

Équation de la chaleur et réflexions multiples

par

C. PERRET (*) et P. WITOMSKI (**)

Laboratoire L.M.C.-I.M.A.G.,
Tour I.R.M.A., B.P. n° 53X,
38041 Grenoble Cedex

RÉSUMÉ. — Le modèle que nous présentons ici est une version simplifiée tirée de la simulation numérique d'un procédé de cristallogénèse ([3], [6]). On s'intéresse à la résolution de l'équation de la chaleur dans un domaine Ω avec des échanges thermiques par rayonnement sur une partie Γ_1 de la frontière de Ω . Ces échanges se font à l'intérieur d'une enceinte fermée $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. La prise en compte de toutes les réflexions donne un couplage des températures et une condition de Neumann non linéaire sur Γ_1 . Cette non linéarité n'est pas monotone. On utilise la méthode des sous et sur solutions pour montrer l'existence d'une solution minimale et d'une solution maximale puis on établit l'unicité de la solution avec un principe du maximum.

Mots clés : Equation de la chaleur non linéaire, équation intégrale, principe du maximum, rayonnement, sous (sur)-solutions.

ABSTRACT. — The model we are presenting here is a simplified version which arises from the numerical simulation of the crystal growth ([3], [6]). We are interested in the resolution of the heat equation in a domain Ω with thermal exchanges by radiation on a part Γ_1 of the boundary of Ω .

Classification A.M.S. : 35 J 65; 45 K 05; 65 P 05.

(*) Cisi Ingénierie, 57, rue P. Sémard, 38000 Grenoble.

(**) Laboratoire I.M.A.G.-L.M.C., Tour Irma, B.P. n° 53X, 38041 Grenoble Cedex.

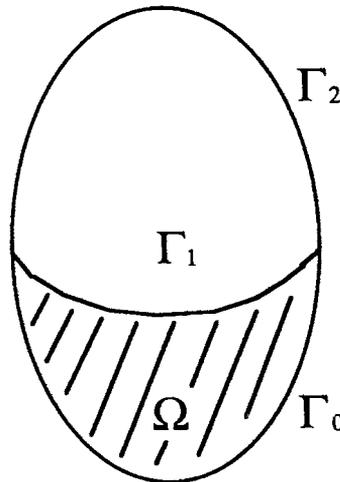
These exchanges exist inside a closed cavity $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. If we take account of all the reflections we obtain a nonlinear Neumann's condition with temperatures coupled on Γ_1 . The method using here to prove the existence of a solution to this problem is based on the utilization of lower and upper solutions. We obtain the unicity by a maximum principle.

I. LE MODÈLE

On veut résoudre l'équation de la chaleur dans un domaine Ω de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec les conditions aux limites suivantes :

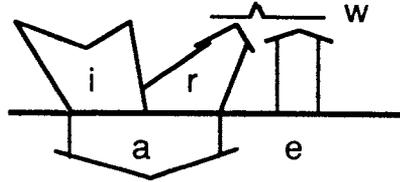
- la température est fixée sur Γ_0 ,
- le flux de chaleur q traversant Γ_1 résulte du bilan des échanges radiatifs dans l'enceinte fermée $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

La température est connue sur Γ_2 . Γ est une paroi grise, opaque, diffuse en réflexion et en émission [1]. L'intérieur de la cavité limitée par Γ est un milieu transparent et non absorbant n'intervenant pas dans les échanges radiatifs qui relèvent donc de réflexions multiples.



Appelons T la température. Notons $e(x)$, $i(x)$, $r(x)$ et $a(x)$ les densités de flux de chaleur respectivement émis, incident, réfléchi et absorbé en x

sur Γ . On a :



$$\begin{aligned} e(x) &= \sigma \varepsilon(x) T^4(x) && \text{(loi de Stefan [1])} \\ a(x) &= \varepsilon(x) i(x) \\ r(x) &= (1 - \varepsilon(x)) i(x), \end{aligned}$$

où σ est la constante de Stefan et $\varepsilon(x)$ est l'émissivité des matériaux formant la cavité.

Le flux de chaleur $w(x)$ quittant Γ en x est la somme des flux réfléchis et émis : $w(x) = r(x) + e(x)$.

