(x)<(A\lambda)^k\}$$

où $0<k<1$ vérifie $f((A\lambda)^k)=A\lambda$ et A sera déterminé ultérieurement.

On pose

$$\tilde{\Omega}_\lambda=\Omega^*/\Omega_\lambda.$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que

(9) $$g(x_0)=1\qquad\text{et}\qquad \frac{1}{2}\leqq g(x)\leqq 1,\quad \forall x\in\bar{\Omega}^*.$$

Si $\text{mes}\{x\in\Omega^*\,|\,g(x)=1\}\neq 0$, on prend $A=1$ dans (8) et on remplace Ω^* par $\{x\in\Omega^*\,|\,g(x)=1\}$.

Sinon, *i.e.* $\text{mes}\{x\in\Omega^*\,|\,g(x)=0\}=0$, on choisit $\frac{1}{2}<A<1$ tel que les ensembles $\{x\in\Omega^*\,|\,g(x)>A\}$ et $\{x\in\Omega^*\,|\,g(x)<A\}$ ne soient pas vides.

Posons

$$G_\lambda=\Omega_\lambda\cap\{x\in\Omega^*\,|\,g(x)>A\}$$
$$\tilde{G}_\lambda=\tilde{\Omega}_\lambda\cap\{x\in\Omega^*\,|\,g(x)<A\}.$$

On notera que $G_\lambda\neq\emptyset$ car Ω_λ et $\{x\in\Omega^*\,|\,g(x)>A\}$ contiennent un petit voisinage de x_0 dans Ω^*.

On désigne par α_1 la première valeur propre de $-\Delta$ sur G_λ (avec la condition de Dirichlet) et $v(x)$ la fonction propre associée à α_1. *i.e.* $v(x)$ vérifie l'équation suivante:

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta v=\alpha_1 v \quad \text{dans } G_\lambda \\ \quad v=0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\lambda \\ \quad v>0 \quad \text{dans } G_\lambda \end{array}\right. \tag{10}$$

Multipliant l'équation (1) par $v(x)$ et intégrant sur G_λ, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_{G_\lambda} \nabla u \nabla v &= \int_{G_\lambda} (f(u)-\lambda g)\, v = \int_{G_\lambda} \{(f(u)-A\lambda)+(A\lambda-\lambda g)\}\, v \\ &< \int_{G_\lambda} (f(u)-A\lambda)\, v = \int_{G_\lambda} \left\{\left(\frac{f(u)}{u}\right) u - A\lambda\right\} v \\ &\leqq \int_{G_\lambda} \left(\frac{f((A\lambda)^k)}{(A\lambda)^k} u - A\lambda\right) v = \frac{f((A\lambda)^k)}{(A\lambda)^k} \int_{G_\lambda} (u-(A\lambda)^k)\, v\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\int_{G_\lambda} \nabla u \nabla v \leqq \frac{f((A\lambda)^k)}{(A\lambda)^k} \int_{G_\lambda} (u-(A\lambda)^k)\, v. \tag{11}$$

D'autre part, multipliant (10) par $u(x)$ et intégrant sur G_λ, on a:

$$-\int_{G_\lambda} u \frac{\partial v}{\partial n} + \int_{G_\lambda} \nabla u \nabla v = \alpha_1 \int_{G_\lambda} uv. \tag{12}$$

En combinant (11) et (12) on a

$$\begin{aligned}\frac{f((A\lambda)^k)}{(A\lambda)^k} \int_{G_\lambda} (u-(A\lambda)^k)\, v &\geqq \alpha_1 \int_{G_\lambda} uv + \int_{G_\lambda} u \frac{\partial v}{\partial n} \\ &\geqq \alpha_1 \int_{G_\lambda} uv + (A\lambda)^k \int_{G_\lambda} \frac{\partial v}{\partial n} = \alpha_1 \int_{G_\lambda} uv + (A\lambda)^k \int_{G_\lambda} \Delta v \\ &= \alpha_1 \int_{G_\lambda} uv + (A\lambda)^k \int_{G_\lambda} \alpha_1 v = \alpha_1 \int_{G_\lambda} (u-(A\lambda\lambda)^k v.\end{aligned}$$

Or $u<(A\lambda)^k$ dans G_λ, d'où on a

$$\frac{f((A\lambda)^k)}{(A\lambda)^k} \leqq \alpha_1. \tag{13}$$

Maintenant, on désigne par β_1 la première valeur propre de $-\Delta$ sur $\tilde{G}_\lambda$ (avec la condition de Dirichlet) et $\tilde{v}$ la fonction propre associée. En utilisant la même méthode, on a

$$(14)\quad \int_{\tilde{G}_\lambda} \nabla u \nabla \tilde{v} = \int_{\tilde{G}_\lambda} \{f(u) - \lambda g\} \tilde{v} \geqq \int_{\tilde{G}_\lambda} \{f(u) - A\lambda\} \tilde{v}$$
$$\geqq \int_{\tilde{G}_\lambda} \left\{ \frac{f((A\lambda)^k)}{(A\lambda)^k} u - A\lambda \right\} \tilde{v} = \frac{f((A\lambda)^k)}{(A\lambda)^k} \int_{\tilde{G}_\lambda} \{u - (A\lambda)^k\} \tilde{v}$$