La loi de Lambert [1] indique que le flux incident $i(x)$ est de la forme

$$i(x) = \int_{\Gamma} \varphi(x, y) w(y) d\sigma(y)$$

D'où

$$w(x) = (1 - \varepsilon(x)) \int_{\Gamma} \varphi(x, y) w(y) d\sigma(y) + \varepsilon(x) \sigma T^4(x).$$

Le modèle couplant l'équation de la chaleur dans Ω avec les réflexions multiples dans la cavité Γ est donc :

$$-\Delta T = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

$$T(x) = T_0(x) \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}(x) = \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} (\sigma T^4(x) - w(x)) \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$w(x) = (1 - \varepsilon(x)) \int_{\Gamma} \varphi(x, y) w(y) d\sigma(y) + \varepsilon(x) \sigma T^4(x) \quad \text{sur } \Gamma \quad (4)$$

$$T(x) = T_2(x) \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (5)$$

T_0 (resp. T_2) est une fonction positive donnée dans $\mathcal{L}^\infty(\Gamma_0)$ [resp. $\mathcal{L}^\infty(\Gamma_2)$].

ε est une fonction positive définie sur Γ et il existe deux constantes ε_0 et ε_1 telles que :

$$0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon(x) \leq \varepsilon_1 < 1 \quad \text{pour tout } x \text{ sur } \Gamma \quad (6)$$

σ est la constante de Stefan et λ la conductivité thermique du milieu Ω . φ est un noyau positif, symétrique. $\varphi \in \mathcal{L}^1(\Gamma \times \Gamma)$ et

$$\int_{\Gamma} \varphi(x, y) d\sigma(y) = 1. \quad (7)$$

Nous allons d'abord résoudre l'équation intégrale (4) à T donné puis nous établirons l'existence et l'unicité d'une solution pour le modèle complet (1)-(5).

II. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE

Dans la suite on notera la norme dans un espace \mathcal{L}^p , $1 \leq p \leq \infty$, par $\| \cdot \|_p$. Nous noterons de la même manière la norme d'une application linéaire continue de \mathcal{L}^p dans \mathcal{L}^p .

On considère l'opérateur A défini par

$$A w(x) = (1 - \varepsilon(x)) \int_{\Gamma} \varphi(x, y) w(y) d\sigma(y) \quad (8)$$

g étant donnée on cherche w tel que

$$(\text{Id} - A)w = g. \quad (9)$$

PROPOSITION 1. — Soit $g \in \mathcal{L}^p(\Gamma)$ avec $p \geq 1$. L'équation (9) admet une solution et une seule dans $\mathcal{L}^p(\Gamma)$.

Démonstration. — Montrons que A est un opérateur linéaire contractant de $\mathcal{L}^p(\Gamma)$ dans $\mathcal{L}^p(\Gamma)$. Considérons d'abord les cas $p = \infty$ et $p = 1$.

(i) Soit $w \in \mathcal{L}^\infty(\Gamma)$. Avec (6), (7) et (8) on a :

$$|A w(x)| \leq (1 - \varepsilon_0) \|w\|_\infty$$

d'où $A w \in \mathcal{L}^\infty(\Gamma)$ et

$$\|A\|_\infty \leq 1 - \varepsilon_0 < 1$$

(ii) Soit $w \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$. On pose $F(x, y) = (1 - \varepsilon(x)) \varphi(x, y) w(y)$. On a grâce à (7)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} d\sigma(y) \int_{\Gamma} |F(x, y)| d\sigma(x) &\leq (1 - \varepsilon_0) \int_{\Gamma} |w(y)| \int_{\Gamma} \varphi(x, y) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= (1 - \varepsilon_0) \|w\|_1 \end{aligned}$$

On déduit du théorème de Fubini que $x \rightarrow \int_{\Gamma} F(x, y) d\sigma(y)$ est dans $\mathcal{L}^1(\Gamma)$, c'est-à-dire $A w \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$. De plus

$$\int_{\Gamma} |A w(x)| d\sigma(x) \leq \int_{\Gamma} d\sigma(x) \int_{\Gamma} |F(x, y)| d\sigma(y) \leq (1 - \varepsilon_0) \|w\|_1$$

d'où $\|A\|_1 \leq 1 - \varepsilon_0$.

On obtient le résultat pour $1 < p < \infty$ par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin [2]. On a pour tout $p \in [1, \infty]$ $\|A\|_p \leq 1 - \varepsilon_0 < 1$. L'existence

et l'unicité d'une solution pour (9) découlent alors des résultats classiques sur les équations intégrales linéaires [4]. ■

Nous allons maintenant écrire w , solution de (9), sous forme intégrale. On pose

$$K^{(1)}(x, y) = (1 - \varepsilon(x)) \varphi(x, y)$$

et pour $n \geq 2$

$$K^{(n)}(x, y) = \int_{\Gamma} K^{(1)}(x, t) K^{(n-1)}(t, y) d\sigma(t)$$

LEMME. — Pour tout $n \geq 1$ $K^{(n)}$ est un noyau positif vérifiant les propriétés suivantes :

(i)

$$\int_{\Gamma} K^{(n)}(x, y) d\sigma(x) \leq (1 - \varepsilon_0)^n \quad (10)$$

(ii)

$$\int_{\Gamma} K^{(n)}(x, y) d\sigma(y) \leq (1 - \varepsilon_0)^n \quad (11)$$

(iii)

$$K^{(n)} \in \mathcal{L}^1(\Gamma \times \Gamma) \quad (12)$$

Démonstration. — Les inégalités (10) et (11) sont vérifiées pour $n=1$ en utilisant (6) et (7). Supposons que (10) et (11) soient vraies au rang $n-1$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} K^{(n)}(x, y) d\sigma(x) &= \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} K^{(1)}(x, t) K^{(n-1)}(t, y) d\sigma(t) \right) d\sigma(x) \\ &= \int_{\Gamma} K^{(n-1)}(t, y) \left(\int_{\Gamma} K^{(1)}(x, t) d\sigma(x) \right) d\sigma(t) \\ &\leq (1 - \varepsilon_0)^n. \end{aligned}$$

De la même façon on obtient (11). Enfin comme $\text{mes}(\Gamma) < \infty$ on déduit (12) des inégalités (10) ou (11). ■

On peut maintenant exprimer les puissances de A .

PROPOSITION 2. — Soit $w \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$. On a pour tout $n \geq 1$:

$$A^{(n)} w(x) = \int_{\Gamma} K^{(n)}(x, y) w(y) d\sigma(y) \quad (13)$$

Démonstration. — Établissons le résultat (vrai pour $n=1$) par récurrence.

$$A^{(n)} w(x) = \int_{\Gamma} K^{(1)}(x, y) \left(\int_{\Gamma} K^{(n-1)}(y, t) w(t) d\sigma(t) \right) d\sigma(y)$$

La fonction $(x, t) \mapsto |w(t)| K^{(n)}(x, t)$ est dans $\mathcal{L}^1(\Gamma \times \Gamma)$ car

$$\int_{\Gamma} |w(t)| \left(\int_{\Gamma} K^{(n)}(x, t) d\sigma(x) \right) d\sigma(t) \leq (1 - \varepsilon_0)^n \int_{\Gamma} |w(t)| d\sigma(t) < +\infty.$$

On en déduit par le théorème de Fubini que :

$$\int_{\Gamma} |w(t)| K^{(n)}(x, t) d\sigma(t) < +\infty \quad \text{p. p. t. x.}$$

D'où

$$\int_{\Gamma} |w(t)| \left(\int_{\Gamma} K^{(1)}(x, y) K^{(n-1)}(y, t) d\sigma(y) \right) d\sigma(t) < +\infty \quad \text{p. p. t. x.}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} A^{(n)} w(x) &= \int_{\Gamma} w(t) \left(\int_{\Gamma} K^{(1)}(x, y) K^{(n-1)}(y, t) d\sigma(y) \right) d\sigma(t) \\ &= \int_{\Gamma} K^{(n)}(x, t) w(t) d\sigma(t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La solution de l'équation intégrale s'écrit sous la forme

$$w = (\text{Id} - A)^{-1} g = \sum_{n=0}^{\infty} A^n g. \quad (14)$$

D'où

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} K^{(n)}(x, y) g(y) d\sigma(y) + g(x).$$

PROPOSITION 3. — Soit $g \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$. Il existe un noyau $K \in \mathcal{L}^1(\Gamma \times \Gamma)$, positif, tel que

$$w(x) = \int_{\Gamma} K(x, y) g(y) d\sigma(y) + g(x).$$

Démonstration. — Soit $S_p(x, y) = \sum_{n=1}^p K^{(n)}(x, y)$. S_p est une suite croissante de fonctions positives.