et d'autre part

$$(15)\quad \int_{\tilde{G}_\lambda} \nabla u \nabla \tilde{v} = \beta_1 \int_{\tilde{G}_\lambda} u\tilde{v} + \int_{\partial\tilde{G}_\lambda} u \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} \leqq \beta_1 \int_{\tilde{G}_\lambda} u\tilde{v} + (A\lambda)^k \int_{\partial\tilde{G}_\lambda} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n}$$
$$= \int_{\tilde{G}_\lambda} u\tilde{v} - (A\lambda)^k \beta_1 \int_{\tilde{G}_\lambda} \tilde{v} = \beta_1 \int_{\tilde{G}_\lambda} \{u - (A\lambda)^k\} \tilde{v}.$$

En combinant (14) et (15) on obtient

$$(16)\qquad \frac{f((A\lambda)^k)}{(A\lambda)^k} \leqq \beta_1.$$

Pour conclure, raisonnons par l'absurde: supposons qu'il existe $\lambda_n \to +\infty$ tel que (1) admette une solution u_n. On a donc

$$(17)\qquad \begin{cases} \alpha_{1\,n} \geqq \dfrac{f((A\lambda_n)^k}{(A\lambda_n)^k} \to \infty & (n \to \infty) \\ \beta_{1\,n} \geqq \dfrac{f((A\lambda_n)^k}{(A\lambda_n)^k} \to \infty & (n \to \infty) \end{cases}$$

Rappelons que si $\Omega \subset \Omega'$, alors $\mu_1(\Omega) \geqq \mu_1(\Omega')$ où $\mu_1(\Omega)$ et $\mu_1(\Omega')$ désigne respectivement la première valeur propre de $-\Delta$ sur Ω et Ω' (avec la condition de Dirichlet). Donc on a

$$(18)\qquad \begin{cases} \text{Pour toute boule } B \subset \Omega^*, \text{ on ne peut pas avoir } B \subset G_{\lambda_n} \text{ (resp.} \\ B \subset \tilde{G}_{\lambda_n}) \text{ lorsque } n \text{ est assez grand.} \end{cases}$$

On note

$$r = \operatorname{Diam} \Omega^* = \sup \{ 2R \mid B(x, R) \subset \Omega^* \}.$$

On fixe un point $x_1 \in \Omega^*$ vérifiant $\operatorname{dist}(x_1, \partial\Omega \cap \partial\Omega^*) < r/4$ tel que $B(x_1, r/4) \subset \Omega^*$. On introduit, pour tout $x \in B(x_1, r/4)$, le cône

$$C_x \{ y = x + tn \mid t \geqq 0, n \in \omega \}$$

où ω est défini dans le lemme 3.

Grâce à (18), on sait que G_λ et $\tilde{G}_\lambda$ ne sont pas vides. Il est aisé de vérifier que

$$(19)\qquad \begin{cases} \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall x \in B(x_1, r/4), \\ C_x \cap \Omega^* \text{ contient une boule de rayon } \varepsilon. \end{cases}$$

Maintenant, il suffit de remarquer que lorsque n est assez grand, il existe au moins un point $x' \in B(x_1, r/4)$ vérifiant $x' \in \tilde{G}_\lambda$. D'après le lemme 3 et la condition (4), on peut déduire que $C_{x'} \cap \Omega^* \subset \tilde{G}_\lambda$ grâce à (19). Ce qui contredit (18).

Je remercie vivement M. F. Merle qui m'a suggéré d'utiliser le lemme 3. Je remercie également MM. H. Brézis et H. Berestycki pour leurs aides et encouragements.

RÉFÉRENCES

[1] H. BRÉZIS et L. NIRENBERG, Communication personnelle.
[2] GIDAS, NI et NIRENBERG, Symmetry and Related Properties Via the Maximum Principle, *Comm. Math. Phys.*, vol. **68**, 1979; p. 209-243.
[3] K. MCLEOD et J. SERRIN, Uniqueness of Positive Radial Solution of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^n$, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. **99**, 1987, p. 115-146.
[4] F. MERLE, Sur la non-existence de solutions positives d'équations elliptiques surlinéaires (à paraître).
[5] M. RAMASWAMY, On the Global Set of Solutions to a Nonlinear ODE-Theoretical and Numerical Description, *J. Diff. Eq.*, vol. **65**, 1986, p. 1-48.
[6] M. RAMASWAMY et P. N. SRIKANTH, Symmetry Breaking for a Class of Semilinear Elliptics Problems, *Trans. of A.M.S.* (à paraître).
[7] J. SMOLLER et A. WASSERMAN, Existence Uniqueness and Nondegeneracy of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations, *Comm. Math. Phys.*, vol. **95**, 1984, p. 129-159.
[8] J. SERRIN, A Symmetry Problem in Potential Theory, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. **43**, 1971, p. 304-318.

(*Manuscrit reçu le* 29 *août* 1989.)