On pose

$$K(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} S_p(x, y) \quad (15)$$

Avec (10) on obtient

$$\int_{\Gamma} K(x, y) d\sigma(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} S_p(x, y) d\sigma(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_0)^n = \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$$

On a

$$\int_{\Gamma} |g(y)| \left(\int_{\Gamma} K(x, y) d\sigma(x) \right) d\sigma(y) \leq \text{mes}(\Gamma) \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma} |g(y)| d\sigma(y) < +\infty$$

La fonction $(x, y) \mapsto K(x, y)g(y)$ est donc dans $\mathcal{L}^1(\Gamma \times \Gamma)$.

Notons $I_p(x) = \int_{\Gamma} S_p(x, t)g(t) d\sigma(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée on a p. p. t. x.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_p(x) = \int_{\Gamma} K(x, y)g(y) d\sigma(y)$$

Comme $I_p = \sum_{n=1}^p A^n g$ converge dans $\mathcal{L}^1(\Gamma)$ vers $w - g$ on en déduit donc le résultat cherché. ■

PROPOSITION 4. — *Le noyau $K(x, y)$ vérifie les propriétés suivantes*

(i)

$$\int_{\Gamma} K(x, y)\varepsilon(y) d\sigma(y) = 1 - \varepsilon(x) \tag{16}$$

(ii)

$$\int_{\Gamma} K(x, y) \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} d\sigma(x) = 1 \tag{17}$$

Démonstration. — (i) Prenons $g(x) = \lambda\varepsilon(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dans (9). La solution est $w(x) = \lambda$ car

$$\lambda - (1 - \varepsilon(x)) \int_{\Gamma} \varphi(x, y)\lambda d\sigma(y) = \lambda\varepsilon(x)$$

Avec la proposition 3 il vient donc

$$\lambda = \int_{\Gamma} K(x, y)\lambda\varepsilon(y) d\sigma(y) + \lambda\varepsilon(x).$$

D'où

$$\int_{\Gamma} K(x, y)\varepsilon(y) d\sigma(y) = 1 - \varepsilon(x).$$

(ii) K est obtenu comme limite de la suite S_p [cf. (15)]. On a :

$$\begin{aligned} S_p(x, y) &= K^{(1)}(x, y) + \sum_{n=2}^p \int_{\Gamma} K^1(x, t)K^{(n-1)}(t, y) d\sigma(t) \\ &= K^{(1)}(x, y) + \int_{\Gamma} K^{(1)}(x, t)S_{p-1}(t, y) d\sigma(t). \end{aligned}$$

Passons à la limite. Il vient

$$\begin{aligned} K(x, y) &= K^{(1)}(x, y) + \int_{\Gamma} K^{(1)}(x, t) K(t, y) d\sigma(t) \\ &= (1 - \varepsilon(x)) \varphi(x, y) + (1 - \varepsilon(x)) \int_{\Gamma} \varphi(x, t) K(t, y) d\sigma(t) \end{aligned}$$

Divisons par $(1 - \varepsilon(x))$ et intégrons par rapport à x . On obtient

$$\int_{\Gamma} \frac{K(x, y)}{1 - \varepsilon(x)} d\sigma(x) = 1 + \int_{\Gamma} K(t, y) d\sigma(t)$$

D'où

$$\int_{\Gamma} \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} K(x, y) d\sigma(x) = 1. \quad \blacksquare$$

III. RÉOLUTION DU MODÈLE COMPLET

On cherche une solution du système (1)-(5). La température doit être comprise entre

$$T_{\inf} = \text{Min} \left\{ \underset{\Gamma_0}{\text{Inf}} T_0, \underset{\Gamma_2}{\text{Inf}} T_2 \right\} \quad \text{et} \quad T_{\sup} = \text{Max} \left\{ \underset{\Gamma_0}{\text{Sup}} T_0, \underset{\Gamma_2}{\text{Sup}} T_2 \right\}.$$

On se restreint à cet intervalle $[T_{\inf}, T_{\sup}]$ en posant

$$\bar{T}(x) = \begin{cases} T_{\inf} & \text{si } T(x) \leq T_{\inf} \\ T(x) & \text{si } T_{\inf} \leq T(x) \leq T_{\sup} \\ T_{\sup} & \text{si } T_{\sup} \leq T(x). \end{cases}$$

Etant donné $T \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$ on note $\varphi(T)$ l'élément de $\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$ défini par

$$\varphi(T)(x) = (\bar{T}(x))^4.$$

On étudie alors le problème modifié :

trouver T vérifiant :

$$-\Delta T = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (18)$$

$$T(x) = T_0(x) \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (19)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}(x) = \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} (\sigma \varphi(T)(x) - w(x)) \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (20)$$

$$w(x) = (1 - \varepsilon(x)) \int_{\Gamma} \varphi(x, y) w(y) d\sigma(y) + \varepsilon(x) \sigma \varphi(T)(x) \quad \text{sur } \Gamma \quad (21)$$

$$T(x) = T_2(x) \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (22)$$

Avec la proposition 3 on peut éliminer w entre (20) et (21). On obtient sur Γ_1

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}(x) = \varepsilon(x) \sigma \varphi(T)(x) - \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} \int_{\Gamma} K(x, y) \varepsilon(y) \sigma \varphi(T)(y) d\sigma(y) \quad (23)$$

Dans l'intégrale on a prolongé T sur Γ_2 en utilisant (22) et dans la suite l'intégrale sur Γ doit donc se lire

$$\int_{\Gamma_1} K(x, y) \varepsilon(y) \sigma \varphi(T)(y) d\sigma(y) + \int_{\Gamma_2} K(x, y) \varepsilon(y) \sigma \varphi(T_2)(y) d\sigma(y).$$

Le couplage des températures sur la frontière Γ_1 apparaît clairement dans (23). On note q l'opérateur sur $\mathcal{L}^2(\Gamma_1)$ par :

$$q(T)(x) = \varepsilon(x) \sigma \varphi(T)(x) - \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} \int_{\Gamma} K(x, y) \varepsilon(y) \sigma \varphi(T)(y) d\sigma(y) \quad (24)$$

Le problème (18), (19), (22), (23) s'écrit alors :

$$-\Delta T = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (25)$$

$$T(x) = T_0(x) \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (26)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}(x) = q(T)(x) \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (27)$$

On peut obtenir l'existence d'une solution dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ pour (25), (26), (27) avec le théorème du point fixe de Schauder. Nous allons plutôt employer ici la méthode des sous et sur-solutions qui est constructive et avec laquelle on peut obtenir l'unicité de la solution en utilisant le principe du maximum de Hopf.

On considère l'opérateur d'itération $M_v: T_k \mapsto T_{k+1}$ défini par :

$$-\Delta T_{k+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (28)$$

$$T_{k+1}(x) = T_0(x) \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (29)$$

$$-v T_{k+1}(x) - \lambda \frac{\partial T_{k+1}}{\partial n}(x) = q(T_k)(x) - v T_k(x) \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (30)$$

avec $v \geq 4\varepsilon_1 \sigma T_{\text{sup}}^3$ de façon que $u_2 \geq u_1$ implique

$$v u_2(x) - \varepsilon(x) \sigma \varphi(u_2)(x) - v u_1(x) + \varepsilon(x) \sigma \varphi(u_1)(x) \geq 0 \quad \text{p. p.}$$

PROPOSITION 5. — M_v est un opérateur compact, monotone croissant de $\mathcal{H}^1(\Omega)$ dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Démonstration. — Établissons d'abord que q est Lipschitzien de $\mathcal{L}^2(\Gamma_1)$ dans $\mathcal{L}^2(\Gamma_1)$. Soient U et V dans $\mathcal{L}^2(\Gamma_1)$. On a

$$|q(U)(x) - q(V)(x)| \leq \varepsilon(x) \sigma |\varphi(U)(x) - \varphi(V)(x)| \\ + \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} \sigma \int_{\Gamma_1} K(x, y) \varepsilon(y) |\varphi(U)(y) - \varphi(V)(y)| d\sigma(y)$$

En posant $C = 4 T_{\text{sup}}^3$ il vient

$$|q(U)(x) - q(V)(x)| \leq C \left\{ \sigma \varepsilon(x) |U(x) - V(x)| \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} \sigma \int_{\Gamma_1} K(x, y) \varepsilon(y) |U(y) - V(y)| d\sigma(y) \right\}$$

$$\text{Soit } \psi(x) = \int_{\Gamma_1} K(x, y) \varepsilon(y) |\varphi(U)(y) - \varphi(V)(y)| d\sigma(y).$$

Comme

$$\text{Sup}_{x \in \Gamma_1} \int_{\Gamma_1} K(x, y) \varepsilon(y) d\sigma(y) \leq \text{Sup}_{x \in \Gamma_1} \int_{\Gamma} K(x, y) \varepsilon(y) d\sigma(y) \\ \leq \text{Sup}_{x \in \Gamma_1} 1 - \varepsilon(x) \leq 1 - \varepsilon_0$$

on obtient avec l'inégalité de Young [6],

$$\|\psi\|_2 \leq (1 - \varepsilon_0) \|U - V\|_2.$$

On en déduit

$$\|q(U) - q(V)\|_2 \leq \sigma C \left\{ \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} (1 - \varepsilon_0) \right\} \|U - V\|_2$$

ce qui montre que q est Lipschitzien de $\mathcal{L}^2(\Gamma_1)$ dans $\mathcal{L}^2(\Gamma_1)$.

On en déduit alors que M_v est continu de $\mathcal{H}^1(\Omega)$ dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

En utilisant (16), (24) et le fait que T_{inf} et T_{sup} sont positifs on a pour U dans $\mathcal{L}^2(\Gamma_1)$:

$$|q(U)(x)| \leq \sigma T_{\text{sup}}^4 \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} \int_{\Gamma} K(x, y) \varepsilon(y) d\sigma(y) \right) \\ \leq 2 \varepsilon_1 \sigma T_{\text{sup}}^4$$

L'image de $\mathcal{L}^2(\Gamma_1)$ par q est donc bornée dans $\mathcal{L}^\infty(\Gamma_1)$. L'injection de $\mathcal{L}^2(\Gamma_1)$ dans $\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ étant compacte on déduit que M_v transforme les bornées de $\mathcal{H}^1(\Omega)$ en des relativement compacts de $\mathcal{H}^1(\Omega)$. M_v est donc compact.

Soient maintenant v_2 et v_1 dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ tels que $v_2 \geq v_1$. On pose $u_2 = M_\nu v_2$ et $u_1 = M_\nu v_1$. $u = u_2 - u_1$ est solution de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u(x) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \nu u(x) &= \nu(v_2 - v_1)(x) - \varepsilon(x) \sigma(\varphi(v_2) - \varphi(v_1))(x) \\ &\quad + \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} \int_{\Gamma} K(x, y) \varepsilon(y) \sigma(\varphi(v_2) - \varphi(v_1))(y) d\sigma(y) \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

Comme K est un noyau positif et avec le choix de ν on voit que $\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \nu u \geq 0$ sur Γ_1 . u est donc positif ce qui montre la croissance de M_ν . ■

DÉFINITION. — u est une sous solution (resp. sur solution) de (28), (29), (30) si $u \leq M_\nu u$ (resp. $u \geq M_\nu u$).

Pour le problème considéré on a une sous-solution naturelle T_{inf} et une sur-solution T_{sup} .

PROPOSITION 6. — On pose $u_i = T_{\text{inf}}$ et $u_s = T_{\text{sup}}$, on a $u_i \leq M_\nu u_i$ et $u_s \geq M_\nu u_s$.

Démonstration. — Vérifions que u_i est une sous-solution. On pose $u = u_i - M_\nu u_i$. On a $\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \nu u \geq 0$ sur Γ_1 . En effet on a :

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \nu u = +\varepsilon(x) \sigma T_{\text{inf}}^4 - \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} \int_{\Gamma} K(x, y) \varepsilon(y) \sigma T_{\text{inf}}^4 d\sigma(y)$$

Avec (16) on obtient $\lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \nu u = 0$ et u est donc solution de :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u(x) &\leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial n} + \nu u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

On en déduit que $u \leq 0$ et u_i est bien une sous-solution. De la même façon on démontre que T_{sup} est une sur-solution. ■

Comme $T_{\text{inf}} < T_{\text{sup}}$, il résulte de la monotonie de M_ν la

PROPOSITION 7. — Le système (25), (26), (27) admet une solution minimale u_* et une solution maximale u^* . On a $T_{\text{inf}} \leq u_* \leq u^* \leq T_{\text{sup}}$.

Démonstration. — Elle se fait comme dans [8] en utilisant les méthodes de monotonie dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Posons $u_0 = T_{\text{inf}}$ et $v_0 = T_{\text{sup}}$. On forme les suites $u_n = M_\nu u_{n-1}$ et $v_n = M_\nu v_{n-1}$. De la monotonie de M_ν et de la

proposition 6 il résulte que les suites u_n et v_n vérifient :

$$T_{\inf} \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq T_{\sup}$$

On pose $u_* = \text{Sup } u_n$ et $u^* = \text{inf } v_n$. Vérifions que u_n converge vers u dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Le théorème de convergence dominée appliqué à $(u_* - u_n)^2$ montre que la suite u_n converge vers u_* dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. On établit comme dans [8] en écrivant la formulation variationnelle du problème (28), (29), (30) que la suite u_n est bornée dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$. De la compacité de l'opérateur M_v on déduit l'existence d'une sous-suite $u_{n'}$, qui converge dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ vers u_* . La suite u_n toute entière converge alors vers u_* et par continuité on voit que u_* est solution de (25), (26), (27).

De la même façon on montre que u^* est solution. ■

Il est clair que toute solution u de (25), (26), (27) appartenant à l'intervalle $[T_{\inf}, T_{\sup}]$ est comprise entre u_* et u^* .

Pour établir l'unicité il suffit donc de montrer que $u_* = u^*$.

PROPOSITION 8. — *Le système (25), (26), (27) admet une solution unique dans l'intervalle $[T_{\inf}, T_{\sup}]$.*

Démonstration. — On pose $v = u_* - u^*$. v est solution de

$$\begin{aligned} -\Delta v &= 0 && \text{dans } \Omega \\ v(x) &= 0 && \text{sur } \Gamma_0 \\ -\lambda \frac{\partial v}{\partial n} &= q(u_*) - q(u^*) && \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

Prolongeons u_* et u^* sur Γ_2 par T_2 . On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} q(u_*)(x) d\sigma(x) &= \int_{\Gamma} \varepsilon(x) \sigma \varphi(u_*)(x) d\sigma(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{\varepsilon(x)}{1 - \varepsilon(x)} \int_{\Gamma} K(x, y) \sigma \varepsilon(y) \varphi(u_*) d\sigma(y) d\sigma(x). \end{aligned}$$

En permutant l'ordre d'intégration dans l'intégrale double et en utilisant (17) on obtient

$$\int_{\Gamma} q(u_*)(x) d\sigma(x) = 0,$$

ce qui traduit la conservation du flux. On a la même relation pour u^* . On en déduit

$$\int_{\Gamma} (q(u_*)(x) - q(u^*)(x)) d\sigma(x) = 0$$

et donc

$$\int_{\Gamma} \lambda \frac{\partial v}{\partial n}(x) d\sigma(x) = 0.$$

On a d'autre part

$$\int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial v}{\partial n}(x) d\sigma(x) = 0$$

et $\frac{\partial v}{\partial n} \geq 0$ sur Γ_0 car $v \leq 0$ sur Ω et $v = 0$ sur Γ_0 .

On en déduit que $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ sur Γ_0 . Le principe du maximum de Hopf [7] implique alors que v est identiquement nul sur Ω . ■

Remarque. — Si on modifie le problème (1)-(5) en travaillant sur un intervalle $[T_i, T_s]$ avec $T_i < T_{\text{inf}}$ et $T_{\text{sup}} < T_s$ on obtient de la même manière une solution et une seule dans cet intervalle qui est solution de (1)-(5). Le problème initial admet donc une seule solution bornée sur Ω . Cette solution est comprise entre T_{inf} et T_{sup} .

RÉFÉRENCES

- [1] R. B. BIRD, W. E. STEWART et E. N. LIGHTFOOD, *Transport Phenomena*, John Wiley and Sons, 1960.
- [2] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.
- [3] J. C. BRICE, *The growth of the crystals from the melt*, North Holland, 1965.
- [4] R. F. CURTAIN et A. J. PRITCHARD, *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*, Academic Press, 1977.
- [5] V. HUTSON et J. S. PYM, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Academic Press, 1980.
- [6] C. PERRET, Calcul des contraintes thermoélastiques dans le tirage de l'arséniure de gallium, *Thèse*, Grenoble, 1989.
- [7] M. H. PROTTER et H. F. WEINBERGER, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York Inc, 1984.
- [8] P. WITOMSKI, The Steady State Heat Equation with Mixed Nonlinear Boundary Conditions — An Example in Crystallography, *Comp. meth. in app. and mech. eng.*, vol. 35, 1982, p. 47-66.

(Manuscrit reçu le 12 avril 1990
révisé le 11 septembre 1990.)